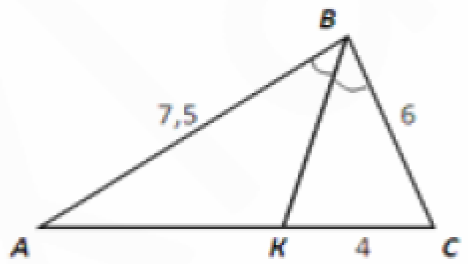
6. В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *BK*. Определите длину отрезка *AK*, если известно, что *AB*=7,5, *BC*=6, *CK*=4.



Ответ: ________________________.

11. Три числа составляют арифметическую прогрессию. Если первые два оставить, а к третьему прибавить сумму двух первых, то полученные числа составят геометрическую прогрессию. Найдите знаменатель геометрической прогрессии.

Ответ: ________________________.

17. На счет, который вкладчик имел в начале первого квартала, начисляется в конце этого квартала r_1 процентов, а на тот счет, который вкладчик имел в конце второго квартала, начисляется в конце этого квартала r_2 процентов, причем $r_1 + r_2 = 150$. Вкладчик положил на счет в начале первого квартала некоторую сумму и снял в конце того же квартала половину этой суммы. При каком значении r_1 счет вкладчика в конце второго квартала окажется максимально возможным?

Вероятность. Задание 4.

Классическое определение вероятности. Пусть некоторый опыт имеет ***n*** равновозможных взаимоисключающих исходов.

Вероятность **P(A)** события A, связанного с данным опытом, равна отношению числа **m** исходов, благоприятствующих событию A, к числу **n** всех исходов опыта

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Перед началом первого тура чемпионата по настольному теннису участников разбивают на игровые пары случайным образом с помощью жребия. Всего в чемпионате участвует 26 спортсменов, среди которых 17 спортсменов из России, в том числе Денис Полянкин. Найдите вероятность того, что в первом туре Денис Полянкин будет играть с каким-либо спортсменом из России.

На чемпионате по прыжкам в воду выступают 50 спортсменов, среди них 2 прыгуна из Италии и 5 прыгунов из Парагвая. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что двадцать вторым будет выступать прыгун из Италии.

Научная конференция проводится в 3 дня. Всего запланировано 40 докладов — в первый день 8 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. На конференции планируется доклад профессора М. Порядок докладов определяется жеребьёвкой. Какова вероятность, что доклад профессора М. окажется запланированным на последний день конференции?

На фабрике керамической посуды 10% произведённых тарелок имеют дефект. При контроле качества продукции выявляется 80% дефектных тарелок. Остальные тарелки поступают в продажу. Найдите вероятность того, что случайно выбранная при покупке тарелка не имеет дефектов. Результат округлите до сотых.

В случайном эксперименте бросают две игральные кости (кубика). Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Теоремы сложения и умножения вероятностей

Теорема сложения. Вероятность суммы двух событий А и В равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного наступления:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Если события А и В независимы (т. е. появление одного из них не меняет вероятности появления другого), то

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

В среднем из 900 садовых насосов, поступивших в продажу, 27 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос не подтекает.

Если шахматист А. играет белыми фигурами, то он выигрывает у шахматиста Б. с вероятностью 0,5. Если А. играет чёрными, то А. выигрывает у Б. с вероятностью 0,32. Шахматисты А. и Б. играют две партии, причём во второй партии меняют цвет фигур. Найдите вероятность того, что А. выиграет оба раза.

Чтобы пройти в следующий круг соревнований, футбольной команде нужно набрать хотя бы 4 очка в двух играх. Если команда выигрывает, она получает 3 очка, в случае ничьей — 1 очко, если проигрывает — 0 очков. Найдите вероятность того, что команде удастся выйти в следующий круг соревнований. Считайте, что в каждой игре вероятности выигрыша и проигрыша одинаковы и равны 0,3.

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит больше двух лет, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Обслуживание автоматов происходит по вечерам после закрытия центра. Известно, что вероятность события «К вечеру в первом автомате закончится кофе» равна 0,25. Такая же вероятность события «К вечеру во втором автомате закончится кофе». Вероятность того, что кофе к вечеру закончится в обоих автоматах, равна 0,15. Найдите вероятность того, что к вечеру дня кофе останется в обоих автоматах.

Помещение освещается фонарём с двумя лампами. Вероятность перегорания лампы в течение года равна 0,3. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.

Формула полной вероятности.

Условной вероятностью события В называется вероятность события В при условии, что событие А произошло. Условная вероятность события В обозначается $P(B|A)$ или $P_A(B)$.

Пусть события H_1, H_2, … , H_n образуют полную группу попарно несовместных событий, известны $P(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и условные вероятности $P(A|H_i)$ события А, которое может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий H_i.

Вероятность события **А** равна **сумме произведений** вероятностей каждого из событий H_i на соответствующую условную вероятность $P(A|H_i)$ события А:

$$P(A) = P(H_1)\cdot P(A|H_1) + P(H_2)\cdot P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)\cdot P(A|H_n).$$

Последняя формула называется ***формулой полной вероятности***.

Пример. Грибник, заблудившись в лесу, вышел на поляну, откуда вело 5 дорог. Известно, что вероятности выхода из леса за час для различных дорог соответственно равны 0,4; 0,8; 0,3; 0,2; 0,1. Какова вероятность того, что этот грибник вышел из леса через час?

Решение. Обозначим через А событие, состоящее в том, что грибник вышел из леса через час, а через H_i, I = 1, 2,…, 5 – событие, состоящее в том, что грибник пошел по *i*-той дороге. Из условия задачи $P(A|H_1) = 0,4$, $P(A|H_2) = 0,8$, $P(A|H_3) = 0,3$, $P(A|H_4) = = 0,2$, $P(A|H_5) = 0,1$. Поскольку имеются одинаковые шансы выбрать любую из пяти дорог, то $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = P(H_4) = = P(H_5) = 1/5 = 0,2$.

4. На тренировке баскетболист Майкл попадает 3-очковый бросок с вероятностью 0,9, если бросает мячом фирмы «Nike». Если Майкл выполняет 3-очковый бросок мячом фирмы «Adidas», то попадает с вероятностью 0,7. В корзине лежат 10 тренировочных мячей: 6 фирмы «Nike» и 4 фирмы «Adidas». Майкл наудачу берет из корзины первый попавшийся мяч и совершает 3-очковый бросок. Найдите вероятность того, что бросок Майкла будет точен.

Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,2. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

Агрофирма закупает куриные яйца в двух домашних хозяйствах. 40% яиц из первого хозяйства — яйца высшей категории, а из второго хозяйства — 20% яиц высшей категории. Всего высшую категорию получает 35% яиц. Найдите вероятность того, что яйцо, купленное у этой агрофирмы, окажется из первого хозяйства.

Свойства логарифма:

$$a^{\log_a b} = b \quad (a > 0, a \neq 1, b > 0),$$

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(ab) \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_c a^b = b \log_c a \quad (a > 0, c > 0, c \neq 1),$$

$$\log_{c^d} a = \frac{1}{d} \log_c a \quad (a > 0, c > 0, c \neq 1, d \neq 0),$$

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b} \quad \text{и, в частности,}$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, b \neq 1, c \neq 1),$$

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \quad (a > 0, b > 0, c > 0, c \neq 1).$$

Часть В.

1. Найдите $\log_9 20$, если $\lg 2 = a$, $\lg 3 = b$.

1. Найдите $\log_{81} 168$, если $\log_3 2 = a$, $\log_2 7 = b$.

2. Найдите значение выражения $\log_{0,8}3 \cdot \log_3 1,25$.

3. **Задание 11 № 27995.** Для обогрева помещения, температура в котором равна $T_п = 20^\circ C$, через радиатор отопления, пропускают горячую воду температурой $T_в = 60^\circ C$. Расход проходящей через трубу воды $m = 0,3$ кг/с. Проходя по трубе расстояние x (м), вода охлаждается до температурым $T\,(^\circ C)$, причем $x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_в - T_п}{T - T_п}$ (м), где $c = 4200 \frac{Дж}{кг \cdot {}^\circ C}$ – теплоемкость воды, $\gamma = 21 \frac{Вт}{м \cdot {}^\circ C}$ – коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ – постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода, если длина трубы 84 м?

1. Задание 6 № 3281.
Найдите корень уравнения $\log_4(16-2x)=2\log_4 3$.

Ответ: 3,5

2. Задание 6 № 505377. Найдите корень уравнения $\log_6(8-x)=\log_6 3$.

Ответ: 5

3. Задание 6 № 77380. Решите уравнение $\log_5(x^2+2x)=\log_5(x^2+10)$.

Ответ: 5

4. Задание 6 № 77381. Решите уравнение $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

Ответ: 2

5. Задание 6 № 14669.
Найдите корень уравнения: $\log_5(5-x)=2$.

Ответ: -20

6. Задание 10 № 69391.

Найдите значение выражения $6^{2+\log_6 8}$.

Ответ: 288

7. Задание 10 № 26847. Найдите значение выражения $\log_4 8$.

Ответ: 1,5

8. Задание 10 № 68663.

Найдите значение выражения $\log_{0,55} 20 - \log_{0,55} 11$.

Ответ: -1

9. Задание 10 № 77418. Вычислите значение выражения: $(3^{\log_2 3})^{\log_3 2}$.

Ответ: 3

10. Задание 10 № 26891.

Найдите значение выражения $6 \cdot 7^{\log_7 2}$.

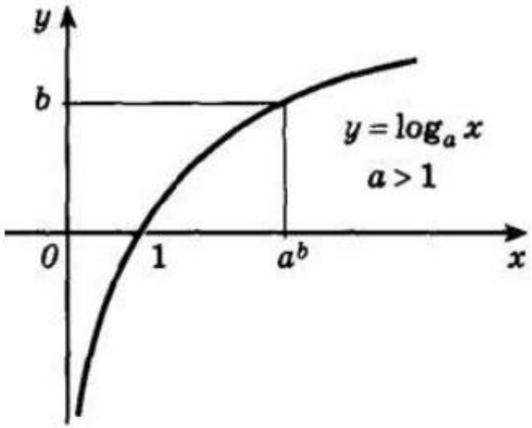
Ответ: 12

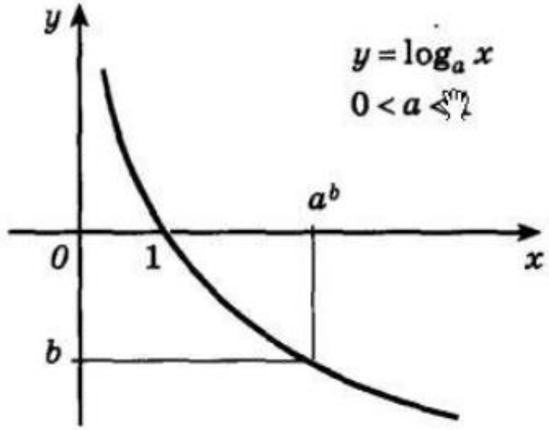
11. Задание 10 № 69205.

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_9 10}{\log_9 11} + \log_{11} 0,1$.

Ответ: 0

Логарифмическая функция





1. Найдите наименьшее значение функции $y = 3x - \ln(x+3)^3$ на отрезке $[-2,5;0]$.

2. Найдите точку максимума функции $y = 2x^2 - 13x + 9\ln x + 8$.

К графику функции $y = \ln(2x + 4)$ проведена касательная, параллельная прямой $y = 0,5x - 3$. Найдите точку пересечения этой касательной с осью x.

Из точки $A(0; 1)$ проведите касательную к графику функции $y = -\ln(2e^2x)$.

При каком значении параметра a графики функций $y = ax^2$ и $y = \ln x$ имеют общую касательную?

Логарифмические неравенства

Задание 15

Если $a > 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) > g(x) > 0,$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \geq g(x) > 0.$$

Если $0 < a < 1$, то

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) < g(x),$$

$$\log_a f(x) \geq \log_a g(x) \quad \Leftrightarrow \quad 0 < f(x) \leq g(x).$$

Пример. **ЕГЭ 2011.** Основная волна.

$$9\log_7(x^2+x-2) \le 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2}.$$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x^2+x-2>0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0, \\ x \ne -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+2)>0, \\ \frac{(x-1)^9}{x+2}>0, \\ x \ne -2, \end{cases} \Leftrightarrow (x-1)(x+2)>0$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty).$$

Преобразуем исходное неравенство.

$$9\log_7(x-1)(x+2) \le 10+\log_7\frac{(x-1)^9}{x+2},$$

$$\log_7(x-1)^9(x+2)^9 - \log_7\frac{(x-1)^9}{x+2} \le 10,$$

$$\log_7(x+2)^{10} \le 10, \qquad 10\log_7|x+2| \le 10,$$

$$\log_7|x+2| \le 1, \qquad \log_7|x+2| \le \log_7 7,$$

$$|x+2| \le 7, \quad -7 \le x+2 \le 7, \qquad -9 \le x \le 5.$$

С четом ОДЗ $\quad x \in [-9;-2) \cup (1;5]$.

Ответ: $x \in [-9;-2) \cup (1;5]$.

$$\log_{a(x)} f(x) > \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) > 0, \\ a(x) > 0,\ \ a(x) \ne 1,\ \ f(x) > 0,\ \ g(x) > 0 \quad (\text{ОДЗ}). \end{cases}$$

$$\log_{a(x)} f(x) \geq \log_{a(x)} g(x) \quad \Leftrightarrow \quad \log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (a(x)-1)(f(x)-g(x)) \geq 0, \\ a(x) > 0,\ \ a(x) \neq 1,\ \ f(x) > 0,\ \ g(x) > 0 \quad (\text{ОДЗ}). \end{cases}$$

Пример. **ЕГЭ 2013.** Резервный день.

$$\log_{7-2x}(x+6) \leq 0.$$

Решение:

ОДЗ: $\begin{cases} x+6 > 0, \\ 7-2x > 0, \\ 7-2x \neq 1, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > -6, \\ x < \frac{7}{2}, \\ x \neq 3, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in (-6;3) \cup \left(3;\frac{7}{2}\right).$

$$\log_{7-2x}(x+6) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{7-2x}(x+6) \leq \log_{7-2x} 1,$$

$$(7-2x-1)(x+6-1) \leq 0,$$

$$2(3-x)(x+5) \le 0, \quad x \in (-\infty; -5] \cup [3; +\infty).$$

С учетом ОДЗ $\quad x \in (-6; -5] \cup \left(3; \frac{7}{2}\right).$

Ответ: $x \in (-6; -5] \cup \left(3; \frac{7}{2}\right).$

Пример. **ЕГЭ 2013.** Основная волна.

$$\begin{cases} \log_{7-x} \dfrac{x+3}{(x-7)^8} \ge -8, \\ x^3 + 6x^2 + \dfrac{40x^2 + 3x - 24}{x-8} \le 3. \end{cases}$$

Решение:

Сначала рассмотрим первое неравенство.

ОДЗ: $\begin{cases} 7-x>0, \\ x+3>0, \\ 7-x\neq 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<7, \\ x>-3, \\ x\neq 6, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-3;6)\cup(6;7).$

$$\log_{7-x}\frac{x+3}{(x-7)^8}\geq -8 \quad \Leftrightarrow \quad \log_{7-x}|x+3|-\log_{7-x}|x-7|^8\geq -8,$$

$$\log_{7-x}(x+3)-8\log_{7-x}(7-x)\geq -8,$$

$$\log_{7-x}(x+3)-8\geq -8, \quad \log_{7-x}(x+3)\geq 0, \quad \log_{7-x}(x+3)\geq \log_{7-x}1,$$

$$(7-x-1)(x+3-1)\geq 0,$$

$$(6-x)(x+2)\geq 0, \quad x\in[-2;6].$$

С учетом ОДЗ решение первого неравенства имеет вид $x\in[-2;6)$.

Перейдем к решению второго неравенства.

$$x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2 + 3x - 24}{x - 8} \le 3, \qquad x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2 + 3x - 24 - 3(x - 8)}{x - 8} \le 0,$$

$$x^3 + 6x^2 + \frac{40x^2}{x - 8} \le 0, \qquad x^2\left(x + 6 + \frac{40}{x - 8}\right) \le 0,$$

$$\frac{x^2(x^2 - 2x - 8)}{x - 8} \le 0, \qquad \frac{x^2(x - 4)(x + 2)}{x - 8} \le 0,$$

$x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [4; 8)$ $-$ решение второго неравенства.

Решение системы является пересечением решений обоих неравенств:

$$\begin{cases} x \in [-2; 6), \\ x \in (-\infty; -2] \cup \{0\} \cup [4; 8), \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-2\} \cup \{0\} \cup [4; 6).$$

Ответ: $x \in \{-2\} \cup \{0\} \cup [4; 6)$.

Рационализация

Рассмотрим неравенство вида

$$f(x) \vee 0,$$

где, символу «$\vee$» отвечает один из знаков «$>$», «$<$», «$\geq$» или «$\leq$».

При этом функция $f(x)$ в общем случае представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой стоят произведения некоторых сомножителей.

Суть метода состоит в замене громоздких множителей более простыми, имеющими те же знаки и те же корни, что и исходные множители (в области определения решаемого неравенства).

<u>Допустимые замены:</u>

При любых $x \in \text{ОДЗ}$:

1) $\log_a p(x) - \log_a q(x) \sim (a-1)(p(x)-q(x))$.

2) $\log_a p(x) - 1 \sim (a-1)(p(x)-a)$.

3) $\log_a p(x) \sim (a-1)(p(x)-1)$.

4) $\log_a p(x) + \log_a q(x) \sim (a-1)(p(x)q(x)-1)$.

Пример. **ЕГЭ 2014.** Основная волна.

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$$

Решение:
<u>I способ</u> (рационализация):

$$\text{ОДЗ:}\quad \begin{cases} x+2>0,\\ 2-x>0,\\ 2-x\ne 1,\\ 3-x>0,\\ x+3>0,\\ x+3\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2,\\ x<2,\\ x\ne 1,\\ x<3,\\ x>-3,\\ x\ne -2, \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in(-2;1)\cup(1;2).$$

При $x\in$ ОДЗ

$$\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(2-x-1)(x+2-1)(x+3-1)(3-x-1)\le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$(1-x)(x+1)(x+2)(2-x) \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-2;-1] \cup [1;2].$$

С учетом ОДЗ $\quad x \in (-2;-1] \cup (1;2).$

Ответ: $x \in (-2;-1] \cup (1;2).$

<u>II способ</u>:

$$\log_{2-x}(x+2) \cdot \log_{x+3}(3-x) \le 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log_{2-x}(x+2) \le 0, \\ \log_{x+3}(3-x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} \log_{2-x}(x+2) \ge 0, \\ \log_{x+3}(3-x) \le 0. \end{cases} \end{array}\right.$$