

## Занятие 14. Основы логики

*Инверсия (логическое отрицание)*

$A$	$\neg A$
0	1
1	0

*Конъюнкция (логич-е умножение)*

$A$	$B$	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

*Дизъюнкция (логическое сложение)*

$A$	$B$	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

*Импликация (логич-е следование)*

$A$	$B$	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

*Эквиваленция (логич-е тождество)*

$A$	$B$	$A \sim B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

**Задача 1.** Дан фрагмент таблицы истинности выражения F:

X	Y	Z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1

Каким выражением может быть F

- 1)  $X \wedge Y \wedge Z$     2)  $\neg X \vee \neg Y \vee Z$     3)  $X \vee Y \vee Z$     4)  $X \wedge Y \wedge \neg Z$

**Задача 2.** Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	F
1	0	1	0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	1	0	1

- 1)  $(x2 \rightarrow x1) \wedge \neg x3 \wedge x4 \wedge \neg x5 \wedge x6 \wedge \neg x7 \wedge x8$   
 2)  $(x2 \rightarrow x1) \vee \neg x3 \vee x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee \neg x7 \vee x8$   
 3)  $\neg(x2 \rightarrow x1) \wedge x3 \wedge \neg x4 \wedge x5 \wedge \neg x6 \wedge x7 \wedge \neg x8$   
 4)  $(x2 \rightarrow x1) \vee x3 \vee \neg x4 \vee x5 \vee \neg x6 \vee x7 \vee \neg x8$

**Задача 3.** Дано выражение, зависящее от 5 логических переменных:  $z1 \wedge \neg z2 \wedge \neg z3 \wedge \neg z4 \wedge z5$ . Сколько существует различных наборов значений переменных, при которых выражение ложно?

**Задача 4.** Дан фрагмент таблицы истинности выражения F. Какое выражение соответствует F?

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	F
0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	0

- 1)  $(x1 \vee x2) \wedge \neg x3 \wedge x4 \wedge \neg x5 \wedge x6 \wedge \neg x7$   
 2)  $(x1 \wedge x2) \vee \neg x3 \vee x4 \vee \neg x5 \vee x6 \vee x7$   
 3)  $(x1 \wedge \neg x2) \wedge x3 \wedge \neg x4 \wedge \neg x5 \wedge x6 \wedge \neg x7$   
 4)  $(\neg x1 \wedge \neg x2) \wedge x3 \wedge \neg x4 \wedge x5 \wedge \neg x6 \wedge x7$

**Задача 5.** Логическая функция F задаётся выражением  $(\neg a) \vee b \wedge (\neg c)$ .

			F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции F соответствует каждая из переменных a, b, c?

В ответе напишите буквы a, b, c в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

<b>Закон идемпотенции</b>	$A \vee A \equiv A, \quad A \wedge A \equiv A$
<b>Операции с константами</b>	$A \vee 0 \equiv A; \quad A \vee 1 \equiv 1,$ $A \wedge 0 \equiv 0; \quad A \wedge 1 \equiv A.$
<b>Операция с инверсией</b>	$A \vee \neg A \equiv 1, \quad A \wedge \neg A \equiv 0$
<b>Закон двойного отрицания</b>	$\neg \neg A \equiv A$
<b>Переместительный закон</b>	$A \vee B \equiv B \vee A, \quad A \wedge B \equiv B \wedge A$
<b>Сочетательный закон</b>	$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,$ $A \wedge (B \wedge C) = (A \wedge B) \wedge C$
<b>Распределительный закон</b>	$A \wedge (B \vee C) = A \wedge B \vee A \wedge C,$ $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
<b>Закон поглощения</b>	$A \vee (A \wedge B) = A,$ $A \wedge (A \vee B) = A$
<b>Правило де Моргана</b>	$\neg (A \vee B) = \neg A \wedge \neg B,$ $\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B$
<b>Закон контрапозиции</b>	$A \rightarrow B \equiv \neg B \rightarrow \neg A$

### Приоритет логических операций

- 1) порядок старшинства логических операций следующий:  $\neg, \&, \vee, \rightarrow, \sim;$
- 2) в первую очередь выполняются операции в скобках, затем все остальные логические операции в порядке старшинства.

**Замечание.** Импликацию, эквиваленцию, неравнозначность можно заменить дизъюнкцией:

$$A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B,$$

$$A \sim B \equiv (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B),$$

$$\neg(A \sim B) \equiv (\neg A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B),$$

$$A \vee (\neg A \wedge B) = A \vee B, \quad \neg A \vee (A \wedge B) = \neg A \vee B$$

**Задача 6.** Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $a \wedge b \vee a \wedge (\neg c)$ .

			F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $a, b, c$ ?

В ответе напишите буквы  $a, b, c$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

**Задача 7.** Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $x \wedge \neg y \wedge (\neg z \vee w)$ .

				F
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
1	0	1	1	1

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $x, y, z, w$ .

**Задача 8.** Логическая функция  $F$  задаётся выражением

$$(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z).$$

			F
0	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1

Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $x, y, z$ ? В ответе напишите буквы  $x, y, z$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

**Задача 9.** Дан фрагмент таблицы истинности для выражения  $F$ :

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$x_5$	$x_6$	$x_7$	$x_8$	$F$
		0				1		1
1					1			1
			1				0	0

Каким выражением может быть  $F$ ?

- $x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 \wedge \neg x_7 \wedge \neg x_8$
- $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \vee x_8$
- $\neg x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \wedge \neg x_7 \wedge \neg x_8$
- $x_1 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5 \vee \neg x_6 \vee \neg x_7 \vee \neg x_8$

**Задача 10.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [6, 16]$  и  $Q = [30, 50]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула  $((x \in A) \rightarrow (x \in Q)) \vee (x \in P)$  тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?

**Задача 11.** На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25, 50]$  и  $Q = [32, 47]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула  $(\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in P)) \rightarrow ((x \in A) \rightarrow (x \in Q))$  тождественно истинна. Какова **наибольшая** возможная длина отрезка  $A$ ?

**Задача 12.** Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \rightarrow (((x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \wedge \neg(x \in A)) \rightarrow \neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}))$  истинно при любом значении переменной  $x$ . Определите **наименьшее** возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

**Задача 13.** Выражение  $\neg(x \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$  истинно при любом значении переменной  $x$ . Определите **наименьшее** возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

**Задача 14.** Выражение  $\neg(x \in A) \rightarrow \neg((x \in \{1, 2, 4, 8\}) \vee (x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}))$  истинно при любом значении переменной  $x$ . Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .

**Задача 15.** Элементами множеств  $A, P$  и  $Q$  являются натуральные числа, причём  $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$  и  $Q = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50\}$ . Известно, что выражение  $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \wedge ((x \in Q) \rightarrow \neg(x \in A))$  истинно при любом значении переменной  $x$ . Определите **наибольшее** возможное количество элементов множества  $A$ .  
 $A \neq \emptyset$ ) тождественно истинно?

Домашнее задание.

1. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $(\neg a) \vee b \wedge (\neg c)$ . Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $a, b, c$ ?

?	?	?	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

В ответе напишите буквы  $a, b, c$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

3. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $a \wedge (\neg c) \vee (\neg b) \wedge (\neg c)$ . Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $a, b, c$ ?

?	?	?	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

В ответе напишите буквы  $a, b, c$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

5. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $(x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$ . Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных

?	?	?	F
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

В ответе напишите буквы  $x, y, z$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

1) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $\neg(x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) \vee (\neg(x \in \{3, 6, 9, 12, 15\}) \rightarrow (x \in A))$  истинно. Определите наименьшее возможное значение суммы элементов множества  $A$ .

2) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $((x \in \{3, 5, 7, 11, 12, 15\}) \rightarrow (x \in \{5, 6, 12, 15\})) \vee (x \in A)$  истинно. Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

3) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $(x \in \{2, 4, 8, 12, 15\}) \rightarrow (\neg(x \in \{3, 6, 8, 15\}) \vee (x \in A))$  истинно. Определите наименьшее возможное значение произведения элементов множества  $A$ .

2. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $a \wedge b \vee a \wedge (\neg c)$ . Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $a, b, c$ ?

?	?	?	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

В ответе напишите буквы  $a, b, c$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

4. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $(\neg x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$ . На рисунке приведён фрагмент таблицы истинности функции  $F$ , содержащий все наборы аргументов, при которых функция  $F$  истинна. Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных  $x, y, z$ ?

?	?	?	F
0	0	0	1
1	0	0	1
1	0	1	1

В ответе напишите буквы  $x, y, z$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

6. Логическая функция  $F$  задаётся выражением  $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z)$ . Определите, какому столбцу таблицы истинности функции  $F$  соответствует каждая из переменных

?	?	?	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

В ответе напишите буквы  $x, y, z$  в том порядке, в котором идут соответствующие им столбцы.

- 4) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $\neg(x \in \{2, 4, 8, 12, 16\}) \wedge \neg(x \in \{3, 6, 7, 15\}) \vee \neg(x \in \{3, 6, 7, 15\}) \vee (x \in A)$  истинно. Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .
- 5) Элементами множества  $A$  являются натуральные числа. Известно, что выражение  $\neg(x \in A) \rightarrow \neg(x \in \{1, 3, 7\}) \vee (\neg(x \in \{1, 2, 4, 5, 6\}) \wedge (x \in \{1, 3, 7\}))$  истинно. Определите наименьшее возможное количество элементов множества  $A$ .
- 6) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [44; 49]$  и  $Q = [28; 53]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула  $((x \in A) \rightarrow (x \in P)) \vee (x \in Q)$  тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ .
- 7) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [5; 30]$  и  $Q = [14; 23]$ . Укажите наибольшую возможную длину такого отрезка  $A$ , что формула  $((x \in P) \equiv (x \in Q)) \rightarrow \neg(x \in A)$  тождественно истинна.
- 8) На числовой прямой даны два отрезка:  $P = [25; 37]$  и  $Q = [32; 47]$ . Отрезок  $A$  таков, что формула  $((x \in A) \wedge \neg(x \in P)) \rightarrow ((x \in P) \wedge (x \in Q))$  тождественно истинна, то есть принимает значение 1 при любом значении переменной  $x$ . Какова наибольшая возможная длина отрезка  $A$ ?