

Прямоугольный треугольник

Теорема Пифагора: $a^2 + b^2 = c^2$, здесь a, b – катеты прямоугольного треугольника, c – гипотенуза.

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника:

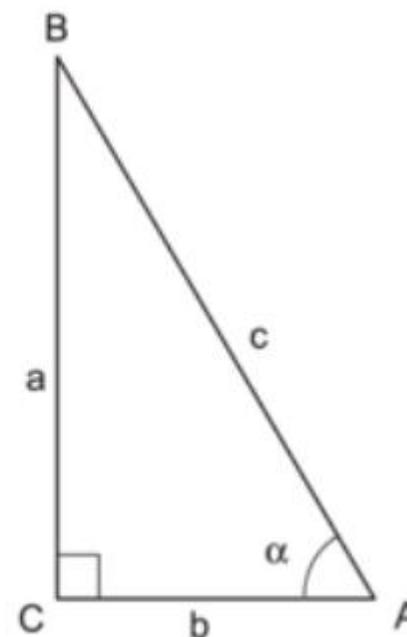
$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \quad \cos \alpha = \frac{b}{c}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a};$$

здесь α – угол, противолежащий катету a .

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}.$$



Значения тригонометрических функций основных углов:

$$\sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{6} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$$

Задачи:

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 2$, $\sin A = \frac{\sqrt{17}}{17}$. Найдите BC .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 4$, $\cos A = 0,5$. Найдите AB .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\operatorname{tg} A = \frac{33}{4\sqrt{33}}$, $AC = 4$. Найдите AB .

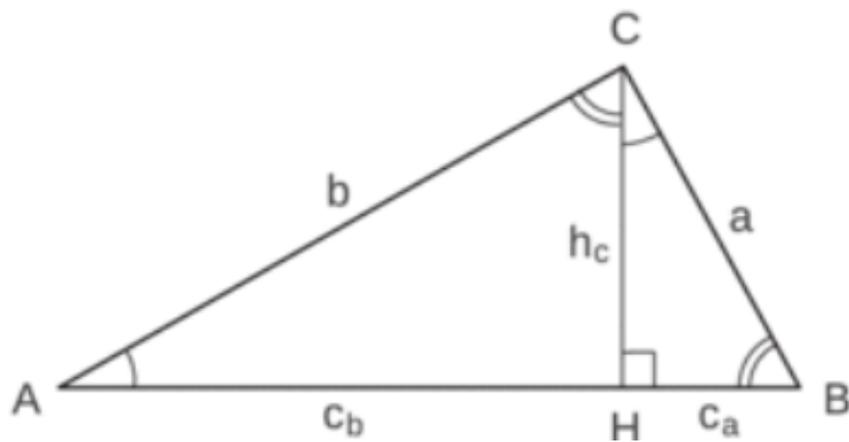
В треугольнике ABC угол C равен 90° , $\cos A = \frac{\sqrt{17}}{17}$, $BC = 2$. Найдите AC .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AC = 24$, $BC = 7$. Найдите $\sin A$.

Формула длины высоты, проведённой к гипотенузе:

$$h_c = \frac{ab}{c} = \sqrt{c_a c_b},$$

где c_a и c_b – проекции катетов a и b на гипотенузу c .



Пример 1. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

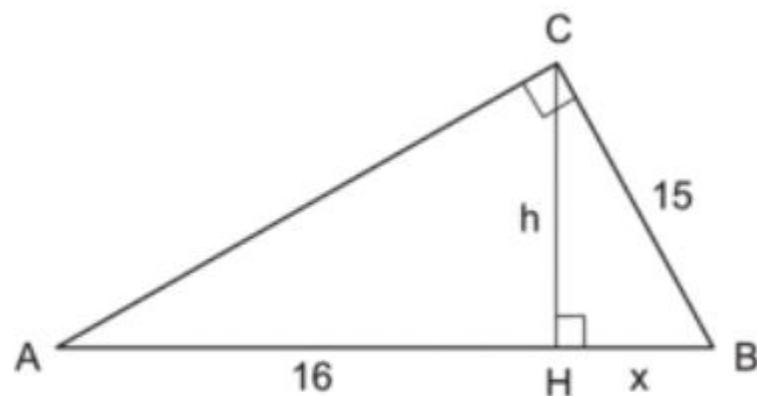
Решение. Пусть катет $BC = 15$, а проекция катета AC на гипотенузу AB равна 16.

Поскольку диаметр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен гипотенузе, нам надо найти проекцию катета BC на гипотенузу. Обозначим высоту CH через h , а проекцию катета BC на гипотенузу через x . По свойству высоты, проведённой к гипотенузе, и теореме Пифагора, применённой к $\triangle BCH$, получим

$$\begin{cases} h^2 = 16x, \\ h^2 + x^2 = 15^2; \end{cases} \implies x^2 + 16x - 15^2 = 0 \implies x = 9,$$

откуда диаметр $d = AB = 25$.

Ответ. 25.



Задачи:

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите AH .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , $AB = 13$, $\operatorname{tg} A = \frac{1}{5}$. Найдите высоту CH .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $\sin A = 0,5$. Найдите BH .

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH — высота, $BC = 8$, $BH = 4$. Найдите $\sin A$.

В треугольнике ABC угол C равен 90° , CH – высота, $AH = 12$, $\cos A = \frac{2}{3}$. Найдите AB .

Площадь прямоугольного треугольника может быть вычислена как половина произведения длин его катетов $\left(S = \frac{ab}{2}\right)$.

Задачи:

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если его катет и гипотенуза равны соответственно 6 и 10.

Площадь прямоугольного треугольника равна 24. Один из его катетов на 2 больше другого. Найдите меньший катет.

Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, находится на середине его гипотенузы; длина радиуса этой окружности равна половине длины гипотенузы $\left(R = \frac{c}{2}\right)$.

Длина радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равна полуразности суммы длин его катетов и длины его гипотенузы $\left(r = \frac{a + b - c}{2}\right)$.

Задачи:

В прямоугольном треугольнике острые углы относятся как $1 : 2$, а больший катет равен $4\sqrt{3}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника.

Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиусы его вписанной и описанной окружностей равны соответственно 2 см и 5 см.

Длина медианы прямоугольного треугольника, проведённой к гипотенузе, равна половине длины гипотенузы, длина медианы, проведённой к катету, равна корню из суммы четверти квадрата длины этого катета и квадрата длины другого катета:

$$m_c = \frac{c}{2}, \quad m_a = \sqrt{b^2 + \frac{a^2}{4}}, \quad m_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}.$$

В треугольнике ABC угол ACB равен 90° , угол B равен 58° , CD — медиана. Найдите угол ACD . Ответ дайте в градусах.

Острые углы прямоугольного треугольника равны 24° и 66° . Найдите угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

В прямоугольном треугольнике угол между высотой и медианой, проведенными из вершины прямого угла, равен 40° . Найдите больший из острых углов этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

Угол между биссектрисой и медианой прямоугольного треугольника, проведенными из вершины прямого угла, равен 14° . Найдите меньший угол этого треугольника. Ответ дайте в градусах.

В прямоугольном треугольнике медианы, проведённые к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу.

Разные задачи:

Острый угол прямоугольного треугольника равен 32° . Найдите острый угол, образованный биссектрисами этого и прямого углов треугольника. Ответ дайте в градусах.

Один из углов прямоугольного треугольника равен 29° . Найдите угол между высотой и биссектрисой, проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.

Часть С. Задача 16.

Прямая, проходящая через середину M гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC , перпендикулярна CM и пересекает катет AC в точке K , при этом $AK:KC=1:2$.

а) Докажите, что угол BAC равен 30° .

б) Пусть прямые MK и BC пересекаются в точке P , а прямые AP и BK - в точке Q . Найдите KQ , если $BC=\sqrt{21}$.

Ответ: 14.