МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП 2019

школьная олимпиада математического факультета ТвГУ

9-10 классы

РЕШЕНИЯ

Задача 1. (4 балла) Найти сумму

$$\frac{2018}{1\cdot 3}+\frac{2018}{3\cdot 5}+...+\frac{2018}{2017\cdot 2019}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ при любом $k\in\mathbb{N}$. Следовательно

$$\frac{2018}{1\cdot 3}+\frac{2018}{3\cdot 5}+...+\frac{2018}{2017\cdot 2019}=$$
$$=\frac{2018}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}...+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2019}\right)=$$
$$\frac{2018}{2}\left(1-\frac{1}{2019}\right)=\frac{1009\cdot 2018}{2019}.$$

Ответ: $\frac{1009\cdot 2018}{2019}$.

Задача 2. (4 балла) Решить неравенство

$$\sqrt{-2x-4}-\sqrt{x^2-2x-8}\geq x^2-4. \qquad (*)$$

Решение. Область допустимых значений рассматриваемого неравенства определяется из условий

$$\begin{cases} -2x-4\geq 0,\\ x^2-2x-8\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\leq -2.$$

Таким образом, решения следует искать среди $x\leq -2$. При $x=-2$ обе части неравенства (*) обращаются в 0.

Покажем, что других решений данное неравенство не имеет. Пусть $x<-2$.

Заметим, что (*) можно преобразовать к виду

$$\sqrt{-2x-4}-\sqrt{x^2-2x-8}\geq x^2-2x-8-(-2x-4),\quad \text{т.е.}\quad \sqrt{a}-\sqrt{b}\geq b-a, \qquad (**)$$

где $a=-2x-4$, $b=x^2-2x-8$. Нетрудно убедиться, что $b-a=x^2-4>0$ при $x<-2$, т.е. $a<b$. Левая часть (**) при этом становится отрицательной, а правая – положительной. Поэтому неравенство (**) не имеет решений за исключением $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

Задача 3. (4 балла) Доказать, что для любого простого числа $p>100$ число p^2+2 является составным.

Решение. Пусть $p>100$ – простое число. Значит p не делится на 3 и может давать остатки 1 или 2 при делении на 3, т.е. $p=3k+l$, где l равно 1 или 2. Тогда

$p^2 + 2 = (3k + l)^2 + 2 = 9k^2 + 6kl + l^2 + 2$. Первые два слагаемых в этом выражении делятся на 3. Сумма последних двух слагаемых $l^2 + 2$ может принимать значения 3 или 6, если l равно 1 или 2. Таким образом, l^2+2 также делится на 3 и всё выражение $p^2 + 2$ делится на 3 и не может быть простым числом.

Задача 4. (4 балла) Доказать, что

$$1 + x + x^2 + ... + x^{2018} > 0$$

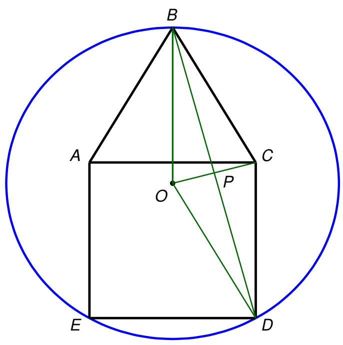
при всех значениях x.

Решение. Если $x = 1$, то неравенство очевидно. Пусть $x \neq 1$. Используя формулу суммы геометрической прогрессии, находим, что

$$1 + x + x^2 + ... + x^{2018} = \frac{1 - x^{2019}}{1 - x}.$$

Остаётся заметить, что числитель и знаменатель последней дроби имеют одинаковые знаки при любом $x \neq 1$. Поэтому $(1 - x^{2019})/(1 - x) > 0$.

Задача 5. (4 балла) Составленный из равностороннего треугольника и квадрата "домик" вписан в окружность (см. рисунок). Сторона квадрата равна a. Найти длину описанной окружности.



Решение. Обозначим A, B, C — вершины треугольника, A, C, D, E — вершины квадрата, O — центр описанной окружности. Проведем отрезки OB, OC и OD. Треугольники OBC и ODC равны по трем сторонам (OC — общая сторона; OB и OD — радиусы окружности, то есть $OB = OD = R$; BC и CD равны a) и симметричны относительно OC. Следовательно, отрезок BD перпендикулярен OC, и BP — высота треугольника OBC.

В равнобедренном треугольнике BCD тупой угол $\angle BCD = 60° + 90° = 150°$, поэтому острый угол $\angle PBC = \angle PDC = (180° - 150°)/2 = 15°$. Но угол $\angle OBC$ равен $30°$ как половина угла равностороннего треугольника. Следовательно, угол $\angle OBP$ также равен $15°$, а значит BP является одновременно высотой и биссектрисой треугольника OBC, что доказывает его равнобедренность: $OB = BC$, то есть радиус описанной окружности R равен a, а ее длина равна $2\pi a$.

Ответ: $2\pi a$.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП 2019

школьная олимпиада математического факультета ТвГУ

11 класс

РЕШЕНИЯ

Задача 1. (4 балла) Найти сумму

$$\frac{2018}{1\cdot 3}+\frac{2018}{3\cdot 5}+...+\frac{2018}{2017\cdot 2019}.$$

Решение. Заметим, что $\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$ при любом $k\in\mathbb{N}$. Следовательно

$$\frac{2018}{1\cdot 3}+\frac{2018}{3\cdot 5}+...+\frac{2018}{2017\cdot 2019}=$$
$$=\frac{2018}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}...+\frac{1}{2016}-\frac{1}{2017}+\frac{1}{2017}-\frac{1}{2019}\right)=$$
$$\frac{2018}{2}\left(1-\frac{1}{2019}\right)=\frac{1009\cdot 2018}{2019}.$$

Ответ: $\frac{1009\cdot 2018}{2019}$.

Задача 2. (4 балла) Решить неравенство

$$\sqrt{-2x-4}-\sqrt{x^2-2x-8}\geq x^2-4. \qquad (*)$$

Решение. Область допустимых значений рассматриваемого неравенства определяется из условий

$$\begin{cases} -2x-4\geq 0,\\ x^2-2x-8\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\leq -2.$$

Таким образом, решения следует искать среди $x\leq -2$. При $x=-2$ обе части неравенства (*) обращаются в 0.

Покажем, что других решений данное неравенство не имеет. Пусть $x<-2$.

Заметим, что (*) можно преобразовать к виду

$$\sqrt{-2x-4}-\sqrt{x^2-2x-8}\geq x^2-2x-8-(-2x-4),\quad \text{т.е.}\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\geq b-a, \qquad (**)$$

где $a=-2x-4$, $b=x^2-2x-8$. Нетрудно убедиться, что $b-a=x^2-4>0$ при $x<-2$, т.е. $a<b$. Левая часть (**) при этом становится отрицательной, а правая – положительной. Поэтому неравенство (**) не имеет решений за исключением $x=-2$.

Ответ: $x=-2$.

Задача 3. (4 балла) Найти все простые числа p, для которых число p^4+8 также является простым.

Решение. Пусть $p\neq 3$ – простое число. Число p не делится на 3 и может давать остатки 1 или 2 при делении на 3, т.е. $p=3k+l$, где l равно 1 или 2. Тогда $p^4+8=$

$(3k+l)^4+8 = 81k^4+4\cdot 27k^3l+6\cdot 9k^2l^2+4\cdot 3kl^3+l^4+8$. Первые четыре слагаемых в этом выражении делятся на 3. Сумма последних двух слагаемых l^4+8 может принимать значения 9 или 24, если l равно 1 или 2. Таким образом, l^4+8 также делится на 3 и всё выражение p^4+8 делится на 3 и не может быть простым числом. Следовательно, никакое простое число $p > 3$ не удовлетворяет требуемому условию.

Остается заметить, что при $p = 3$ число $p^4 + 8 = 89$ является простым.

Ответ: $p = 3$.

Задача 4. (4 балла) Найти максимум функции $z = 3x + y$ при условии, что $y \leq -|8 - 4x|$.

Решение. Из условия задачи следует, что $y \leq -|8-4x|$ и

$$z = 3x + y \leq 3x - |8 - 4x|.$$

Найдём максимум функции $u(x) = 3x - |8 - 4x|$. Рассмотрим два случая:

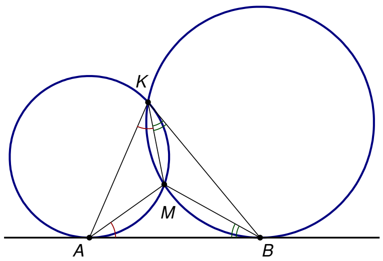
а). Пусть $x < 2$. Тогда $u(x) = 7x - 8$. В этом случае $u(x) < u(2) = 6$.

б). Пусть $x \geq 2$. Тогда $u(x) = 8 - x$. В этом случае $u(x) \leq u(2) = 6$.

Следовательно, $z = 3x + y \leq u(x) \leq u(2) = 6$. Остается заметить, что при $x = 2$, $y = 0$ условие $y \leq -|8 - 4x|$ выполнено и $z = 6$.

Ответ: Максимум z равен 6 и достигается при $x = 2$, $y = 0$.

Задача 5. (4 балла) Две окружности пересекаются в двух точках K и M. Прямая касается обеих окружностей в точках A и B (см. рисунок). Доказать, что сумма углов $\angle AKB$ и $\angle AMB$ равна 180 градусов.



Решение. Проведем отрезок KM. Заметим, что вписанный угол $\angle AKM$ равен половине дуги AM и равен углу $\angle MAB$ между касательной AB и хордой AM, поскольку угол между хордой и касательной к окружности, проведённой через конец хорды, равен половине дуги, лежащей внутри этого угла, т.е. дуги AM. Обозначим $\alpha = \angle AKM = \angle MAB$. Аналогично, углы $\angle MKB$ и $\angle MBA$ равны как вписанный угол и угол между касательной и хордой, опирающейся на дугу MB второй окружности, следовательно $\angle MKB = \angle MBA = \beta$.

Угол $\angle AKB$ равен $\angle AKB = \angle AKM + \angle MKB = \alpha + \beta$. Угол $\angle AMB$ выразим из треугольника AMB: $\angle AMB = 180° - \angle MAB - \angle MBA = 180° - \alpha - \beta$. Следовательно, их сумма $\angle AKB + \angle AMB = \alpha + \beta + 180° - \alpha - \beta$ равна $180°$.