

Арифметическая прогрессия

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Арифметическая прогрессия — это последовательность, каждый член которой (начиная со второго) равен сумме предыдущего члена и некоторого фиксированного числа (называемого разностью арифметической прогрессии).

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2} \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n.$$

$$S = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n.$$

Грузовик перевозит партию щебня массой 240 тонн, ежедневно увеличивая норму перевозки на одно и то же число тонн. Известно, что за первый день было перевезено 2 тонны щебня. Определите, сколько тонн щебня было перевезено за двенадцатый день, если вся работа была выполнена за 15 дней.

Улитка ползет от одного дерева до другого. Каждый день она проползает на одно и то же расстояние больше, чем в предыдущий день. Известно, что за первый и последний дни улитка проползла в общей сложности 9 метров. Определите, сколько дней улитка потратила на весь путь, если расстояние между деревьями равно 18 метрам.

(СтатГрад2019) Возрастающие арифметические прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ состоят из натуральных чисел.

а) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + a_3b_3 = 3a_2b_2$?

б) Существуют ли такие прогрессии, для которых $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$?

в) Какое наибольшее значение может принимать произведение a_3b_3 , если $a_1b_1 + 2a_4b_4 \leq 300$?

Решение:

а) Подходящим примером являются прогрессии $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$. Для этих прогрессий имеем $a_1b_1 + a_3b_3 = 1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 = 36 = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3a_2b_2$

б) Обозначим через c и d разности арифметических прогрессий $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$. Тогда

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = a_1b_1 + 2(a_1 + 3c)(b_1 + 3d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6a_1c + 18cd,$$

$$3a_3b_3 = 3(a_1 + 2c)(b_1 + 2d) = 3a_1b_1 + 6a_1d + 6b_1c + 12cd$$

вычтем из первой строки вторую и получим

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Если $a_1b_1 + 2a_4b_4 = 3a_3b_3$, то $cd = 0$. Пришли к противоречию, ведь по условию $c > 0$ и $d > 0$.

в) По условию $c \geq 1$ и $d \geq 1$. По доказанному в пункте б) имеем

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 - 3a_3b_3 = 6cd.$$

Значит,

$$a_3b_3 = \frac{a_1b_1 + 2a_4b_4 - 6cd}{3} \leq \frac{300 - 6}{3} = 98.$$

Если прогрессии $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ и $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ являются прогрессиями $5, 6, 7, 8, \dots$ и $12, 13, 14, 15, \dots$ соответственно, то

$$a_1b_1 + 2a_4b_4 = 5 \cdot 12 + 2 \cdot 8 \cdot 15 = 300 \quad \text{и} \quad a_3b_3 = 7 \cdot 14 = 98.$$

Этот пример показывает, что наибольшее возможное значение произведения a_3b_3 равно 98.

Ответ: а) Да, например, $1, 3, 5, \dots$ и $1, 4, 7, \dots$ б) нет в) 98.

<https://ege.sdamgia.ru/problem?id=514050&print=true&svg=0&num=true>

(МИОО, 2013) Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Ответ: а) 1,2,3; б) нет; 8.

(СтатГрад2019) У Вовы есть набор из n грузиков попарно различных натуральных масс в граммах и чашечные весы, которые находятся в равновесии, если на каждой из двух их чаш лежат грузики с одинаковыми суммарными массами. Известно, что, какие бы два из них ни положили на одну чашу весов, всегда можно положить на другую чашу один или несколько из оставшихся грузиков так, что весы уравновесятся.

а) Может ли у Вовы быть ровно 6 грузиков, среди которых есть грузик массой 5 г?

б) Может ли у Вовы быть ровно 5 грузиков?

в) Известно, что среди грузиков Вовы есть грузик массой 1 г. Какую наименьшую массу может иметь самый тяжелый грузик Вовы?

а) Да, может. Набор грузов массами 3, 4, 5, 6, 7, 8 подходит.

б) Расположим их массы в порядке возрастания:

$$a < b < c < d < e$$

5 грузов также не может быть. Уравновесить два самых тяжелых грузика d и e двумя из легких грузиков a , b , c невозможно – ведь $d > c$ и $e > c$, а масса двух легких не превышает $b + c$ и меньше $2c$.

Значит, $d + e = a + b + c$.

Два самых легких грузика a и b можно уравновесить только одним из тяжелых, поскольку $a + b < c + d$.

Значит, $a + b = c$ или $a + b = d$ или $a + b = e$.

Подставляя по очереди эти выражения в равенство $d + e = a + b + c$, получаем:

$d + e = 2c$ – невозможно, поскольку $d > c$ и $e > c$,

или $d + e = d + c$, но тогда $e = c$, и это противоречие с условием, массы грузов различны.

Или же $d + e = e + c$, но тогда $d = c$ – снова противоречие.

Значит, и 5 грузиков не может быть.

в) Пусть среди грузиков Вовы есть один массой 1 г.

3, 4 или 5 грузов у Вовы быть не может, то есть число грузов больше или равно 6.

Попытаемся подобрать набор из 6 грузов, где самый тяжелый весит 6 граммов.

Поскольку a, b, c, d, e, f – массы грузов – натуральные числа, причем различные,

$a \geq 1, b \geq 2 \dots f \geq 6$.

Возьмем набор 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Но уравновесить самые тяжелые грузы не получается — поскольку $5 + 6 = 11$, а $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Значит, масса самого тяжелого груза не меньше 7 грамм.

Подходящий набор 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Ответ: 7.

<https://ege-study.ru/materialy-ege/novaya-zadacha-19-profilnogo-ege-po-matematike-chisla-i-ix-svojstva-vostok/>

(ЕГЭ 2018, резервный день)

Задание 19 № 520979

За прохождение каждого уровня игры на планшете можно получить от одной до трёх звёзд. При этом заряд аккумулятора планшета уменьшается на 3 пункта при получении трёх звёзд, на 6 пунктов при получении двух звёзд и на 9 пунктов при получении одной звезды. Витя прошёл несколько уровней игры подряд.

а) Мог ли заряд аккумулятора уменьшиться ровно на 32 пункта?

б) Сколько уровней игры было пройдено, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

в) За пройденный уровень начисляется 9000 очков при получении трёх звёзд, 5000 — при получении двух звёзд и 2000 — при получении одной звезды. Какое наибольшее количество очков мог получить Витя, если заряд аккумулятора уменьшился на 33 пункта и суммарно было получено 17 звёзд?

Решение.

а) Заметим, что при прохождении уровня игры заряд аккумулятора уменьшается на число пунктов, делящееся на 3. Значит, он не мог уменьшиться ровно на 32 пункта.

б) Обозначим количества уровней, за которые были получены одна, две или три звезды через a , b и c соответственно. Тогда получаем: $a + 2b + 3c = 17$ и $9a + 6b + 3c = 33$, откуда $4a + 4b + 4c = 28$; $a + b + c = 7$. То есть было пройдено 7 уровней.

в) Из уравнений $3a + 2b + c = 11$ и $a + b + c = 7$ получаем, что $2a + b = 4$. Значит, имеются три возможности: $a = 0$, $a = 1$ или $a = 2$.

Если $a = 0$, то $b = 4$, $c = 3$ и было получено 47 000 очков.

Если $a = 1$, то $b = 2$, $c = 4$ и было получено 48 000 очков.

Если $a = 2$, то $b = 0$, $c = 5$ и было получено 49 000 очков.

Значит, наибольшее количество полученных очков равно 49 000.

Ответ: а) нет; б) 7; в) 49 000.

<https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=520979>

Геометрическая прогрессия

$$b_{n+1} = b_n q \quad (n = 1, 2, \dots).$$

$$b_2 = b_1 q,$$

$$b_3 = b_2 q = (b_1 q) q = b_1 q^2,$$

$$b_4 = b_3 q = (b_1 q^2) q = b_1 q^3,$$

$$b_n = b_1 q^{n-1}.$$

Свойство геометрической прогрессии:

$$b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1}. \quad b_n^2 = b_{n-k} b_{n+k}$$

Сумма первых n членов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} .$$

Сумма убывающей геометрической прогрессии

$$S_\infty = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \frac{b_1}{1 - q} .$$

(МИОО, 2012) В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2046.

а) Может ли в последовательности быть три члена?

б) Может ли в последовательности быть четыре члена?

в) Может ли в последовательности быть меньше 2046 членов?

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

(ЕГЭ, 2011) Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

Текстовые задачи:

Концентрация

Имеется два сплава. Первый содержит 5% меди, второй — 11% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 8 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 10% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Смешали некоторое количество 11-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 15-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Имеется два сплава. Первый содержит 5% никеля, второй — 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 100 кг, содержащий 20% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

Имеется два сосуда. Первый содержит 80 кг, а второй — 70 кг раствора кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 63% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 65% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Смешав 38-процентный и 52-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 46-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 38-процентного раствора использовали для получения смеси?

Работа

Первая труба пропускает на 8 литров воды в минуту меньше, чем вторая. Сколько литров воды в минуту пропускает первая труба, если резервуар объемом 180 литров она заполняет на 8 минут дольше, чем вторая труба?

Первая труба наполняет резервуар на 48 минут дольше, чем вторая. Обе трубы, работая одновременно, наполняют этот же резервуар за 45 минут. За сколько минут наполняет этот резервуар одна вторая труба?

Заказ на изготовление 154 деталей первый рабочий выполняет на 3 часа быстрее, чем второй. Сколько деталей за час изготавливает второй рабочий, если известно, что первый за час изготавливает на 3 детали больше?

На изготовление 540 деталей первый рабочий затрачивает на 12 часов меньше, чем второй рабочий на изготовление 600 деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 10 деталей больше, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Игорь и Паша красят забор за 24 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 30 часов, а Володя и Игорь — за 40 часов. За сколько часов мальчики покрасят забор, работая втроем?

Тригонометрические уравнения:

а) Решите уравнение $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[5\pi; \frac{13\pi}{2}\right]$.

Задание с развернутым ответом

а) Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}} = 4\sin^2 \frac{x}{2}.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$.

а) Решите уравнение

$$\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x = \sin x + 2.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

9.1.1.(прототип 26669) Решите уравнение $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

9.3.1.(прототип 77377) Решите уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.3.4.(103725) Решите уравнение $\sin \frac{\pi(8x+5)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.3.5.(104023) Решите уравнение $\sin \frac{\pi(2x-3)}{6} = -0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

9.2.5.(103027) Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+4)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

9.2.2.(103025) Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.