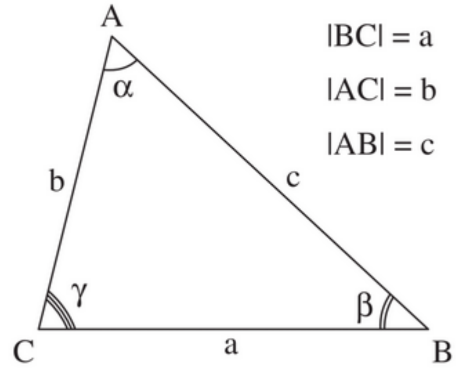
Треугольник. Основные формулы



Теорема синусов: $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

Теорема косинусов: $$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma.$$

Здесь и далее a, b, c – стороны треугольника; α, β, γ – противолежащие им углы; R – радиус описанной около треугольника окружности.

- В треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон (*неравенство треугольника*).
- В треугольнике напротив большей стороны лежит больший угол.
- Площадь треугольника равна

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma, \quad S = \frac{1}{2}ch_c, \quad S = \frac{abc}{4R}, \quad S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad S = pr,$$

где r – радиус вписанной окружности, p – полупериметр треугольника.

Полезные формулы:

Формулы приведения: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x; \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x.$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x \cos x; \quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Формулы для тригонометрических функций от суммы и разности:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y;$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y.$$

Примеры:

Пример 1. В треугольник со сторонами $AB = 8$, $BC = 6$, $AC = 4$ вписана окружность. Найти длину отрезка DE, где D и E – точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

Решение. Для того, чтобы вычислить DE, необходимо знать AE, AD и косинус угла между ними. Тогда по теореме косинусов можно будет найти DE.

Обозначим равные отрезки касательных

$$BD = BF = x,\ CF = CE = y,\ AE = AD = z.$$

По условию

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y + z = 4, \\ x + z = 8; \end{cases}$$

откуда $z = 3$.

Из теоремы косинусов, применённой к ΔABC, получим

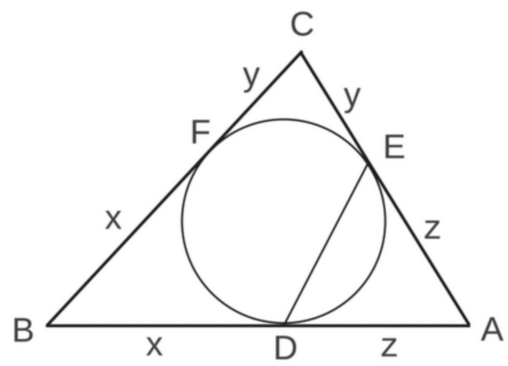
$$6^2 = 8^2 + 4^2 - 2 \cdot 8 \cdot 4 \cdot \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{11}{16}.$$

Теперь применим теорему косинусов к ΔADE:

$$DE^2 = 3^2 + 3^2 - 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{11}{16} = \frac{45}{8},$$

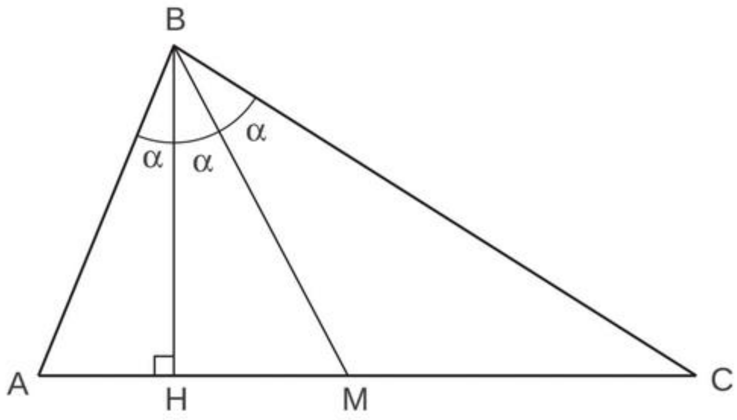
откуда $DE = \dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{10}}{4}$.



П р и м е р 2. Определить стороны треугольника, если медиана и высота, проведённые из вершины одного угла, делят угол на три равные части, а сама медиана равна 10.

Р е ш е н и е. Пусть BH и BM – соответственно высота и медиана треугольника ABC и $\angle ABH = \angle HBM = \angle MBC = \alpha$, тогда $\angle BAH = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\angle BCA = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. Для того, чтобы найти стороны треугольника, достаточно найти угол α.



Применим к треугольникам ABM и BMC теорему синусов:

$$\frac{AM}{\sin 2\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}, \quad \frac{MC}{\sin\alpha} = \frac{BM}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}.$$

Теперь поделим почленно одно равенство на другое. Поскольку $AM = MC$, получим

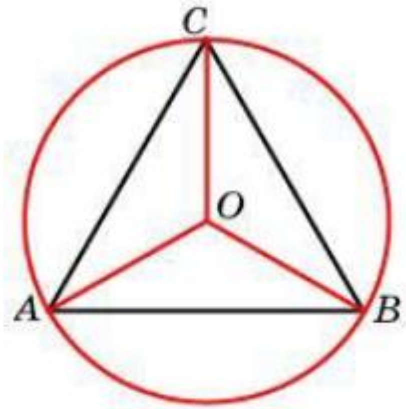
$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 4\alpha = \sin 2\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \sin 2\alpha \cdot (2\cos 2\alpha - 1) = 0.$$

Так как $0 < 3\alpha < \pi$, то $\sin 2\alpha \neq 0$. Следовательно, $\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}$, откуда $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$, $\angle ABC = 3\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, $\angle BAC = \dfrac{\pi}{3}$ и $\angle ACB = \dfrac{\pi}{6}$. По условию медиана $BM = 10$, следовательно, гипотенуза $AC = 2BM = 20$, а катеты $AB = 10$ и $BC = 10\sqrt{3}$.

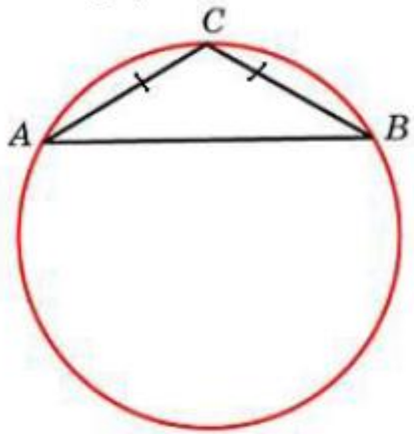
О т в е т. 20; 10; $10\sqrt{3}$.

Задачи:

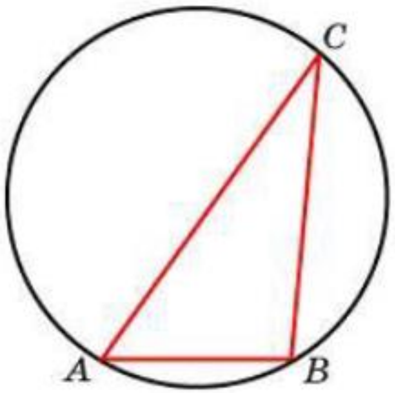
Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $38\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



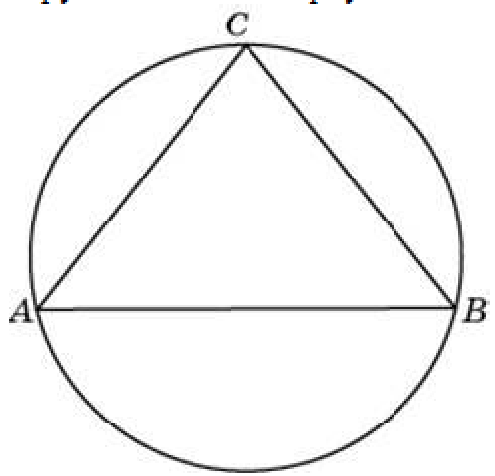
Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 11, угол при вершине, противолежащей основанию, равен 120°. Найдите диаметр описанной окружности этого треугольника.



Одна сторона треугольника равна радиусу описанной окружности. Найдите угол треугольника, противолежащий этой стороне. Ответ дайте в градусах.



Боковые стороны равнобедренного треугольника равны 84,5, основание равно 156. Найдите радиус описанной окружности этого треугольника.



Найти радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами $5,\ \sqrt{7},\ 2\sqrt{3}$.

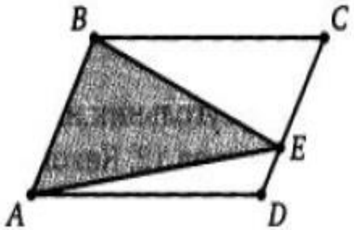
На рёбрах CD и BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 12 отмечены точки P и Q соответственно, причём $DP = 4$, а $B_1Q = 3$. Плоскость APQ пересекает ребро CC_1 в точке M.

а) Докажите, что точка M является серединой ребра CC_1.

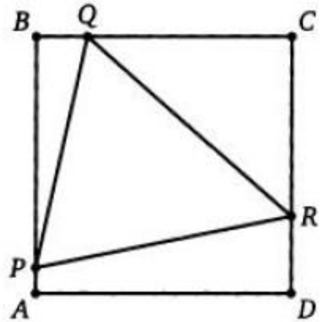
б) Найдите расстояние от точки C до плоскости APQ.

Ответ: б) $\frac{12\sqrt{26}}{13}$.

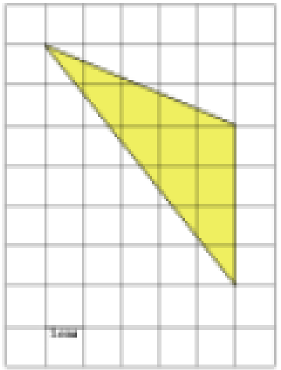
3. На стороне CD параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E. Найдите площадь параллелограмма, если площадь треугольника AEB равна 34.



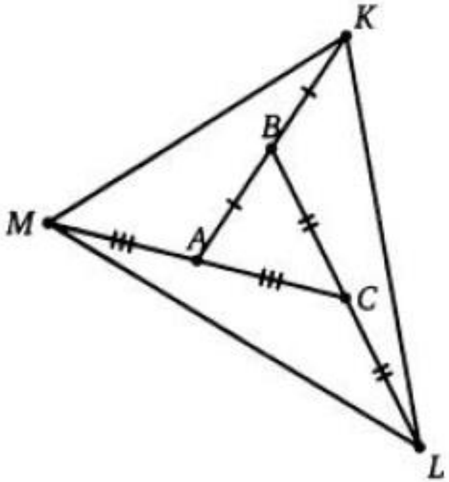
4. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 10. На его сторонах AB, BC и CD выбраны точки P, Q, R соответственно так, что $AP=1$, $BQ=2$ и $DR=3$. Найдите площадь треугольника PQR.



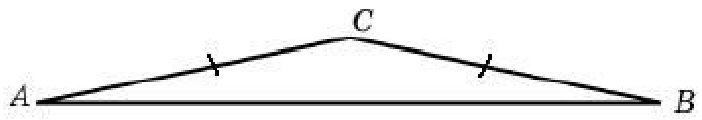
Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см $\times$ 1 см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



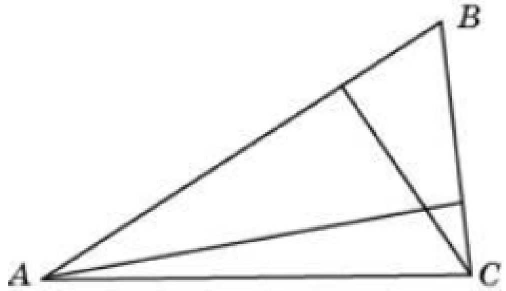
8. Дан треугольник ABC площади 1. На продолжении его стороны AB за точку B выбрана точка K так, что $AB=BK$. На продолжении BC за точку C выбрана точка L так, что $BC=CL$, а на продолжении CA за точку A — точка M так, что $CA=AM$. Найдите площадь треугольника KLM.



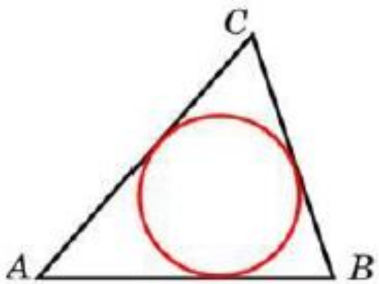
Угол при вершине, противолежащей основанию равнобедренного треугольника, равен 150°. Найдите боковую сторону треугольника, если его площадь равна 1521.



В треугольнике со сторонами 56 и 7 проведены высоты к этим сторонам. Высота, проведённая к первой их этих сторон, равна 9. Чему равна высота, проведённая ко второй стороне?



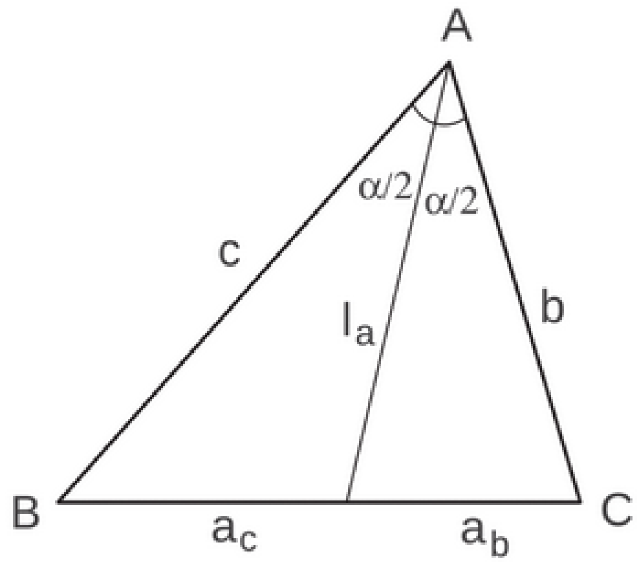
Периметр треугольника равен 48, а радиус вписанной окружности равен 5. Найдите площадь этого треугольника.



Медиана. Биссектриса

Теорема о биссектрисе. Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам:

$$\frac{a_b}{a_c} = \frac{b}{c}.$$



Формулы длины биссектрисы:

$$l_a = \frac{2bc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}, \quad l_a^2 = bc - a_b a_c.$$

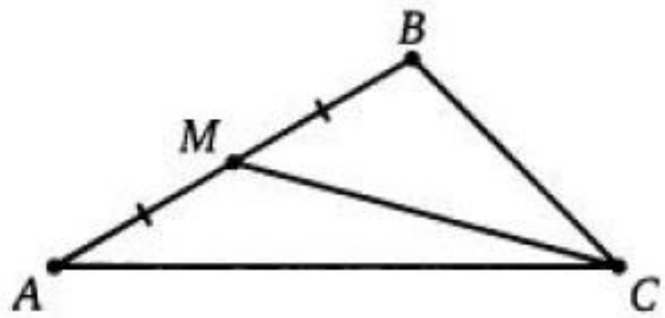
Формула длины медианы: $m_a^2 = \dfrac{b^2+c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4}.$

Задачи:

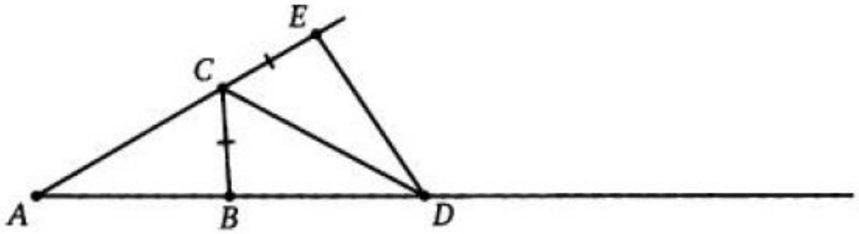
В окружность радиуса $4\sqrt{3}$ вписан треугольник ABC, в котором $\angle A = 60°$, а сторона AB в два раза больше стороны AC. В треугольнике проведена биссектриса AM. Найдите длину отрезка MC.

7. В треугольнике ABC известно, что $AB = 6$, $BC = 9$, а $\angle CAB = 2\angle ACB$. Найдите длину биссектрисы AL этого треугольника.

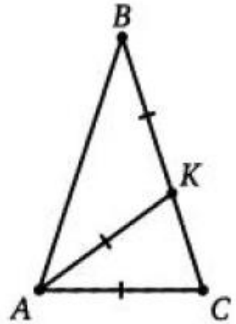
8. В треугольнике ABC, в котором $\angle A = 30°$ и $\angle B = 105°$, проведена медиана CM. Найдите $\angle MCA$. Ответ дайте в градусах.



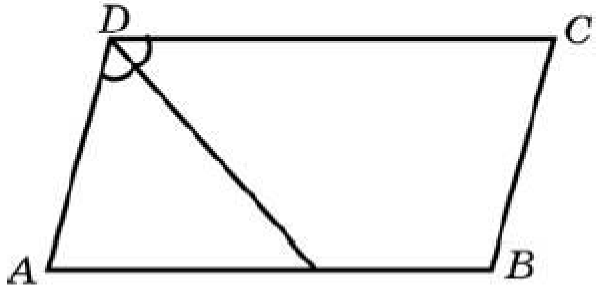
3. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 30°$ и $\angle B = 86°$. CD — биссектриса внешнего угла при вершине C, причём D лежит на прямой AB. На продолжении стороны AC за точку C выбрана точка E так, что $CB = CE$. Найдите $\angle ADE$. Ответ дайте в градусах.



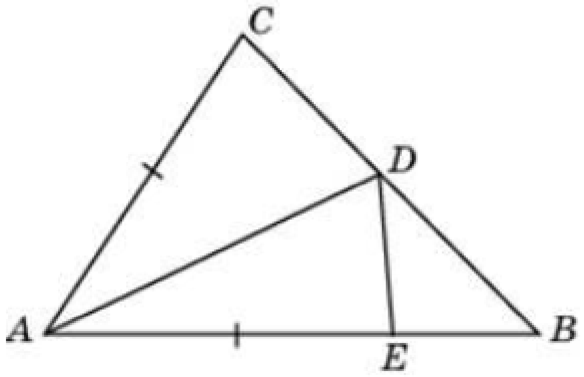
4. На боковой стороне CB равнобедренного ($AB = BC$) треугольника ABC выбрана точка K. Оказалось, что $CA = AK = KB$. Найдите $\angle ABC$. Ответ дайте в градусах.



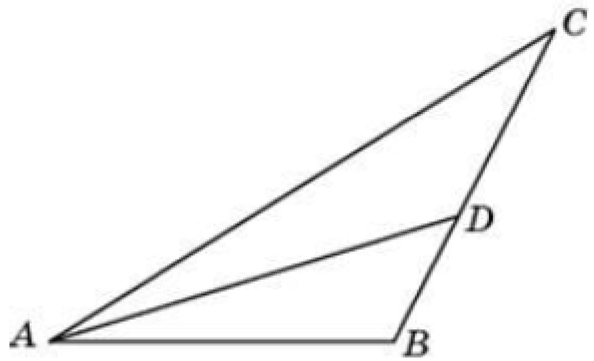
Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 1 : 3, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 65.



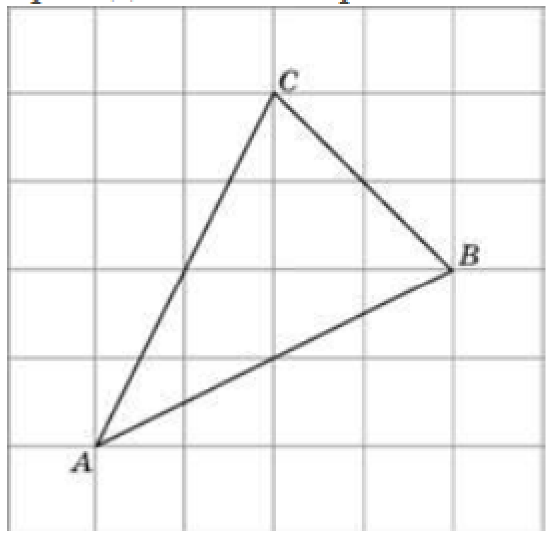
В треугольнике ABC угол B равен 29°, угол C равен 63°, AD – биссектриса, E – такая точка на AB, что AE = AC. Найдите угол BDE. Ответ дайте в градусах.



В треугольнике ABC угол C равен 77°, AD – биссектриса, угол BAD равен 45°. Найдите угол ADB. Ответ дайте в градусах.

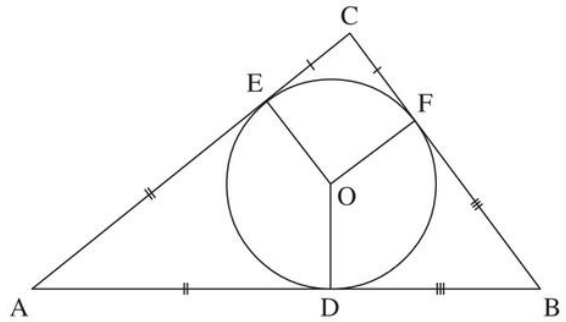


На клетчатой бумаге с размером клетки 1 × 1 изображён треугольник ABC. Найдите длину его медианы, проведённой из вершины C.



Вписанная окружность

В произвольный треугольник можно вписать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения биссектрис внутренних углов треугольника, причем всегда расположен внутри треугольника.



Теорема. *Длина любого из отрезков, на которые стороны треугольника разбиваются точками их касания с вписанной в этот треугольник окружностью, может быть вычислена как разность полупериметра треугольника и длины стороны треугольника, не содержащей ни один из концов этого отрезка:*

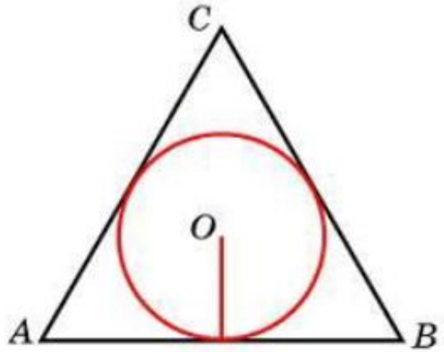
$$|AD| = |AE| = \frac{|AB| + |AC| - |BC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |BC|;$$

$$|BD| = |BF| = \frac{|AB| + |BC| - |AC|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AC|;$$

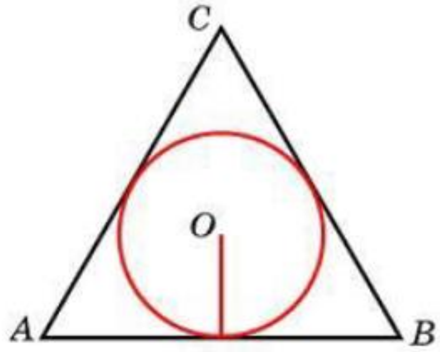
$$|CE| = |CF| = \frac{|AC| + |BC| - |AB|}{2} = p_{\triangle ABC} - |AB|.$$

Задачи:

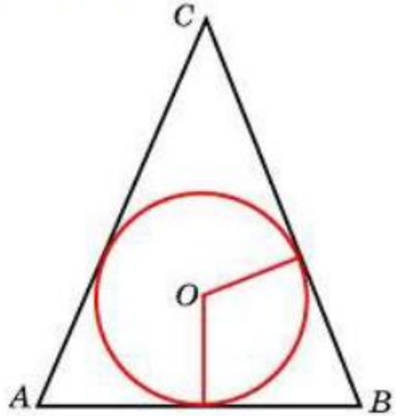
Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 38. Найдите высоту этого треугольника.



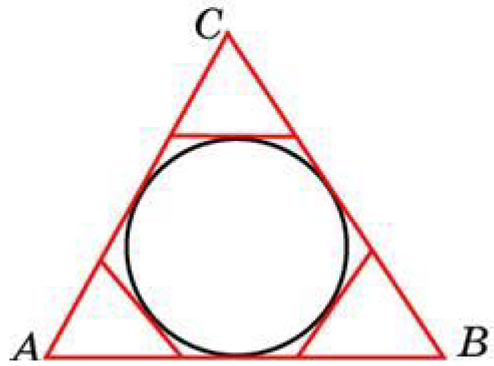
Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен $\frac{67\sqrt{3}}{6}$. Найдите сторону этого треугольника.



Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 18 и 2, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.

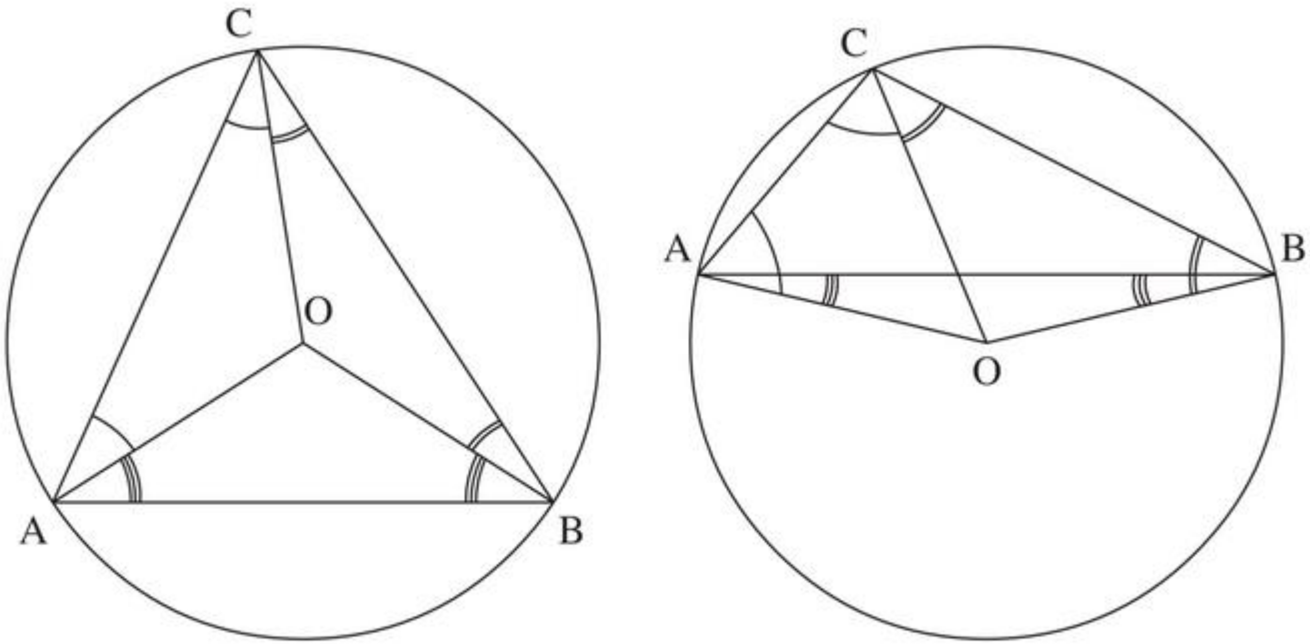


К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 10, 23, 34. Найдите периметр данного треугольника.



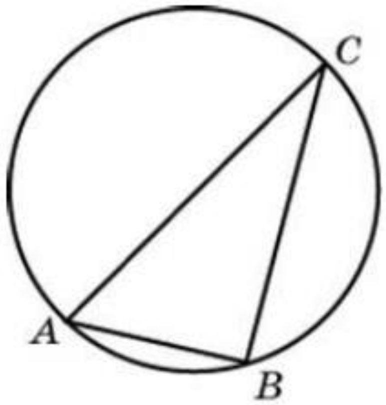
Описанная окружность

Около произвольного треугольника можно описать окружность, причем только одну. Центр этой окружности лежит в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, причем расположен вне треугольника, если треугольник тупоугольный, и внутри треугольника, если треугольник остроугольный.

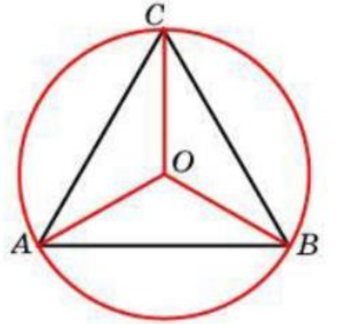


Задачи:

Угол C треугольника ABC, вписанного в окружность радиуса 29, равен 30°. Найдите сторону AB этого треугольника.



Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, равен $38\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.



Сторона AB тупоугольного треугольника ABC равна радиусу описанной около него окружности. Найдите угол C. Ответ дайте в градусах.