Тверской государственный университет
Математический факультет
Задачи олимпиады Математический Олимп-2020

1. Найдите а) количество, б) сумму всех действительных корней уравнения

$$x \cdot |x-3| - 4x + 10 = 0.$$

(5 баллов)

2. Рассматриваются положительные двузначные числа, обладающие следующим свойством: их любая натуральная степень имеет на правом конце те же и стоящие в том же порядке десятичные цифры, которые образуют исходное число. Выясните а) сколько существует таких чисел и б) какова их сумма. (5 баллов)

3. Десять натуральных чисел могут лежать в пределах от 1 до 100. Найдите максимум суммы модулей попарных разностей этих чисел. (5 баллов)

4. При каком значении параметра a сумма $x_1^2 + x_2^2$ квадратов корней уравнения

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$$

будет наименьшей? Каково это наименьшее значение? (5 баллов)

5. На плоскости расположен отрезок AB. Определите геометрическое место расположения таких точек C, для которых угол ACB будет острым; оба угла ABC и BAC будут острыми. (5 баллов)

6. Имеются две прогрессии, состоящие из четырех членов: арифметическая и геометрическая такие, что если сложить члены прогрессий с одинаковыми номерами то получаются следующие числа $27, 27, 39, 87$. Найдите сумму членов арифметической прогрессии. (5 баллов)

7. В прямоугольном треугольнике проводится высота на гипотенузу. Из ее основания опускаются перпендикуляры на катеты. В получившихся треугольниках проделывается то же построение и т.д. — всего 2020 раз. В каждый из 2^{2020} построенных треугольников вписывается окружность. Найдите сумму длин диаметров этих окружностей, если катеты исходного треугольника равны 18 и 24.
(5 баллов)

8. Дано уравнение

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 = a\left|\frac{x^2-1}{x}\right|.$$

Выясните: относительно какого преобразования уравнение является симметричным? (2 балла)

9. Дано уравнение

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 = a\left|\frac{x^2-1}{x}\right|.$$

Выясните: а) При каких значениях a уравнение имеет нечетное число корней? б) При каких значениях a уравнение имеет единственный корень? Приведите этот корень для каждого такого значения a. (3 балла)

Ответы

1. Уравнение имеет 3 корня, сумма которых равна 4.
2. Существует два таких числа, 25 и 76, их сумма равна 101.
3. Максимум равен 2415.
4. Наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения равно 2 и достигается при $a = -1$.
5. В первом случае подходят точки C, расположенные вне окружности, построенной на AB как на диаметре. Во втором – точки, лежащие в полосе, граничные прямые которой проходят через точки A и B перпендикулярно отрезку AB.
6. Сумма членов арифметической прогрессии равна 60.
7. Сумма длин диаметров окружностей равна 12.
8. $x \mapsto \frac{1}{x}$.
9. $a = \pm 2\,, a = 0\,;$ б) $a = 0\,,\ x = -1\,; a = -2\,, x = 1\,.$

Решения

1. Найдите а) количество, б) сумму всех действительных корней уравнения

$$x \cdot |x-3| - 4x + 10 = 0.$$

Решение. На множестве $x \geq 3$ уравнение принимает вид $x^2 - 7x + 10 = 0$; из двух корней последнего ($x_1 = 5$, $x_2 = 2$) только корень $x_1 = 5$ удовлетворяет условию $x \geq 3$, корень $x_2 = 2$ — посторонний.

В области $x < 3$ уравнение принимает вид $x^2 + x - 10 = 0$ и имеет два корня $x = (-1 \pm \sqrt{41})/2$, оба (можно проверить) лежат в указанной области.

Таким образом, получаем, что уравнение имеет 3 корня, сумма которых равна 4.

2. Рассматриваются положительные двузначные числа, обладающие следующим свойством: их любая натуральная степень имеет на правом конце те же и стоящие в том же порядке десятичные цифры, которые образуют исходное число. Выясните а) сколько существует таких чисел и б) какова их сумма.

Решение. Пусть искомые числа имеют вид

$$x = 10a + b, \quad a = 1, 2, ..., 9, \; b = 0, 1, 2, ..., 9.$$

Тогда

$$x^2 = 100a^2 + 20ab + b^2.$$

Последние две цифры этого числа такие же, как и у числа $20ab + b^2$. По условию задачи

$$x^2 = 100n_2 + 10a + b, \text{ где } n_2 \text{ — некоторое натуральное число.}$$

Рассмотрим теперь число x^3.

$$x^3 = x^2 x = (100n_2 + 10a + b)(10a + b) = 100n_2(10a + b) + (10a + b)^2 = 100[n_2(10a + b) + a^2] + 20ab + b^2.$$

Отсюда следует, что последние две цифры числа x^3 такие же, как и у числа $20ab + b^2$, а значит и такие же, как у числа x^2. Продолжая это рассуждение по индукции, получим, что для любого натурального k последние две цифры числа x^k такие же, как и у числа $20ab + b^2$. Следовательно, для решения задачи нам надо найти такие числа a и b, что

$$20ab + b^2 = 100m + 10a + b, \text{ где } m \text{ — некоторое натуральное число.}$$

Это возможно только в том случае, если число b^2 оканчивается цифрой b. Таких чисел b имеется четыре $0, 1, 5, 6$. Рассмотрим каждую из этих возможностей.

$b = 0$. В этом случае $x = 10a$, $x^2 = 100a^2$ и предпоследняя цифра числа x^2 есть 0, а $a \neq 0$. Значит $b \neq 0$.

$b = 1$. В этом случае $20ab + b^2 = 20a + 1$ и это число должно иметь вид

$$20a + 1 = 100p + 10a + 1 \Rightarrow 10a = 100p \Rightarrow a = 10p, \text{ где } p \text{ — некоторое натуральное число,}$$

что невозможно, т.к. $a < 10$. Значит $b \neq 1$.

$b = 5$. В этом случае $20ab + b^2 = 100a + 25$. Последние две цифры этого числа суть 2 и 5, значит $a = 2$ и искомое число $x = 25$.

$b = 6$. В этом случае $20ab + b^2 = 120a + 36$ и это число должно иметь вид

$$120a + 36 = 100p + 10a + 6 \Rightarrow 110a + 30 = 100p \Rightarrow 11a + 3 = 10p.$$

Так как $a \leq 9$, то $p \leq 10$ и $p - 3$ кратно 11. Такое p только одно $p = 8$. Тогда $a = 7$ и искомое число $x = 76$.

Мы получили решение. Существует два числа, удовлетворяющих условиям задачи, 25 и 76 и их сумма равна 101.

3. Десять натуральных чисел могут лежать в пределах от 1 до 100. Найдите максимум суммы модулей попарных разностей этих чисел.

Решение. Обозначим эти числа $x_1,\ x_2,\dots\ x_{10}$ в порядке возрастания. Искомая сумма расстояний $S=\sum|x_i-x_j|$ будет возрастать, если уменьшить (при наличии такой возможности) любое из пяти меньших чисел $x_1,\dots x_5$ или — увеличить любое из пяти бо́льших $x_6,\dots x_{10}$. В частности, при уменьшении x_1 увеличатся все 9 расстояний $|x_1-x_j|$; при уменьшении x_2 не изменится сумма $|x_1-x_2|+|x_2-x_{10}|$, но увеличатся 7 остальных расстояний $|x_2-x_j|$ и т.д. Максимум суммы S достигается в том случае, когда описанные операции — невозможны, то есть при $x_1=1,\ x_2=2,\ \dots\ x_5=5,\ x_6=96,\ \dots\ x_{10}=100$. Для таких чисел удобно сначала учесть вклад в сумму S от $|x_1-x_{10}|+\sum_j|x_1-x_j|+|x_j-x_{10}|$, равный $99+8*99$, затем от остальных расстояний до x_2 и до x_9 и т.д.:

$$\max S=99*9+97*7+95*5+93*3+91=2415.$$

4. При каком значении параметра a сумма $x_1^2+x_2^2$ квадратов корней уравнения

$$x^2-2ax+2a+3=0$$

будет наименьшей? Каково это наименьшее значение?

Решение. 1. Уравнение имеет корни по условию. Значит его дискриминант неотрицателен, т.е.

$$a^2-2a-3\geq 0.$$

Отсюда получаем область допустимых значений параметра a: $a\leq -1$ или $a\geq 3$.

2. С другой стороны из теоремы Виета $x_1+x_2=2a$, $x_1x_2=2a+3$. Следовательно,

$$x_1^2+x_2^2=4a^2-2(2a+3)=4a^2-4a-6=:f(a).$$

Этот квадратный трехчлен имеет минимум в точке $a=1/2$, однако эта точка не является допустимой для значений параметра a. Поэтому наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения достигается в одной из концевых точек области значений параметра a, т.е. при $a=-1$ или $a=3$.

Находим для этих точек

$$f(-1)=2,\ f(3)=18.$$

Ответ. Наименьшее значение суммы квадратов корней уравнения равно 2 и достигается при $a=-1$.

5. На плоскости расположен отрезок AB. Определите геометрическое место расположения таких точек C, для которых угол ACB будет острым; оба угла ABC и BAC будут острыми.

Решение. В первом случае подходят точки C, расположенные вне окружности, построенной на AB как на диаметре. Во втором – точки, лежащие в полосе, граничные прямые которой проходят через точки A и B перпендикулярно отрезку AB.

6. Имеются две прогрессии, состоящие из четырех членов: арифметическая и геометрическая такие, что если сложить члены прогрессий с одинаковыми номерами то получаются следующие числа $27, 27, 39, 87$. Найдите сумму членов арифметической прогрессии.

Решение. Обозначим через a первый член арифметической прогрессии, а через d ее разность, через b первый член геометрической прогрессии, а через q ее знаменатель. Тогда

$$\text{арифметическая прогресссия } A=\{a, a+d, a+2d, a+3d\},$$

$$\text{геометрическая прогресссия } G=\{b, b\,q, b\,q^2, b\,q^3\}.$$

Запишем заданное соотношение между членами прогрессий

$$\begin{aligned} a+b &= 27 && (1)\\ a+d+bq &= 27 && (2)\\ a+2d+bq^2 &= 39 && (3)\\ a+3d+bq^3 &= 87 && (4)\end{aligned}$$

Это есть система четырех уравнений с четырьмя неизвестными a, d, b, q. Для решения системы вычтем из (2) (1) и из (3) (2). Получим

$$\begin{aligned} d+b(q-1) &= 0 && (5)\\ d+bq(q-1) &= 12 && (6)\end{aligned}$$

Вычитая из (6) (5), получим
$$b(q-1)^2 = 12. \tag{7}$$
Вычтем теперь из (4) (3) и заменим d его выражением через b, q из (5).
$$d + bq^2(q-1) = 48 \Rightarrow -b(q-1) + bq^2(q-1) = 48 \Rightarrow b(q-1)(q^2-1) = 48,$$
откуда следует
$$b(q-1)^2(q+1) = 48. \tag{8}$$
Разделив (4) на (7), найдем
$$q + 1 = 4 \Rightarrow q = 3.$$
Теперь последовательно из (7), (5) и (1) получаем
$$b = 3,\ d = -6,\ a = 24.$$
Тем самым мы нашли прогрессии
$$\text{арифметическая прогресссия } A = \{24, 18, 12, 6\},$$
$$\text{геометрическая прогресссия } G = \{3,\ 9,\ 27, 81\}.$$
Сумма членов арифметической прогрессии равна 60.

7. В прямоугольном треугольнике проводится высота на гипотенузу. Из ее основания опускаются перпендикуляры на катеты. В получившихся треугольниках проделывается то же построение и т.д. — всего 2020 раз. В каждый из 2^{2020} построенных треугольников вписывается окружность. Найдите сумму длин диаметров этих окружностей, если катеты исходного треугольника равны 18 и 24.

Решение. Отметим прежде всего, число построений не влияет на ответ, важно, чтобы это число было не меньше единицы. Покажем это. Пусть исходный треугольник обозначается ABC, C — вершина прямого угла, CD — высота к гипотенузе AB, DE — препендикуляр, опущенный на катет AC, DF — препендикуляр, опущенный на катет BC. Обозначим через r радиус окружности, вписанной в исходный треугольник ABC, через r_1 радиус окружности, вписанной в треугольник ADE, через r_2 радиус окружности, вписанной в треугольник DBF. Отрезок DE параллелен отрезку BC, а отрезок DF параллелен отрезку AC. Поэтому треугольники ABC, ADE, DBF подобны. Из подобия имеем
$$\frac{r_1}{r} = \frac{DE}{BC},\ \frac{r_2}{r} = \frac{DF}{AC} \Rightarrow r_1 = \frac{DE}{BC}r,\ r_2 = \frac{DF}{AC}r. \tag{9}$$

Отметим теперь, что исходный прямоугольный треугольник ABC состоит из двух прямоугольных треугольников ADC и CDB. Приравнивая площади, получаем
$$AC \cdot DE + BC \cdot DF = AC \cdot BC. \tag{10}$$
Из (9) и (10) следует
$$r_1 + r_2 = \frac{DE}{BC}r + \frac{DF}{AC}r = \frac{AC \cdot DE + BC \cdot DF}{AC \cdot BC}r = r.$$
Отсюда следует, что суммы радиусов окружностей, вписанных в треугольники, построенные на k-м шаге постоянны и равны r. Известно, что
$$r = \frac{2S_{ABC}}{AB + AC + BC} = \frac{AC \cdot BC}{AB + AC + BC}.$$

Для заданного в условии треугольника

$$AC = 24,\ BC = 18,\ AB = 30 \Rightarrow r = \frac{24 \cdot 18}{30 + 24 + 18} = 6.$$

Отсюда получаем ответ: сумма длин диаметров окружностей равна $2r = 12$.

8. Дано уравнение

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 = a\left|\frac{x^2-1}{x}\right|.$$

Выясните: относительно какого преобразования уравнение является симметричным?

Решение.

Уравнение не меняет своего вида при преобразовании $x \mapsto \frac{1}{x}$, которое является симметрией уравнения.

9. Дано уравнение

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + a^2 = a\left|\frac{x^2-1}{x}\right|.$$

Выясните: а) При каких значениях a уравнение имеет нечетное число корней? б) При каких значениях a уравнение имеет единственный корень? Приведите этот корень для каждого такого значения a.

Решение.

С каждым корнем $x \neq \pm 1$ уравнение имеет парный корень $\frac{1}{x}$. Поэтому уравнение может иметь нечетное число корней только в случае, если один из них равен ± 1.

Пусть $x = 1$. Тогда

$$-4 + a^2 = 0 \implies a = \pm 2.$$

Пусть $x = -1$. Тогда

$$a^2 = 0 \implies a = 0.$$

Следовательно, уравнение имеет нечетное число корней при $a = \pm 2$ и $a = 0$. Поочередно подставим каждое из этих значений параметра a в исходное уравнение.

Пусть $a = 0$. Уравнение

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} = 0$$

имеет единственный корень $x = -1$.

При $a = -2$ уравнение принимает вид

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + 4 = -2\left|\frac{x^2-1}{x}\right| \iff \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = -\left|\frac{x^2-1}{x}\right|$$

и имеет единственный корень $x = 1$.

При $a = 2$ уравнение принимает вид

$$-2\frac{(x+1)^2}{x^2+1} + 4 = 2\left|\frac{x^2-1}{x}\right| \iff \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \left|\frac{x^2-1}{x}\right| \iff \frac{(x-1)^2}{x^2+1} = \pm\frac{x^2-1}{x}.$$

$x = 1$ - очевидный корень. Разделим это уравнение на $x - 1$.

$$\frac{x-1}{x^2+1} = \pm\frac{x+1}{x} \iff x^3 + 2x + 1 = 0 \ \text{ или } \ x^3 + 2x^2 + 1 = 0.$$

Два последних уравнения имеют корни на вещественной оси. Следовательно, корень $x = 1$ не является единственным.

Поэтому единственный корень уравнение может иметь только при $a = 0$ $(x = -1)$ и $a = -2$ $(x = 1)$.