1. Решение простейших тригонометрических уравнений. Задание 5

Уравнение $\sin x = a$

Если $|a| > 1$, то решений нет.

Если $|a| \le 1$, то общее решение

$$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n, \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$$

или

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи:

$\sin x = -1$ $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = 0$ $x = \pi n, n \in Z$

$\sin x = 1$ $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

Уравнение $\cos x = a$

Если $|a| > 1$, то решений нет.

Если $|a| \le 1$, то общее решение

$$\left[\begin{array}{l} x = \arccos a + 2\pi n, \\ x = -\arccos a + 2\pi n, \end{array}\right. n \in Z$$

или

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Частные случаи:

$\cos x = -1 \; x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = 0 \; x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 1 \; x = 2\pi n, n \in Z$

<u>Уравнение</u> $\operatorname{tg} x = a$

Для любого $a \in R$ общеерешение

$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \; n \in Z$.

Частные случаи:

$\operatorname{tg} x = -1 \; x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = 0 \; x = \pi n, n \in Z$

$\operatorname{tg} x = 1 \; x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

Задачи:

Найдите корень уравнения $\cos \dfrac{\pi(x-7)}{3} = \dfrac{1}{2}$.
В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

Найдите корень уравнения $\operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

Найдите корень уравнения $\sin \dfrac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n \\ x = -y + \pi(1+2n) \end{array}\right., n \in Z$
$\cos x = \cos y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y + 2\pi n \\ x = -y + 2\pi n \end{array}\right., n \in Z$
$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y + \pi n, \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n \end{array}\right., n \in Z$
$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} y \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = y + \pi n, \\ x \neq \pi n, \end{array}\right. n \in Z$

$$\boldsymbol{sinx = sin4x},$$

$$\boldsymbol{cos2x = cos5x},$$

$$\boldsymbol{sinx = -cos3x}.$$

2. Тригонометрические уравнения. Основные типы. Задание 13

1. Решение уравнений методом разложения на множители.

Пример 5. Решите уравнение $2\cos^2 7x - \cos 7x = 0$ **.**

Р е ш е н и е .

$$2\cos^2 7x - \cos 7x = 0 \Leftrightarrow \cos 7x(2\cos 7x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 7x = 0 \\ \cos 7x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n \\ 7x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi n \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi}{7}n \\ x = \pm\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi}{7}n, \end{array}\right. \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{14} + \dfrac{\pi}{7}n; \pm\dfrac{\pi}{21} + \dfrac{2\pi}{7}n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Пример 6. Решите уравнение $1 + \sin x \ \cos 2x = \sin x + \cos 2x$ **.**

Р е ш е н и е .

Сгруппируем слагаемые и разложим на множители:

$$1 + \sin x \ \cos 2x = \sin x + \cos 2x \Leftrightarrow 1 - \cos 2x + \sin x(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 - \cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos 2x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ x = \pi k, \end{array}\right. , k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ \pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

2. Решение уравнения, сводящегося к квадратному

Пример 8. Решите уравнение $3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$.

Решение. Сделав замену $y = \cos x$, решим полученное квадратное уравнение:

$$3y^2 - 10y + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{5+4}{3} \\ y = \dfrac{5-4}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3 \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Выполняя обратную замену, получим, что уравнение

$$3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0$$

равносильно совокупности простейших уравнений:

$$3\cos^2 x - 10\cos x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 3 \\ \cos x = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}$.

***Пример 9.* Решите уравнение**

$$\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0.$$

Ответ: $(-1)^n \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

3. Решение однородных уравнений

$a\sin x + b\cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени,

$a\sin^2 x + c\sin x\cos x + b\cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени,

$a\sin^3 x + c\sin^2 x\cos x + d\sin x\cos^2 x + b\cos^3 x = 0$ – однородное уравнение третьей степени.

Задача:

. Дано уравнение

$\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Пример 44. *Решить уравнение*

$$10\cos^2 x - 5\sin 2x = 4.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения, воспользовавшись тождествами: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$, $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Последовательно имеем:

$$10\cos^2 x - 5\sin 2x = 4;$$

$$10\cos^2 x - 5 \cdot 2\sin x\cos x = 4(\sin^2 x + \cos^2 x);$$

$$2\sin^2 x + 5\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Заметим, что среди значений x, для которых $\cos x = 0$, корней уравнения нет, поскольку, если $\cos x = 0$, то из уравнения следует, что и $\sin x = 0$, а одновременно эти два равенства выполняться не могут. Значит, можно разделить обе части уравнения на $\cos^2 x$, не опасаясь потери корней. После деления получим уравнение

$$2\,\mathrm{tg}^2 x + 5\,\mathrm{tg}\, x - 3 = 0.$$

Решив его как квадратное относительно $\mathrm{tg}\, x$, найдем: $\mathrm{tg}\, x = 0{,}5$, $\mathrm{tg}\, x = -3$, откуда $x = \mathrm{arctg}\, 0{,}5 + \pi n$, $x = -\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\, 0{,}5 + \pi n$, $-\mathrm{arctg}\, 3 + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}$.

Линейные уравнения вида
$a\cos x + b\sin x = c$

Если $a = 0, b \neq 0$ или $a \neq 0, b = 0$, то линейное уравнение $a\cos x + b\sin x = c$ приводится к простейшему уравнению $\sin x = \frac{c}{b}$ или $\cos x = \frac{c}{a}$.

Если a и b отличны от нуля, то данное линейное уравнение преобразуется к простейшему ***методом введения вспомогательного угла***. Рассмотрим этот метод на примерах.

Пример 35. *Решить уравнение*

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin x - \frac{1}{2}\cdot\cos x = 1;$$

$$\cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = 1;$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

Отсюда получаем $x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ или $x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, где $m \in \mathbf{Z}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $m \in \mathbf{Z}$.

Пример 36. *Решить уравнение*

$$3\cos x + 4\sin x = 2.$$

Решение. Данное уравнение равносильно следующим:

$$\underbrace{\sqrt{3^2+4^2}}_{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\cdot\cos x + \frac{4}{5}\cdot\sin x\right) = 2;$$

$$\frac{3}{5}\cdot\cos x + \frac{4}{5}\cdot\sin x = \frac{2}{5}.$$

Последнее уравнение представим в виде

$$\cos\varphi\cdot\cos x + \sin\varphi\cdot\sin x = \frac{2}{5},$$

где $\varphi = \arccos\frac{3}{5}$. Отсюда получаем

Задача 13.

13. Дано уравнение $\sqrt{3}\cos 2x - 7\sin x - 3\sqrt{3} = 0$.

А) Решите уравнение.

Б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

13. Дано уравнение $\dfrac{\sin(2x-132\pi)-\cos x-2\sqrt{2}\sin x+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\mathrm{tg}(132\pi+2x)}=0$

а) Решите уравнение.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{19\pi}{2};\ -4\pi\right]$.

$$\cos(x-\varphi)=\frac{2}{5}.$$

Его решения имеют вид

$$x-\varphi=\pm\arccos\frac{2}{5}+2\pi n,\quad n\in\mathbf{Z}.$$

Подставляя $\varphi=\arccos\frac{3}{5}$, имеем

$$x=\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbf{Z}.$$

Ответ: $\pm\arccos\frac{2}{5}+\arccos\frac{3}{5}+2\pi n$,

$n\in\mathbf{Z}$.