Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Тверская региональная общественная организация
«Ассоциация учителей и преподавателей математики
Тверской области»

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТВЕРИ И ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ

Материалы
Второй Всероссийской научно-практической конференции

Тверь, 21 апреля 2018 года

ТВЕРЬ 2018

УДК 373.5.016:5(082)
ББК Ч 426.221я43
П27

П27 Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы Второй Всероссийской научно-практ. конф. (21 апреля 2018 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2018. – 235 с.
ISBN 978-5-7609-1352-4

В сборнике трудов представлены материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 21 апреля 2018 г. в г. Твери. Организаторами конференции выступили математический факультет Тверского государственного университета и Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области».

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

УДК 373.5.016:5(082)
ББК Ч 426.221я43

Материалы издаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-7609-1354-4

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 378

ПРОЕКТНЫЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ» СТУДЕНТАМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Светлана Александровна Акимова
Саратовский социально-экономический институт (филиал)
РЭУ им. Г.В. Плеханова, Саратов
E-mail: akimovasa@yandex.ru

Ключевые слова: *компетентностный подход, метод проектов, дифференциальные уравнения, задачи математической экологии.*

Аннотация. В работе описана реализация проектного подхода в обучении. Приведен пример междисциплинарного учебного проекта для студентов математических специальностей.

В соответствии с документом «Инновационная Россия – 2020» повышение качества образования и прикладных исследований − одна из главных задач учебного заведения [1]. Модернизация российского образования, введение стандартов ФГОС 3+ ВО ориентированы на реализацию компетентностного подхода в образовании, на формирование ключевых компетентностей, т.е. готовности обучающихся использовать усвоенные знания, умения и навыки, а также способы деятельности в жизни для решения практических и теоретических задач. Таким образом, основным принципом обучения является освоение знаний через их практическое применение, т.е. формирование компетентностей [2].

Применение методов проектного обучения важно для обеспечения формирования у студентов комплекса общекультурных (универсальных), профессиональных и профильных компетенций. К основным видам проектной деятельности относятся исследовательские проекты, практико-ориентированные проекты с участием работодателей и бизнеса, а также творческие проекты.

Отличительная черта проектной деятельности – самостоятельная исследовательская работа по определенной проблеме, т.е. поиск определенной информации, которая затем будет обработана, осмыслена и представлена участником (или участниками проектной группы по 3-4 человека). Результатом работы над проектом, иначе говоря, выходом проекта, является продукт. Подготовленный продукт требует презентации, представленной достаточно убедительно, как наиболее приемлемое средство решения поставленной проблемы.

Любой проект, независимо от типа, имеет одинаковую структуру - это: проблема (проблемная ситуация); проектирование (планирование, поиск способов решения); поиск информации (исследовательская, поисковая деятельность); продукт (оформление результатов); презентация (защита проекта); прогнозирование новых проблем [3; 4].

В целом учебный проект направлен на обучение планированию, развитию критического и творческого мышления, умению работать с информацией, формированию коммуникативных компетенций и позитивного отношения к работе.

Примером проектной работы студентов направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика и студентов других математических направлений (специальностей) в рамках дисциплины «Дифференциальные и разностные уравнения» может служить численное решение задачи математической экологии (система Лотки-Вольтерры «хищник-жертва») с использованием современных информационных технологий.

Рассматривается математическая модель совместного существования двух биологических видов (популяций), один из которых является хищником, а другой – жертвой (например, экологическая система караси-щуки или лисы-зайцы), называемая моделью Лотки-Вольтерры.

Пусть два биологических вида совместно обитают в изолированной среде, где у жертвы есть все необходимые условия для существования, а хищник питается только животными [5]. Тогда математическая модель будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = ax - bxy, \; a,b > 0, \\ \dfrac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dt}} = cxy - py, \; c, p > 0. \end{cases} \tag{1}$$

где x – число жертв, y – число хищников в момент времени t; a – коэффициент естественного прироста жертвы (без учета поедания ее хищником); b и c – коэффициенты, характеризующие скорость поедания жертвы хищником и обусловленную этим скорость изменения плотности хищника; p – коэффициент смертности хищника.

Тема проекта требует привлечения знаний студентов не только по дисциплине «Дифференциальные и разностные уравнения», но и по дисциплинам «Численные методы» и «Программирование», а также исследовательских навыков.

Цели данного проекта: освоение студентами методов анализа фундаментальных понятий экологии с абстрактно-математической точки зрения; построение соответствующей математической модели с использованием дифференциальных уравнений; применение методов численного решения математических задач с использованием компьютерной техники; развитие умения критически мыслить, планировать свою деятельность, прогнозировать ее результаты; формирование опыта самостоятельной продуктивной деятельности и личной ответственности, умения работать в коллективе.

Во-первых, студентам необходимо выбрать экологическую систему для проведения исследования. Например, популяции лисиц и зайцев на территории природного парка «Кумысная поляна» (г. Саратов). Главной задачей является прогнозирование численности обеих популяций в будущем. Особое значение такие исследования приобретают, если они проводятся на заповедных территориях.

Во-вторых, составить математическую модель системы «хищник-жертва». (В итоге должны получить систему из двух дифференциальных уравнений (1)) [6]. Исходя из реальных данных, определить числовые коэффициенты (параметры модели). Поиск дополнительной информации и исходных данных возможно проводить в сети Интернет [7].

В-третьих, изменяя параметры модели, решить систему уравнений в электронных таблицах MS Excel, написать консольное приложение на языке C++.

Далее необходимо оценить границы применимости разных методов решения, погрешность и выбрать оптимальный метод [8]. Рационально использовать метод Рунге-Кутта.

На следующем этапе проекта необходимо исследовать закономерности изменения состояния экологической системы, найти зависимость численности жертвы и хищника от времени в течение, например, 10, 20, 50 лет. Построить фазовый портрет системы на плоскости. Проинтерпретировать полученные результаты, сделать выводы.

В силу структурной неустойчивости системы количественный анализ имеет мало практической пользы. С другой стороны, система позволяет сделать нетривиальные качественные выводы, подтверждаемые многочисленными наблюдениями.

Студентам рекомендуется аналитически обосновать следующий эффект: если в системе «хищник-жертва» оба вида истребляются равномерно и пропорционально числу их индивидуумов, то среднее число «жертв» возрастает, а среднее число «хищников» убывает (Принцип Вольтерры).

Обучающиеся должны привести примеры, в каких ситуациях описанный выше эффект наблюдается в природе. Например, двойственный характер применения средств от насекомых на полях.

Данный семестровый учебный проект выполняется в течение 2 практических занятий и во время самостоятельной внеаудиторной работы. Графически схему проекта можно представить с помощью ментальной карты, выполненной, например, в MindMup. Сетевой социальный сервис Web 2.0 MindMup рекомендуется использовать для ведения проектов. Ментальная карта позволяет чётко видеть ресурсы, задачи, сроки, способы реализации, сложные моменты и варианты их решения. Желательно коллективная Интернет-разработка ментальной карты студентами во время самостоятельной работы с использованием сервиса MindMup. Составление ментальной карты способствует лучшему пониманию проблемы, а также связей между конкретными задачами проекта.

Результат выполнения проекта должен быть представлен презентацией MS Power Point или презентацией, созданной с помощью сервиса Google Docs, книгой MS Excel с результатами вычислений, консольным приложением, портфолио – письменным отчетом о результатах работы, ментальной картой.

Рефлексия по итогам выполнения всего проекта и отдельных его этапов полезна с целью формирования умения делать выбор и осмыслять как последствия данного выбора, так и результаты собственной деятельности. Результат рефлексии может быть представлен участниками в документе для совместного редактирования в Google Docs. Удобство использования данного сервиса в возможности как индивидуальной, так и коллективной работы с документами в ВУЗе, из дома, на отдыхе.

В конце семестра проводится конкурс проектов. При оценивании результатов проектной деятельности следует учесть: активность каждого студента в соответствии с его возможностями; коллективный характер принимаемых решений; характер общения и взаимопомощи участников проекта; умение отвечать на вопросы, лаконичность и аргументированность ответов каждого члена группы; необходимая и достаточная глубина проникновения в проблему, привлечение знаний из других областей; доказательность принимаемых решений, выводы; эстетика оформления результатов выполненного проекта.

Таким образом, работа над проектами позволяет:

расширять представления о современном состоянии науки и практики; ориентироваться в информационном пространстве;

развивать умения критически мыслить, планировать и контролировать свою деятельность, прогнозировать ее результаты, в том числе в новых неизвестных условиях;

формирует опыт самостоятельной продуктивной деятельности и личной ответственности, умения работать в коллективе, т.е. способствует профессионально-личностному росту студента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Инновационная Россия – 2020» (Стратегия инновационного развития Российской Федерации на период до 2020 года): [Электронный ресурс]. URL http://www.gosbook.ru/node/13852

2. Безруков А.И., Акимова С.А., Погожильская Г.Г. Имитационная модель для оценки достоверности и точности результатов тестирования // В сборнике: Математическое моделирование и информационные технологии в исследованиях по физике и педагогике, Саратов, 2017. – С. 8-15.

3. Гузеев В.В. Планирование результатов образования и образовательная технология. М.: Народное образование, 2000.

4. Джонсонс Дж. К. Методы проектирования. М., 1986.

5. Кемени Дж., Снелл Дж. Кибернетическое моделирование. Нью-Йорк, 1963−1970. // Пер. с англ. Б.Г. Миркина. Под ред. И.Б. Гутчина. М.: Изд-во «Советское радио», 1972.

6. Дифференциальные уравнения: учеб. пособие/ сост. С.А. Акимова/ Саратовский государственный социально-экономический университет. – Саратов, 2011.

7. Гурьянов В.В., Мельникова Н.И., Мещерякова О.В., Папшев С.В., Сагаева И.Д. Информационные технологии и ресурсы глобальных сетей. Ч.1 Основы работы локальных и глобальных сетей. – Саратов, 1996.

8. Малышева Л.В. Использование информационных технологий при обработке результатов научных вычислений // В сборнике: Современные проблемы и тенденции развития внутренней и внешней торговли, Саратов, 2013. – С. 246-251.

УДК 159.99

О НЕОБХОДИМОСТИ ПСИХОЛОГИЧЕСКОГО СОПРОВОЖДЕНИЯ ОДАРЕННЫХ ДЕТЕЙ

Екатерина Арсеньевна Андреева
МОУ СОШ №1, Тверь
E-mail: tverea@yandex.ru

Ключевые слова: *одаренные дети, психологическое сопровождение, эмоциональная устойчивость, саморегуляция, стресс.*

Аннотация. В работе рассматриваются цели и задачи психологического сопровождения одаренных детей, методы выявления таких детей и их категории.

Я работаю в школе учителем информатики с сентября 1992 года. Поэтому я хорошо знакома с работой школьных психологов. Бывало, что я предлагала сходить к ним некоторым из своих учащихся. Иногда сами психологи просили разрешения взять к себе на беседу с урока кого-то из детей (по просьбе классного руководителя или родителей).

Как правило, классные руководители или родители хотят, чтобы психолог провел работу с «трудными детьми», то есть такими, у которых есть проблемы с успеваемостью или поведением. Имеющие успехи в учебе, участвующие в различных конкурсах и олимпиадах одаренные дети не считаются в «трудными» в школе. Поэтому психологи обращают на них внимание в редких случаях.

А между тем, именно успехи в учебе и исследовательской деятельности неразрывно связаны с тонкой и подвижной нервной организацией одаренного ребенка. В тепличных условиях школьной жизни не всегда заметно, кто из одаренных детей способен выдержать психические и эмоциональные перегрузки, а кто – нет. Как правило, выясняется это только тогда, когда такой одаренный ребенок поступает в престижный вуз, находящийся далеко от дома. Для многих одаренных детей этот престижный вуз, в который они так стремились, и к поступлению в который они так готовились, оборачивается своеобразным «интеллектуальным ГУЛАГом». Нередко их учеба там оставляет неизгладимый след на всю жизнь в виде психологической травмы или, хуже, в виде психосоматического заболевания.

Я помню, как один из очень опытных учителей математики рассказывал мне, что за время работы в школе восемь из его учеников поступили на механико-математический факультет Московского государственного университета имени Ломоносова. Из них закончили учебу и получили диплом только трое. Из этих троих относительно здоровым остался только один. Двоим приходилось во время учебы брать академический отпуск по состоянию здоровья.

Возможно, такой ситуации можно было бы избежать или, по крайней мере, ее можно было бы смягчить, если бы с этими одаренными детьми еще в школьном возрасте были проведены психологами занятия по развитию эмоциональной устойчивости, формированию навыков саморегуляции и преодоления стресса, то есть, если бы в течение всей школьной жизни эти дети имели бы соответствующее психологическое сопровождение.

Цель психологического сопровождения: содействие в выявлении, поддержке и развитии талантливых детей, их самореализации, профессиональном самоопределении, сохранении психологического и физического здоровья.

Задачи:

- совместно с другими специалистами учреждения образования определение критериев одаренных детей; выявление одаренных школьников;
- содействие формированию позитивной концепции своего «Я» (самопринятия, самоуважения) у одаренных детей;
- развитие эмоциональной устойчивости, формирование навыков саморегуляции, преодоления стресса (в том числе во время учебы, конкурсов, олимпиад, экзаменов) у одаренных школьников.

Методы выявления одаренных детей:

- наблюдение;
- общение с родителями;
- работа психолога (тестирование, анкетирование);
- олимпиады, конкурсы, соревнования.

Можно выделить следующие категории одаренных детей:

- учащиеся с очень высоким общим уровнем умственного развития (выявляются в младшем школьном возрасте);
- учащиеся с признаками особой умственной одаренности в определенной области науки или деятельности (выявляются в младшем школьном и подростковом возрасте);
- учащиеся, не достигающие особых успехов в учебе, но проявляющие большую познавательную активность и оригинальность мышления (обычно выявляются в подростковом и старшем школьном возрасте).

Проблемы одаренных детей

Неприязнь к школе

Часто появляется от того, что учебная программа скучна и неинтересна для одаренных школьников. Несоответствие учебной программы способностям детей может приводить к нарушениям в поведении.

Неприятие конформизма

Одаренные дети часто не склонны к конформизму и отвергают общепринятые требования, особенно, если они идут вразрез с их интересами.

Несоответствие между физическим, интеллектуальным и социальным развитием

Одаренные дети часто предпочитают общаться и дружить с детьми более старшего возраста, так как не могут найти понимания своих интеллектуальных интересов среди детей своего возраста. Но среди старших детей они не в состоянии занять подходящую для них социальную нишу, например, стать лидерами.

Потребность во внимании взрослых

Стремясь к познанию, одаренные дети нередко монополизируют внимание учителей и родителей, вызывая этим трения с другими детьми.

Эффективность развития познавательной деятельности одаренных учащихся нивелируют следующие негативные факторы:

1. «дискриминация» личности одаренного учащегося из-за отсутствия необходимого дифференцированного обучения;
2. ориентация на «среднего» ученика;
3. слабый учет особенностей когнитивных стилей одаренных учащихся в учебно-познавательной деятельности;
4. недооценка законов творчества учителями;
5. наличие механизмов избегания, маскировки своих возможностей одаренными детьми из-за отсутствия условий самореализации;
6. сдерживающая система репродуктивных заданий, упражнений и формальных требований;
7. низкий уровень подготовки учителей для работы с одаренными детьми;
8. излишняя унификация программ.

Таким образом, одаренные дети нуждаются в индивидуальном подходе и психологическом сопровождении больше других детей.

Рассмотрим некоторые методы саморегуляции и снятия психоэмоционального напряжения у учащихся.

1. Использование приемов логики. Очень часто сложившаяся ситуация требует, чтобы человек умел хладнокровно разобраться в ней. В процессе логического осмысления ситуации и устранения связанных с ней отрицательных эмоций можно пользоваться несколькими приемами. Снимать нервное напряжение можно, что называется, поговорив с самим собой, убедив себя в несерьезности переживаний. Психическая защита в данном случае строится на самоубеждении в том, что трудные положения воспитывают умение извлекать максимум пользы из любой ситуации. Важно четко проанализировать, что произошло, где допущена ошибка, и сразу же представить себе, какая может быть польза для будущей деятельности.

При анализе ситуации реально помогают навыки, полученные при изучении математической логики и теории алгоритмов (умение разложить сложное действие на простые шаги).

2. Использование самоприказов**.** Человек может хорошо управлять собой с помощью внутренних самоприказов типа: «Надо!», «Смелее!», «Терпи!», «Учи!» и т.п. Важно систематически тренировать преодоление себя с таким дополнительным самоприказом. В конечном итоге должна выработаться своего рода органическая связь между внутренней речью и действием. Самоприказ при этом обретает дополнительную силу, становится своего рода пусковым стимулом. Следует отметить, что очень удобно объединять самоприказы с формулами самоубеждения. Например: «Я ничего не боюсь! Вперед!» или «Я справлюсь с этой работой! Смелее!» и т.п.

3. Использование образов. Лицам с художественным типом мышления помогает прием, основанный на «игре в кого-нибудь». Например, ученик может представить себя в образе литературного или киногероя. Умение мысленно представить себе образ для подражания, войти в нужную роль помогает обрести свой стиль поведения и регулировать свое состояние.

4. Целенаправленное представление ситуаций. Умению настроиться или снять нервное напряжение помогает использование воображения. У каждого человека есть в памяти ситуации, в которых он испытывал покой, умиротворение, расслабление. У одних – это пляж, приятное ощущение отдыха на теплом песке после купания, у других – горы, чистый свежий воздух, голубое небо, снежные вершины. Таких ситуаций может быть очень много, но выбрать надо самую значимую, способную вызвать нужные эмоциональные переживания.

При нервном напряжении или усталости рекомендуется вспомнить эмоциональные сцены, ситуации, связанные с хорошими позитивными воспоминаниями.

5. Способы отвлечения. Могут быть состояния, когда к активным методам саморегуляции прибегать трудно. Нередко это бывает связано с выраженным утомлением, чувством опустошения, отчаяния. В таких случаях снять груз психического напряжения можно с помощью различных средств отвлечения. Это может быть книга, которую перечитываешь по много раз, не теряя к ней интереса, может быть музыка, полюбившийся фильм и т.д.

6. Сознательное управление мышечным тонусом. Мышечный тонус - один из показателей эмоционального состояния. Как правило, нерациональное нервно-психическое напряжение сочетается с ненужным напряжением мускулатуры, а это в свою очередь, еще больше увеличивает нервную нагрузку. Большое значение при этом имеет умение произвольно управлять мышечным тонусом, например, лица человека. Стоит нахмуриться, принять грустное выражение лица, как станет действительно грустно. И наоборот, улыбка способна сделать чудо. Умение улыбнуться даже в тяжелой ситуации, убрать ненужную скованность, психическую напряженность, мышечную зажатость повышает способность человека к лучшей реализации своих возможностей.

7. Дыхание как средство саморегуляции. Дыхание занимает важное место в системе эмоционально-волевой саморегуляции. Умение правильно дышать является основой успеха в овладении методами саморегуляции. Простейшие дыхательные приемы могут успешно использоваться в ситуациях, когда необходимо быстро взять себя в руки, успокоиться или, наоборот, поднять свой тонус.

Важное значение для регуляции психического состояния имеет ритм дыхания. Успокаивающий ритм заключается в том, что каждый выдох делается вдвое длиннее вдоха.

Каждый из предложенных простейших методов саморегуляции, естественно, может быть углублен и расширен. Поэтому сначала необходимо выбрать те из них, которые лучше отвечают характеру и темпераменту, кажутся наиболее удобными для систематического применения. Критерием отбора должны быть собственные индивидуальные особенности. Кроме того, необходимо учитывать, что методы саморегуляции могут различаться по направленности. В одном случае они помогут снять нервное напряжение, расслабиться, восстановить работоспособность, в другом – будут способствовать мобилизации, вхождению в особое психическое состояние, наиболее адекватное оперативно-служебным условиям.

Применение простейших методов саморегуляции в первую очередь усиливает стимулирующую и ориентирующую регуляцию. В их сферу входит усиление позитивных и исключение негативных установок учащихся в отношении себя, своих возможностей, ожидаемых учебных результатов. Прежде всего имеется в виду выработка оптимистического настроя. Сюда же относятся и формы психического самовнушения, направленные на преодоление страха, монотонности, перенапряжения. Оптимальное психическое состояние не является подарком судьбы. Требуется систематическая работа над собой для того, чтобы научиться управлять своими эмоциями и чувствами, настраиваться на преодоление трудностей, снимать влияние психологического груза временных служебных неудач, боязни предстоящей деятельности.

При овладении учащимися простейшими методами саморегуляции необходимо учитывать то обстоятельство, что невозможно рекомендовать какой-то универсальный метод, пригодный для использования всему классу. Методы саморегуляции надо специально подбирать с учетом особенностей характера учащегося, его темперамента и многих других обстоятельств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богоявленская Д. Б. Психология творческих способностей / Д. Б. Богоявленская. – М.: Академия, 2002.
2. Основные направления деятельности педагога-психолога: учеб.-метод. пособие / авт.-сост.: Е. А. Осипова, Е.В. Чуменко; ГУО АПО. – Минск, 2006.
3. Закружная С. П. Психологическое сопровождение одаренных детей [Электронный ресурс] / С. П. Закружная. – Режим доступа: http://www.myshared.ru/slide/477220/. – Дата обращения: 12.04.2018. – Загл. с экрана.
4. Бекбулатова А. А. Методы саморегуляции и снятия психоэмоционального напряжения у учащихся [Электронный ресурс] / А.А. Бекбулатова ¬ Режим доступа: https://infourok.ru/metody_samoregulyacii_i_snyatiya_psihoemocionalnogo_napryazheniya_u_uchaschihsya.-443471.htm / ¬ Дата обращения: 12.04.2018. ¬ Загл. с экрана

УДК 372.851

ПОВТОРЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ГЕОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОСТЕЙШИХ ВЕРОЯТНОСТНЫХ ЗАДАЧ

Ольга Евгеньевна Баранова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Baranova.OE@tversu.ru

Светлана Анатольевна Романова
ОУ ОЛ «Довузовский комплекс ТвГУ», Тверь
E-mail: svetaromadoma@yandex.ru

Ключевые слова: классическое определение вероятности в курсе математики девятого класса.

Аннотация. Статья содержит подборку задач геометрического содержания на применение классического определения вероятности в курсе математики 9-го класса.

В курсе математики девятого класса дается классическое определение вероятности и геометрическое определение вероятности. Теоретические сведения можно найти в школьных учебниках или классической литературе, например, [1].

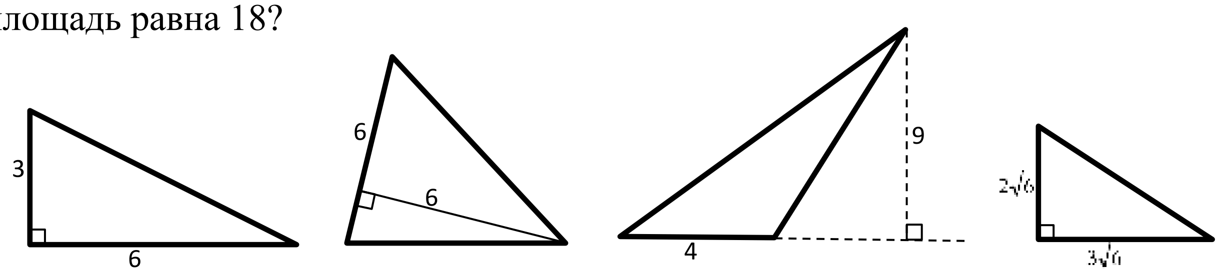
Отработка схемы случаев проводится на классических примерах с бросанием монет, игральных костей и вытаскивания шаров из урны. Школьные учебники и дидактические материалы содержат также задачи различного содержания на классическое определение вероятности. Хорошо известна подборка простых вероятностных задач, связанных с составлением натуральных чисел, решение которых требует знания их свойств. Предлагаем набор задач геометрического содержания, которые после отработки классической схемы на пирожках, гусях, диванах и т.д. позволят повторить некоторые геометрические факты.

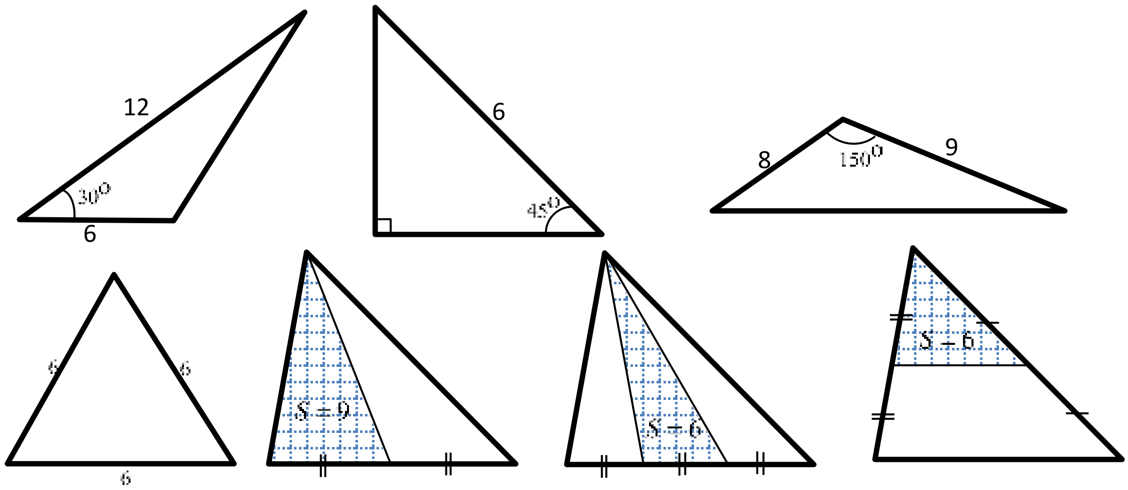
Задачи 1 – 6 не требуют применения формул комбинаторики. Общее число исходов и число благоприятных исходов в испытании, связанном с выбором объекта, определяется непосредственно. Задачи 6 – 11 могут быть решены как с использованием комбинаторных формул, так и без него.

Геометрического определения вероятности как отношения длин (площадей) множества благоприятствующих событию исходов и множества всех исходов в испытании в этой заметке касаться не будем.

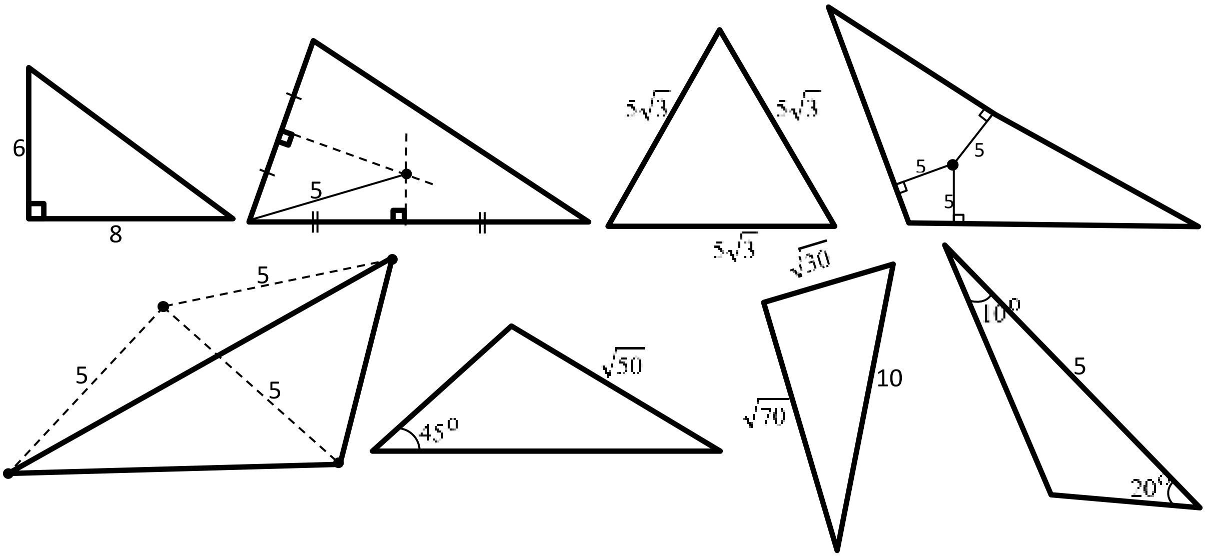
1. Из кругов с площадями 2π, 4π, 8π, 16π, 32π наудачу выбирается один. Определите вероятность того, что из этого круга можно вырезать квадрат площади 16.

2. Из треугольников наудачу выбирается один. Какова вероятность, что его площадь равна 18?

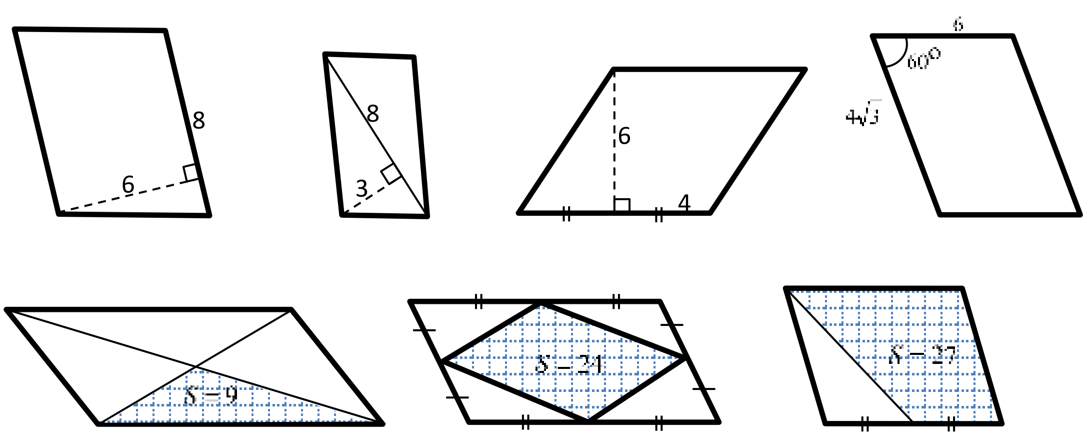


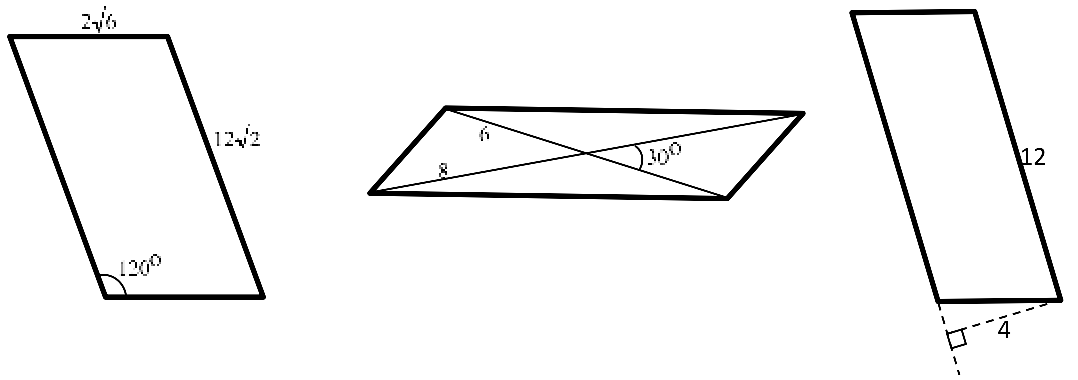


3. Из треугольников, изображенных на рисунке, наудачу выбирается один. Какова вероятность того, что этот треугольник а) можно вписать в окружность, б) можно вписать в окружность радиуса 5?

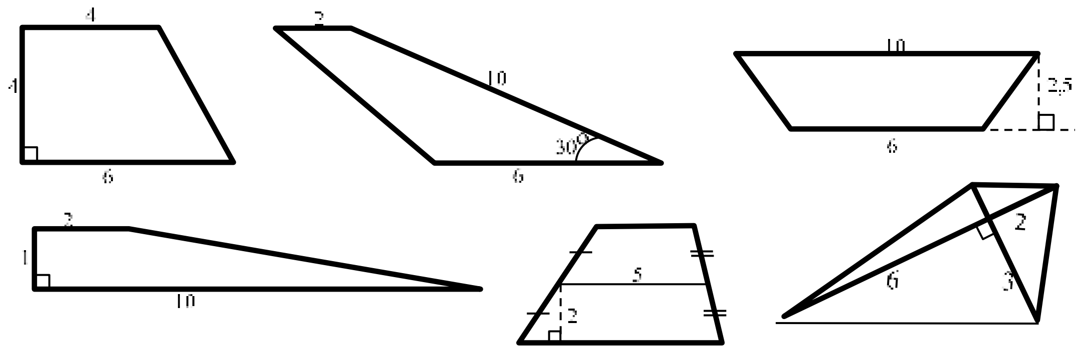


4. Из параллелограммов наудачу выбирается один. Какова вероятность, что его площадь равна 48?





5. Из трапеций наудачу выбирается одна. Какова вероятность того, что ее площадь равна 20?



6. Длина средней линии трапеции с основанием 9 случайным образом выбирается из натуральных чисел от 1 до 20. Определите вероятность того, что одно из оснований трапеции вдвое меньше её средней линии.

7. Из четырёх отрезков с длинами $1, \sqrt{3}$, 3, 4 наудачу выбираются два. Какова вероятность, что длина гипотенузы прямоугольного треугольника, катетами которого являются выбранные отрезки, выражается рациональным числом?

Решение.

Испытание: случайный выбор длин катетов из четырёх возможных значений.

Событие *A*=«Длина гипотенузы треугольника с выбранными катетами рациональна».

Общее число исходов в таком испытании равно числу сочетаний из четырёх по два, т.е. $C_4^2 = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$.

Все исходы – это пары $1;\sqrt{3}$, $1;3$, $1;4$, $\sqrt{3};3$, $\sqrt{3};4$, $3;4$.

Чтобы определить число исходов, благоприятствующих событию *A*, находим длины гипотенуз треугольников по теореме Пифагора. Это будут числа 2, $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{19}$, 5. Школьникам, возможно, будет полезно изобразить все шесть треугольников и подписать длины сторон на чертежах.

Благоприятных исходов 2, тогда вероятность события *A* равна $P(A) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

Понятие сочетания в 9 классе чаще всего не вводится, общее число исходов в таком испытании можно определить следующими рассуждениями, соответствующими материалу учебников. Первый отрезок из четырёх можно выбрать четырьмя способами, второй из оставшихся трех – тремя способами, тогда по правилу умножения два отрезка из четырех можно выбрать $4 \cdot 3 = 12$ способами. При таком подходе все исходы образуют пары

$1;\sqrt{3}$, $1;3$, $1;4$, $\sqrt{3};1$, $\sqrt{3};3$, $\sqrt{3};4$, $3;1$, $3;\sqrt{3}$, $3;4$, $4;1$, $4;\sqrt{3}$, $4;3$,

т.е. всего можно составить 12 прямоугольных треугольников. Исходов, благоприятствующих событию *А*, в этом случае будет 4, тогда вероятность $P(A) = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$.

Желательно отметить, что пары $1;\sqrt{3}$ и $\sqrt{3};1$, $1;3$ и $3;1$ и т.д., дают равные прямоугольные треугольники, т.е. порядок отрезков в этом испытании не важен и различных треугольников можно по-прежнему составить $12 : 2 = 6$ штук.

8. Из четырёх отрезков с длинами 1, 2, 3, 4 наудачу выбираются три. Какова вероятность, что из этих отрезков можно составить треугольник?

Решение.

Испытание: случайный выбор трёх отрезков из четырёх.

Событие *А*=«Отрезки образуют треугольник».

Здесь снова нужно понять, что порядок отрезков не важен.

Общее число исходов в таком испытании равно числу сочетаний из четырёх по три, т.е. $C_4^3 = \frac{4!}{1! \cdot 3!} = 4$.

Все исходы – это тройки $1;2;3$, $1;2;4$, $1;3;4$, $2;3;4$. Поскольку сумма длин двух сторон треугольника должна быть больше третьей, то треугольник можно составить только из отрезков $2;3;4$. Благоприятствующий событию *А* исход один, тогда вероятность $P(A) = \frac{1}{4}$.

Если не использовать понятие сочетания, то общее число исходов в таком испытании можно определить, составив дерево вариантов или применив правило умножения. Первый отрезок из четырёх можно выбрать четырьмя способами, второй из оставшихся трех – тремя способами, а третий – двумя способами, тогда три отрезка из четырех можно выбрать $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами. Это будут тройки

1;2;3	1;3;4	2;1;3	2;3;4 ∆	3;1;2	3;2;4 ∆	4;1;2	4;2;3 ∆
1;2;4	1;4;2	2;1;4	2;4;1	3;1;4	3;4;1	4;1;3	4;3;1
1;3;2	1;4;3	2;3;1	2;4;3 ∆	3;2;1	3;4;2 ∆	4;2;1	4;3;2 ∆

При таком подходе каждые шесть упорядоченных наборов из одинаковых элементов (размещения из четырёх по три) соответствуют одному сочетанию из четырёх по три в предыдущих рассуждениях (например, размещения $1;2;3$, $1;3;2$, $2;1;3$, $2;3;1$, $3;1;2$, $3;2;1$ соответствуют сочетанию $1;2;3$).

Благоприятствующие событию A исходы помечаем символом «Δ», их 6 штук, тогда вероятность события A равна $P(A)=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}$.

9. На полуокружности с диаметром AB случайным образом выбирается точка C, отличная от её концов. Какова вероятность, что треугольник ΔABC прямоугольный?

Решение.

Для решения этой задачи нельзя применить классическую схему, т.к. общее число исходов бесконечно. Нужно вспомнить, что всякий вписанный угол, опирающийся на диаметр, прямой. Тогда событие A=«Треугольник ΔABC прямоугольный» является достоверным и $P(A)=1$.

10. Четыре точки A, B, C и D делят окружность на дуги, градусные меры которых связаны отношением $AB:BC:CD:DA=1:2:3:6$. Из этих точек последовательно выбираются три. Какова вероятность, что угол, образованный выбранными точками, равен а) 30°, б) 45°, в) 60°, г) прямой?

11. Четыре точки A, B, C и D делят окружность на дуги, градусные меры которых связаны отношением $AB:BC:CD:DA=1:2:3:6$. Из этих точек последовательно выбираются три. Какова вероятность, что треугольник с вершинами в выбранных точках а) остроугольный, б) прямоугольный, в) тупоугольный?

12. Четыре точки A, B, C и D делят окружность на дуги, градусные меры которых связаны отношением $AB:BC:CD:DA=3:4:5:6$. Из этих точек последовательно выбираются три. Какова вероятность, что треугольник, образованный выбранными точками, а) остроугольный, б) прямоугольный, в) тупоугольный?

Ответы. **1.** 0,6. **2.** $\frac{7}{11}$. **3.** а)1, б)$0{,}875$. **4.** 0,5. **5.** $\frac{2}{3}$. **6.** 0,1.

10. а)$\frac{1}{6}$, б)$0{,}25$, в)0, г)$\frac{1}{6}$. **11.** а)0, б)$0{,}5$, в)$0{,}5$. **12.** а)$0{,}25$, б)$0{,}5$, в)$0{,}25$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вентцель Елена Сергеевна. Теория вероятностей и ее инженерные приложения : учебное пособие для студентов втузов / Е. С. Вентцель. – Изд. 4-е, стер. – Москва : Высшая школа, 2007. – 490, [1] с.

УДК 378.146:517.2

КЕЙС-МЕТОД КАК ЭЛЕМЕНТ ИНСТРУМЕНТА КОНТРОЛЯ УРОВНЯ ИНДИКАТОРА «ВЛАДЕНИЕ» (НА ПРИМЕРЕ МОДУЛЯ «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ»)

Елена Владимировна Борисова
профессор, д.п.н., профессор кафедры вышей математики,
ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», Тверь
E-mail: elenborisov@mail.ru

Алексей Евгеньевич Миловидов
старший преподаватель кафедры функционального анализа и геометрии
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Маргарита Аркадьевна Шестакова
доцент, к. ф-м.н., доцент кафедры высшей математики
ФГБОУ ВО «Тверской государственный технический университет», Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова*: средства оценивания, кейс–метод, умения, знания, владения.*

Аннотация: В статье рассмотрен пример задания из ФОС для оценки индикаторов формируемой компетенции. Приведена пошаговая процедура оценки наличия сопутствующих знаний, умений. Предложена задача, построенная по типу кейс-метода, и проведена ее детализация по демонстрации формируемых в модуле уровней индикатора «владения».

Возрастающие объемы информации во всех областях жизни обусловливают возникновение новых знаний на стыке различных наук, что ведет к смене технологического уклада общества. В образовании на первый план выдвигается задача подготовки максимально профессионально мобильных специалистов – способных не только выполнять различные функции в рамках полученной квалификации, но быстро пополнять полученные знания, быть способными к профессиональной адаптации в условиях стремительного обновления науки, техники, технологий, совершенствования системы управления и организации труда, развития социально – культурной сферы.

Компетентностная парадигма, лежащая в основе ФГОС 3+, одним из критериев качества подготовки специалистов определяет умение использовать в решении практических профессиональных задач, сопровождающие каждую компетенцию индикаторы – «знания», «умения», «владения». Этим обусловлено включение в перечень дисциплин инженерных направлений для формирования компетенции ОПК-1 двухгодичного курса «Математика», а для гуманитарных направлений – для компетенции ОПК-3 одногодичного курса «Математика». Содержание компетенции ОПК-1 определено как способность: использовать основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности. Содержание компетенции ОПК-3, это способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.

Таким образом, в процессе обучения в вузе, необходимо не только дать фундаментальные базовые знания, методы и алгоритмы решения типовых задач, знание основных методов обработки экспериментальных данных, видов математических моделей и принципов их построения, методов количественного и качественного анализа, но и развить математические навыки при решении прикладных задач, научить выбирать и реализовывать наиболее целесообраз-ные математические методы и модели. Помочь неформальному усвоению материала, его использованию в нестандартных ситуациях. Это приводит к необходимости перемещения акцента при оценивании на конечные результаты.

Понимание образовательных результатов в формате компетенций делает попытку построения диалога между работодателем (как заказчиком образовательного результата) и вузом (как поставщиком специалистов) более продуктивной. При этом, образовательные технологии – это способ формирования и развития компетенций, а оценочные средства – как инструмент доказательства наличия компетенций и их уровня сформированности. Оценка уровня компетенций – достаточно новая и не простая для вузовской системы задача, которую нельзя решить с помощью традиционных методов контроля и инструментов оценки. Общепринятых методических разработок на сегодня не сформировано и каждый вуз, а порой и каждый преподаватель решает эту проблему самостоятельно.

Одной из методологических позиций формирования фонда оценочных средств (ФОС) является использование инновационных видов и форм контроля. Одним из таких видов может быть кейс-метод. Процесс обучения с использованием кейс-метода представляет собой имитацию реального события, сочетающую в себе в целом адекватное отражение действительности, небольшие материальные и временные затраты, вариативность обучения.

Сущность данного метода состоит в том, что учебный материал подается студентам в виде проблем (кейсов), а знания приобретаются в результате творческой работы: самостоятельного осуществления целеполагания, анализа информации с разных точек зрения, выдвижения гипотезы, выводов, заключения, самоконтроля процесса получения знаний и его результатов.

Цели кейс-метода, кроме всего прочего, состоят в: обучении навыкам анализа ситуаций; моделировании решений в соответствии с заданием, представлении различных подходов к разработке планов действий, ориентированных на конечный результат; приобретении навыков четкого и точного изложения собственной точки зрения; выработке навыков критического оценивания различных точек зрения, осуществлении самоанализа, самоконтроля и самооценки [1].

Единица ФОС (билет) включает набор индикаторов «ЗНАТЬ», «УМЕТЬ», «ВЛАДЕТЬ» и задания для проверки их уровня. Математика для студентов всех направлений является предметом базовой части и ФОС должны содержать задания, проверяющие начало формирования заданной ОХОП компетенции. Такие задания отнесем к индикатору «Владеть» и рассмотрим кейс-метод, как вариант оценки. Как отмечено в [2] включение в набор ФОС измерительных инструментов уровней формируемых компетенций кейс-методов при изучении фундаментальных дисциплин, позволяет развивать творческую составляющую студентов, формировать исследовательские (поисковые) элементы компетенций, которые студенты смогут применить в будущей профессиональной деятельности.

Рассмотрим состав единицы ФОС по модулю «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

1. Вопрос для проверки уровня индикатора «ЗНАТЬ». *Виды уравнений прямой на плоскости, их взаимосвязи и параметры.*

2. Задание для проверки уровня индикатора «УМЕТЬ». *Заданы вершины треугольника* $A(-1;0;-2)$, $B(5;-1;4)$, $C(2;1;1)$. *Найдите уравнение его медианы, проведённой из вершины С.*

3. Задание для проверки уровня индикатора «УМЕТЬ». *Вычислить определитель* $\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 & 3 \\ 6 & 4 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix}$.

4. Задание для проверки уровня индикатора «ВЛАДЕТЬ». *На предприятие с работниками четырех профессиональных категорий привезли заработную плату в купюрах следующего достоинства: по 100 рублей – 620 купюр, по 500 рублей – 470 купюр, по 1000 рублей – 550 купюр, по 5000 рублей – 2690 купюр. Заработная плата работника 1-й категории составляет 42700 руб., 2-й категории – 35600 руб., 3-й категории – 26500 руб., 4-й категории – 17800 руб. Определите, сколько сотрудников каждой профессиональной категории работает на предприятии, если каждому сотруднику выдали заработную плату минимальным числом купюр.*

Проведем детализацию оценки по каждому индикатору.

Ответ на вопрос №1 по проверке уровня индикатора «ЗНАТЬ» предусматривает запись различных видов уравнения прямой на плоскости, их преобразования друг в друга и оценку основных параметров. Каждый из записанных студентом видов уравнения оценивается. Общее число баллов по данному заданию не превосходит 2 балла.

Задания по оценке уровня индикатора «УМЕТЬ» проверяют не только собственно умения, но и сопутствующие им знания. Так для выполнения задания №2, в рассматриваемом примере, необходимо знать определение медианы треугольника, которое изучается в школе. Если студент знает это определение, то возможен переход к следующему этапу решения задачи, в противном случае он не сможет ее решить. Далее необходимы знания формулы нахождения координат середины отрезка, которые изучались и в школе, и в разделе – аналитическая геометрия. Если студент знает эти формулы, он сможет найти координаты точки, являющейся серединой отрезка АВ, не знает формул, не сможет перейти к следующему этапу решения. Далее требуются знания уравнения прямой, проходящей через 2 точки, если у студента они есть, то он сможет получить ответ на поставленный вопрос, в противном случае, задание выполнено не будет. Количество баллов за данное задание предусматривается – один. По существу или «умеет», или «не умеет».

При выполнении задания №3 возможны два пути решения:

1) вычисление определителя методом разложения по строке (столбцу);

2) получение строки (столбца) с одним ненулевым элементом.

Если знает студент хотя бы один метод, то сможет приступить к его реализации, в противном случае задание выполнено не будет. Реализация первого пути предполагает также проявление умения раскладывать определитель по строке (столбцу), после чего перейти к следующему этапу решения. Если студент уже в разложении допустил ошибку, значит, не проявил требуемое умение. При выборе второго пути необходимо знать свойства определителя и проявить умение их использовать для приведения определителя к соответствующему виду, а далее к сведению вычисления определителя более низкого (третьего) порядка, что так же требует как знаний, так и умений. На каждом пути, возможно, допустить ошибку, не использовать требуемые знания или не проявить указанные умения, а в итоге не смочь решить задачу. Дальнейшее движение для каждого пути сводится к проверке умения вычислять определитель третьего порядка и производить арифметические операции. Только весь комплекс сопутствующих знаний и контролируемых умений позволит студенту выполнить задание и получить заслуженный балл.

При выполнении заданий №4 уровня «ВЛАДЕТЬ» проверяются и знания, и умения, и владение ими. В приведенном примере уровня «ВЛАДЕТЬ» проверяется уровень компетенции ОПК-3 по результатам изучения модуля. Представленная задача по кейс-методу направлена на проверку – умений анализировать конкретные экономические данные, способности выбрать инструментальные средства для обработки этих данных, способности построить математическую модель и проанализировать результаты расчетов.

Решение задачи начинается с выделения подзадач (этот аспект так же может быть оценен).

Подзадача 1 – однозначное определение числа купюр разного достоинства, выдаваемого работнику каждой категории. Основой такого определения является размер заработной платы по категориям и с учетом условия об оплате минимальным числом купюр. Если студент проявил умение проанализировать и обработать эти данные, то он может переходить к выбору и математической модели ситуации, в противном случае невозможен переход к подзадаче 2.

Подзадача 2 – построение модели. Для этого необходимо ввести переменные x_1, x_2, x_3, x_4. Ввел переменные – проявил модельное мышление, не ввел – не проявил модельное мышление. Затем нужно составить уравнения «баланса», т.е. систему четырех уравнений с четырьмя целочисленными переменными, которая и является математической моделью, соответствующей условию задачи.

Подзадача 3 – нахождение решения системы линейных уравнений. Такие задачи рассматриваются в разделе – линейная алгебра. Понятно, что, если модель не построена, решения задания нет. На этом шаге студенту необходимо проявить знание методов решения систем линейных уравнений и умения применить выбранный метод. Заметим, что метод Крамера и метод обратной матрицы в случае четырех и более переменных достаточно трудоемок для ручного счета, поэтому данную систему наиболее рационально решать методом Гаусса.

Опять идет процедура выбора, обусловленная сопутствующими знаниями и умениями. Выбрал и объяснил «почему» метод Гаусса – проявил умение выбирать оптимальное решение, выбрал другой метод – не проявил такого умения. Использовал при решении расширенную матрицу системы – уменьшил громоздкость записи, а как следствие сэкономил время и проявил умение переходить к расширенной матрице системы. Привел основную матрицу к треугольному виду, правильно выполнил обратный ход, проверил условие целочисленности переменных – проявил знания и приобретенные навыки преобразований системы с использованием элементарных преобразований, проявил навыки оценивания полученных результатов, а значит, получил обоснованный правильный ответ на поставленный вопрос. В всех альтернативных случаях ветвления в демонстрации знаний, умений качественно решить поставленную задачу крайне затруднительно. Эта позиция в единице ФОС, как правило, оценивается ровно в 0 или 2 балла (с бинарных позиций «решена с ошибками или не решена» и «решена полностью»).

Приведенный разбор оценивания уровней индикаторов компетенции демонстрирует сложность и неоднозначность такой процедуры. Совершенно очевидно, что использование таких инструментов требует их значительной формализации, например, разработку оценочных таблиц для преподавателя. В таких таблицах, которые достаточно легко могут быть автоматизированы, можно детально прописать, как оценить проявление или наличие каждого из индикаторов с учетом их вклада в общий уровень формируемой компетенции.

Построение ФОС, как инструмента оценивания при реализации ФОС 3+ и последующих поколений стандартов, актуально не только для математических дисциплин в инженерных вузах. Приведенная методика детализации заданий, надеемся, будет полезна преподавателям других дисциплин.

В заключение отметим, что основная задача преподавателя помочь усвоить идеи и методы дисциплины, показать их использование для решения практических задач, дать такую базу, чтобы студенты могли самостоятельно разобраться в любой области знаний, на каком бы сложном аппарате она не базировалась. Оценивание в этой связи, не сводится только к выявлению недостатков, но рассматривается как критический анализ образовательного процесса, предполагающий более точное определение направлений его улучшения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плотников М.В. Технология case-study. учебно-методическое пособие. / Плотников М.В., Чернявская О.С., Кузнецова Ю.В. – Нижний Новгород, 2014 – 208 с.

2. Шестакова М.А. Технологии Case-study: инструмент декомпозиции образовательных результатов в компетентностном формате – Сб: Применение современных инструментов для диагностики качества освоения образовательных программ. Сб: материалы докладов заочной научно-практ. Конф. Тверь: ТвГТУ, 2016, С. 107-110.

УДК 372.851

ТРУДНОСТИ МЕЖПРЕДМЕТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИИ В ШКОЛЕ

Ирина Юрьевна Бурова
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение средняя общеобразовательная школа с углублённым изучением математики № 17 , Тверь
E-mail: biyu2010@mail.ru

Ключевые слова: *тригонометрия, физика, геометрия, информатика.*

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о трудностях взаимодействия предметов физики, информатики, геометрии, алгебры при изучении тригонометрии. Объясняется необходимость начала изучения тригонометрии в курсе алгебры с 9 класса. Приведён фрагмент урока, иллюстрирующего внутриматематические связи тригонометрии и геометрии.

Тригонометрия – один из самых сложных, но очень важных разделов математики, изучаемых в школе.

На знания по тригонометрии опираются такие важные темы

1) физики:
- в механике законы Ньютона, касающиеся исследования свободного падения тел (изучаются в сентябре-октябре в 10 классе);
- в электростатике, изучаемые в марте 10 класса;
- колебания, изучаемые в сентябре-октябре 11 класса;
- оптика (декабрь-январь, 11 класс);

2) информатики:
- построение графиков различных функций (конец 9 класса);
- вычисление суммы бесконечного ряда;
- решение геометрических задач олимпиадного уровня с использованием тригонометрии (9 – 11 класс);

3) геометрии:
- изучение теорем синусов и косинусов (9 класс);
- скалярное произведение векторов (9 класс);
- правильные многоугольники (9 класс);
- решение задач в стереометрии (10 – 11 класс).

Однако, в соответствии с программой по математике этот нужный курс – тригонометрия – изучается в лучшем случае в конце 10 класса, а бывает, что и в начале 11 класса.

Получается, что изучение материала по физике, информатике, геометрии опирается лишь на два маленьких пункта в геометрии:

- 8 класса (п. 66-67 учебника Атанасяна), где даются лишь

1) определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha$, где α – острый угол прямоугольного треугольника,
2) значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30°, 45°, 60°;

- и на п.п. 93, 94 в том же учебнике геометрии в 9 классе, где немного расширяют рамки для углов и даются 4 формулы приведения с заголовком

«Справедливы также следующие тождества ... и доказываются они в курсе алгебры». Естественно, ученики мало чего понимают при таком обучении.

Такая неразбериха началась после того, как убрали из курса алгебры 9 класса раздел «Элементы тригонометрии», где мало-мальски изучались тригонометрические формулы.

Нелогично изучение тригонометрии и в 10 – 11 классах в настоящее время. В учебнике «Алгебра и начала анализа 10 – 11» авторов Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягин и др. следующий порядок изучения глав:

1. Тригонометрические формулы;
2. Тригонометрические уравнения (в конце *«Примеры решения простейших тригонометрических неравенств»);
3. Тригонометрические функции (в конце *«Обратные тригонометрические функции»).

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10 класс» авторов Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др.:

1. Тригонометрические формулы;
2. Тригонометрические уравнения;
3. Тригонометрические функции (в конце главы – тригонометрические неравенства и обратные тригонометрические функции).

В учебнике «Алгебра и начала анализа 10 – 11» авторов Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. последовательность изучения тригонометрии следующая:

В конце 10 класса:

1.Тригонометрические формулы;

2.Тригонометрические уравнения (в конце главы изучаются системы тригонометрических уравнений и тригонометрические неравенства).

В начале 11 класса:

Тригонометрические функции (в конце главы изучаются обратные тригонометрические функции).

В нашей школе тригонометрия изучается с 9 класса, причём не только в классах с углублённым изучением математики.

В классах с углублённым изучением математики на изучение основ тригонометрии отводится:

- 36 часов в 9 классе, причём я стараюсь так планировать материал, чтобы к изучению теорем синусов и косинусов в геометрии самое начало тригонометрии было изучено, т.е. до формул приведения. Формулы приведения являются частным случаем формул сложения, но с точки зрения методики преподавания математики изучать лучше сначала формулы приведения, а затем формулы сложения.

- и 3,5 месяца в начале 10 класса.

На наш взгляд изучение должно строиться следующим образом:

1. Тригонометрические формулы (желательно в 9 классе, перед изучением теорем синусов и косинусов в геометрии);
2. Тригонометрические функции;

3. Обратные тригонометрические функции;

4. Решение тригонометрических уравнений;

5. Решение тригонометрических неравенств.

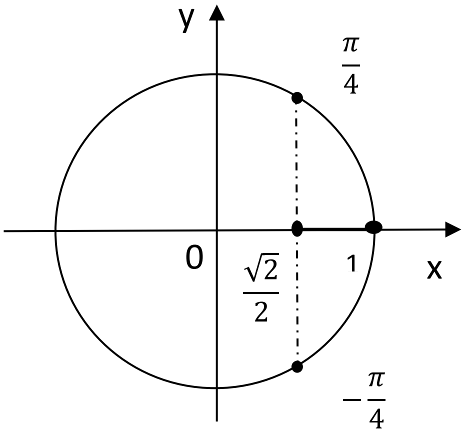
При таком порядке изложения прослеживается логика изучения предмета и в голове у детей порядок.

Приведу фрагмент урока «Решение тригонометрических задач геометрическими методами», который был проведён в 9 классе с углублённым изучением математики после изучения темы «Тригонометрические формулы».

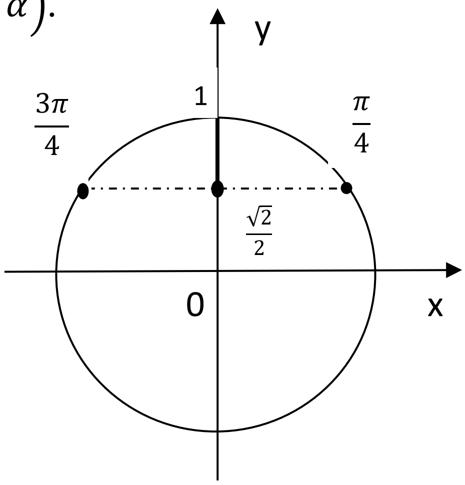
Обучающимся было предложено домашнее задание к этому уроку: доказать, что сумма синусов острых углов прямоугольного треугольника всегда больше 1.

Варианты решения этого задания учениками были следующие:

1. $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = 2\sin\frac{\alpha+90°-\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-90°+\alpha}{2} =$
   $=2\sin 45° \cdot \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right).$
   $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad -\frac{\pi}{4} < \alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} < \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) < 1;$
   $\sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}; \quad \sqrt{2}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) > 1.$



2. $\sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha + \sin(90° - \alpha) = \sin\alpha + \cos\alpha =$
   $=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$
   $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}; \quad \frac{\pi}{4} < \alpha + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4};$
   $\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) < 1;$
   $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) > \frac{\sqrt{2}}{2};$
   $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) > \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2};$
   $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) > 1.$



3. Пусть a, b – катеты, c – гипотенуза некоторого прямоугольного треугольника ΔABC с прямым углом ∠C.

Тогда $\sin A + \sin B = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} > 1.$

Учитель: Сегодня на уроке мы посмотрим на изученный материал по тригонометрии глазами другого раздела математики – геометрии.

Предлагается задание:

I. Вычислите tg 15°

Ученики предлагают различные решения:

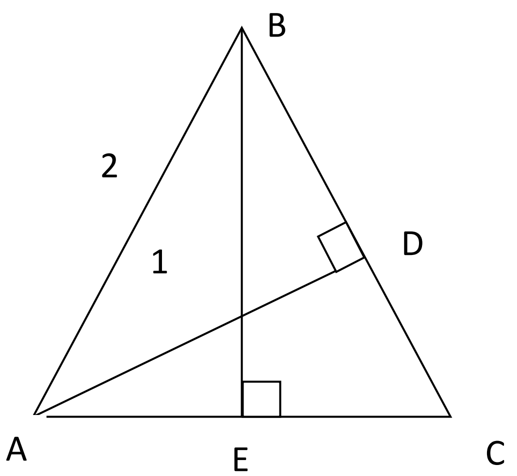
1. $\mathrm{tg}15^\circ = \mathrm{tg}(45^\circ - 30^\circ) = \frac{tg45^\circ - tg30^\circ}{1 + tg45^\circ \cdot tg30^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{2} =$

$= \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3};$

2. $\mathrm{tg}15^\circ = \frac{1-\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot 2}{1} = \frac{(2-\sqrt{3})\cdot 2}{2} = 2 - \sqrt{3}.$

3. $\mathrm{tg}15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\left(2-\sqrt{3}\right)^2} = 2 - \sqrt{3}.$

Учитель предлагает решить эту задачу геометрическими методами и рассмотреть равнобедренный треугольник ΔABC с углом 30° при вершине B, в котором советует провести высоту BE к основанию и AD к боковой стороне BC.



Тогда ∠EBC=15°; ∠C=75°; ∠CAD=15°.

Пусть AD=1. Тогда из ΔABD AB=2=BC. BD=$\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$; $\mathrm{DC} = 2 - \sqrt{3}$.

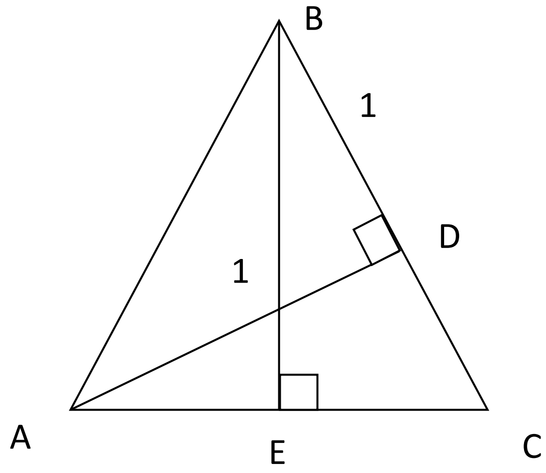
Из ΔADC $\mathrm{tg}15^\circ = \frac{2-\sqrt{3}}{1} = 2 - \sqrt{3}$.

II. Вычислите tg 22°30'

1.Ученики вычисляют с помощью формул тригонометрии:

$$\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{1-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

2. Пробуют решить задачу геометрическим путём и догадываются, что надо рассмотреть равнобедренный треугольник с углом при вершине 45°.

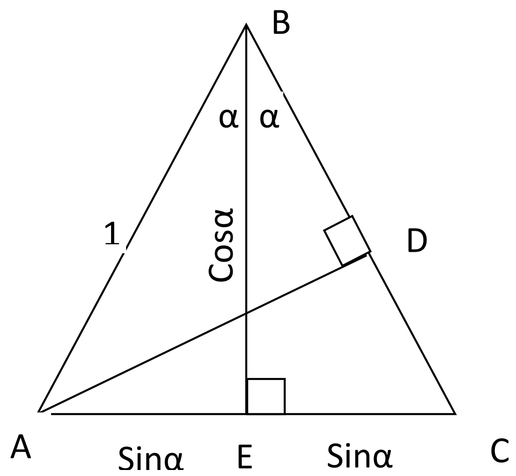


Тогда ∠CBE=22˚30'=∠CAD. Пусть AD=1=BD; AB=$\sqrt{2}$; $DC = \sqrt{2}-1$.

И из ΔADC $\operatorname{tg} 22^\circ 30' = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \sqrt{2}-1$.

III. Для остроугольного треугольника доказать формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$ геометрическим методом.

Рассмотрим равнобедренный ΔABC с углом при вершине ∠ABC=2α.



Пусть AB=BC=1;

тогда AE=EC=1·$\sin\alpha$=$\sin\alpha$; BE=1·$\cos\alpha$=$\cos\alpha$; AD=1·$\sin 2\alpha$=$\sin 2\alpha$.

1 способ

ΔCBE$\sim\Delta CAD$ (по двум углам), значит, ∠DAC=α и $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}=\frac{\mathrm{BE}}{AD}$, т.е. $\frac{1}{2\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$ или $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$.

2 способ

$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$ и $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin 2\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha$ или $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

Далее учитель задаёт вопрос, почему в задании акцент делается на остроугольный треугольник? После ответа на этот вопрос, задаётся домашнее задание:

1) Доказать формулу синуса двойного аргумента для тупоугольного треугольника;
2) Вычислить $\sin 15°$ тремя способами;
3) Вычислите $\cos 36° - \cos 72°$ двумя способами.

Итог урока:

Ученики посмотрели на изучение тригонометрии глазами геометрии. Подтвердили, что «Лучший способ отыскать хорошую идею – найти много идей» (американский химик Лайнус Полинг)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов Ш.А. Алгебра и начала анализа 10-11. / Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. – М.: Просвещение, 2000.

2. Колягин Ю.М. Алгебра и начала анализа 10. / Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Ткачева М.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. – М.: Мнемозина, 2004.

3. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа 10. / Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. – М.: Просвещение, 2016.

4. Колягин Ю.М. Алгебра и начала математического анализа 11. / Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. – М.: Просвещение, 2016.

5. Генкин Г.З. Геометрические решения негеометрических задач. – М.: Просвещение, 2007.

УДК 374.1

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ВНЕШКОЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Вячеслав Олегович Васильев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vyacheslav210@yandex.ru

Александр Андреевич Поликарпов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: alexpolikarpovv@gmail.com

Ключевые слова: *математика, дополнительное образование, ЕГЭ, ОГЭ, Юниум.*

Аннотация. Рассмотрены способы получения дополнительного математического образования, в частности, в коммерческих образовательных центрах (на примере федеральной сети образовательных центров «Юниум»). Проведен анализ их функционирования в сравнении с услугами репетиторов и традиционными школьными занятиями.

Дополнительное образование в целом осуществляется двумя путями: индивидуальные занятия и посещение групповых курсов. В частности, такое деление допускает дополнительное образование школьников по математике, что и станет предметом дальнейшего рассмотрения. Заметим, что в рамках данной работы не делается разницы между очной формой занятий и становящимися все более популярными с развитием соответствующих платформ интернет-курсами (т.н. дистанционное обучение).

Несмотря на очевидные сложности в определении количества школьников, пользующихся услугами индивидуальных преподавателей, практика репетиторства остается на данный момент доминирующей формой дополнительного образования. Частные же образовательные компании, занятые в этой сфере, начали появляться в России лишь в девяностых годах прошлого века, и потому остаются сравнительно новым явлением на рынке образовательных услуг.

Ниже мы рассмотрим особенности групповых занятий в центрах дополнительного образования в сравнении с индивидуальными занятиями и традиционными школьными уроками. В качестве конкретного примера будет рассмотрена федеральная сеть образовательных центров «Юниум».

Федеральная сеть образовательных центров «Юниум» – это крупное учреждение дополнительного образования, в котором дети занимаются научной и творческой деятельностью. Занятия проходят как по классическим школьным дисциплинам, так и по различным внешкольным направлениям, например, дизайн или гитара. По разнообразию предоставляемых услуг «Юниум» могут опередить разве что многолетние гиганты дополнительного образования в Твери, такие как ДТДМ. Рассмотрим несколько факторов, которые выделяют «Юниум» на фоне других центров дополнительного образования и репетиторов:

1. Все преподаватели молоды. Средний возраст преподавателей – 21 год. В «Юниум» это считается большим преимуществом, так как молодой

преподаватель быстрее сможет наладить контакт с учеником, также такой преподаватель знает и разбирается в увлечениях современной молодёжи и сможет поддержать разговор на любую интересующую ученика тему.

2. Связь с родителями. В «Юниум» существует практика несколько раз за год обучения звонить родителям своих учеников и общаться с ними насчёт успехов и проблем конкретного обучающегося. Никто лучше родителей не знает своего ребёнка, поэтому именно родители могут помочь в скорейшем нахождении проблем в обучении и в устранении их. Успехи в обучении также положительно влияют как на настроение ученика, так и на лояльность родителя к компании.
3. Атмосфера на занятии. Группы ограничиваются по количеству учеников в них: девять - десять человек в зависимости от направления – максимальное значение. С таким количеством учеников преподаватель способен создать атмосферу комфорта и вызвать в них уверенность, что им помогут с любой их проблемой в обучении.

Важно учитывать и ценовой фактор. Цена за академический час занятия с репетитором в Твери варьируется от 350 до 1200 рублей в зависимости от опыта и заслуг репетитора в конкретной области, и в данных ценах не учитываются затраты на общественный транспорт. Цена за академический час в «Юниум» зависит от 200 до 500 рублей в зависимости от курса, а также присутствует система скидок для клиентов, сотрудничающих с «Юниум» длительный промежуток времени. Такая ценовая политика привлекает многих клиентов, несмотря на сравнительно небольшой педагогический опыт у преподавателей.

Перейдем к разновидностям форматов занятий в образовательном центре «Юниум». Большинство курсов проходит в формате двухчасовых занятий один раз в неделю. Примером таких курсов служат классические школьные предметы (За исключением курсов подготовки к ЕГЭ) или творческие направления. Также присутствуют специальные усиленные курсы, длительностью также в два часа, но проходящие дважды в неделю. Примером таких усиленных курсов служит курс подготовки к ЕГЭ по тому или иному предмету. Как было сказано выше, количество учеников в группе небольшое, поэтому за три академических часа преподаватель способен уделить должное внимание каждому ученику, находя индивидуальный подход и разрабатывая индивидуальную программу обучения в случае необходимости. Однако любой из форматов обучения в «Юниум» оказывается менее эффективным с точки зрения индивидуального подхода, в сравнении с занятиями у репетиторов.

Рассмотрим примерную классификацию школьников, которые проходят математические курсы в тверском образовательном центре «Юниум». Этих школьников можно разделить на условные три группы:

1. Школьники с проблемами в математике.
2. Школьники со средним уровнем.
3. Школьники с хорошими знаниями.

Разберём каждую группу отдельно.

1. Школьники с проблемами в математике. Это дети, которым действительно нужна помощь, они отстают в школе от общего уровня, у них плохие оценки и стоит вопрос о не переводе в следующий класс. Как пример, у девятиклассников стоит вопрос не о том, чтобы сдать экзамен хорошо, а просто о том, чтобы на него попасть. Эту группу, в свою очередь, можно разделить на две подгруппы. Первая подгруппа – это школьники, имеющие проблемы в математике по независящим от них причинам, например, из-за болезни. Такие дети, как правило, сильно мотивированы и готовы усердно работать. Вторая подгруппа – это школьники, которые имеют проблемы вследствие отсутствия заинтересованности в обучении. Таких школьников чаще всего приводят родители в обход мнения ребёнка. Школьников с проблемами в математике, как правило, не так мало: от трёх до пяти человек на группу.

2. Школьники со средним уровнем. Это дети, которые хотят поднять свой уровень в целом или балл на экзамене в частности. У каждого есть не самая плохая теоретическая база, но крайне недостаёт практики, которую они и хотят набрать во время занятий в «Юниум». Это самая многочисленная группа: от четырёх до семи человек на группу.

3. Школьники с хорошими знаниями. Это дети, которые в школе получают исключительно оценки «Хорошо» или «Отлично» и стараются убрать из своих табелей отметку «Хорошо» и стать полноценными отличниками, но всегда возникают проблемы в совершенно неожиданных для них местах. Это самая малочисленная группа: до двух человек в группе, но чаще всего таких нет.

Если не учитывать среднее количество учеников той или иной группы, то выше написанное практически является характеристикой любого среднестатистического школьного класса. Не хватает только отличников, но, как правило, такие дети не пользуются услугами дополнительного образования до наступления предэкзаменационных периодов, а при подготовке к экзаменам предпочитают максимально опытных репетиторов.

На диаграмме (рис. 1) представлено количество школьников, прошедших математические курсы в тверском образовательном центре Юниум за 2015-2018 годы. Общие тенденции таковы: с пятого по восьмой класс школьники и их родители слабо заинтересованы в получении дополнительного образования, в девятом же классе, из-за необходимости сдачи ОГЭ, число обучающихся резко возрастает. Схожего эффекта можно было бы ожидать и для курсов одиннадцатого класса, однако ничего подобного не наблюдается. Это объясняется несколькими причинами: во-первых, большой процент школьников после девятого класса уходит в техникумы, колледжи и иные среднеспециальные учебные заведения. Во-вторых, ЕГЭ считается более ответственным и сложным экзаменом, так что в деле подготовки школьники и родители склонны доверять высококлассным репетиторам. Здесь играет свою роль и отсутствие повсеместной «культуры», некой традиции посещения образовательных курсов. Кроме того, можно отметить, что количество посещающих курсы десятого и одиннадцатого классов практически совпадают. Это может послужить темой для отдельного исследования, здесь же мы ограничимся предположением, что учащиеся старшей школы хорошо осознают важность ЕГЭ и начинают готовиться к нему заранее.

Рис. 1

Таким образом, можно сделать вывод, что коммерческие образовательные центры являются своего рода компромиссом между школьным образованием и занятиями у частных педагогов. Небольшое количество учеников в группе обеспечивает более индивидуальный (в сравнении со школьным) подход преподавателя к ученику, а стоимость обучения в среднем ниже, чем у репетиторов. Еще одной, хотя и менее значимой, положительной чертой подобных образовательных центров, является возможность получения преподавательского опыта студентами и молодыми специалистами. Перспективы развития таких организаций в России до конца не ясны, однако можно сказать, что свою экономическую нишу на рынке образовательных услуг они заняли, причем достаточно уверенно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гнеденко Б.В. Математика и математическое образование в современном мире. - М., Просвещение, 2005. – 177 с.

2. Мерлина Н.И. Теоретические основы дополнительного математического образования школьников. – Чебоксары, Диссертация, 2000. – 289 с.

УДК 514.82

ОЦЕНКИ ПАРАМЕТРА ХАББЛА В СТАНДАРТНОЙ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Вячеслав Олегович Васильев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru

Герман Сергеевич Шаров
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vyacheslav210@yandex.ru

Ключевые слова: *космология, параметр Хаббла, модель* ΛCDM.

Аннотация. Рассмотрена стандартная космологическая модель ΛCDM с холодной темной материей и Λ-членом (темной энергией). С ее помощью проведено описание наблюдательных данных по параметру Хаббла $H(z)$, найдены оптимальные значения параметров модели. Критерий оптимальности – наилучшее соответствие набору наблюдательных данных $H(z)$.

Космология – описание эволюции Вселенной, как целого.

Возникновение современной космологии связано с развитием в XX веке общей теории относительности (ОТО, 1916) Эйнштейна. Первое исследование на эту тему, опирающееся на ОТО, Эйнштейн опубликовал в 1917 году под названием «Космологические соображения к общей теории относительности». В ней он ввёл 3 предположения: Вселенная однородна, изотропна и стационарна. Чтобы обеспечить последнее требование, Эйнштейн ввёл в уравнения гравитационного поля дополнительный «космологический член» Λ. Полученное им решение означало, что Вселенная имеет конечный объём (замкнута) и положительную кривизну.

В теории Эйнштейна тяготение есть результат искривленности пространства-времени, а гравитационное поле – метрический тензор, компоненты которого должны удовлетворять уравнениям Эйнштейна.

В двух статьях (1922, 1925) А.А. Фридман описал Вселенную в рамках ОТО, предположив, что пространственная часть Вселенной однородна и изотропна (в больших масштабах). В этих предположениях возможны только 3 модели (модели Фридмана). Пространственная часть Вселенной – 3-мерное многообразие постоянной кривизны. Пусть k – знак кривизны, тогда:

1. $M_1^{1,3}=R \times S_a^3$, $k = 1$ – замкнутая,
2. $M_0^{1,3}=R \times R^3$, $k = 0$ – плоская,
3. $M_{-1}^{1,3}=R \times P_a^3$, $k = -1$ – открытая.

Здесь S_a^3, P_a^3 – трехмерные сфера и псевдосфера, $a = a(t)$ – масштабный фактор (аналог привычного радиуса, или сам радиус – для S_a^3).

Для многообразий $M_k^{1,3}$ уравнения Эйнштейна с Λ-членом для пылевидной материи сводятся к одному уравнению

$$\frac{a'^2+k}{a^2} = \gamma\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\Lambda}{3}, \qquad (1)$$

где $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{a^3}$ – плотность энергии материи, ε_0 – константа, $\tau = ct$, $a' = \frac{da}{d\tau}$,
$\gamma = \frac{8\pi G}{c^4}$ – гравитационная постоянная Эйнштейна, c – скорость света в вакууме, G – гравитационная постоянная Ньютона.

В моделях Фридмана $\Lambda = 0$. Все три модели Фридмана с k = -1, 0, и 1 описывают нестационарную (расширяющуюся Вселенную) с растущим масштабным фактором $a(t)$. Предсказанное Фридманом разбегание Вселенной первым обнаружил Эдвин Хаббл в 1929 году.

На рис. 1 слева представлена теоретическая зависимость $a(t)$ для моделей Фридмана при возможных значениях k. Справа показан график для модели с Λ не равным нулю (называемой ниже моделью ΛCDM), составленный по данным реальных наблюдений. Можно видеть, как в некоторый момент времени происходит перегиб, и масштабный фактор начинает расти с ускорением из-за Λ-члена в уравнении (1).

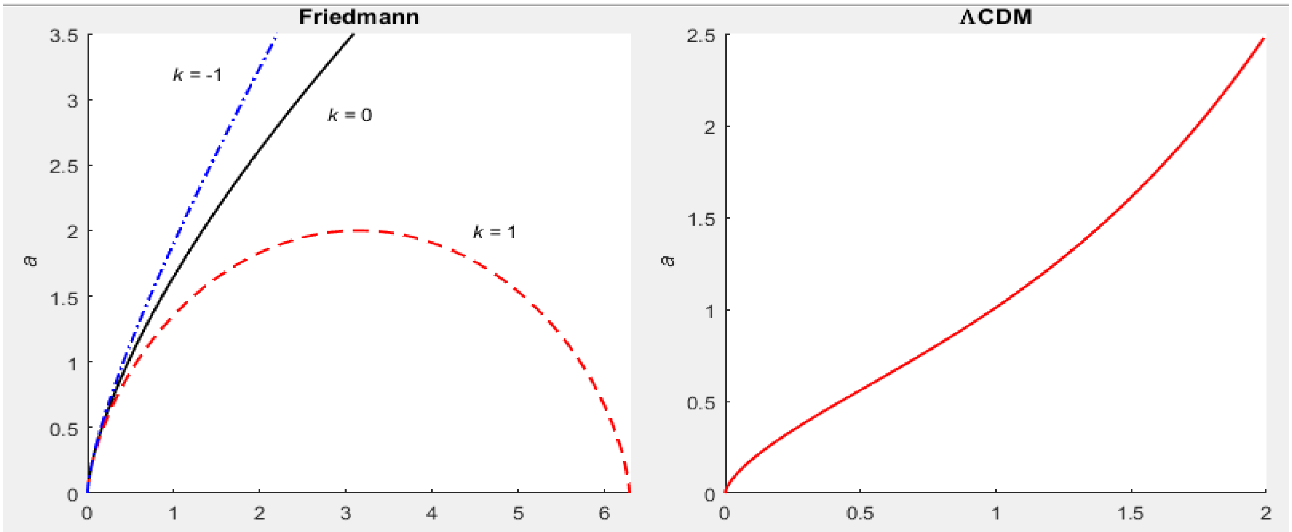


Рис. 1. Зависимость *a*(*t*) для моделей Фридмана (слева) и ΛCDM (справа)

Параметр Хаббла

$$H = \frac{da}{dt} / a$$

– один из важных космологических параметров, показывающий отношение скорости расширения Вселенной к ее текущим «размерам». Значение параметра Хаббла в настоящий момент $H(t_0) = H_0$ времени есть постоянная величина, именуемая постоянной Хаббла.

Однако гораздо удобнее оказывается оперировать величиной $H(z)$, а не $H(t)$, где z – красное смещение. Пусть λ – длина волны, испущенной некоторым источником света (удаленной звездой) в момент, когда масштабный фактор равен a, а в наше время (при $a = a_0$) эта волна доходит до наблюдателя, тогда:

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\Delta a}{a} = \frac{a_0}{a} - 1.$$

Мы не можем определить a, и единицы измерения часто выбирают так, чтобы $a_0 = 1$.

Для описания развития Вселенной как целого, в частности, для объяснения ее ускоренного расширения предлагаются различные космологические модели. Современной стандартной космологической моделью является модель ΛCDM с холодной темной материей и -членом (темной энергией). Она не содержит явных противоречий и достаточно хорошо описывает наблюдательные данные по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям, оценкам H(z). Именно она будет рассмотрена в данной работе.

В модели ΛCDM [1, 2] зависимость $H(z)$ следует из уравнения (1):

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2} \tag{2}$$

Если в этом уравнении положить z=0 ($t = t_0$ наше время), то оно сведется к равенству

$$\Omega_m + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1,$$

где Ω_m – плотность барионной и темной материи,

Ω_Λ – плотность темной энергии,

Ω_k – вклад кривизны пространства-времени.

Модель имеет три независимых параметра: H_0 и любые две из трех Ω (в данной работе независимыми выбраны Ω_Λ и Ω_m).

Целью данной работы является поиск значений указанных выше параметров, оптимальных с точки зрения наилучшего соответствия набору наблюдательных данных $H(z)$. Оптимальным будем считать набор параметров, при котором достигает минимума функция:

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N_h}\left(\frac{H(\Omega_m, H_0, \Omega_\Lambda) - H^{obs}(z_k)}{\sigma_k}\right),$$

где N_h – число наблюдений.

В данной работе поиск оптимальных значений параметров и нахождение минимума функции были выполнены численно. Для решения поставленной задачи с помощью математического пакета Matlab были построены линии уровня и графики зависимости минимума функции χ^2 (рис. 2 – 5) от различных параметров, а также найдены оптимальные значения каждого из параметров (табл. 1). На всех рисунках штриховые линии соответствуют полному набору из 57 наблюдательных данных. Сплошные линии соответствуют урезанному набору наблюдательных данных: из исходного набора исключены 26 значений, полученных в результате наблюдений барионно-акустических осцилляций.

Барионные акустические осцилляции (БАО) - регулярные, периодические колебания плотности видимой барионной материи (обычной материи) Вселенной. БАО вводят "стандартную единицу" длины в космологии (~490 миллионов световых лет в современной Вселенной), измеряемую по масштабной структуре вещества с помощью астрономических наблюдений.

На рис. 2 изображены линии уровня на плоскости $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$, соответствующие минимальным значениям функции χ^2 , если в каждой точке $(\Omega_m, \Omega_\Lambda)$ проведена минимизация по H_0.

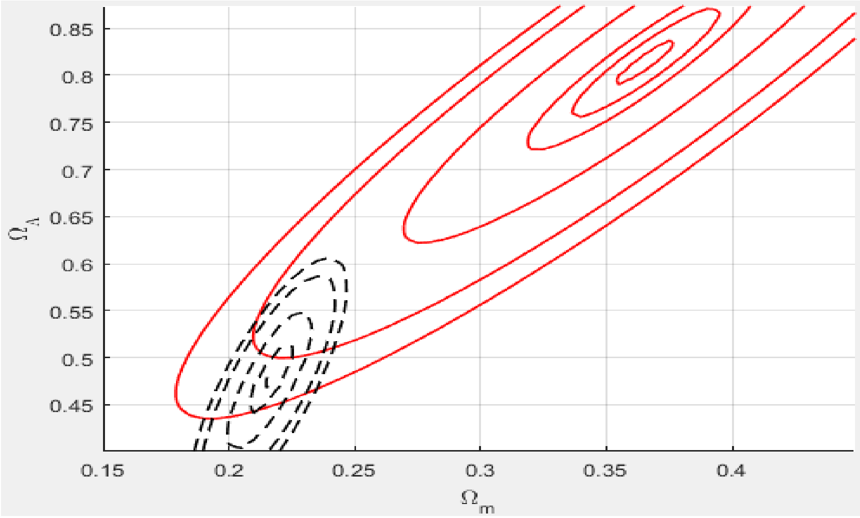


Рис. 2. Линии уровня функции $\min_{H0}\chi^2$ на плоскости (Ω_m, Ω_Λ)

На рис. 3, 4, 5 представлены графики зависимости минимального значения χ^2 соответственно. В каждом случае минимизация проведена по двум оставшимся параметрам от H_0, Ω_Λ и Ω_m

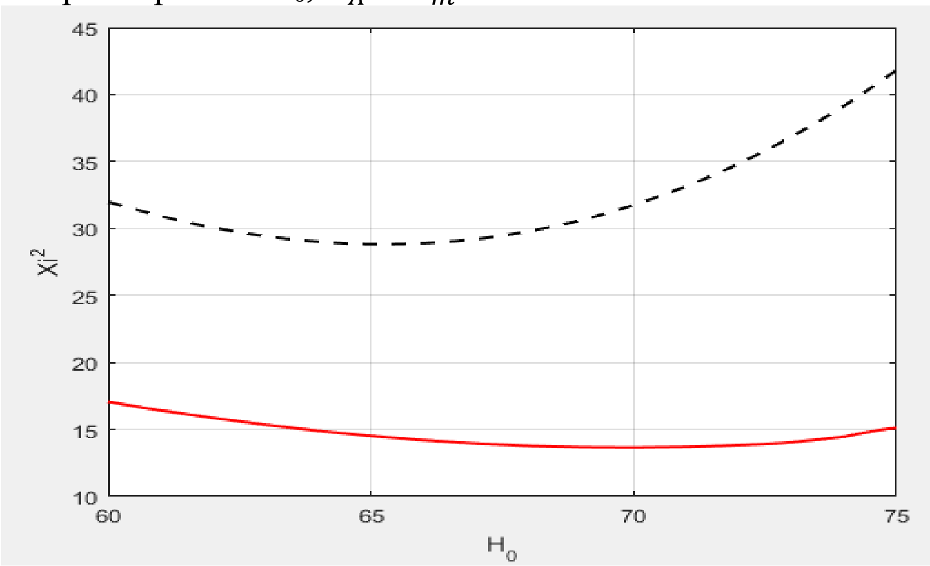


Рис. 3. Зависимость функции $\min\chi^2$ от H_0

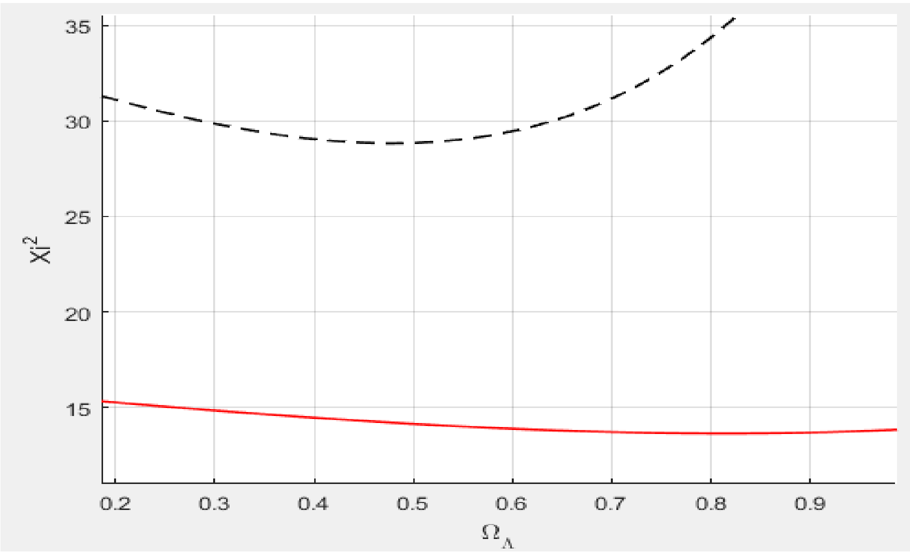


Рис. 4. Зависимость функции $\min\chi^2$ от Ω_Λ

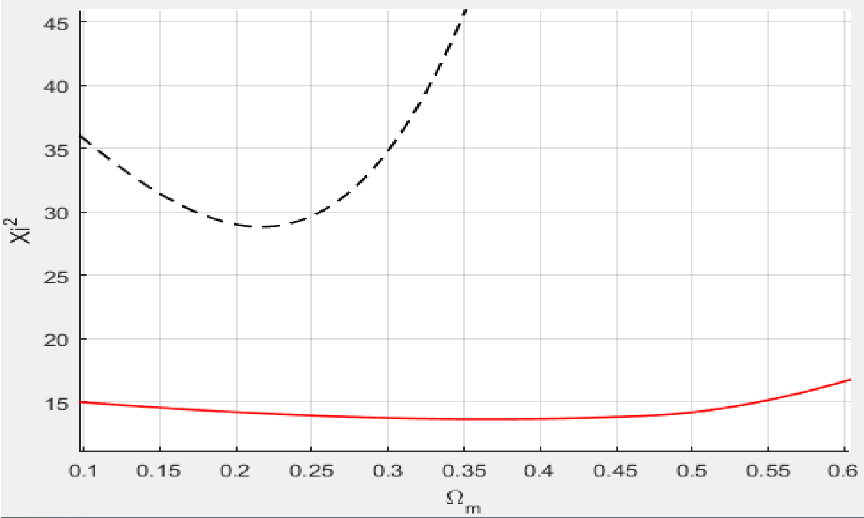


Рис. 5. Зависимость функции min χ^2 от Ω_m

Ниже представлена таблица, содержащая оптимальные значения параметров H_0, Ω_Λ, Ω_m, функции χ^2 для полного и урезанного (без БАО) наборов наблюдательных данных. Следует отметить, что точность нахождения параметров определяется их «шагом» в программе. Таким образом, параметры Ω_Λ, Ω_m найдены с точностью до 0.005, H_0 - с точностью до 0.001.

Наблюдения	χ^2	H_0	Ω_Λ	Ω_m
С БАО	28.82	65.181	0.475	0.215
Без БАО	13.63	69.860	0.815	0.365

Табл. 1. Оптимальные значения параметров модели

Из представленных результатов видно, что урезанный набор данных позволяет достичь минимума функции χ^2 существенно меньшего, однако достигается это естественным образом, за счет уменьшения количества слагаемых. Параметр H_0 изменяется незначительно, затоΩ_Λ, Ω_m изменяются очень заметно (хотя отношение их остается практически тем же), что может говорить о сильной зависимости этих параметров от выбранного способа наблюдения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.С. Шаров, Е.Г. Воронцова. Космологическая модель с обобщенным чаплыгинским газом и последние астрономические наблюдения // Вестник ТвГУ. Сер. Прикладная математика. 2014. N1. С. 21–38.

2. Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 466, № 3 Pp. 3497–3506. arXiv:1701.00780.

3. Альберт Эйнштейн и теория гравитации. Сборник статей. М.: Мир, 1979.

УДК 514 (075.3)

ТРИ СПОСОБА РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Александр Анатольевич Голубев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *исследовательская задача, геометрическая задача, задачи на доказательство.*

Аннотация. Многие учащиеся при решении геометрических задач испытывают значительные затруднения. Связано это и с обилием различных типов геометрических задач, и с многообразием приёмов и методов их решения. Вместе с тем, решая любую математическую задачу, полезно обсудить, различные методы её решения.

В статье предлагается три способа решения одной геометрической задачи.

Лучше решить одну задачу несколькими методами, чем несколько задач – одним
Д. Пойя

Решение исследовательских задач, геометрических задач, задач на доказательство занимает в математическом образовании центральное место, умение решать такие задачи является важным показателем уровня математического развития, глубины усвоения учебного материала [5–7]. В статье будут рассмотрены три способа решения одной и той же стереометрической задачи. Перед школьником будут поставлены вопросы, связанные с выбором наиболее оптимального способа решения предложенной задачи, а также других аналогичных задач, при этом важно проанализировать аргументы «за» и «против» каждого из приёмов решения задачи. Данный материал может быть использован на уроке геометрии при подготовке школьников к ЕГЭ по математике.

Задача. Длина диагонали куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна $3\sqrt{11}$. На луче A_1C отмечена точка P так, что $A_1P = 4\sqrt{11}$.

а) Докажите, что $PBDC_1$ – правильный тетраэдр.

б) Найдите длину отрезка AP.

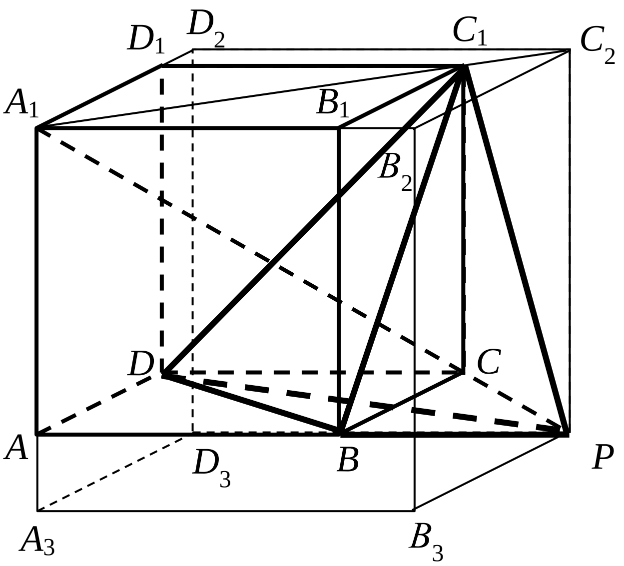
Решение (*1-й способ*). При данном способе решения нам понадобится лишь знание теоремы Пифагора и хорошее пространственное воображение.

а) Если мы докажем, что все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны, то это и будет означать, что тетраэдр является правильным.

Учитывая, что диагональ куба в $\sqrt{3}$ больше его ребра, заключаем, что ребро куба равно $\sqrt{33}$. Так как диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ больше его стороны, то $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{33} = \sqrt{66}$.

Так как $A_1C = 3\sqrt{11}$, $A_1P = 4\sqrt{11}$, то $A_1P = \frac{4}{3}A_1C$.

Рассмотрим куб $A_3B_3PD_3A_1B_2C_2D_2$ ребро, которого в $\frac{4}{3}$ раз больше ребра исходного куба. На рисунке этот куб показан тонкими линиями.



Из прямоугольного треугольника PC_1C_2 с помощью теоремы Пифагора находим:

$$PC_1 = \sqrt{C_1C_2^{\ 2} + PC_2^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}A_1C_1\right)^2 + \left(\frac{4}{3}CC_1\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{66}^{\,2} + \left(4\sqrt{33}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{33}\cdot\sqrt{\sqrt{2}^{\,2} + 4^2} = \frac{1}{3}\sqrt{33}\cdot\sqrt{18} = \sqrt{11\cdot 6} = \sqrt{66}\,.$$

Аналогично, из прямоугольных треугольников BB_3P и DD_3P находим $BP = DP = \sqrt{66}$.

Таким образом, все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны и тетраэдр является правильным

б) Длину отрезка AP найдём из прямоугольного треугольника AA_3P:

$$AP = \sqrt{AA_3^{\ 2} + PA_3^{\ 2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}AA_1\right)^2 + \left(\frac{4}{3}AC\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{\sqrt{33}^{\,2} + \left(4\sqrt{66}\right)^2} =$$

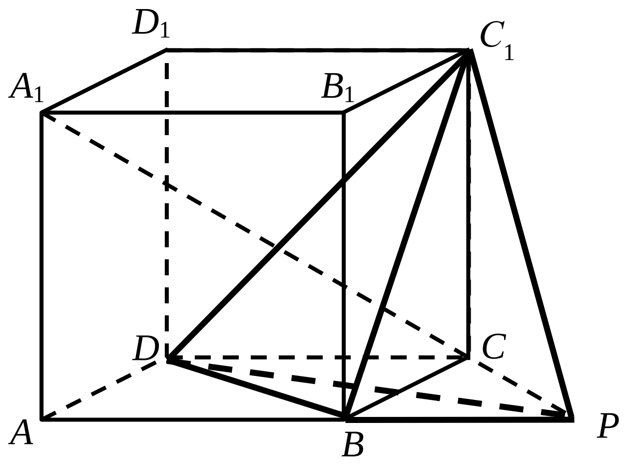
$$= \frac{1}{3}\sqrt{33}\cdot\sqrt{1 + 16\cdot\sqrt{2}^{\,2}} = \frac{1}{3}\sqrt{33}\cdot\sqrt{33} = \frac{33}{3} = 11.$$

***Ответ*:** б) 11.

Решение (*2-й способ*). Нам понадобится знание теоремы косинусов. При этом мы будем опираться на более простой чертёж, чем в первом случае.

а) Если мы докажем, что все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны, то это и будет означать, что тетраэдр является правильным.

Учитывая, что диагональ куба в $\sqrt{3}$ больше его ребра, заключаем, что ребро куба равно $\sqrt{33}$. Так как диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ больше его стороны, то $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{33} = \sqrt{66}$.



Из треугольника A_1C_1C найдём косинус угла CA_1C_1:

$$\cos\angle CA_1C_1 = \frac{A_1C_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{66}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Из треугольника A_1C_1P найдём PC_1:

$$PC_1^{\,2} = A_1C_1^{\,2} + A_1P^2 - 2A_1C_1\cdot A_1P\cos\angle PA_1C_1 =$$
$$= 66 + 16\cdot 11 - 2\sqrt{66}\cdot 4\sqrt{11}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3} = 242 - 176 = 66.$$

Тогда $PC_1 = \sqrt{66}$.

Далее заметим, что треугольники A_1BP, A_1DP равны треугольнику A_1C_1P (по двум сторонам и углу между ними), следовательно, $BP = DP = PC_1 = \sqrt{66}$.

Таким образом, все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны и тетраэдр является правильным

б) Из треугольника AA_1C найдём косинус угла AA_1C:

$$\cos\angle AA_1C = \frac{A_1C_1}{A_1C} = \frac{\sqrt{33}}{3\sqrt{11}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Длину отрезка AP найдём из треугольника AA_1P:

$$AP_1^{\,2} = AA_1^{\,2} + A_1P^2 - 2AA_1\cdot A_1P\cos\angle AA_1C_1 =$$
$$= 33 + 176 - 2\sqrt{33}\cdot 4\sqrt{11}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 209 - 88 = 121,$$

тогда $AP = 11$.

***Ответ*:** б) 11.

Координатный (векторно-координатный) метод решения геометрических задач – один из наиболее популярных и эффективных методов в геометрии. Однако в школьном курсе геометрии этот метод используется достаточно ограниченно и неполно. При этом, в ряде случаев применение координатного метода позволяет значительно упростить и сократить решение геометрической задачи [7]. С помощью векторно-координатного метода учащийся может успешно решать как планиметрические, так и стереометрические задачи ЕГЭ по математике [1–4], [8], [9].

Координатный метод позволяет решать задачи на нахождение:

1) *расстояния* между двумя точками; от точки до прямой; от точки до плоскости; между скрещивающимися прямыми;

2) *угла* между двумя прямыми; между прямой и плоскостью; между плоскостями.

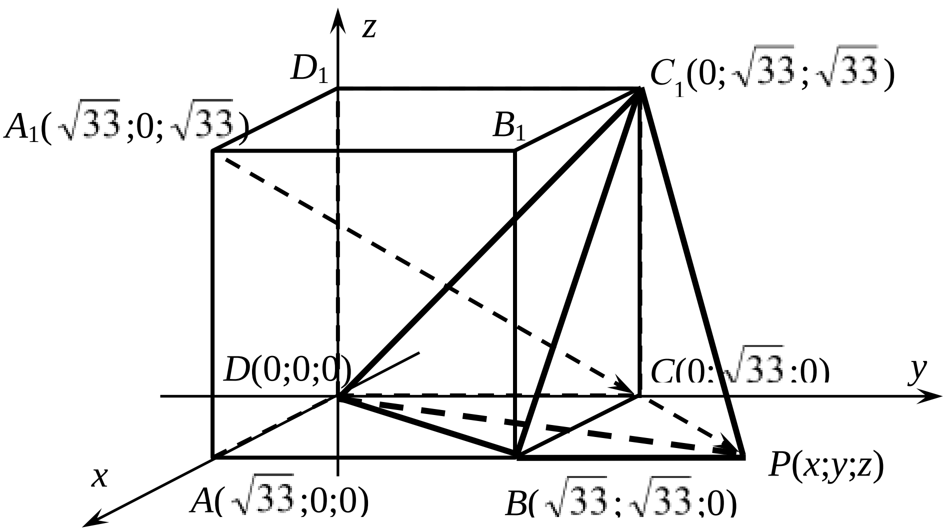
У координатного метода есть один существенный недостаток – большой объём вычислений. С другой стороны, его неоспоримое преимущество заключается в том, что все решения задач с помощью метода координат единообразны. Если при решении задачи методом, основанным на аксиомах, теоремах и свойствах фигур, приходится искать особый путь решения для каждой задачи, то решение задачи координатным способом выполняется по определенному стандартному алгоритму, который легко приспосабливается к любой задаче [7].

Алгоритм метода координат

1. Выбор декартовой системы координат.
2. Нахождение координат необходимых точек и векторов.
3. Нахождение необходимых уравнений прямых и плоскостей.
4. Решение задачи, используя ключевые формулы данного метода.

Продемонстрируем достоинства этого метода на примере решения поставленной выше задачи.

Решение (*3-й способ*). а) Введём систему координат: DA – ось абсцисс, DC – ось ординат, DD_1 – ось аппликат.



Если мы докажем, что все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны, то это и будет означать, что тетраэдр является правильным.

Учитывая, что диагональ куба в $\sqrt{3}$ больше его ребра, заключаем, что ребро куба равно $\sqrt{33}$. Так как диагональ квадрата в $\sqrt{2}$ больше его стороны, то $BD = BC_1 = DC_1 = \sqrt{2}\cdot\sqrt{33} = \sqrt{66}$.

Запишем координаты точек: $A(\sqrt{33};0;0)$, $B(\sqrt{33};\sqrt{33};0)$, $C(0;\sqrt{33};0)$, $D(0;0;0)$, $A_1(\sqrt{33};0;\sqrt{33})$, $C_1(0;\sqrt{33};\sqrt{33})$. Найдём координаты точки P. Пусть $P(x;y;z)$.

Запишем координаты векторов:

$$\overrightarrow{A_1C} = (-\sqrt{33};\sqrt{33};-\sqrt{33}),\ \overrightarrow{A_1P} = (x-\sqrt{33};y;z-\sqrt{33}).$$

Так как $A_1C = 3\sqrt{11}$, $A_1P = 4\sqrt{11}$ и векторы $\overrightarrow{A_1P}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ – коллинеарные, то $\overrightarrow{A_1P} = \frac{4}{3}\overrightarrow{A_1C}$, следовательно,

$$\begin{cases} x-\sqrt{33} = -\frac{4}{3}\sqrt{33}, \\ y = \frac{4}{3}\sqrt{33}, \\ z-\sqrt{33} = -\frac{4}{3}\sqrt{33} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{33}}{3}, \\ y = \frac{4}{3}\sqrt{33}, \\ z = -\frac{\sqrt{33}}{3}. \end{cases}$$

Тогда

$$BP = \sqrt{\left(\sqrt{33}+\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(\sqrt{33}-\frac{4}{3}\sqrt{33}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}\cdot\sqrt{16+1+1} = \frac{\sqrt{33}}{3}\cdot 3\sqrt{2} = \sqrt{66}.$$

Аналогично находим $DP = PC_1 = \sqrt{66}$. Таким образом, все рёбра тетраэдра $PBDC_1$ равны и тетраэдр является правильным.

б) $$AP = \sqrt{\left(\sqrt{33}+\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(-\frac{4}{3}\sqrt{33}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(\frac{4\sqrt{33}}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{33}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}\cdot\sqrt{16+16+1} = \frac{\sqrt{33}}{3}\cdot\sqrt{33} = 11.$$

***Ответ*:** б) 11.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А. Сборник заданий по математике: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2015. – 160 с.

2. Голубев А.А. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ – 2017: учебное пособие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2017. – 124 с.

3. Голубев А.А. Практикум по математике для старшей школы: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 140 с.

4. Голубев А.А. Рабочая тетрадь по математике для подготовки к ЕГЭ – 2017 (профильный уровень) / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, Тверь, 2017. – 96 с.

5. Голубев А.А. Стандартные и нестандартные задачи по геометрии. Часть 1: Планиметрия: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 96 с.

6. Голубев А.А., Баранова О.Е. О подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ: обсуждение и решение задач повышенного уровня сложности. В сборнике: ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛАХ ТВЕРСКОГО РЕГИОНА Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Министерство образования Российской Федерации; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». – Тверь, 2016. С. 208-231.

7. Голубев А.А., Спасская Т.А. Векторно-координатный метод решения геометрических задач. В сборнике: ПРЕПОДАВАНИЕ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛАХ ТВЕРСКОГО РЕГИОНА Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Министерство образования Российской Федерации; Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Тверской государственный университет»; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». – Тверь, 2017. С. 86-100.

8. Игнатьев Г.А. Методика обучения решению стереометрических задач путём опорных конструкций / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы научно-практической конференции. 2017. С. 126-130.

9. Игнатьев Г.А. Практические методы обучения в школьном курсе математики. Приёмы работы с задачей / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы научно-практической конференции. 2017. С. 131-136.

УДК 378.147

ОРГАНИЗАЦИЯ РАБОТЫ УЧАЩИХСЯ С НИЗКОЙ УСПЕВАЕМОСТЬЮ И НИЗКОЙ МОТИВАЦИЕЙ ПО ПОДГОТОВКЕ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Наталья Анатольевна Грибина
Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение «Дмитровская основная общеобразовательная школа», д. Дмитровка, Краснохолмский район, Тверская обл.
E-mail: ntaligribina1304@list.ru

Ключевые слова: *низкая успеваемость, низкой мотивация, государственная итоговая аттестация.*

Аннотация. В работе рассматривается проблемы низкой успеваемости учащихся. Предлагаются способы организации подготовки учащихся со слабыми математическими способностями к государственной итоговой аттестации.

Задача учителя не в том, чтобы дать ученикам максимум знаний, а в том, чтобы привить им интерес к самостоятельному поиску знаний, научить добывать знания и пользоваться ими.

Константин Кушнер

В последнее время всё чаще и чаще приходится слышать мнение психологов и педагогов, о том, что число детей, у которых имеются проблемы общего поведения и обучения, неуклонно растёт. Что является причиной этого факта? Чем это может быть вызвано?

Ещё в глубокой древности мудрецы говорили: «Увидеть и понять проблему – наполовину решить её, если же не видишь проблему, это значит, что она в тебе самом». Для любого учителя всегда была и сейчас остается актуальна проблема – «не упустить» учащихся с низкими учебными способностями.

Каждый учитель, ученики которого неудачно сдали экзамен, размышлял о причинах плохих результатов государственной итоговой аттестации. Не избежала этого и я. Прочитав немало соответствующей литературы, учитывая свой собственный педагогический опыт, я пришла к выводу, что у немалого числа наших выпускников наблюдаются две ярко выраженные проблемы: во-первых многие ученики не могут правильно понять смысл прочитанного, во-вторых, испытывают большие затруднения в выполнении заданий вычислительного характера.

Данные проблемы, конечно, не являются единственными, но они влекут за собой целый ряд новых, более серьезных проблем:

1. *Отсутствие сформированности учебных навыков*
   Ученик не научен работе с текстом: не может выделить главную мысль, понять смысл текста, не может рационально организовать свое время и правильно распределить усилия.
2. *Несформированность произвольной сферы*

Эта проблема проявляется в том, что ученик делает лишь только то, что ему нравится и абсолютно не способен прилагать волевые усилия для выполнения учебных задач.

3. *Практически отсутствующий познавательный интерес*

Невозможно также не заметить, что в последние годы совершенно не срабатывают так называемые карательные меры. Многие учащиеся не слишком расстраиваются получив двойку, они не боятся ни наказания, ни осуждения со стороны одноклассников.

4. *Низкий уровень развития словесно-логического мышления*

Для преодоления этой проблемы учителю необходимо делать большой упор на наглядность при объяснении учебного материала и при решении задач, обеспечивая таким образом реализацию принципа доступности учебного материала.

Низкая мотивация учащихся к приобретению математических знаний связана с общественной недооценкой значимости математического образования и перегруженностью школьного курса математики техническими элементами. У многих учащихся вырабатывается негативное отношение к математике как к непонятному и ненужному предмету, который, по их мнению, практически невозможно освоить. Проблема усугубляется тем, что негативным отношением к математике проникнуто не одно поколение, поэтому в значительной части семей родители не могут поддержать учебную мотивацию учащихся.

Экзамен по математике является итогом работы как ученика, так и учителя на протяжении пяти лет обучения в основной школе, поэтому подготовка к нему является важной составляющей всего учебного процесса, начиная с 5 класса.

Для предотвращения неуспеваемости, на мой взгляд, необходимо осуществить следующие действия:

- своевременно выявлять образовавшиеся пробелы в знаниях, умениях и навыках учащихся и организовать работу по их ликвидации;
- установить правильность и разумность способов учебной деятельности, применяемых учащимися, и при возникновении необходимости корректировать эти способы;
- систематически обучать учащихся общеучебным умениям и навыкам;
- организовать учебный процесс так, чтобы вызвать и развить у учащихся внутреннюю мотивацию учебной деятельности, познавательный интерес к изучению математики.

В работе со слабыми учащимися я стараюсь опираться на правила, разработанные психологами.

Не следует ставить слабого ученика в ситуацию неожиданного вопроса и не нужно требовать от него быстрого ответа на поставленный вопрос, необходимо давать ученику достаточно времени на обдумывание и подготовку. Кроме того, желательно, чтобы ответ ученика был представлен не в устной, а в письменной форме.

На мой взгляд, необходимо обратить особое внимание на объём изучаемого материала, и если материал большой, разнообразный и сложный для усвоения, то необходимо постараться разбить его на отдельные информационные куски и давать их постепенно, по мере усвоения. Не следует заставлять учеников, не обладающих хорошими математическими способностями, отвечать на вопросы по новому, только что усвоенному материалу, лучше немного подождать и отложить опрос на следующий урок. Таким образом, ученик получает возможность повторить этот материал дома и, что немаловажно, временем он при этом не ограничен.

Важным фактором в процессе обучения является формирование у таких учеников уверенности в своих силах, в своих знаниях. В той связи необходима правильная тактика опросов и поощрений. Особую роль играет не только оценка, но и замечания типа «хорошо», «отлично», «молодец», «умница». Эта уверенность поможет ученику в стрессовых ситуациях сдачи экзаменов, написания контрольных и проверочных работ.

Важно с большой осторожностью оценивать «неуспех» ученика, ведь сам он очень переживает и болезненно к нему относится.

Кроме того, для подготовки ответа ученику необходимо дать столько времени, чтобы он смог и проверить и при необходимости исправить написанное.

Не следует отвлекать ученика, переключать его внимание, нужно стараться создать спокойную и доброжелательную атмосферу.

Учащиеся любят то, что понимают, в чем добиваются успеха, что умеют делать. Любому ученику приятно получать хорошие оценки, даже нарушителю дисциплины. Важно, чтобы с помощью товарищей, учителей он добивался первых успехов, и чтобы они были замечены и отмечены, чтобы он видел, что учитель рад его успехам, или огорчён его неудачами. Как этого добиться?

Часто перед многими учениками стоит проблема общения «ученик – учитель». Им трудно бывает задать вопрос, попросить учителя объяснить то, что оказалось непонятым, и происходит это зачастую из-за индивидуальных особенностей личности. У одноклассников гораздо проще спросить о том, что вызывает затруднения и получить в нужный момент необходимую помощь. Этому способствует работа в парах. Задания выполняют вдвоём, при этом ведётся диалог, ребята рассуждают, обсуждают решение, доказывают свою точку зрения. Таким образом, ученики всё полезное время тратят на достижение главной цели урока. Я наблюдаю за работой учеников, при необходимости направляю, частично помогаю и корректирую.

Огромное внимание уделяю устной работе. На каждом уроке обязательно провожу устный счёт. Материал подбираю так, чтобы ребята начинали с легких заданий, а затем постепенно подходили к выполнению более сложных задач.

Обязательно включаю занимательные задачи и головоломки, а так же интересные рассказы. Это, в свою очередь, обеспечивает «эффект новизны» при решении учебных задач.

В своей работе я использую информационно-коммуникативные технологии, ведь это стимулирует познавательную деятельность и усиливает мотивацию, позволяет значительно расширить границы урока, при этом фактически создаётся новая система работы с иллюстративным материалом, возможность его сведения к единому формату.

В изучение текущего учебного материала обязательно включаю задачи, размещённые в открытом банке заданий ГИА-9 (математика) на сайте ФИПИ. Учу ребят самостоятельной работе с учебником, с дополнительной литературой, ресурсами Интернет. В содержание текущего контроля непременно включаю экзаменационные задачи. Итоговое повторение строю исключительно на отработке умений и навыков, необходимых для получения положительной отметки на экзамене.

Неотъемлемым элементом подготовки к государственной итоговой аттестации является обучение заполнению бланков. Учащиеся очень часто допускают ошибки при их заполнении во время предэкзаменационных работ, кто от волнения, кто из-за невнимательности. Поэтому работу в этом направлении осуществляю начиная уже с 5 класса. Ежегодно я провожу итоговые контрольные работы в форме ОГЭ. Работа так же состоит из двух частей, и ученики выполняют её на бланках, подобных экзаменационным. Таким образом, у ребят пропадает страх пред неизвестностью и страх неверного заполнения бланков, ведь им уже всё знакомо и понятно.

Важным условием успешной подготовки к экзаменам является систематическое отслеживание результатов учеников по всем темам и своевременная коррекция уровня усвоения учебного материала. Это поможет повысить мотивацию учащихся к учебе, привлечь внимание родителей к учебному процессу и осознанию ими своей ответственности за обучение детей.

Дети, конечно, все очень разные. Есть среди них яркие, одарённые и талантливые личности, но есть и другие, не обладающие этими качествами. В то же время каждый ребенок должен самореализоваться, и задача учителя состоит в том, чтобы помочь ему осуществить свои планы и мечты. Очень хочется надеяться, что мы с учениками на верном пути к успеху. Успех учеников на государственной итоговой аттестации – это и мой успех и моя радость. И мы вместе идём к этой цели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маркова, А.К. Формирование мотивации учения [Текст] / А.К. Маркова, А.К. Матис, Т.А. Орлов. – М.: Просвещение, 1990. – 192 с.
2. Щукина, Г.И. Педагогические проблемы формирования познавательного интереса учащихся [Текст] / Г.И. Щукина. – М.: Просвещение, 2005. – 160 с.
3. Гельмонт, А.М. О причинах неуспеваемости и путях ее преодоления [Текст] / А.М. Гельмонт. – М.: Просвещение, 2004. – 326 с.
4. Калмыкова, Э.И. Проблемы преодоления неуспеваемости глазами психолога [Текст] /Э.И. Калмыкова. – М.: Знание, 1982. – 338 с.

УДК 004.9

МИНИ-СОРЕВНОВАНИЯ ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ МОТИВАЦИИ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

Вера Владимировна Григорьева
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: pontida@list.ru

Виктор Вадимович Григорьев
ООО Прайм груп, Тверь
E-mail: tor7@list.ru

Ключевые слова: *Информатика, преподавание программирования, мотивация, соревнование, школьники, студенты, конкурсы, постановка учебных задач, методология.*

Аннотация. В статье рассматриваются предложения по организации мини-соревнований по программированию и информатике среди школьников и студентов младших курсов, принципы подготовки заданий для них и пример одной конкурсной задачи.

При изучении основ программирования со старшими школьниками и студентами младших курсов часто возникает задача повышения заинтересованности учащихся. Один из проверенных способов усиления их мотивации состоит во внесении в учебный процесс элементов игр и соревнований. Задачи олимпиад по программированию отлично тренируют алгоритмическое мышление. Распространенные сейчас хакатоны, фестивали кода вызывают интерес к информатике и обучают навыкам работы в команде. Но такие мероприятия проводятся относительно редко и требуют большой организационной подготовки. В дополнение к ним хотелось бы предложить чаще проводить практические занятия, семинары и даже проверку домашних заданий в форме своеобразных состязаний по нахождению и реализации алгоритмов. Этот подход обычно “оживляет” учебный процесс, побуждает к взаимодействию, исследованию, учит методу проб и ошибок. При любой форме проведения соревнований большое значение имеет демонстрация и обсуждение предлагаемых учащимися решений.

Какие особенности необходимо учесть при проведении таких мини-соревнований? Во-первых, нужно отбирать задачи, критерии качества решения которых можно четко определить. В традиционных олимпиадах по информатике задача считается решенной, если алгоритм выдает правильные результаты с учетом ограничения по времени (как правило, не очень жесткого). Рейтинг участников определяется по количеству решенных задач. Это, конечно, только один из возможных подходов. Иногда бывает интересным показать учащимся один из простых методов решения задачи и попросить их найти другие, более качественные методы. Рейтинг решений должен быть построен на основе четко сформулированных критериев оценки алгоритмов.

Определение критерия качества решения задач может вызвать некоторые проблемы. Например, если программа ищет путь в графе эвристическим методом, то критерием качества решения может стать длина найденного пути. При этом не всегда различия в качестве решений, оцененных таким способом, позволяют правильно сделать вывод о качестве использованных алгоритмов. Предположим, что все участники соревнования найдут путь в графе одним и тем же способом. За счет случайных факторов (различная инициализация алгоритмов, различия при реализации деталей алгоритмов) качество полученных решений может быть оценено по-разному. Тем не менее, ценность таких решений, в целом основанных на одном и том же алгоритме, одинакова. При других исходных данных распределение оценок качества решений может измениться. Поэтому нужно тщательно формулировать критерии оценки качества решений таким образом, чтобы они выделяли действительно удачные алгоритмы.

Нужно проявлять осторожность при сравнении алгоритмов с использованием критерия времени. Понятно, что если алгоритмы реализованы с помощью различных программных средств, то сравнение их временных характеристик – не всегда решаемая задача. Но даже если используется один язык, один компилятор или одна виртуальная машина, время выполнения одного и того же кода может варьироваться по различным причинам. Если принимается решение оценивать эффективность решения по времени работы алгоритмов или их частей, нужно определить, как отделить различия по времени, обусловленные случайными причинами от различий по времени, связанных с качеством алгоритмов. Иногда бывает проще оценить ресурсоемкость алгоритмов по количеству выполняемых ими операций.

Во-вторых, желательно сделать эффективным и занимательным ознакомление учащихся с решениями и определение победителей. Можно попросить авторов лучших работ сделать краткие сообщения о решениях и прокомментировать их. Очень увлекательным процессом может быть визуальная демонстрация работы алгоритмов, в особенности – одновременный запуск нескольких решений. Ранжирование работ по качеству может производиться путем многократного одновременного запуска таких программ. Во многих случаях организаторам целесообразно написать специальную программу для демонстрации и визуализации алгоритмов. Можно производить своеобразные турниры, сравнивая решения по определенным схемам. Наблюдение за работой алгоритмов в реальном времени приводит к возникновению “спортивного эффекта” и увеличению мотивации учащихся. “Игровая” система оценки результатов лучше ориентирует учеников на получение знаний, способствует концентрации внимания и достижению высоких результатов.

Наконец, нужно учесть, что в большинстве случаев для выполнения тестовых заданий школьникам и студентам потребуется дополнительный материал с методическими указаниями и предварительно разработанными фрагментами программ, реализующих некоторые функции, необходимые для выполнения проектов. Среди таких функций могут быть визуализация работы алгоритма, поддержка ввода и вывода данных, несущественные части алгоритмов. Такая “заготовка” позволяет при выполнении конкурсного задания сконцентрироваться на сути задачи.

Используя указанные принципы для создания заданий, можно проводить регулярно проводить мини-соревнования по программированию. Их длительность может составлять от 2 часов (одно занятие) до нескольких дней (домашнее задание с последующим анализом результатов). Рассмотрим пример одной задачи по программированию, которая была использована в подобных конкурсах. Основой для нее послужила “задача о переходе” из книги Жака Арсака [1].

Приведем описание задачи. На экран выводится рисунок, символизирующий автостраду с 8 полосами движения (рис. 1) По каждой полосе движутся автомобили. В начале игры игрок находится на краю автострады (перед 1 полосой). Он может либо оставаться на своем месте, либо переместиться на 1 полосу. Если игрок перемещается на место, ранее занятое автомобилем или при следующем ходе автомобиль достигает занимаемого игроком положения или проходит по нему, то игрок считается “раздавленным”. Он перемещается на край автострады и раунд начинается заново. Если после хода автомобилей игрок не “раздавлен”, то он снова может либо остаться неподвижным, либо продвинуться на шаг вперед, либо вернуться на шаг назад. Если игрок смог достичь противоположного конца трассы, то он выигрывает раунд. Проводится множество раундов, при этом анализируется поведение игрока: считается количество его перемещений, выигранных и проигранных раундов и на основе этих данных определяется качество игры. Расстояние между машинами в одной полосе постоянно и равно 18 точкам. В каждой следующей полосе оно возрастает на 1 точку. Все машины движутся справа налево. Дорога “переходится” в позиции 4-й точки, при этом игроки никогда не перемещаются вправо или влево. Скорость машин в одной полосе постоянна. В верхней полосе она составляет 5 точек в ход. Скорость растет на 1 точку за ход при каждой смене полосы. При таком выборе данных период рисунка очень велик. Случайным является только начальное положение машин на каждой полосе.

Задача соревнования состоит в том, чтобы определить стратегию игры для исполнителя-компьютера, который управляет переходящим шоссе игроком. Варианты этой задачи предлагались школьникам, в том числе на турнире “Шмель 2018” (https://shmel2018.blogspot.ru/) и студентам младших курсов. Для начала работы с помощью среды программирования Scratch [2] для школьников и языка Python [3] для студентов были написаны заготовки для решения задачи, способные работать как в отладочном пошаговом, так и в автоматическом режимах. В последнем случае сменой ходов управляет компьютер, рассчитывая игру 4 игроков одновременно.

Заготовка для решения задачи содержит визуализацию движения машин, процедуру подсчета очков для оценки качества алгоритма, процедуру контроля времени и других параметров испытания алгоритмов. На каждом шаге, в зависимости от анализа положения “автомобилей” на поле алгоритм должен выбрать одну из четырех команд: “вверх”, “вниз”, “сдаться” или “выжидать”. Таким образом, с помощью заготовки решения учащийся может проверять свои алгоритмы, оценивать их эффективность, визуально наблюдать исполнение алгоритмов на экране. При этом от него не требуется полное понимание кода и логики работы заготовки. Пользуясь всеми функциями постановки, учащийся может сосредоточиться непосредственно на алгоритме решения задач и не отвлекаться на сопутствующие задачи.

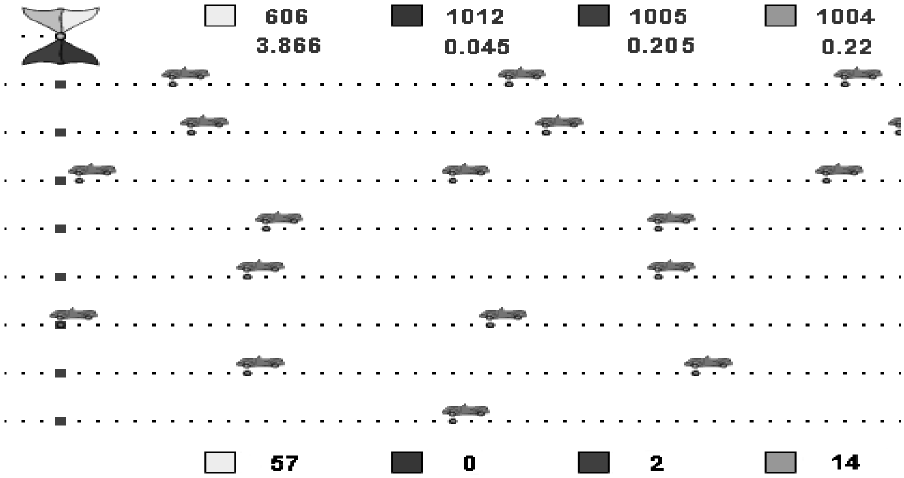


Рис.1. Игровое поле программной заготовки для “задачи о переходе”

Для оценки алгоритмов, которые могли предложить учащиеся, был сформулирован критерий качества – количество успешных переходов управляемого компьютером игрока с ограничением по времени на вычисления, ограничением на количество ходов и ограничением на количество итераций исполнения пошаговой стратегии. Ограничение по времени берется с большим запасом и несущественно для эффективных алгоритмов управления игроком.

Среди школьников и студентов младших курсов было проведено несколько соревнований по решению вариантов «задачи о переходе». Характерно, что школьники пытались моделировать решения начинающего игрока, который играет “вручную”, в то время, как студенты часто минимизировали число ходов за счет просчета вариантов развития событий на несколько шагов вперед с отсечкой заведомо неудачных ветвей. Демонстрация работ, в процессе которой одновременно сравнивались алгоритмы различного качества, вызывала большой интерес во всех группах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арсак Жак. Программирование игр и головоломок. М.:Наука. 1990. – 224 с.

2. В.Г. Рындак, В.О. Дженжер, Л.В. Денисова. Проектная деятельность школьника в среде программирования Scratch. Учебно-методическое пособие / Оренбургский государственный институт менеджмента. – Оренбург, 2009. – 180 с.

3. Мэтиз Эрик. Изучаем Python. Программирование игр, визуализация данных, веб-приложения. – СПб.: Питер, 2017. – 490 с.

УДК 378.147

ПРОБЛЕМАТИКА РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ В 5-7 КЛАССАХ

Виктория Александровна Егорова
ГБОУ СОШ №411 «Гармония» с углубленным изучением английского языка Петродворцового района Санкт-Петербурга, Санкт-Петербург
E-mail: EgorovaVika96@mail.ru

Ключевые слова: *уравнение, линейное уравнение, корень, неизвестное, правила, перенос, знаки, равенство, сумма, разность, вычитаемое, уменьшаемое, делитель, делимое, множитель, произведение, частное, слагаемое.*

Аннотация. В работе рассмотрены проблемы решений уравнений в пятых, шестых и седьмых классах. Описаны необходимые знания, умения, навыки. Рассказано об особенностях уравнений в каждом из классов. Описана сложность адаптации детей к уравнениям в седьмых классах. Предложен способ объяснения «переноса» через знак равенства. Решены примеры уравнений самими обучающимися. Проведен анализ системы решения уравнений по траектории пятых-седьмых классов.

Уравнения всегда занимали ведущую роль в курсе изучения математики в школе, не даром на них отводят много учебного времени. Известно всем, если ребёнка научить решать уравнения, то большинство задач для него станут по силам. Даже те задачи, которые вызывали сложности в понимании и решении, с уравнением принимают облегченное значение. Но прежде, чем переходить к задачам, необходимо сформировать навык решения линейных уравнений.

Уравнения – это равенство, содержащее неизвестное число, которое надо найти. *Корень* – число, при подстановке которого в уравнение, получаем верное равенство. Поиск корня уравнения является *решением уравнения*. Удивительно, но эти определения учащиеся узнают в первом классе, последующие четыре года, закрепляют полученные знания. В итоге, мы получаем, что курс математики в пятых и шестых классах вновь повторяет изученные правила для поиска корней уравнения. Единственное отличие, это сложность самих уравнений. Получается, чтобы решать уравнения необходимо и достаточно знать около шести правил для нахождения неизвестного (слагаемого, вычитаемого, уменьшаемого, делителя, делимого, множителя). В помощь детям на данном этапе нам нужно предложить следующие схемы:

- $1\text{ое слагаемое} + 2\text{ое слагаемое} = \text{СУММА}$
- $\text{уменьшаемое} - \text{вычитаемое} = \text{РАЗНОСТЬ}$
- $\text{делимое} : \text{делитель} = \text{ЧАСТНОЕ}$
- $1\text{ый множитель} * 2\text{ой множитель} = \text{ПРОИЗВЕДЕНИЕ}$

К сожалению, опытным путем известно, дети, которые отлично выучили правила, не могут их применять при отсутствии понимания расположения объектов в уравнении и их названиях. В целом для пятого класса достаточно знать правил и «названия» чисел в примерах.

Шестой класс добавляет сложности в решений уравнений тем, что появляются отрицательные числа. Необходимо чёткое понимание знаков перед числами. Нужно добиться запоминания, что перед числом всегда есть свой знак $+$ или $-$. Здесь сразу встает вопрос перед преподавателем, как теперь строить решение уравнений. Через уже известные правила или начинать объяснять детям перенос чисел за знак равенства. Так как появление отрицательных чисел уже само по себе является стрессом для учеников, то путь наименьшего сопротивления – вернуться к известным правилам. (Заметим, что всё зависит от способностей учеников. Нельзя предлагать другие способы решения, если дети не в силах их освоить.) Но возвращение к правилам вызовут трудности в старшем классе с пониманием «переноса числа через знак», поэтому важным является момент обсуждения другого способа решения. Возможно, уже в шестом классе ученики возьмут этот способ на вооружение!

Рассмотрим пример $5 * x - 25 = 30.$ Ученики пятых/шестых классов скажут:

- $5x$ является *неизвестным уменьшаемым;*
- Чтобы найти *неизвестное уменьшаемое*, надо к *разности* прибавить *вычитаемое*

$$5 * x = 30 + 25$$
$$5 * x = 55;$$

- x – *неизвестный множитель*;
- Чтобы найти *неизвестный множитель*, надо *произведение* разделить на *известный множитель*

$$x = 55 : 5$$
$$x = 11.$$

Ученики решают уравнения через правила, они не заметят, что у числа 25 знак при переносе через знак «равно» поменялся на противоположный. На это стоит обращать внимание уже в шестом классе, чтобы в последующем им было легче ориентироваться.

Седьмой класс несет новые усложнения материала. Самым главным является то, что, к примеру, неизвестное x уже может стоять в обеих частях уравнения и на данном этапе воспользоваться правилами у учеников нет возможности. Появляется перенос чисел через знак равенства, появляются ошибки. Чтобы ошибок было меньше необходимо работать с ними больше, если начинать говорить о переносе раньше, чем в седьмом классе, то осознание действия происходит раньше.

Рассмотрим уравнение: $-6x + 7 = -3x - 8$. Как можно заметить, тут несколько неизвестных и применить правило пятого/шестого класса достаточно проблематично. Здесь, как две аксиомы даются советы учителей:

1. *Неизвестные в одну сторону уравнения, известные в другую.*
2. *При переносе числа через знак равенства его знак меняется на противоположный.*

Представим ход решения глазами учеников:

- Переношу неизвестные влево, известные вправо. $-3x$ необходимо перенести влево, $+7$ вправо:

$$-6x + 3x = -7 - 8$$
$$-3x = -15.$$

- $x-$ *неизвестный множитель*, чтобы его найти надо *произведение* разделить на *известный множитель*:

$$x = -15 : (-3)$$
$$x = 5.$$

Видим, что на последнем этапе ученики седьмых классов всё же используют правила, которые изучали до этого. Если они не доведены до автоматизма, то необходимо вновь их выучить.

Есть интересный способ объяснения переноса через знак равенства через «уравнивание» частей. Важным здесь является то, что надо объяснить главный смысл уравнения. Уравнение — значит равенство левой и правой части, а если мы прибавляем к левой части какое-то число, то обязаны прибавить его же и к правой! Рассмотрим уравнение, но постараемся подвести мысль к «уравниванию» частей

$$5 * x - 25 = 0.$$

У детей сформировано понятие уравнения вида: $x = a$, где $a -$ число. То есть, они привыкли что слева (с одной стороны) должно оставаться неизвестное. Что сейчас мешает нам? Конечно, -25. А что необходимо сделать, чтобы этого числа не было в левой части? Прибавить ему противоположное, а если мы прибавляем к левой части, то обязаны прибавить и к правой части уравнение то же самое число:

$$5 * x - 25 + 25 = 0 + 25$$
$$5 * x = 25.$$

Этот ход для учеников более понятен и математически обоснован. Его можно сравнить с чашами весов. Где мы добавляем гирю на одну сторону и, чтобы привести весы в равновесие, нам необходимо столько же прибавить и на вторую сторону. И когда этот механизм уже осознан, можно говорить о сокращении записи и подметить тот факт, что справа число 25 отличается тем, что имеет перед собой знак " $+$ ". А значит перенос через знак равенства меняет знак перед числом на противоположный.

Как мы с вами могли заметить, уравнения идут красной нитью по всем классам. С каждым годом усложняя какую-то часть. Необходимо знать о сложностях в изучении данной темы, чтобы знать обходы и способы избегания ошибок. Самое главное в любом классе — это объяснение материала, основанное уже на изученном материале или общеизвестных фактах, подкрепленных экспериментами. Всегда необходимо давать немного больше для размышления ученикам, немного больше, чем предусмотрено программой. Тогда в будущем будет легче самим детям, не говоря уже о преподавателях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Петерсон Л.Г. Математика 1 класс. Учебник Части 1-3. М.: Ювента, 2007.

2. Программы для общеобразовательных учреждений. Алгебра 7 – 9 классы. Составитель Бурмистрова Т.А. – М: Просвещение, 2008.

3. Алгебра 7 класс. 12 сентября. Решение линейных уравнений №2. Развивающее обучение на уроках математики и во внеклассной работе. Андреев Андрей Андреевич. Режим доступа: https://www.youtube.com/watch?v=a0Yd0tejekg

4. Математика. Рабочие программы. Предметная линия учебников «Сферы». 5–6 классы : пособие для учителей общеобразоват. организаций / [Е.А. Бунимович, Л.В. Кузнецова, С.С. Минаева и др.]. – 3-е изд. – М. : Просвещение, 2014.

УДК 372.851

ПРЕПОДАВАНИЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ

Елена Михайловна Ершова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ershova.EM@tversu.ru

Ключевые слова: *теория вероятностей, эксперимент, случайное событие, статистика, преподавание.*

Аннотация. В работе рассматриваются проблемы преподавания теории вероятностей и математической статистики в курсе средней школы.

Вопрос – чему и как учить в школе, по-видимому, всегда будет принадлежать к числу вечных проблем, которые постоянно возникают даже после нахождения решения, лучшего, чем предыдущее. И это неизбежно вследствие постоянного пополнения наших научных знаний и подходов к объяснению окружающих нас явлений. Несомненно, содержание школьной программы должно изменяться с прогрессом науки, несколько отставая от него и давая возможность новым научным идеям и концепциям принять приемлемые в психологическом и методическом отношении формы.

Во все времена люди ценили математику за ее точность. Как вычислить площадь помещения, сколько заплатить за покупку, какова производительность какого-либо оборудования — на все эти вопросы математика дает точный и однозначный ответ. При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы и закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта по его заданным начальным условиям. Но окружающий нас мир не так прост и однозначен, и результаты многих явлений заранее предсказать невозможно, какой бы полной информацией о них мы ни располагали. Нельзя, например, сказать наверняка, какой стороной упадет брошенная вверх монета, когда в следующем году выпадет снег, вызовут ли ученика к доске на уроке математики? Такие непредсказуемые явления и события в нашей жизни называют случайными. Выявленные в таких задачах закономерности называются статистическими (вероятностными). Статистические закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин: теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики.

В современной практической жизни мы постоянно сталкиваемся с необходимостью выбора, принятием решения, связанного с риском. Часто нам необходимо уметь оценить шансы на успех, степень достоверности получаемой нами информации в виде результатов социологических опросов, прогноза погоды, сведений о банковских кредитах и т. п. Даже школьник ежедневно сталкивается с вероятностными ситуациями: успеет вовремя в школу или опоздает, справится с контрольной работой или нет, выиграет ли его любимая команда? Представления о вероятности и достоверности события, о справедливых и несправедливых играх необходимы школьнику для принятия наилучшего варианта решения. Без минимальной вероятностно-статистической грамотности сегодня трудно адекватно воспринимать социальную, экономическую и политическую информацию, принимать на ее основе обоснованные решения.

Включение в школьные программы элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей представляет собой один из важнейших аспектов модернизации содержания школьного математического образования. Именно поэтому в образовательный стандарт и школьные программы по математике основного общего образования необходимо было ввести элементы данных разделов, наряду с алгеброй и геометрией, в качестве равноправной обязательной составляющей курса математики.

В 2003 г. было принято решение о включении элементов теории вероятностей и статистики в школьный курс математики общеобразовательной школы (см. инструктивное письмо № 03-93ин/13-03 от 23.09.2003 Министерства образования РФ «О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы», «Математика в школе», № 9 за 2003 г.). К этому моменту элементы теории вероятностей и статистики уже более десяти лет в разрозненном виде присутствовали в известных школьных учебниках алгебры для разных классов и в виде отдельных учебных пособий. Однако изложение вероятностно-статистического материала, как правило, не носило систематического характера, а учителя, чаще всего, не обращались к этим разделам, не включали их в учебный план.

Принятый Министерством образования в 2003 г. документ предусматривал постепенное, поэтапное включение этих разделов в школьные курсы, давая возможность преподавательскому сообществу подготовиться к соответствующим изменениям. С этой целью в 2004-2008 гг. вышел ряд учебных пособий, дополняющих имеющиеся учебники алгебры. В течение ряда лет все эти учебные пособия проходили апробацию в школах. В настоящее время, когда переходный период внедрения в школьные программы завершился, и разделы статистики и теории вероятностей заняли свое место в учебных планах, требуются анализ и осмысление полученных результатов.

С преподаванием вероятностных разделов в школе связаны определенные проблемы. Во-первых, в российской школе отсутствует традиция преподавания данного курса. Нынешние учителя не могут преподавать этот предмет так, как преподавали им, поскольку в то время данного предмета в школе не было.

Во-вторых, к моменту введения нового предмета среди учителей математики не было достаточного количества тех, кто свободно владел бы содержанием курса теории вероятностей и был бы способен решать вероятностные задачи на том же уровне, что и задачи по алгебре. Большинство учителей сталкивалось с вероятностными разделами только при обучении в вузе, и утратило необходимые для их преподавания знания и навыки из-за того, что много лет ими не пользовались. Недавние же выпускники не готовы преподавать теорию вероятностей потому, что изучали ее только в качестве одного из разделов высшей математики и не знакомы с методикой ее преподавания.

В-третьих, ощущается недостаток методической литературы по вероятностным разделам, которую не могут заменить имеющиеся несколько вариантов учебников.

В-четвертых, преподавание теории вероятностей отличается от преподавания других разделов математики тем, что решать одну и ту же задачу в ряде случаев можно весьма по-разному, и ответ не всегда будет одинаков. Например, если рассматривать задачу с двумя выстрелами по мишени, и событиями А – попадание при первом выстреле и В – попадание при втором выстреле, то событие С – попадание только при первом выстреле можно записать двумя способами: $C = A \setminus B$ или $C = A\overline{B}$. В связи с этим вводится понятие равносильных событий, но опыт работы показывает, что учащиеся его недостаточно усваивают. Они привыкли к определенному стилю преподавания математики, требующему от них умения решать пусть и обширный, но заранее очерченный круг заданий. Чаще всего они довольствуются тем, что умеют многократно воспроизводить изученный алгоритм и даже противятся попыткам решить задачу другим способом.

В-пятых, изучение понятий случайного эксперимента и его исхода требует ограничения фантазии учеников и исключения элемента везения. Например, учитель говорит, что событие «подброшенный камень упадет вниз» является достоверным, ученики порой спорят: в космическом вакууме этого не случится. При рассмотрении подбрасывания монеты кроме выпадения герба и цифры предлагают ввести исходы: «встанет на ребро», «зависнет в воздухе» и т.д. В связи с этим учитель должен четко оговаривать условия проведения опыта.

В-шестых, сложность изучения теории вероятностей заключается в необходимости анализировать текст условия и умения решать сюжетные задачи, каковыми является подавляющее большинство. По опыту преподавания теории вероятностей необходимо отметить, что при решении даже простейших комбинаторных задач у студентов возникает проблема с выяснением, к какому типу следует отнести рассматриваемую в задачу выборку: с повторениями или без, является ли она перестановкой, размещением или сочетанием? Возникают трудности с приложением математических определений к тем или иным жизненным ситуациям. И это у студентов, которые уже изучали комбинаторику в школе, да и в вузе на нее отводится большее количество часов.

В-седьмых, учебная литература резко разделяется на две категории: книги, доступные лишь читателю с солидной математической подготовкой, и книги, изучающие предмет на интуитивном уровне. Эти учебные пособия создавались в условиях отсутствия традиций преподавания вероятностных разделов математики в школе. Такое отсутствие провоцировало авторов учебных пособий на сравнение с имеющимися учебниками для вузов, которые нередко допускали существенные различия в обозначениях основных понятий и записи формул. Школьные учебные пособия унаследовали от вузовских учебников эти особенности, что в общеобразовательных школах неприемлемо. Существуют проблемы как в вопросах изложения этого достаточно сложного материала в школьном курсе, так и в определении содержания, необходимого для успешного усвоения и понимания основ теории вероятностей и статистики и его соответствия содержанию и требованиям государственного стандарта по математике.

В настоящий момент выбор конкретного учебного материала по вероятностным разделам математики происходит самым что ни на есть случайным образом, вплоть до названий и обозначений. С этим приходится сталкиваться при преподавании курса теории вероятностей на математическом факультете Тверского государственного университета и при проведении воскресных лекториев для школьников. Во втором случае при опросе учащихся выяснилось, что одни уже в полном объеме изучили спецкурс по теории вероятностей, другие – вероятностные разделы из учебников для общеобразовательных школ, третьи – только начали с ними работу, четвертые – понятие вероятности события еще даже не затрагивали. Тем не менее, задача по теории вероятностей входит в ЕГЭ по математике и на базовом, и на профильном уровне. Значит, для всех учеников необходимо изучение теории вероятностей.

Рассмотрение вероятностных разделов математики начинается с введения элементов комбинаторики, которое происходит еще в начальной школе. При этом рассматриваются простейшие комбинаторные задачи, решаемые методом непосредственного перебора, при котором школьники учатся составлять наборы из элементов некоторого множества по заданному свойству. Этот прием раскрывает идею комбинирования, служит основой для формирования комбинаторных понятий и хорошей подготовкой к выводу комбинаторных формул и закономерностей.

Наибольший объем материала по теории вероятностей и математической статистике приходится на 9 и 11 классы. Опрос студентов специальности «Компьютерная безопасность» математического факультета показал, что большая их часть в 9 классе примерно в равных долях занимались по учебникам [4] и [5], а в 11 классе – по учебнику [6]. Остановимся на них немного подробнее.

Во всех трех учебниках даются понятия события, классификация событий по степени возможности наступления, классическое и статистическое определение вероятности, понятие частоты события. Однако порядок изучения этих разделов различается. Так в учебниках [4] и [6] рассматривается сначала классическое определение вероятности, в отличие от [5]. Комбинаторика, типы выборок и соответствующие формулы рассматриваются в [5] и [6], а в [4] рассматривается применение изученной ранее комбинаторики к подсчету вероятностей, что также имеется и в [5].

Сумма вероятностей несовместных событий, независимость двух событий и вероятность их произведения рассматриваются в [6] и в разделе «Для тех, кто хочет знать больше» учебника [5]. В [4] эти темы не затрагиваются. На этом в [5] вероятностный раздел заканчивается. В учебниках же [4] и [6] объем материала по теории вероятностей и статистике несколько шире.

В них вводится понятие случайных величин и таблиц их распределений, причем в [4] само понятие случайной величины никак не определяется и изучается только на примерах. В [6], кроме того, рассматриваются виды случайных величин: дискретные и непрерывные.

По статистике в [4] и в [6] вводятся понятия генеральной совокупности и выборки, а для последней – размаха, моды, медианы, среднего значения и полигона частот. В [6] также вводятся понятия размаха, отклонения от среднего, дисперсии и среднего квадратического отклонения, строятся гистограммы. В [4] гистограммы называют столбчатыми диаграммами. Кроме них рассматривают также круговые диаграммы. При этом оба вида диаграмм рассматриваются практически только на примерах.

Таким образом, в зависимости от того, по какому учебнику занимались ученики в 9 классе, в 11 классе одни из тем повторяются практически дословно, а другие – не изучаются вообще. Следовательно, необходимо более четко определять, какие темы вероятностного блока нужно изучать в каких классах во избежание дублирования и пропуска тем. Кроме того, в обоих учебниках за 9 класс при введении случайных событий авторы не вводят для них обозначений, хотя в последующих параграфах они уже присутствует. Целесообразным было бы сразу после определения случайного события ввести и обозначение для него, как это всегда принято в математике при появлении нового понятия.

Серьезным недостатком всех рассмотренных учебников является то, что событие определяется, как результат эксперимента, но четкого математического определения эксперимента не приводится, хотя это и необходимо. Многолетний опыт преподавания теории вероятностей свидетельствует, что у студентов возникают проблемы с различением данных понятий. Им трудно по условию задачи определить, в чем заключается проводимый эксперимент, и что является рассматриваемым событием.

В школьном курсе должны рассматриваться три определения вероятности: классическое, геометрической и статистическое. Однако, те, кто занимался по учебнику Ю.Н. Макарычева и др. [5] геометрическое определение не изучают. В учебнике Ш.А. Алимова и др. [4] геометрическая вероятность рассматривается только на примерах, само же определение ее не вводится. Кроме того, к общим недостаткам рассмотренных учебников относится то, что три определения вероятности рассматриваются по отдельности, и между ними не прослеживается взаимосвязи. Не указаны недостатки и достоинства того или иного определения, области его применения, особенности каждого из определений вероятности, на что необходимо обращать внимание при разборе данных тем.

При изучении интервального ряда и гистограммы во всех рассмотренных учебниках не говорится ни слова о том, что изучаемый подход – лишь один из возможных, что интервальный ряд можно строить по-разному. Кроме того, ничего не говорится о том, куда относятся те значения, которые попадают на границы промежутков интервального ряда. Здесь тоже возможны различные подходы.

Еще следует добавить, что набор задач, предлагаемый в учебниках, недостаточно полон и однообразен, вследствие чего учителю необходимо использовать дополнительные материалы для того, чтобы ученики качественно освоили материал.

Итак, следует отметить, что включение вероятностных разделов в школьный курс математики еще далеко от оптимального, существует немало проблем, которые необходимо решить. Данные разделы еще не включены в межпредметные связи и являются несколько инородными в традиционной математике. Однако, несмотря на имеющиеся проблемы, изучение теории вероятностей и математической статистики в школе является необходимым, а следовательно, нужно искать решение проблем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Е. Захарова, Ю. М. Высочанская *Элементы теории вероятностей, комбинаторики и статистики в основной школе*. Москва, «Бином». 2015г.

2. Е.А.Бунимович, В.А.Булычев, Ю.Н.Тюрин, А.А.Макаров, И.Р.Высоцкий, И.В.Ященко, П.В.Семенов *О теории вероятностей и статистике в школьном курсе* // «Математика в школе» №7 2009 г. стр. 3-13.

3. О.Багишова *Преподавание теории вероятностей и статистики в средней школе: трудно начать?* // «Математика» №14 2009 г.

4. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин *Алгебра 9 класс*. М., Просвещение. 2011 г.

5. Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, С.Б. Суворова под ред. С.А.Теляковского *Алгебра 9 класс*. М., Просвещение. 2009 г.

6. Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин *Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы*. М., Просвещение. 2012 г.

УДК 514.8, 530.12

ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ СКАЛЯРНО-ПОЛЕВЫХ КОНФИГУРАЦИЙ С ЗАРЯДОМ

Анна Геннадьевна Ефремова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: anechka.tver3@mail.ru

Юлия Владимировна Чемарина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: chemarina.yv@tversu.ru

Ключевые слова: скалярное поле, электромагнитное поле, нестационарные конфигурации.

Аннотация. Статья посвящена разработке метода построения и исследования сферически-симметричных нестационарных конфигураций скалярного и электромагнитного полей с минимальной связью.

Математическое моделирование гравитирующих конфигураций физических полей является одним из приоритетных направлений современной теории гравитации. При этом большинство точных решений, построенных в рамках общей теории относительности, представляют собой статические или стационарные конфигурации. Это связано с объективной сложностью решения уравнений Эйнштейна в предположении нестационарности. В работах [3] и [5] был предложен метод построения нестационарных конфигураций сферически-симметричного скалярного поля и его обобщение на случай фантомного поля. В его основе лежит выделение одного инвариантного уравнения, описывающего искомую конфигурацию. В данной работе мы представим обобщение этого метода на случай скалярного и электромагнитного полей с минимальной связью.

Мы рассмотрим конфигурации скалярного и электромагнитного полей с действием

$$\Sigma = \int \left(-\frac{1}{2}S + \mathcal{L}_\phi - \frac{1}{2}F_{ij}F^{ij}\right)\sqrt{|g|}d^4x,$$

$$\mathcal{L}_\phi = \langle d\phi, d\phi\rangle - 2V(\phi),$$

где $F = F_{ij}dx^i \wedge dx^j$ – тензор электромагнитного поля.

Компоненты тензора энергии-импульса определяются формулами

$$T = T_{(\phi)} + T_{(em)} \ ,$$

$$T_{(\phi)ij} = 2\partial_i\phi\partial_j\phi - (g^{km}\partial_k\phi\partial_m\phi - 2V)g_{ij} \ ,$$

$$T_{(em)ij} = -2g_{ik}F_{jl}F^{kl} + \tfrac{1}{2}g_{ij}F_{kl}F^{kl} \ .$$

Скалярное поле с зарядом описывается системой уравнений Эйнштейна

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}Sg_{ij} = T_{ij} \ ,$$

уравнением скалярного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i\left(\sqrt{-g}g^{ij}\partial_j\phi\right) + V'_\phi = 0, \ \ g = -\det(g_{ij})$$

и уравнением электромагнитного поля

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{-g}F^{ij}\right) = 0. \qquad (1)$$

Так как пространство-временя сферически-симметричное, то форма электромагнитного поля может быть записана в виде

$$F = F_{tr}dt \wedge dr, \text{где } F_{tr} = F_{tr}(t, r\,).$$

Решая уравнение (1) в базисе (t, r, θ, φ), в котором метрика имеет вид

$$g = A^2 dt \otimes dt - B^2 dr \otimes dr - C^2(d\theta \otimes d\theta + sin^2\theta d\varphi \otimes d\varphi),$$

получим

$$F = \frac{ABq}{C^2}dt \wedge dr,$$

где q имеет смысл электрического заряда.

Перейдем к ортонормированному базису, в котором

$$Adt = e^0,\ Bdr = e^1,\ \ Cd\theta = e^1,\ \ C \sin\theta\, d\varphi = e^3,$$

$$F = \frac{q}{C^2}e^0 \wedge e^1. \qquad (2)$$

Система уравнений Эйнштейна и уравнение скалярного поля в ортонормированном базисе имеют вид

$$-2\frac{C_{(1)(1)}}{C} + 2\frac{B_{(0)}C_{(0)}}{BC} - \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \phi_{(1)}^2 + \phi_{(0)}^2 + 2V + \frac{q^2}{C^4}, \qquad (3)$$

$$-2\frac{C_{(0)(0)}}{C} + 2\frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} + \frac{C_{(1)}^2 - C_{(0)}^2 - 1}{C^2} = \phi_{(1)}^2 + \phi_{(0)}^2 - 2V - \frac{q^2}{C^4}\,, \qquad (4)$$

$$\frac{A_{(1)(1)}}{A} - \frac{B_{(0)(0)}}{B} + \frac{C_{(1)(1)}}{C} - \frac{C_{(0)(0)}}{C} + \frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} - \frac{B_{(0)}C_{(0)}}{BC} =$$

$$= \phi_{(0)}^2 - \phi_{(1)}^2 - 2V + \frac{q^2}{C^4},$$

$$-2\frac{C_{(0)(1)}}{C} + 2\frac{B_{(0)}C_{(1)}}{BC} \equiv -2\frac{C_{(1)(0)}}{C} + 2\frac{A_{(1)}C_{(0)}}{AC} = 2\phi_{(0)}\phi_{(1)}, \qquad (5)$$

$$\phi_{(0)(0)} - \phi_{(1)(1)} + \phi_{(0)}\frac{(BC^2)_{(0)}}{BC^2} - \phi_{(1)}\frac{(AC^2)_{(1)}}{AC^2} + V'_{\phi} = 0.$$

Следуя работам [1], [2], [4], введём характеристическую функцию

$$f = C_1^2 - C_0^2 = -\langle dC, dC\rangle,$$

для которой

$$f_1 = 2C_1C_{11} - 2C_0C_{01}, \qquad (6)$$

$$f_0 = 2C_1C_{10} - 2C_0C_{00}\,. \qquad (7)$$

Из формулы (6) получим

$$C_{11} = \frac{f_1}{2C_1} + \frac{C_0C_{01}}{C_1}.$$

Подставим это выражение в уравнение (3):

$$-\frac{2}{C}\left(\frac{f_1}{2C_1}+\frac{C_0C_{01}}{C_1}\right)+\frac{2B_0C_0}{BC}-\frac{f-1}{C^2}=\phi_1^2+\phi_0^2+2V+\frac{q^2}{C^4}.$$

Умножим последнее уравнение на C_1C^2 и перепишем его в виде

$$-C-[C(f-1)]_1=2CC_0C_{01}-$$

$$-\frac{2B_0C_0CC_1}{B}+C^2(\phi_1^2+\phi_0^2)C_1+2C^2VC_1+\frac{q^2C_1}{C^2}. \quad (8)$$

Из уравнения (5) найдём

$$C_{01}=\frac{B_0C_1}{B}-C\phi_0\phi_1.$$

Подставка этого выражения в уравнение (8) даёт

$$[C(f-1)]_1=C_1\left[-C^2(\phi_0^2-\phi_1^2)-2C^2V-\frac{q^2}{C^2}\right]+\phi_1[2C^2(C_0\phi_0-C_1\phi_1)].$$

Проделывая аналогичные манипуляции с уравнением (4), получим

$$[C(f-1)]_0=C_0\left[C^2(\phi_1^2-\phi_0^2)-2C^2V-\frac{q^2}{C^2}\right]+\phi_0[2C^2(C_0\phi_0-C_1\phi_1)].$$

Для нестационарной конфигурации скалярного поля $\phi\neq\phi(C)$ и два последних уравнения эквивалентны одному инвариантному уравнению

$$d[C(f-1)]=C^2\left(\phi_{(1)}^2-\phi_{(0)}^2-2V-\frac{q^2}{C^4}\right)dC+$$

$$+2C^2\big(C_{(0)}\phi_{(0)}-C_{(1)}\phi_{(1)}\big)d\phi, \quad (9)$$

где

$$C_{(0)}\phi_{(0)}-C_{(1)}\phi_{(1)}=\langle d\phi,dC\rangle,$$

$$\phi_{(1)}^2-\phi_{(0)}^2=-\langle d\phi,d\phi\rangle.$$

Из уравнения (9) следует, что

$$\langle d\phi,dC\rangle=\frac{1}{2C}\partial_\phi f,$$

$$\langle d\phi,d\phi\rangle=-\left(2V+\frac{1}{C}\partial_C f+\frac{f-1}{C^2}+\frac{q^2}{C^4}\right).$$

Основу предлагаемого метода составляет переход к координатам (ϕ,C,θ,φ), который возможен, по крайней мере локально, для любой нестационарной конфигурации.

Как и в случае отсутствия электромагнитного поля, имеют место равенства

$$g^{\phi\phi}=\langle d\phi,d\phi\rangle,\ g^{C\phi}=\langle dC,d\phi\rangle,\ g^{CC}=\langle dC,dC\rangle.$$

Находя обратную матрицу, мы получаем компоненты ковариантного метрического тензора и записываем метрику в координатах (ϕ,C,θ,φ):

$$ds^2 = \frac{4C^4 f d\phi^2 + 2C^3 f'_\phi dC d\phi + 4(C^3 f'_C + C^2(f-1) + 2C^4 V + q^2)dC^2}{4fC^2(2C^2V + Cf'_C + f - 1) - \left(Cf'_\phi\right)^2 + 4fq^2} -$$
$$-C^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Метрика содержит две неизвестные функции: потенциал скалярного поля $V(\phi)$ и характеристическую функцию $f(\phi, \mathrm{C})$. Чтоб составить уравнения Эйнштейна в координатах $(\phi, C, \theta, \varphi)$, связывающие эти функции, необходимо вычислить компоненты формы электромагнитного поля и тензора энергии-импульса.

Согласно формуле (2)

$$F = \frac{q}{C^2} e^0 \wedge e^1 \tag{10}$$

В базисе $(\phi, C, \theta, \varphi)$

$$F = F_{\phi C} d\phi \wedge dC,$$
$$F = F_{\phi C}\left(\phi_{(0)} e^0 + \phi_{(1)} e^1\right) \wedge \left(C_{(0)} e^0 + C_{(1)} e^1\right) =$$
$$= F_{\phi C}\left(\phi_{(0)} C_1 - \phi_{(1)} C_0\right) e^0 \wedge e^1. \tag{11}$$

Сравнивая выражения (10) и (11), получаем

$$\frac{q}{C^2} = F_{\phi C}\left(\phi_{(0)} C_1 - \phi_{(1)} C_0\right),$$
$$F_{\phi C} = \frac{q}{C^2\left(\phi_{(0)} C_1 - \phi_{(1)} C_0\right)}. \tag{12}$$

Заметим, что в формулу (12) входит инвариантная величина

$$\triangle = \begin{vmatrix} \langle d\phi, d\phi\rangle & \langle d\phi, dC\rangle \\ \langle d\phi, dC\rangle & \langle dC, dC\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \phi_0^2 - \phi_1^2 & \phi_0 C_0 - \phi_1 C_1 \\ \phi_0 C_0 - \phi_1 C_1 & C_0^2 - C_1^2 \end{vmatrix} =$$
$$= -(\phi_0 C_1 - \phi_1 C_0)^2.$$

Следовательно,

$$\phi_0 C_1 - \phi_1 C_0 = \sqrt{\langle d\phi, dC\rangle^2 - \langle dC, dC\rangle\langle d\phi, d\phi\rangle}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение (12), получим

$$F_{\phi C} = \frac{2q}{\sqrt{-4fC^2(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) - 4q^2 f + C^2 {f'_\phi}^2}}.$$

Вычислим компоненту $F^{\phi C}$ по следующей формуле

$$F^{\phi C} = F_{\phi C}\left(g^{\phi\phi} g^{CC} - \left(g^{C\phi}\right)^2\right) =$$
$$= \frac{-q}{2C^4}\sqrt{-4fC^2(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) - 4q^2 f + C^2 {f'_\phi}^2}.$$

Найденные коэффициенты формы электромагнитного поля позволяют вычислить компоненты тензора энергии импульса в базисе $(\phi, C, \theta, \varphi)$:

$$T_{\phi\phi} = T_{(\phi)\phi\phi} + T_{(em)\phi\phi} = \frac{2C^2\left(2f(f-1) + 2fCf'_C - {f'_\phi}^2\right) + 4fq^2}{4fC^2(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) + 4q^2f - (Cf'_\phi)^2} +$$

$$+\frac{-4fq^2}{4fC^2(2C^2V + Cf'_C + f - 1) - \left(Cf'_\phi\right)^2 + 4fq^2},$$

$$T_{\phi C} = T_{C\phi} = T_{(\phi)C\phi} + T_{(em)C\phi} =$$

$$= -\frac{2f'_\phi C^2(f - 1 + Cf'_C + 4VC^2) + 2f'_\phi q^2}{4fC^2(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) + 4q^2f - (Cf'_\phi)^2} +$$

$$+\frac{-2f'_\phi q^2}{C\left(4fC^2(2C^2V + Cf'_C + f - 1) - \left(Cf'_\phi\right)^2 + 4fq^2\right)},$$

$$T_{CC} = T_{(\phi)CC} + T_{(em)CC} =$$

$$= -\frac{(4q^2 + 4C^3f'_C + 4C^2(f-1) + 8C^4V)}{4fC^6(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) + 4q^2fC^4 - C^6{f'_\phi}^2}\cdot$$

$$\cdot\frac{\left(q^2 + 4VC^4 + C^3f'_C + C^2(f-1)\right)}{4fC^6(Cf'_C + f - 1 + 2C^2V) + 4q^2fC^4 - C^6{f'_\phi}^2} +$$

$$+\frac{-4q^2(C^3f'_C + C^2(f-1) + 2C^4\,V + q^2}{4fC^6(2C^2V + Cf'_C + f - 1) - C^6\left(f'_\phi\right)^2 + 4C^4fq^2},$$

$$T_{\theta\theta} = T_{(\phi)\theta\theta} + T_{(em)\theta\theta} = -\frac{q^2 + 4VC^4 + C^3f'_C + C^2(f-1)}{C^2} + \frac{q^2}{C^2},$$

$$T_{\varphi\varphi} = T_{(\phi)\varphi\varphi} + T_{(em)\varphi\varphi} =$$

$$= -\frac{(q^2 + 4VC^4 + C^3f'_C + C^2(f-1))\sin^2\theta}{C^2} + \frac{q^2\sin^2\theta}{C^2}.$$

Следующим шагом является вычисление компонент тензора Эйнштейна и составление системы уравнений Эйнштейна и уравнения скалярного поля. Мы не приводим здесь соответствующие выкладки ввиду их громоздкости. Отметим только, что получившаяся система уравнений оказывается эквивалентной одному единственному динамическому уравнению скалярного поля:

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\phi\right) + V'_\phi = 0 \;\;\Leftrightarrow$$

$$8V^2C^8 + \left(6C^7f'_C + 8C^6f - 2C^6f''_\phi + 8C^4q^2 - 8C^6\right)V + C^6V'_\phi f'_\phi +$$

$$+(-fC^4 - C^2q^2 - f'_CC^5 + C^4)f''_\phi - f''_CC^6f + C^5f''_{\phi C}f'_\phi + (f'_C)^2C^6 + (3C^5 +$$

$$+3C^3q^2 + 3C^5f)f'_C + 4f^2C^4 + (8C^2q^2 - 6C^4)f + 2C^4 + 2q^4 - 4C^2q^2.$$

Таким образом, предложенный в работах [3] и [5] подход к изучению нестационарных конфигураций скалярного поля применим и к конфигурациям с зарядом. Отметим, что соответствующее уравнение для потенциала поля и характеристической функции при наличии заряда становится более громоздким и очевидно затрудняет поиск точных аналитических решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kratovich P.V., Tchemarina Ju.V. On the charge-to-mass ratio for selfgravitating systems of scalar and electromagnetic fields // Mathematical Modelling and Geometry. 2017. Т. 5. № 2. С. 20-29.

2. Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. Spherically symmetric gravitating scalar field. The inverse problem and exact solutions // Gravitation and Cosmology 2009, 15, pp. 94-95.

3. Салогуб Е.А., Столярова Г.Н., Чемарина Ю.В. Нестационарная модель сферическисимметричного топологического геона // Синергетика в общественных и естественных науках. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи: в 3 ч./Ответственный редактор: Лапина Г. П. Тверь: Изд. ТГУ, 2015. С. 110-113.

4. Соловьев Д.А., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Математические модели гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 23. С. 7-18.

5. Чемарина Ю.В. Нестационарные конфигурации гравитирующего скалярного поля // Восьмые Курдюмовские чтения "Синергетика в естественных науках": материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. Тверь, 2012. С. 79-82.

УДК 372.851.4

ЗАДАЧИ С АСТРОНОМИЧЕСКИМ СОДЕРЖАНИЕМ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ

Виктор Владимирович Иванов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *треугольник, теорема Пифагора, окружность, касательная к окружности, центральный угол, синус, косинус, тангенс, котангенс угла, вектор, сложение векторов.*

Аннотация. В работе рассматриваются астрономические задачи, в решении которых используются сведения, полученные при изучении геометрии и тригонометрии.

Одна из характерных особенностей развития современных наук – их взаимосвязь и взаимопроникновение.

Разбор на уроках геометрии астрономических задач позволяет учащимся понять, что геометрические формы представляют собой идеализированные образы реальных объектов, получить представление о широте применения геометрии и тригонометрии в различных областях человеческой деятельности, дает возможность научиться использовать геометрические и тригонометрические сведения для описания окружающего мира.

Многие геометрические задачи могут быть наполнены астрономическим содержанием. Для этого учителю желательно ознакомиться с учебником астрономии [1], чтобы при изучении конкретного геометрического материала обратить внимание учащихся на дальнейшее его использование в астрономии.

В книге [2, с. 10] отмечается, что «отвлеченные математические понятия (прямая линия, угол, параллельные прямые и др.), а также решение прямоугольных и косоугольных треугольников нетрудно связать с разнообразными теоретическими и практическими вопросами астрономии. Речь идет не о том, чтобы на уроках математики преподавать астрономию: достаточно ограничиться решением некоторых задач с астрономическим содержанием».

Решение на уроках геометрии астрономических задач позволяет продемонстрировать важность изучения понятий, определений, теорем, среди которых можно привести такие, как отрезок, длина отрезка, расстояние между точками, угол, градусная и радианная мера угла, пересекающиеся, параллельные и перпендикулярные прямые, треугольник, равносторонний, равнобедренный и прямоугольный треугольники, теорема Пифагора, соотношения между сторонами и углами треугольника, синус, косинус, тангенс, котангенс угла, теорема синусов, теорема косинусов, окружность, касательная к окружности, центральные и вписанные углы, вектор, угол между векторами, сложение векторов, радиус-вектор, сфера, плоскость, сечение сферы плоскостью, проведение плоскости через три точки, пересечение двух плоскостей, площадь т.д.

Рассмотрим несколько задач.

Задача 1. Небесные светила M_1, M_2 и M_3 (рис. 1 и 2), расположенные в плоскости небесного меридиана (большого круга небесной сферы, проходящего через зенит Z, полюс мира P и центр небесной сферы O), достигают наибольшей ($h_{вк}$ – верхняя кульминация) и наименьшей ($h_{нк}$ – нижняя кульминация) угловой высоты от плоскости математического горизонта (его проекция на плоскость небесного меридиана – прямая NS). Прямая NS перпендикулярна прямой ZZ′ (отвесной линии). Прямая PP′ (ось мира) перпендикулярна прямой QQ′ (проекции плоскости небесного экватора на плоскость небесного меридиана). Найдите соотношения, связывающие угловые высоты светил M_1, M_2 и M_3 с широтой места наблюдения φ (угол PON) и склонениями светил δ (углы QOM_1, $Q'OM_2$, QOM_3).

Решение. Все углы, используемые в решении задачи, – центральные. Для светила M_1 (рис. 1) получим: $h_{вк} = 90^0 - \varphi + \delta$. Для светила M_2 (рис. 1) имеем: $h_{нк} = \delta - (90^0 - \varphi) = \varphi + \delta - 90^0$. Для светила M_3 (рис. 2), расположенного между зенитом и полюсом мира, получим: $h_{вк} = 90^0 - \delta + \varphi$.

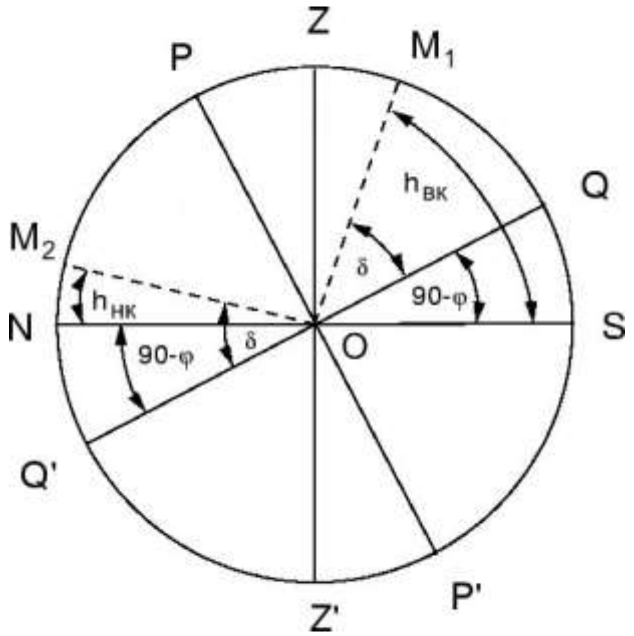


Рис. 1. К задаче 1

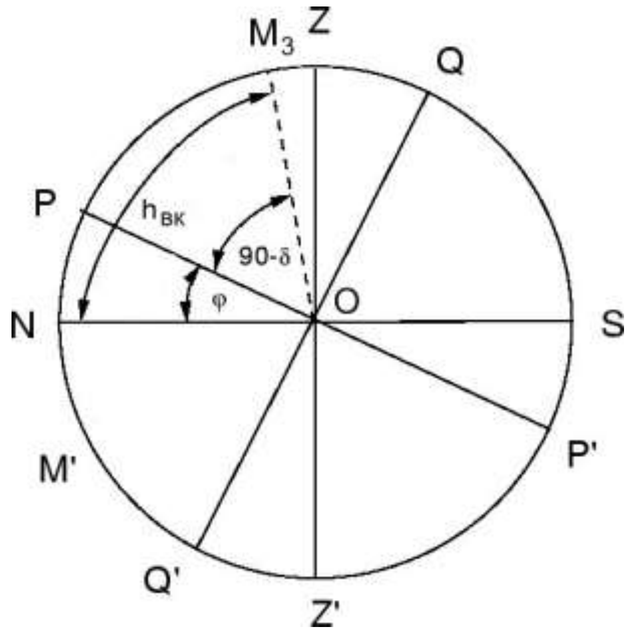


Рис. 2. К задаче 1

Задача 2. Определите дальность видимого горизонта AB для наблюдателя, находящегося на вершине горы высотой h над поверхностью Земли. Радиус Земли R (рис. 3).

Решение. Обозначим дальность видимого горизонта $AB = d$. AB – касательная. Угол ABC – прямой. Из прямоугольного треугольника ABC по теореме Пифагора имеем $AC^2 = BC^2 + AB^2$.

Получаем: $(R + h)^2 = R^2 + d^2$. Откуда $d = \sqrt{2Rh\left(1 + \frac{h}{2R}\right)}$. Так как на Земле высота любой горы $h \ll R$, то $\frac{h}{2R} \approx 0$. Тогда $d = \sqrt{2Rh}$. При вычислениях Земля принимается за шар радиуса $R = 6371$ км.

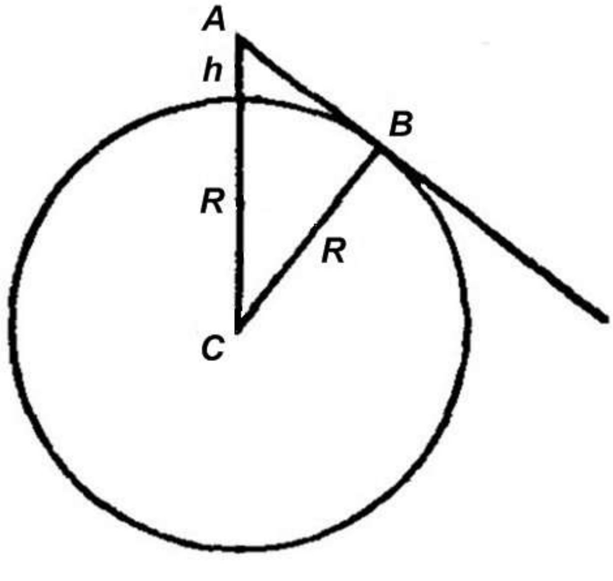


Рис. 3. К задаче 2

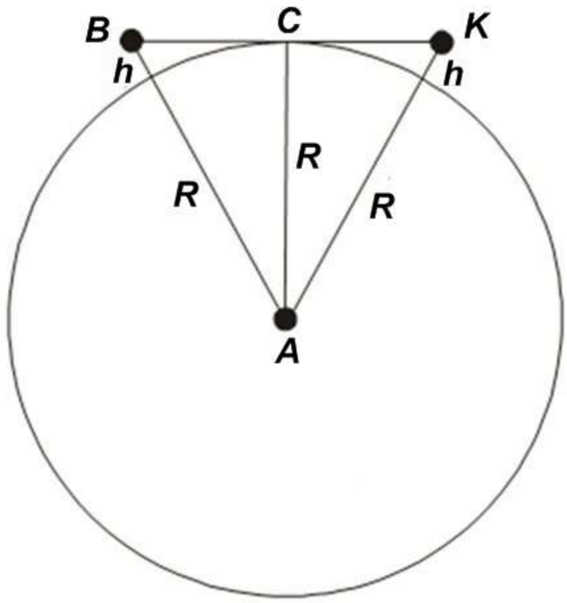


Рис. 4. К задаче 3

Задача 3. Несколько веков назад для быстрой передачи сообщений многие государства на Земле создавали сеть вышек. Вышки располагались так, чтобы с расположенной наверху площадки были видны верхние площадки соседних вышек, что позволяло передавать и принимать световые сигналы. Определите максимальное расстояние друг от друга двух соседних сигнальных площадок *B* и *K* на вышках высотой 50 метров (рис. 4).

Решение. Пусть h = 50 м – высота сигнальной площадки, *BK* – расстояние друг от друга двух соседних сигнальных площадок, радиус Земли R = 6371 км. Так как треугольники ABC и ACK равны, то используя решение задачи 2, из треугольника ABC получим:

$$\text{BK} = 2\text{BC} = \sqrt{(R+h)^2 - R^2} \approx 2\sqrt{2Rh} = 2\sqrt{2 \cdot 6371 \cdot 0{,}05} \approx 50{,}5 \text{ км}.$$

Задача 4. Идею одного из способов определения высоты гор на Луне предложил в начале XVII века Галилей. Пусть точка *B* (рис. 5) лежит на терминаторе (линии, отделяющей освещенное Солнцем полушарие Луны от неосвещенного). Солнечный луч *SA*, касающийся лунной поверхности в точке *B*, освещает находящуюся за терминатором вершину горы *A* высотой h. Расстояние от вершины горы до терминатора *AB* = d = 110 км. Найдите высоту горы h. Радиус Луны R = 1738 км.

Решение. В задаче 2 получено, что $d = \sqrt{2Rh}$. Откуда имеем:

$$h = \frac{d^2}{2R}.$$

Тогда $h = \frac{110^2}{2 \cdot 1738} \approx 3{,}5$ км.

Задача 5. Геостационарный спутник, запущенный в плоскости экватора, постоянно находится над одной и той же точкой земной поверхности. На каких широтах геостационарный спутник виден с уровня моря? Существует ли возможность поддерживать круглосуточную связь между научными станциями на Северном и Южном полюсах с помощью геостационарных спутников? Какой высоты H антенну нужно установить на полюсе, чтобы принимать телесигнал с геостационарного спутника? Радиус орбиты геостационарного спутника $OA = R + h = 42166$ км (рис. 6) [3, с. 60-61; 4, № 3.15].

Решение. Максимальную широту φ, на которой геостационарный спутник еще виден на горизонте (т. B), определим из прямоугольного треугольника OBA:

$$\cos\varphi = \frac{OB}{OA} = \frac{R}{R+h}.$$

Приняв Землю за шар радиуса $R = OB = 6371$ км, получим

$$\varphi = \arccos\left(\frac{6371}{42166}\right) \approx 81{,}3^0.$$

Геостационарный спутник виден от $81{,}3^0$ южной широты до $81{,}3^0$ северной широты. На более высоких широтах, а, следовательно, на полюсах Земли геостационарный спутник не виден с уровня моря. Связь между полюсами с его помощью невозможна.

Из подобия треугольников OBC и OBA имеем:

$$\frac{OC}{OA} = \frac{OB}{AB} \text{ или } \frac{R+H}{OA} = \frac{R}{AB}.$$

Откуда

$$H = \frac{R}{AB}\cdot OA - R.$$

Из прямоугольного треугольника OBA по теореме Пифагора:
$AB = \sqrt{OA^2 - OB^2} = \sqrt{OA^2 - R^2}$.

Тогда с учетом, что $OA = R + h = 42166$ км, $OB = R = 6371$ км, получаем:

$$H = \frac{R}{\sqrt{OA^2 - R^2}}\cdot OA - R = R\left(\frac{OA}{\sqrt{OA^2 - R^2}} - 1\right) \approx 74 \text{ км}.$$

Для приема на полюсе телесигнала с геостационарного спутника нужно установить антенну высотой около 74 км.

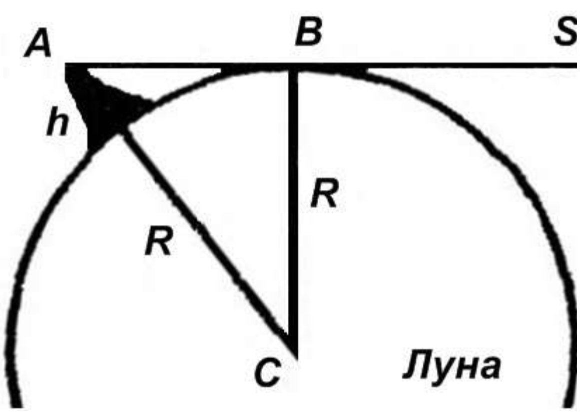


Рис. 5. К задаче 4

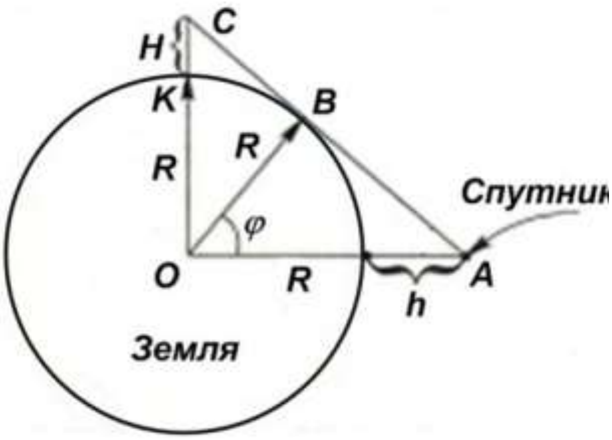


Рис. 6. К задаче 5

Задача 6. Определите расстояние r_1 Венеры от Солнца в астрономических единицах, если ее наибольшее угловое удаление от Солнца (элонгация) при наблюдении с Земли составляет 46^0. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости (рис. 7) [5, № 62; 6, № 148].

Решение. Расстояние Земли от Солнца $r_2 \approx 150$ млн. км в астрономии принимают за одну астрономическую единицу (а.е.). Треугольник Солнце-Венера-Земля – прямоугольный, т.к. при наибольшем угловом удалении Венеры от Солнца прямая Земля-Венера является касательной к орбите Венеры (к окружности). Угол Солнце-Земля-Венера равен 46^0.

Тогда $r_1 = r_2 \sin 46^0 = 1 \cdot \sin 46^0 \approx 0{,}72$ а.е.

Рис. 7. К задаче 6

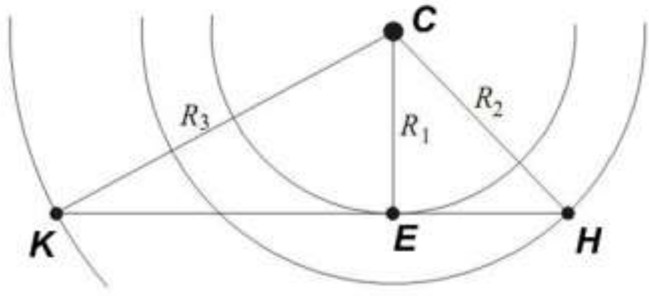


Рис. 8. К задаче 7

Сформулируем еще несколько задач, для решения которых можно использовать задачу 6 в качестве опорной.

Задача 7. Пусть т. C – планета (например, Юпитер) (рис. 8). Вокруг нее вращаются по лежащим в одной плоскости круговым орбитам спутники (например, Европа, Ганимед и Каллисто). Известно, что радиус орбиты Европы (т. Е) $R_1 = 671100$ км, радиус орбиты Ганимеда (т. Н) $R_2 = 1070400$ км, радиус орбиты Каллисто (т. К) $R_3 = 1882800$ км. Определите:

1) наибольшее угловое удаление Европы от Юпитера при наблюдении с Ганимеда;

2) наибольшее угловое удаление Европы от Юпитера при наблюдении с Каллисто;

3) угловое удаление Каллисто от Европы при наблюдении с Юпитера;

4) угловое удаление Европы от Ганимеда при наблюдении с Юпитера;

5) угловое удаление Каллисто от Ганимеда при наблюдении с Юпитера;

6) расстояние между Европой и Ганимедом, Европой и Каллисто, Ганимедом и Каллисто.

Задача 8. Иногда с Марса наблюдается редкое астрономическое явление: Венера и Земля одновременно находятся на наибольших угловых удалениях с одной стороны от Солнца (рис. 9). Определите в этот момент расстояние от Земли до Венеры D. Радиус орбиты Венеры $R_V = 0{,}72$ а.е., радиус орбиты Земли $R_e = 1$ а.е., радиус орбиты Марса $R_m = 1{,}52$ а.е. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости.

Задача 9. При наблюдении с Марса в некоторый момент времени Меркурий и Земля одновременно находятся на наибольших угловых удалениях по разные стороны от Солнца. Вблизи Меркурия на небе видна Венера (рис. 10). Радиус орбиты Меркурия $r_1 = 0{,}38$ а.е., радиус орбиты Венеры $r_2 = 0{,}72$ а.е., радиус орбиты Земли $r_3 = 1$ а.е., радиус орбиты Марса $r_4 = 1{,}52$ а.е. Орбиты планет считать круговыми и лежащими в одной плоскости. Определите:

1) расстояние от Земли до Меркурия;
2) угловое удаление Меркурия от Солнца для наблюдателя на Земле;
3) угловое удаление Венеры от Солнца для наблюдателя на Марсе.

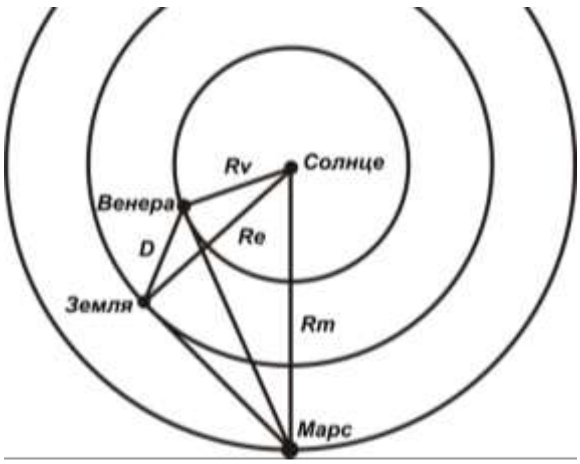


Рис. 9. К задаче 8

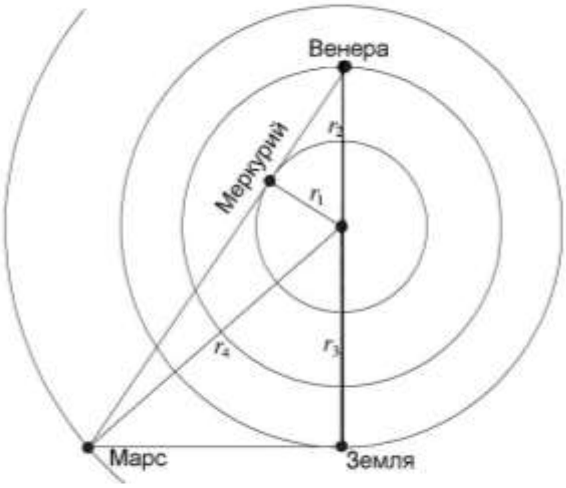


Рис. 10. К задаче 9

Задача 10. Длина тени от вертикального шеста, высотой $h = AC = 1{,}4$ м, равна $L = BC = 2$ м (рис. 11). Какова в этот момент угловая высота Солнца над горизонтом?

Решение. Треугольник ABC – прямоугольный. Угол C в нем – прямой. Для угла B имеем: tg $B = AC/BC = H/L = 1{,}4/2 = 0{,}7$. Тогда угловая высота Солнца над горизонтом равна arctg B = arctg $0{,}7 \approx 35^0$.

Высоты многих гор на Луне h определены по измеренной с помощью окулярного микрометра телескопа длине тени L, отбрасываемой горой, и известной угловой высоте Солнца над лунным горизонтом.

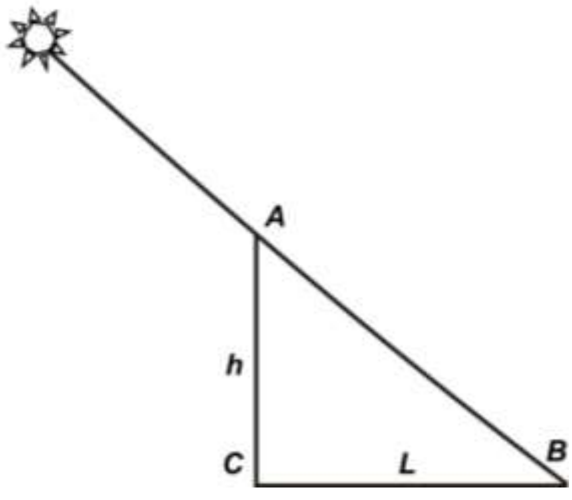


Рис. 11. К задаче 10

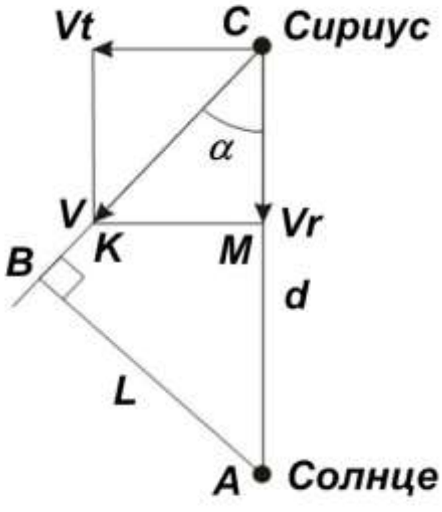


Рис. 12. К задаче 11

Задача 11. Самая яркая звезда на небе Сириус из созвездия Большого Пса находится от Солнца на расстоянии $d = AC = 2{,}7$ пк (1 парсек = $3{,}086 \cdot 10^{13}$ км), имеет лучевую скорость $V_r = -$ 8км/с, тангенциальную скорость $V_t = 3{,}5$ км/с (рис.12). Определите минимальное расстояние от Солнца $AB = L$, на котором пройдет Сириус [7, с. 104-105].

Решение. Скорость, с которой Сириус движется относительно Солнца (пространственную скорость $\boldsymbol{V}$), можно представить как векторную сумму двух компонентов, один из которых (лучевая скорость $\boldsymbol{V_r}$) направлен по луча зрения (т.е. по направлению Солнце – Сириус), другой (тангенциальная скорость $\boldsymbol{V_t}$) перпендикулярен ему: $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V_r} + \boldsymbol{V_t}$. Вектор $\boldsymbol{V}$ располагается на прямой CB и определяет направление перемещения звезды.

Знак «минус» в лучевой скорости означает, что Сириус приближается к Солнцу. Поэтому вектор $\boldsymbol{V_r}$ направлен по лучу зрения от Сириуса к Солнцу. Вычислим из треугольника КМС по теореме Пифагора модуль пространственной скорости $V = \sqrt{V_t^2 + V_r^2} \approx 8{,}7$ км/с.

Для дальнейшего решения можно предложить несколько способов.

1 способ. Из подобия треугольников АВС и КМС имеем:

$$\frac{AC}{KC} = \frac{AB}{KM} \text{ или } \frac{d}{V} = \frac{L}{V_t}.$$

Минимальное расстояние $L = \frac{d}{V} \cdot V_t = \frac{2{,}7}{8{,}7} \cdot 3{,}5 \approx 1{,}1$ пк.

2 способ. Используем соотношение $1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{sin^2\alpha}$. Из прямоугольного треугольника КМС имеем $ctg\alpha = \frac{V_r}{V_t} \approx 2{,}3$. Тогда $sin\alpha \approx 0{,}4$ (угол α – острый). Из прямоугольного треугольника АВС найдем минимальное расстояние от Солнца до Сириуса $L = AB = AC \cdot \sin\alpha = d \cdot \sin\alpha \approx 1{,}1$ пк.

В настоящее время ближайшая к Солнцу звезда α Центавра находится на расстоянии 1,3 пк.

Необходимые для решения многих задач справочные астрономические данные можно найти, например, в [1, 5] и Интернете.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронцов-Вельяминов Б.А. Астрономия / Б.А. Воронцов-Вельяминов, Е.К. Страут. – М., 2018. – 238 [2] с.: ил.

2. Левитан Е.П. Методика преподавания астрономии в средней школе / Е.П. Левитан. – М., 1965. – 228 с.

3. Кожинин С.П. Задачи внутришкольной олимпиады «Фантастика и реальность» / С.П. Кожинин // Потенциал. – 2007. – № 11. – С. 59-64.

4. Сурдин В.Г. Вселенная в вопросах и ответах. Задачи и тесты по астрономии и космонавтике / В.Г. Сурдин. – М., 2017. – 242 с.

5. Волынский Б.А. Задачи и упражнения по астрономии для средней школы / Б.А. Волынский, Г.И. Малахова, И.А. Стамейкина. – М., 1965. – 108 с.

6. Воронцов-Вельяминов Б.А. Сборник задач по астрономии / Б.А. Воронцов-Вельяминов. – М., 1980. – 56 с.

7. Дагаев М.М. Сборник задач по астрономии / М.М. Дагаев. – М., 1980. – 128 с.

УДК 372.851.4

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЫ GEOGEBRA ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ПЛОСКОСТИ И ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ»

Виктор Владимирович Иванов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *интерактивная геометрическая среда GeoGebra, интерактивные компьютерные модели, визуализация, плоскость, прямая в пространстве, взаимное расположение плоскости и прямой в пространстве.*

Аннотация. В статье рассматриваются возможности применения интерактивной геометрической среды GeoGebra для моделирования плоскостей и прямых в пространстве и их взаимного расположения в зависимости от координат нормальных и направляющих векторов. Приведены решения задач с использованием компьютерных моделей, созданных с помощью GeoGebra.

При изучении аналитической геометрии существенное значение для студентов имеют возможности визуализации как различных понятий, так и поэтапного хода решения задач. Наглядные представления математических объектов способствуют более качественному усвоению изучаемого материала, повышению эффективности обучения.

Чаще всего в процессе преподавания визуализация учебного материала осуществляется с помощью таких средств обучения, как плакаты, модели, рисунки мелом на доске и т.д. К настоящему времени создано множество различных компьютерных программ образовательного назначения, предназначенных для создания динамических образов изучаемых математических объектов, позволяющих проследить их свойства. Визуализацию математических объектов, пошаговый просмотр решения задач можно осуществлять с использованием, например, интерактивной геометрической среды GeoGebra, которая предоставляет возможности создания динамических чертежей при изучении аналитической геометрии. Актуально применение системы динамической геометрии GeoGebra и в других разделах вузовского курса математики, где помимо вычислений необходимо выполнять и геометрические построения изучаемых математических объектов.

Использование подобных визуализаций играет важную роль в развитии пространственного и геометрического мышления студентов, что позволяет значительно повысить понимание ими излагаемого материала, включить их в активную познавательную деятельность и проведение самостоятельных исследований. Программа GeoGebra достаточно проста в освоении даже для тех, кто владеет только элементарными навыками работы на компьютере.

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra – кроссплатформенная программа, обладает простым интерфейсом пользователя, переведена на многие языки, в том числе и на русский. Она распространяется бесплатно и может быть установлена как на компьютеры, так и на смартфоны. Кроме того, предусмотрена возможность работы on-line (https://www.geogebra.org).

Покажем возможности использования GeoGebra в качестве средства визуализации при изучении расположения плоскостей и прямых в пространстве.

Создадим ползунки для коэффициентов a, b, c ,d, m, n, p, где a, b, c – координаты нормального вектора плоскости $ax + by + cz + d = 0$ (1), m, n, p – координаты направляющего вектора прямой

$$\frac{x-3}{m} = \frac{y+2}{n} = \frac{z-4}{p}, \qquad (2)$$

проходящей через точку с координатами (3; – 2; 4). Все коэффициенты при создании ползунков полагаются равными 1. Введем уравнение плоскости (1) и прямой (2). Изменим с помощью ползунков значения m, n, p. Получим изображение плоскости и прямой (рис. 1). На рисунках 1 – 4 показана, кроме того, плоскость *XOY*.

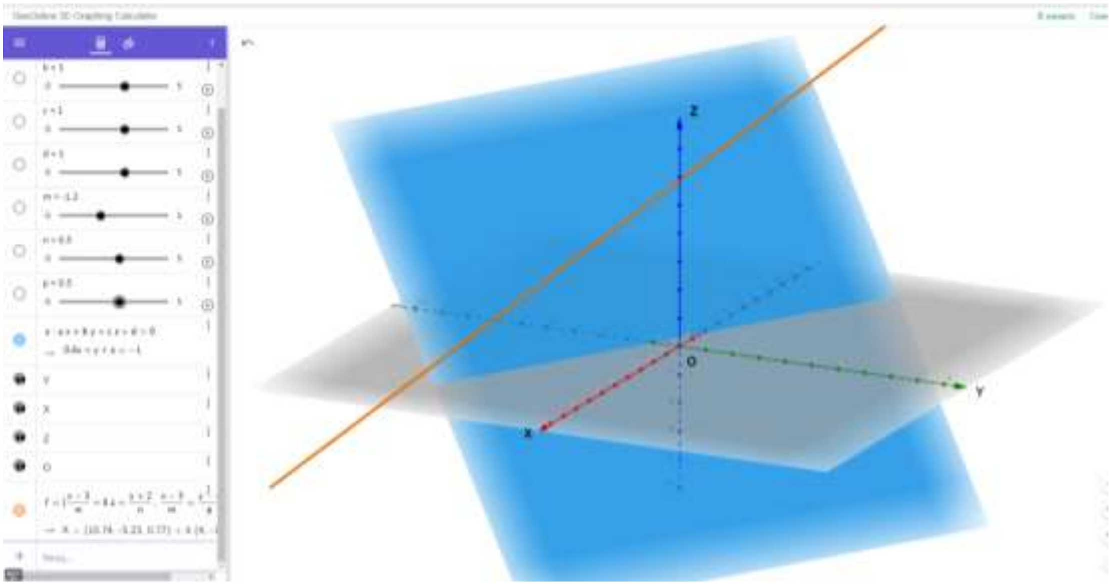


Рис. 1

Установим $b = 0$. Тогда плоскость будет параллельна оси *OY* (рис. 2).

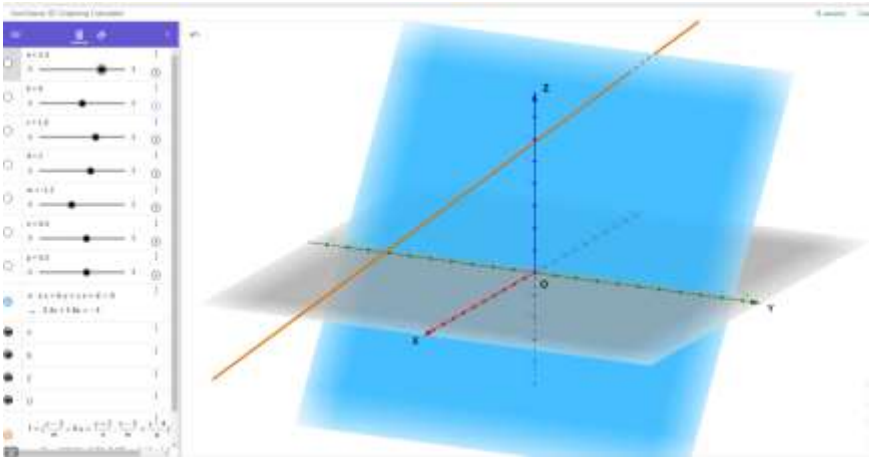


Рис. 2

Устанавливая $b = 0$ и $c = 0$, получим плоскость, перпендикулярную оси *OX*, или, иначе говоря, параллельную плоскости *YOZ* (рис. 3).

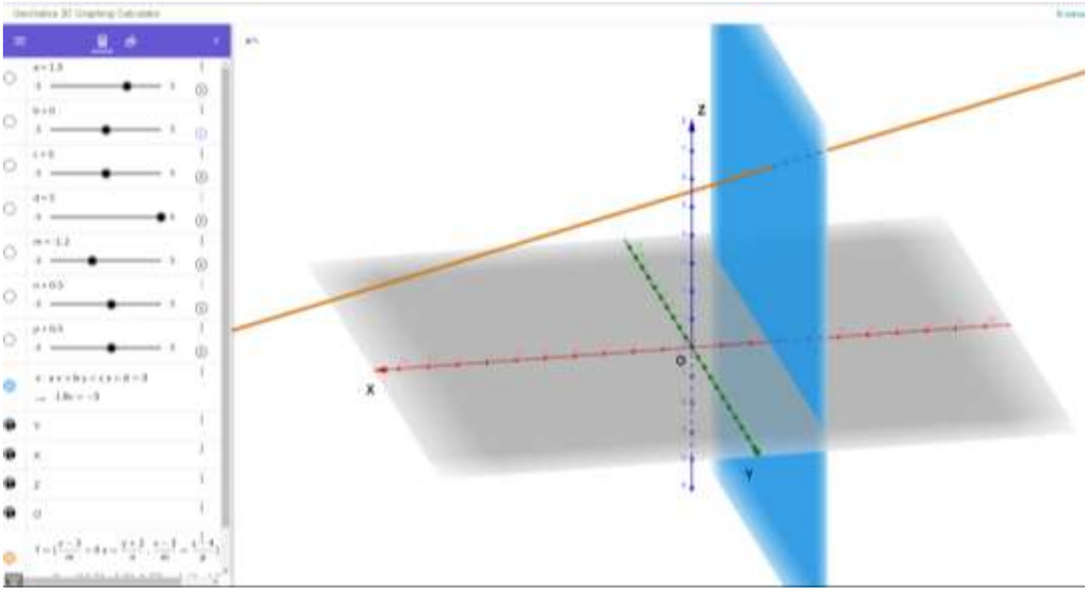


Рис. 3

Устанавливая $a = 0$ и $b = 0$, получим плоскость, перпендикулярную оси OZ, или, иначе говоря, параллельную плоскости XOY (рис. 4).

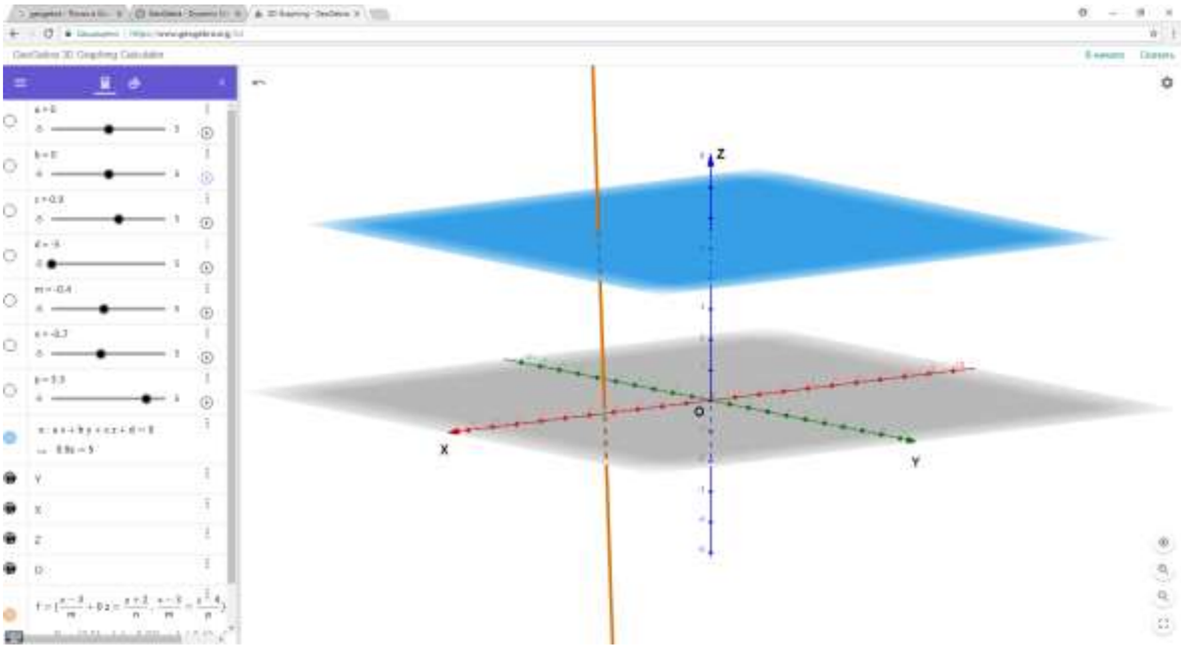


Рис. 4

Использование ползунков позволяет провести исследования взаимного расположения нескольких плоскостей, прямой и плоскости, нескольких прямых и т.д. Для самостоятельной работы можно предложить задания, среди которых могут быть, например, такие:

1. Найдите условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей, изменяя с помощью ползунков координаты их нормальных векторов.

2. Найдите условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости, изменяя с помощью ползунков координаты нормального вектора плоскости и направляющего вектора прямой.

3. Найдите условие параллельности двух прямых, изменяя с помощью ползунков координаты их направляющих векторов.

Продемонстрируем возможности применения GeoGebra как средства визуализации при решении задач.

Задача 1 [1, № 472]. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1; -1; 2)$, $M_2(2; 1; 2)$ и $M_3(1; 1; 4)$.

Решение. Введем координаты точек. Выберем инструмент «Плоскость через 3 точки». На «Полотне 3D» получим изображение плоскости (рис. 5), а на «Панели объектов» ее уравнение (a: $2x - y + z = 5$). Решение задачи аналитически приводит к тому же результату.

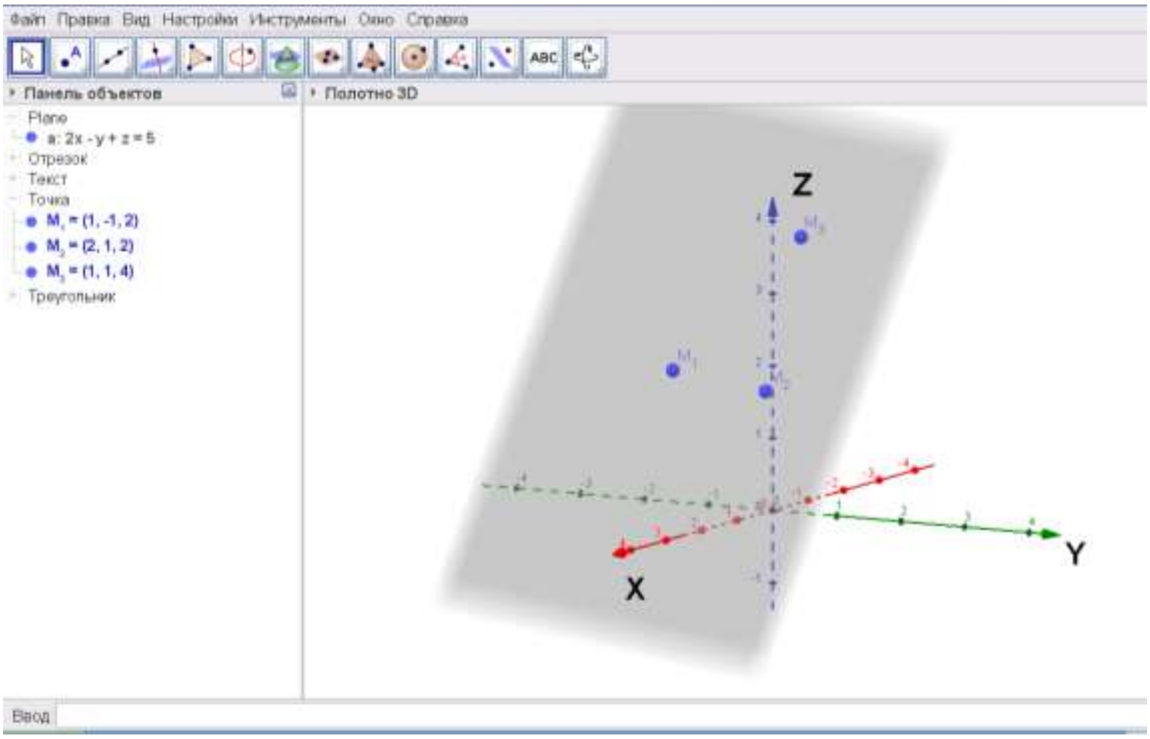


Рис. 5

Задача 2 [1, № 474]. Найти расстояние точки A (5; 1; – 1) от плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

Решение. Введем уравнение плоскости и координаты точки A. Используя инструмент «Расстояние или длина», получим ответ (рис. 6). Расчет по формуле для определения расстояния от точки до плоскости приводит к тому же результату.

Задача 3 [2, с. 122]. Найдите угол между плоскостями $2x + 2y + z - 1 = 0$ и $x + z - 1 = 0$.

Решение. Введем уравнения плоскостей. Выбираем инструмент «Угол» (рис. 7). Расчет по формуле для определения угла между плоскостями приводит к тому же результату.

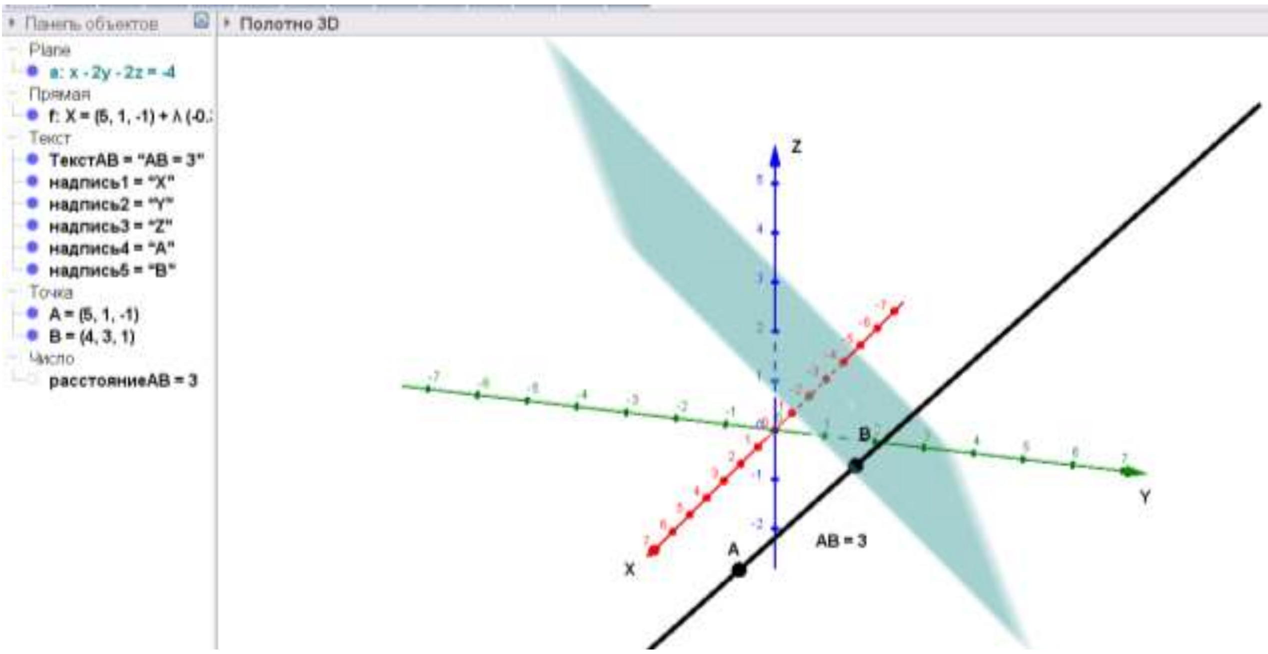


Рис. 6

Задача 4 [3, № 947]. Вычислить объем пирамиды, ограниченной плоскостью $3x - 4y - 6z + 12 = 0$ и координатными плоскостями.

Решение. Введем уравнение плоскости. Используем инструмент «Пирамида» для выделения объекта. Далее используем инструмент «Объем» (рис. 8).

Задача 5 [3, № 977]. Определить, лежит ли точка M (3; 2; – 1) внутри острого или тупого угла, образованного двумя плоскостями $5x - y + z + 3 = 0$ и $4x - 3y + 2z + 5 = 0$.

Решение. Введем уравнения плоскостей. Введем координаты точки M. Из построения видно, что точка М лежит внутри тупого угла (рис. 9).

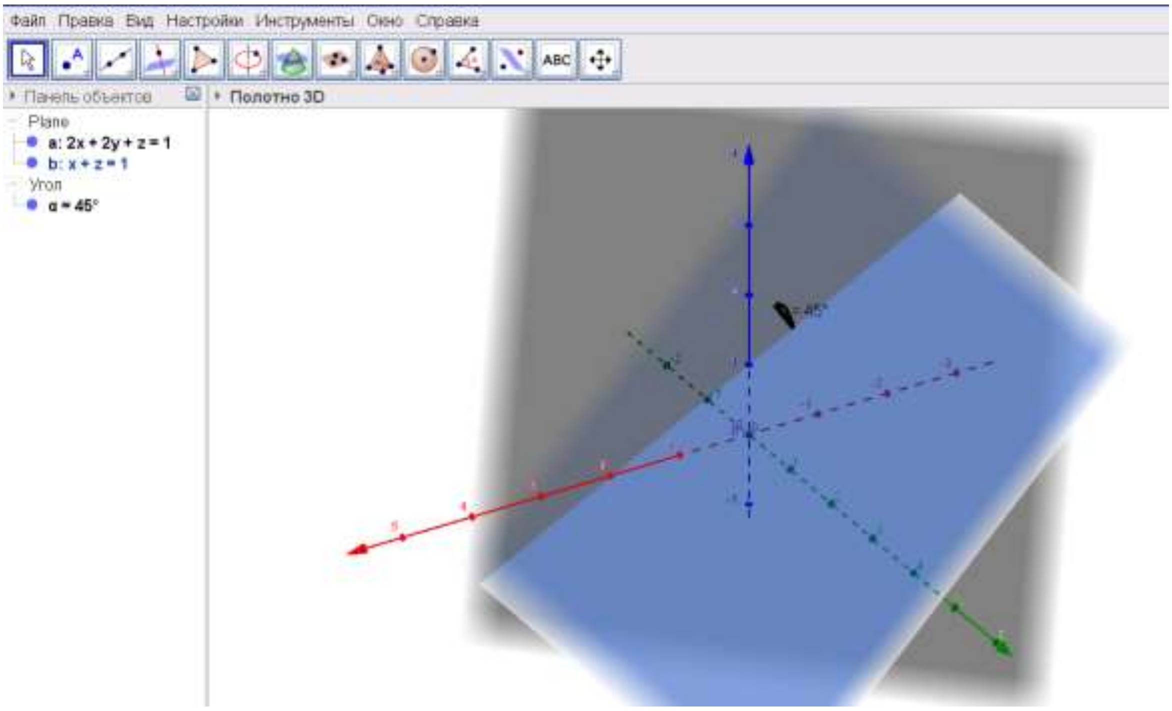


Рис. 7

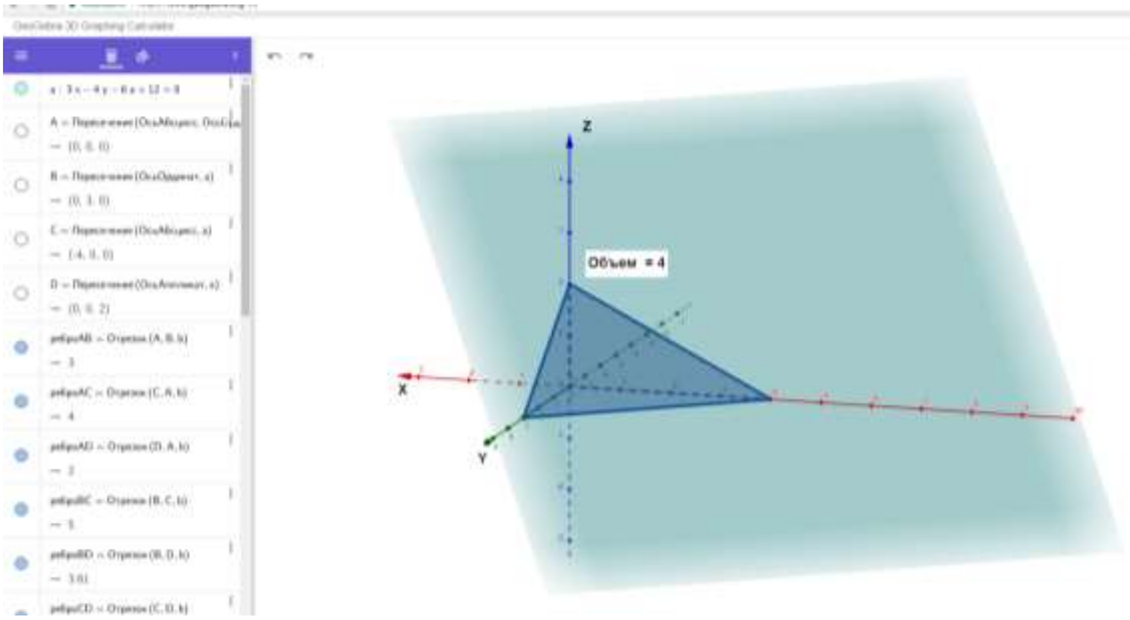


Рис. 8

Задача 6 [3, № 1053]. Найти проекцию точки P (5; 2; – 1) на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Решение. Вводим уравнение плоскости и координаты точки P. Используем инструмент «Перпендикулярная линия». Проекцией точки P на плоскость будет точка A, координаты которой отображаются на «Панели объектов» (рис. 10).

Задача 7 [2, с. 139]. Найдите координаты точки Q, симметричной точке P (– 4; – 1; 11) относительно плоскости $x - y = -1$.

Решение. Вводим уравнение плоскости и координаты точки P. Используем инструмент «Отражение относительно плоскости». На панели объектов отображаются координаты точки Q (рис. 11).

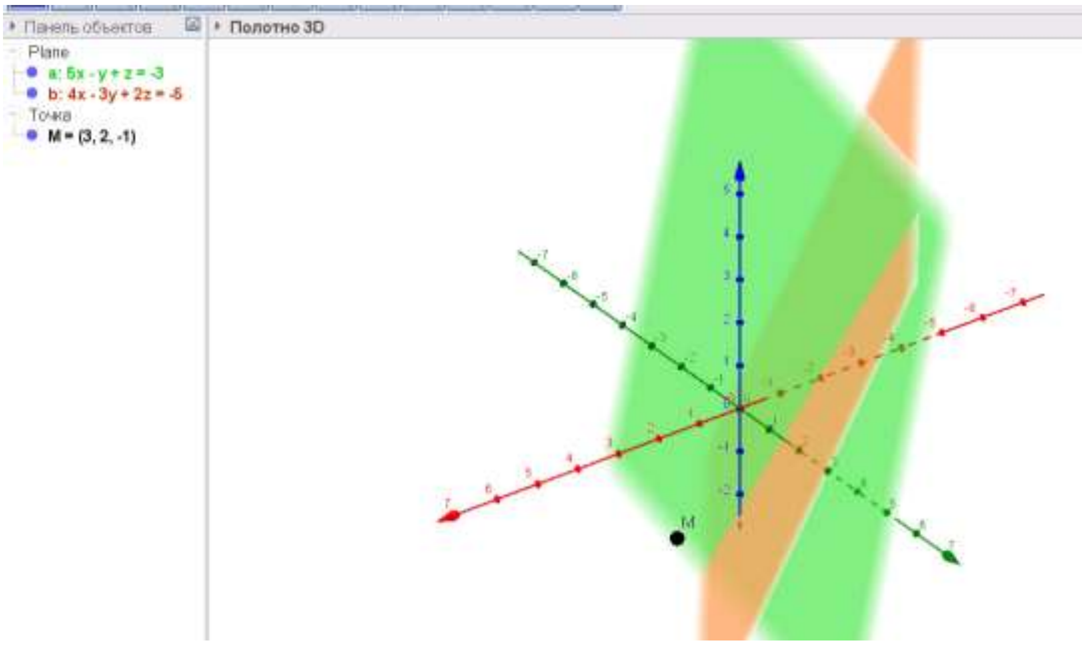


Рис. 9

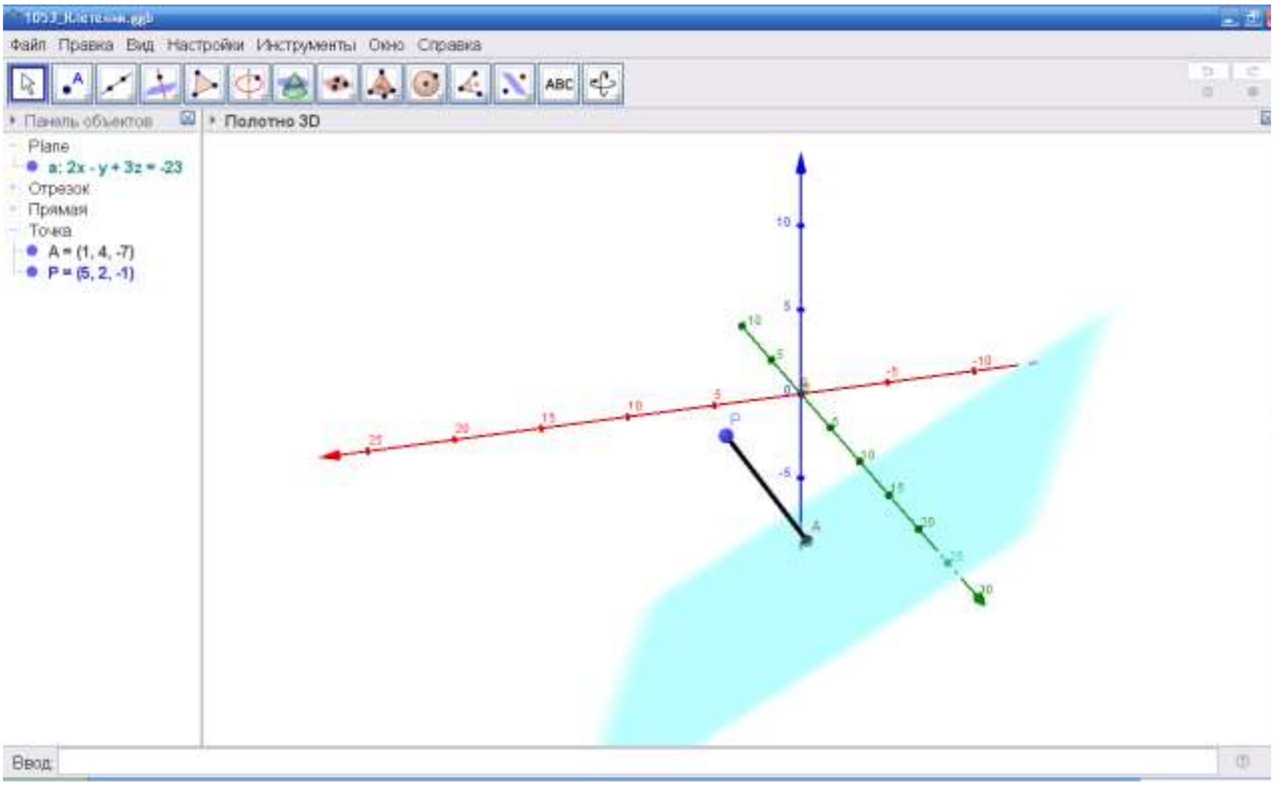


Рис. 10

Задача 8 [3, № 1062]. Вычислить расстояние d точки P (1; – 1; – 2) от прямой

$$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}.$$

Решение. Вводим уравнение прямой и координаты точки P. Используя инструмент «Расстояние или длина», получим ответ (рис. 12).

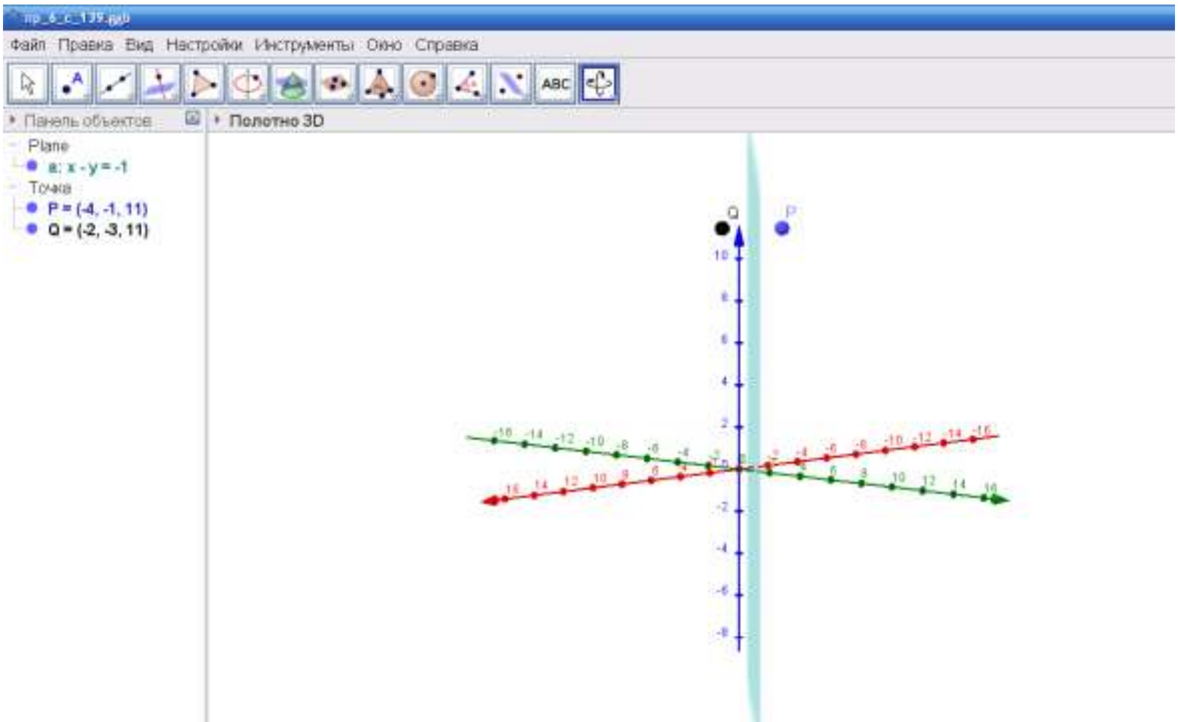


Рис. 11

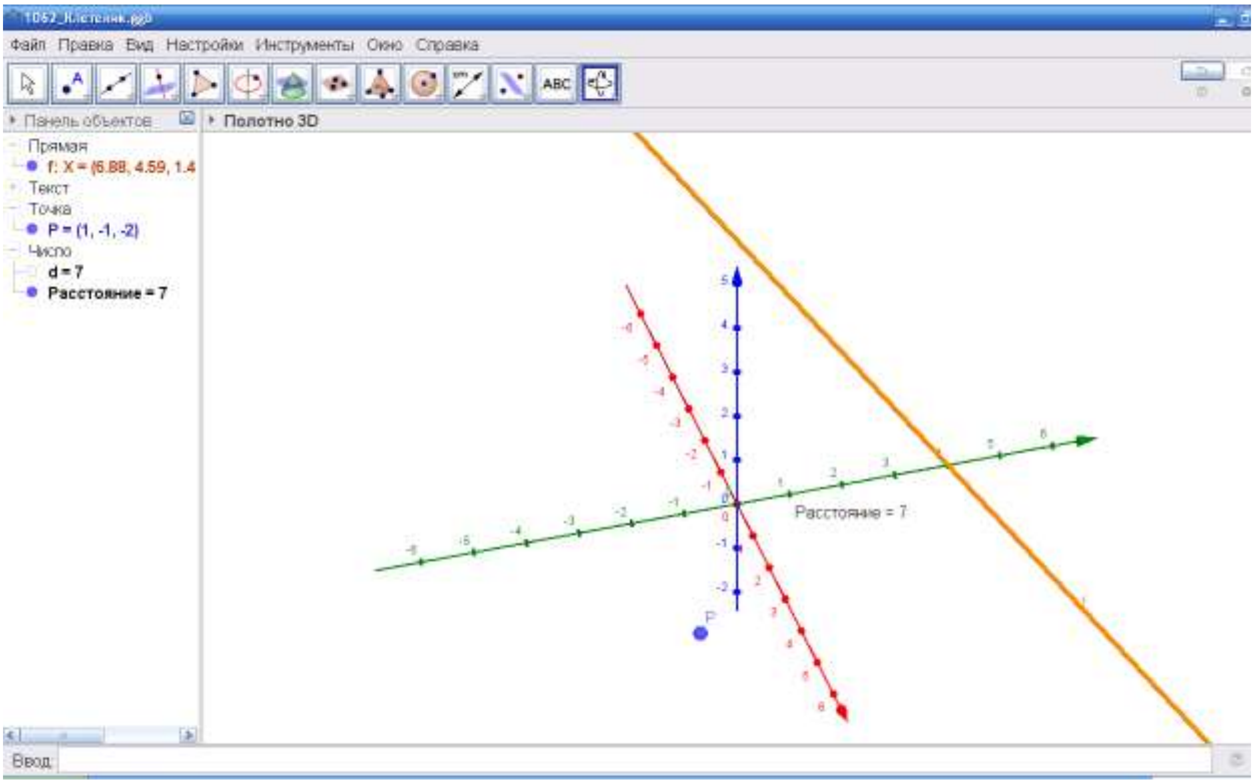


Рис. 12

Применение интерактивной геометрической среды GeoGebra при изучении темы «Плоскости и прямые в пространстве» и решении соответствующих задач позволяет наглядно изображать объекты, динамически изменять построенные конструкции, что способствует лучшему пониманию и более осознанному усвоению материала, ускоряет процесс решения задач, упрощает вычисления.

Использование компьютерных моделей, созданных с помощью GeoGebra, способствует повышению эффективности изучения аналитической геометрии, позволяет оптимизировать учебный процесс, осуществить дифференцированный подход в обучении, расширить кругозор и развивать познавательную активность студентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике / В.П. Минорский. – М., 1971. – 352 с.: ил.

2. Иванов В.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / В.В. Иванов. – Тверь, 2009. – 160 с.: ил.

3. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник, под ред. Ефимова Н.В. – С-Пб., 2017. – 224 с. : ил.

УДК 512.1

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ СТЕПЕНЕЙ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ АЛГЕБРЫ 9 КЛАССА

Геннадий Альбертович Игнатьев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ignatev.GA@tversu.ru

Ключевые слова: *Алгебраические уравнения, методы решения алгебраических уравнений.*

Аннотация. Даны основные теоретические сведения об алгебраических уравнениях, рассмотрены методы их решения, в том числе – метод неопределенных коэффициентов, разложение многочлена на множители, метод введения новой переменной, метод выделения полного квадрата.

Понятие уравнения относится к важнейшим общематематическим понятиям. Именно поэтому затруднительно предложить его определение, одновременно и строгое с формальной точки зрения, и доступное для учащихся, приступающих к овладению школьным курсом алгебры.

Логико-математическое определение уравнения можно привести в такой форме: пусть на множестве M *зафиксирован набор алгебраических операций,* x *– переменная на* M*; тогда уравнением на множестве* M *относительно* x *называется предикат вида* $a(x)=b(x)$*, где* $a(x)$ *и* $b(x)$ *– термы относительно заданных операций, в запись которых входит символ* x*. Принятым в логике терминам «терм» и «предикат» соответствуют термины школьной математики «выражение» и «предложение с переменной». Поэтому наиболее близко к приведенному формальному определению следующее определение: «Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением».*

Алгебраические уравнения n*-й степени*

Уравнение

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \Lambda + a_1 x + a_0 = 0, \qquad (1)$$

левой частью которого является многочлен n-й степени от x, называется *алгебраическим уравнением* n*-й степени* с одним неизвестным. Числа $a_n,\ a_{n-1},\ a_{n-2}, \mathrm{K}\ ,\ a_1,\ a_0$ ***называют коэффициентами уравнения, причем*** $a_n \neq 0$ **на**зывают старшим коэффициентом, а a_0 – свободным членом. Всякое значение неизвестного x, при котором левая часть уравнения (1) равна нулю, называют решением или корнем этого уравнения.

Из курса высшей алгебры известно, что всякое алгебраическое уравнение n-й степени с одним неизвестным, с любыми числовыми коэффициентами имеет в поле комплексных чисел n корней.

Решить уравнение алгебраически означает выразить его корни через коэффициенты с помощью конечного числа операций сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в целую степень и извлечения корня [1–6].

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Разложение многочлена на множители

Разложение многочлена на множители – тождественное преобразование многочлена в произведение нескольких множителей.

Пусть $h(x)$ – данный многочлен от неизвестного x; если известно разложение $h(x)$ на множители: $h(x)=h_1(x)\cdot h_2(x)\cdot\ldots\cdot h_k(x)$, где ни один из множителей в правой части не является тривиальным делителем $h(x)$, то уравнение $h(x)=0$ равносильно совокупности уравнений: $h_1(x)=0,\ h_2(x)=0,\ \ldots,\ h_k(x)=0$. Множество корней исходного уравнения получается объединением в одно множество корней уравнений $h_i(x)=0,\ i=1,\ldots,k$. Если посредством применения известных методов удается разложить многочлен $h(x)$ на множители, то решение уравнения $h(x)=0$ сведется к решению нескольких уравнений более низких степеней. Разложение многочлена на множители производят в основном следующими способами: вынесение общего множителя за скобки, использование формул сокращенного умножения, группировка слагаемых, разбиение слагаемых.

Пример 1. Решить уравнение $5x^4-15x^3+10x^2=0$, используя способ вынесения общего множителя за скобки.

Исходное уравнение равносильно уравнению $5x^2\left(x^2-3x+2\right)=0$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности уравнений: $5x^2=0,\ x^2-3x+2=0$. Это вытекает из свойства произведения чисел: произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Откуда $5x^2=0\Rightarrow x_{1,2}=0$ и $x^2-3x+2=0\Rightarrow x_1=1, x_2=2$. Объединение множеств корней совокупности уравнений и представляет собой множество корней исходного уравнения. Таким образом, уравнение $5x^3-15x^2+10x=0$ имеет четыре корня: $x_{1,2}=0, x_3=1, x_4=2$. Где x_1 совпадает с x_2. В этом случае, говорят, что уравнение имеет корень $x=0$ кратности два.

2. Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод используется, когда разложение многочлена на множители не удается провести простейшими средствами известными из курса средней школы. Поясним этот метод на примере.

Пример 2. Решить уравнение $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$.

Предположим, что левая часть этого уравнения разлагается на два множителя второй степени вида: x^2+ax+b и x^2+cx+d. Определим коэффициты a,b,c,d. Запишем равенство

$$x^4+2x^3-11x^2+4x+4=\left(x^2+ax+b\right)\left(x^2+cx+d\right).$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим систему из четырех уравнений: $a+c=2$, $ac+b+d=-11$, $ad+cb=4$, $bd=4$.

Решая полученную систему, находим $a=-3,\ b=2,\ c=5,\ d=2$. Тогда исходное уравнение будет равносильно уравнению $(x^2-3x+2)(x^2+5x+2)=0$. Остается решить два квадратных уравнения: $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=2$. $x^2+5x+2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$. Таким образом, уравнение $x^4+2x^3-11x^2+4x+4=0$ имеет четыре корня $x_1=1,\ x_2=2,\ x_{3,4}=\dfrac{-5\pm\sqrt{17}}{2}$.

3. Метод введения новой переменной

В общем случае метод введения новой переменной заключается в том, что для решения уравнения $f(x)=0$ вводят новую переменную (подстановку) $y=q(x)$ и выражают $f(x)$ через y, получая новое уравнение $\varphi(y)=0$. Решая затем уравнение $\varphi(y)=0$, находят его корни: $\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$. После этого получают совокупность n уравнений $q(x)=y_1,\ q(x)=y_2,\ldots,\ q(x)=y_n$, из которых и находят корни исходного уравнения.

Пример 3. Решить уравнение $(3x+2)^4-13(3x+2)^2+36=0$.

Полагая $y=(3x+2)^2$, получим уравнение $y^2-13y+36=0$. Находим его корни $y_1=4,\ y_2=9$ и решаем уравнения $(3x+2)^2=4$ и $(3x+2)^2=9$. Первое уравнение равносильно совокупности уравнений $3x+2=2$ и $3x+2=-2$, решением которой будут корни $x=0$ и $x=-\dfrac{4}{3}$. Второе уравнение $(3x+2)^2=9$ равносильно совокупности уравнений $3x+2=3$ и $3x+2=-3$, решением которой являются корни $x=\dfrac{1}{3}$ и $x=-\dfrac{5}{3}$. Таким образом, решением данного уравнения является объединение полученных решений, т.е. $x_1=0,\ x_2=-\dfrac{4}{3},\ x_3=\dfrac{1}{3},\ x_4=-\dfrac{5}{3}$.

4. Биквадратные уравнения

Биквадратными уравнениями называют алгебраические уравнения вида $ax^4+bx^2+c=0$, где $a\neq 0$. Решение таких уравнений сводится к решению квадратных уравнений. Полагая $y=x^2$ в исходном уравнении, получаем $ay^2+by+c=0$. Для нахождения корней биквадратного уравнения остается решить уравнения $x^2=y$ для всех значений y, удовлетворяющие равенству $ay^2+by+c=0$.

Пример 4. Решить уравнение $9x^4+5x^2-4=0$.

Полагая $y=x^2$, получаем $9y^2+5y-4=0$. Решая это квадратное уравнение, находим $y_1=\dfrac{4}{9},\ y_2=-1$. Поскольку y может принимать только неотрицательные значения на множестве действительных чисел, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 = \frac{4}{9}$. Откуда $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$. На множестве комплексных чисел исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x^2 = \frac{4}{9}$ и $x^2 = -1$. Откуда $x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$, $x_{3,4} = \pm i$. Отметим, что методом, аналогичным методу решения биквадратного уравнения, можно решать и более широкий круг уравнений, а именно уравнения вида $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, где n – любое натуральное число и $a \neq 0$. Замена $y = x^n$ сводит исходное уравнение к уравнению $ay^2 + by + c = 0$. Где y пробегает все решения уравнения $ay^2 + by + c = 0$.

Пример 5. Решить уравнение $8x^6 - 215x^3 - 27 = 0$.

Полагая $y = x^3$, получаем $8y^2 - 215y - 27 = 0$. Решая это квадратное уравнение, находим $y_1 = -\frac{1}{8}$, $y_2 = -27$. Остается решить два уравнения $x^3 = -\frac{1}{8}, x^3 = -27$. Откуда $x_{1,2,3} = -\frac{1}{2}, x_{4,5,6} = -3$.

5. Симметрические уравнения

Уравнение вида

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \Lambda + cx^2 + bx + a = 0, \tag{1}$$

в котором коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца, равны, называется ***симметрическим***.

Симметрическое уравнение имеет следующее свойство: если отличное от нуля число α является его решением, то обратное ему число $\frac{1}{\alpha}$ также будет его решением. Будем считать, что в уравнении (1) $a \neq 0$. Тогда $x = 0$ не будет решением этого уравнения, так как при $x = 0$ левая часть его равняется a. Поэтому, не теряя корней уравнения (1), исключим из множества допустимых значений неизвестного число 0.

Симметрическое уравнение (1) может быть как четной, так и нечетной степени. Рассмотрим сначала симметрическое уравнение четной степени. Пусть $n = 2k$.тогда уравнение (1) запишется так:

$$ax^{2k} + bx^{2k-1} + cx^{2k-2} + \Lambda + lx^{k+1} + fx^k + lx^{k-1} + \Lambda + cx^2 + bx + a = 0 \tag{2}$$

Умножив обе части уравнения (2) на выражение $\frac{1}{x^k}$, определенное и отличное от нуля при всех допустимых значениях x, и сгруппировав попарно его члены, равноудаленные от начала и конца, получим равносильное ему уравнение

$$a\left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + b\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + c\left(x^{n-2} + \frac{1}{x^{n-2}}\right) + \Lambda + l\left(x + \frac{1}{x}\right) + f = 0. \tag{3}$$

Введем новое неизвестное y, связанное с неизвестным x соотношением $y = x + \frac{1}{x}$. Тогда

$$y^k = x^k + kx^{k-2} + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}x^{k-4} + \ldots + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{x^{k-4}} + k\frac{1}{x^{k-2}} + \frac{1}{x^k} =$$

$$= \left(x^k + \frac{1}{x^k}\right) + k\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \frac{k(k-1)}{1\cdot 2}\left(x^{k-4} + \frac{1}{x^{k-4}}\right) + \ldots$$

Отсюда находим, что $x + \frac{1}{x} = y$, $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$, $x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y$ и т.д.

Воспользовавшись этими соотношениями, заменим в уравнении (3) неизвестное x новым неизвестным y. Тогда получим уравнение степени k от неизвестного y следующего вида: $a_1 y^{k-1} + a_2 y^{k-2} + \ldots + a_{k-1}y + a_k = 0$.

Полученное уравнение имеет степень в два раза меньшую, нежели первоначальное. Отыскав, если возможно, решения этого уравнения $y_1, y_2, \ldots, y_k$ и подставив их вместо y в равенство $x + \frac{1}{x} = y$, получим k уравнений относительно неизвестного x: $x + \frac{1}{x} = y_1$, $x + \frac{1}{x} = y_2, \ldots$, $x + \frac{1}{x} = y_k$.

Так как $x \neq 0$, то, умножив обе части каждого из уравнений $x + \frac{1}{x} = y_i$, $i = (1, 2, \ldots, k)$ на x и перенеся в каждом из них все члены в левую часть, получим соответственно равносильные им квадратные уравнения

$$x^2 - y_i x + 1 = 0, \quad i = (1, 2, \ldots, k). \tag{4}$$

Решив уравнения (4), найдем все $2k$ решений симметрического уравнения (2).

Решение симметрического уравнения нечетной степени сводится к решению симметрического уравнения четной степени с помощью некоторых математических преобразований.

Пример 6. Решить уравнение $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Одно решение этого уравнения известно: $x_1 = -1$. Разделив левую часть уравнения на $x + 1$ и приравняв найденное частное нулю, получаем для определения всех других решений симметрическое уравнение $x^6 + x^5 - 6x^4 - 7x^3 - 6x^2 + x + 1 = 0$. Разделим обе части этого уравнения на x^3 и сгруппируем попарно члены, равноудаленные от начала и от конца. Тогда будем иметь уравнение $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 7 = 0$. Произведя в нем подстановку $y = x + \frac{1}{x}$, найдем $y^3 + y^2 - 9y - 9 = 0$, или $(y+1)(y^2 - 9) = 0$. Отсюда $y_1 = -1$, $y_2 = 3$, $y_3 = -3$. Для определения x имеем уравнения

$$x^2 + x + 1 = 0, \quad x^2 - 3x + 1 = 0, \quad x^2 + 3x + 1 = 0,$$

решив которые, находим: $x_{2,3}=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{4,5}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{6,7}=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$.

6. Возвратные уравнения

Возвратными называются уравнения вида

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_nx^{n+1}+a_n\lambda x^n+\ldots+a_1\lambda^n x+a_0\lambda^{n+1}=0 \qquad (1)$$

или

$$a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+\ldots+a_{n-1}x^{n+1}+a_n x^n+a_{n-1}\lambda x^{n-1}+\ldots+a_1\lambda^{n-1}x+a_0\lambda^n=0 \qquad (2)$$

где n – некоторое натуральное число, $\lambda, a_0, a_1, \ldots, a_n$ – заданные числа, причем $a_0\neq 0$. Задачу нахождения корней возвратного уравнения сводят к задаче нахождения решений алгебраического уравнения меньшей степени. После деления получим эквивалентные уравнения, так как число $x=0$ не является корнем уравнений (1) и (2) при $\lambda\neq 0$. Полагая $y=x+\frac{\lambda}{x}$, получаем алгебраическое уравнение меньшей степени, которое остается решить.

Пример 7. Решить уравнение $3x^4+5x^3-14x^2-10x+12=0$.

Заметим, что уравнение является возвратным, где $n=2,\ \lambda=-2,\ a_0=3,\ a_1=5,\ a_2=12$. Поделив его на x^2, получаем эквивалентное уравнение $3x^2+5x-14-5\cdot\frac{2}{x}+3\left(\frac{2}{x}\right)^2=0$. В силу тождественных преобразований имеем равносильное уравнение $3\left(x-\frac{2}{x}\right)^2+5\left(x-\frac{2}{x}\right)-2=0$. Полагая $y=x-\frac{2}{x}$, получаем $3y^2+5y-2=0$, откуда $y_1=\frac{1}{3}, y_2=-2$. Остается решить два уравнения $x-\frac{2}{x}=\frac{1}{3}$, $x-\frac{2}{x}=-2$. Первое из них эквивалентно уравнению $3x^2-x-6=0$ и дает корни $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{73}}{6}$, а второе эквивалентно $x^2+2x-2=0$ и дает корни $x_{3,4}=-1\pm\sqrt{3}$.

7. Однородные уравнения

Уравнение вида $P(u,v)=0$ называется ***однородным*** уравнением степени k относительно u и v, если $P(u,v)$ – однородный многочлен степени k, т.е. степень каждого его члена равна одному и тому же числу k. Например, однородное уравнение степени 3 относительно u и v имеет вид:

$$a_0u^3+a_1u^2v+a_2uv^2+a_3v^3=0.$$

Однородные уравнения относительно u и v обладают тем свойством, что если разделить все члены уравнения на наивысшую степень одной из переменных, например v (если $v=0$ не являются корнем уравнения), то оно превращается в уравнение с одной переменной $y=u/v$. Например,

$$a_0\left(\frac{u}{v}\right)^3+a_1\left(\frac{u}{v}\right)^2 v+a_2\frac{u}{v}+a_3=0, \text{ или } a_0y^3+a_1y^2v+a_2y+a_3=0.$$

Пример 8. Решить уравнение $\left(x^2-x+1\right)^3+2x^4\left(x^2-x+1\right)-3x^6=0$.

Если раскрыть скобки и привести подобные, то получим уравнение пятой степени стандартного вида. Но если ввести новые переменные $u=x^2-x+1$ и $v=x^2$, то получим уравнение $u^3+2uv^2-3v^3=0$, являющееся однородным уравнением степени 3 относительно u и v. Видим, что уравнение однородное относительно переменных $u=x^2-x+1$ и $v=x^2$. Проверив, что $x=0$ не является корнем данного уравнения, разделим его почленно на $v^3=x^6$. Получим уравнение $\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)^3+2\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)-3=0$. Положив $y=\frac{x^2-x+1}{x^2}$, решим уравнение $y^3+2y-3=0$. Легко видеть, что $y=1$ – корень этого уравнения, поэтому, разделив многочлен y^3+2y-3 на $y-1$, перейдем к равносильному уравнению $(y-1)\left(y^2+y+3\right)=0$. Обнаружив, что дискриминант квадратного трехчлена $D=-11<0$, заключаем, что последнее уравнение имеет один корень $y=1$. Значит, осталось решить уравнение $\frac{x^2-x+1}{x^2}=1$. Решая это уравнение, находим единственный корень $x=1$. Итак, решением исходного уравнения является $x=1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А. Сборник заданий по математике: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2015. – 160 с.
2. Голубев А.А. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ – 2017: учебное пособие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2017. – 124 с.
3. Голубев А.А. Практикум по математике для старшей школы: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 140 с.
4. Любецкий В.А. Основные понятия элементарной математики. – М.: Айрис-пресс, 2004.
5. Мишин В.И. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учеб пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. – М.: Просвещение, 1987.
6. Мордкович А.Г. Алгебра. 9 кл.: В двух частях.: учеб. для общеобразоват. учреждений. – М.: Мнемозина, 2006.

УДК 512.1

РЕШЕНИЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Геннадий Альбертович Игнатьев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ignatev.GA@tversu.ru

Ключевые слова: *Алгебраические уравнения, способы решения алгебраических уравнений.*

Аннотация. Даны основные исторические сведения об алгебраических уравнениях, рассмотрены способы их решения, в том числе: формула корней квадратного уравнения, формула Кардано, способ Феррари, способ Эйлера, схема Горнера, метод проб, графический метод.

Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач. Истоки алгебраических уравнений связаны с наукой древнего мира. Еще со времен вавилонян и древних индусов считается, что одной из основных целей алгебры является решение уравнений. В Древнем Вавилоне 4000 лет назад умели решать уравнения первой, второй и некоторые уравнения третей степени. Древние греки, решая уравнения, предварительно придавали им геометрическую форму: числа отождествляли с длинами отрезков, нахождение неизвестной для них означало построение искомого отрезка. Но общей теории уравнений в те времена еще не было. Первое изложение теории решения квадратных уравнений дано в книге древнегреческого ученого Диофанта «Арифметика» (III в.). Арабские математики (VI–X вв.) выделили характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака). Европейские математики Возрождения, в итоге длительного поиска создали язык современной алгебры (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т.д.) В XVI в. итальянскими учеными было получено решение в радикалах уравнений третьей и четвертой степеней.

В развитии алгебры уравнений велика роль французского математика и юриста Ф.Виета (1540-1603). Им был использован метод неопределенных коэффициентов, благодаря которому он первым записал уравнение в общем виде и выразил его решение формулой (до него удовлетворялись лишь решением примеров). Ему принадлежит применение единообразного приема решения уравнений степени $n \leq 4$, новый метод решения кубического уравнения. Особое значение имеет установление им зависимости между корнями и коэффициентами уравнений (формулы Виета).

Между алгебраическими решениями и многочленами имеется тесная связь. Найти корни многочлена $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \Lambda + a_n$ – означает решить уравнение $P_n(x) = 0$.

Французский математик Э.Безу (1730-1783) сформулировал свою известную теорему о делении многочлена на линейный двучлен, позволяющую снизить степень алгебраического уравнения, зная один из его корней. Деление многочленов «уголком» можно обнаружить в работах И. Ньютона (1642-1727).

Дальнейшее развитие алгебры, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилась важность роли, которую играло понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Формула корней квадратного уравнения

В уравнении второй степени $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ число корней зависит от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Если $D > 0$, то уравнение имеет два действительных корня.

Если $D = 0$, то уравнение имеет один действительный корень кратности два.

Если $D < 0$, то уравнение не имеет действительных корней.

Любое уравнение второй степени имеет не более двух корней. Для нахождения корней при $D > 0$ используется формула корней квадратного уравнения $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Формула Кардано

Рассмотрим уравнения

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{1}$$

С помощью подстановки $x = y - \dfrac{a}{3}$ уравнение (1) приводится к каноническому виду:

$$y^3 + y \cdot \left(b - \frac{a^2}{3}\right) + 2 \cdot \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \frac{ab}{3} + c = 0. \tag{2}$$

Используя обозначения $p = b - \dfrac{a^2}{3}$, $q = 2 \cdot \left(\dfrac{a}{3}\right)^3 - \dfrac{ab}{3} + c$, приводим уравнение (2) к виду

$$y^3 + py + q = 0 \tag{3}$$

Введем новую подстановку $y = z - \dfrac{p}{3z}$. Тогда уравнение (3) примет вид: $\left(z - \dfrac{p}{3z}\right)^3 + p \cdot \left(z - \dfrac{p}{3z}\right) + q = 0$. Произведя преобразования, получим: $z^3 - pz + \dfrac{p^2}{3z} - \dfrac{p^3}{27z^3} + pz - \dfrac{p^2}{3z} + q = 0$, или $z^3 - \dfrac{p^3}{27z^3} + q = 0$. Окончательно получаем уравнение $z^6+qz^3-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0$, которое введением подстановки $t=z^3$ сводится к квадратному

$$t^2+qt-\left(\frac{p}{3}\right)^3=0 \tag{4}$$

Уравнение (4) имеет корни $t_{1,2}=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}$. Отсюда

$$z=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\frac{p}{3\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}. \tag{6}$$

Избавимся от иррациональности во втором члене выражения (6):

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\frac{p\cdot\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}}{3\cdot\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}\right)^2-\left(\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}\right)^2}}.$$

Произведя преобразования, получим известную ***формулу Кардано***:

$$y=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{3}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}} \tag{7}$$

Использование второго значения z, которое дает выражение (5) со знаком «минус», приводит к получению аналогичного выражения (7).

Пример 2. Решить уравнение $x^3-6x^2+21x-52=0$. Полагая $x=y-\frac{a}{3}=y+2$, получаем уравнение $y^3+9y-26=0$, где $p=21-\frac{36}{3}=9$, $q=2\left(\frac{-6}{3}\right)^3-\frac{-6\cdot 21}{3}-52=-16+42-52=-26$. Тогда по формуле Кардано получаем $y_{1,2,3}=\sqrt[3]{13+\sqrt{(13)^2+(3)^3}}+\sqrt[3]{13-\sqrt{(13)^2+(3)^3}}=\sqrt[3]{27}+\sqrt[3]{-1}$.

Для вычисления корней n-ой степени воспользуемся формулой Муавра: если число задано в тригонометрическом виде $z^n=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, то $z_k=\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right), 0\le k\le n-1.$

Пусть $\alpha = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{27(\cos 0 + i\sin 0)}$ и $\beta = \sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{(-1)(\cos 0 + i\sin 0)}$, тогда

$$\alpha_0 = 3\left(\cos\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 3,$$

$$\alpha_1 = 3\left(\cos\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\alpha_2 = 3\left(\cos\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right),$$

$$\beta_0 = (-1)\left(\cos\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = -1,$$

$$\beta_1 = (-1)\left(\cos\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = (-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\beta_2 = (-1)\left(\cos\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{0+2\cdot 2\cdot\pi}{3}\right) = (-1)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Значения корней выбираются, чтобы выполнялось условие $\alpha_i\beta_j = -\frac{p}{q}$. Тогда

$$y_1 = 3 - 1 = 2,$$

$$y_2 = 3\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) + (-1)\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ (-1)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + 2\sqrt{3}i,$$

$$y_2 = 3\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) + (-1)\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) +$$

$$+ (-1)\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - 2\sqrt{3}i.$$

Делая обратную замену, находим $x_1 = 2 + 2 = 4$, $x_2 = 1 + 2\sqrt{3}i$, $x_3 = 1 - 2\sqrt{3}i$.

Способ Феррари

Рассмотрим уравнение

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \qquad (8)$$

Подстановкой $x = y - \frac{a}{4}$ уравнением (8) приведем к виду:

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0. \qquad (9)$$

Для того чтобы найти, чему равны коэффициенты p, q, r, представим выражение в левой части уравнения (9) в виде произведения двух квадратных трехчленов:

$$y^4 + py^2 + qy + r = (y^2 + \alpha y + \beta + \gamma)\cdot(y^2 - \alpha y + \beta - \gamma). \qquad (10)$$

Перемножив квадратные трехчлены и произведя преобразования, получим следующие уравнения:

$$y^4+\left(2\beta-\alpha^2\right)y^2-2\alpha\gamma y+\beta^2-\gamma^2=0. \qquad (11)$$

Уравнения (9) и (11) тождественны, следовательно, коэффициенты при равных степенях неизвестного y равны, что позволяет составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2\beta-\alpha^2=p \\ -2\alpha\gamma=q \\ \beta^2-\gamma^2=r. \end{cases} \qquad (12)$$

Из первого уравнения системы выразим коэффициент β: $\beta=\left(p+\alpha^2\right)/2$. Из второго уравнения выразим коэффициент γ: $y=-\dfrac{q}{2\alpha}$. Подставив полученные выражения для β и γ в третье уравнение системы, получим $\left(\dfrac{p+\alpha^2}{2}\right)^2-\left(-\dfrac{q}{2\alpha}\right)^2=r,\quad \dfrac{p^2+2p\alpha^2+\alpha^4}{4}-\dfrac{q^2}{4\alpha^2}=r$. Произведя преобразования, придем к уравнению $\alpha^6+2p\alpha^4+\left(p^2-4r\right)\alpha^2-q^2=0$, которое сводится к кубическому (кубической резольвенте) подстановкой $\alpha^2=t$:

$$t^3+2pt^2+\left(p^2-4r\right)t-q^2=0. \qquad (13)$$

Решив данное уравнение, найдем значение коэффициентов α,β,γ:

$$\alpha=\pm\sqrt{t},\beta=(p+t)/2,\ \gamma=-q/\left(2\sqrt{t}\right). \qquad (14)$$

Теперь возможно найти значение коэффициентов при степенях y в выражении (10):

$$\alpha=\pm\sqrt{t_1},\beta+\gamma=\frac{p+t_1-q/\sqrt{t_1}}{2},\beta-\gamma=\frac{p+t_1+q/\sqrt{t_1}}{2},$$

где t_1 – действительный положительный корень уравнения (13).

Таким образом, доказано, что уравнение (9) может быть разложено на два квадратных уравнения:

$$y^2+\sqrt{t_1}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot\left(p+t_1-\frac{q}{\sqrt{t_1}}\right)=0,\quad y^2-\sqrt{t_1}\cdot y+\frac{1}{2}\cdot\left(p+t_1+\frac{q}{\sqrt{t_1}}\right)=0. \qquad (15)$$

Решение этих уравнений дает значение четырех корней уравнения (9).

Пример 3. Решить уравнение $x^4-4x^3+7x^2-2x-5=0$. Полагая $x=y-\dfrac{a}{4}=y+1$, получаем уравнение $y^4+y^2+4y-3=0$. Составим кубическую резольвенту уравнения $t^3+2t^2+13t-16=0$. $t=1$ – корень этого уравнения. Получаем два квадратных уравнения $y^2-y+3=0$ и $y^2+y-1=0$.

Первое уравнение дает корни $y_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{11}}{2}$ на множестве комплексных чисел (на множестве действительных чисел – корней нет).

Корнями второго уравнения будут числа $y_{3,4}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Тогда корнями исходного уравнения являются $x_{1,2}=\dfrac{3\pm i\sqrt{11}}{2}$, $x_{3,4}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Способ Эйлера

Приведем другой способ решения уравнения четвертой степени. Он называется способом Эйлера. В этом случае снова по уравнению (9) находится кубическая резольвента (13) и ищутся ее корни t_1,t_2,t_3. Тогда корни уравнения (9) вычисляются по формулам

$$y_1=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}+\sqrt{t_3}\right),\ y_2=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\right),$$

$$y_3=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\right),\ y_4=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}-\sqrt{t_3}\right).$$

где корни $\sqrt{t_1},\sqrt{t_2},\sqrt{t_3}$ могут быть комплексными числами, а знаки у корней выбираются так, чтобы имело место равенство $\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=-q$.

Пример 4. Решить уравнение $x^4-8x^3+18x^2-27=0$. Полагая $x=y+2$, получаем $y^4-6x^2+8x-3=0$, кубической резольвентой которого является уравнение $t^3-12t^2+48t-64=0$, которое эквивалентно уравнению $(t-4)^3=0$. Корнями последнего уравнения будут числа $t_{1,2,3}=4$. Учитывая, что $\sqrt{t_1}\sqrt{t_2}\sqrt{t_3}=-8$ имеем $\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}=\sqrt{t_3}=-2$. Тогда

$$y_1=\frac{1}{2}(-2-2-2)=-3,\ \ y_2=\frac{1}{2}(-2+2+2)=1,$$

$$y_3=\frac{1}{2}(2-2+2)=1,\ y_4=\frac{1}{2}(2+2-2)=1.$$

Поэтому решением исходного уравнения будут $x_1=-1, x_{2,3,4}=3$.

Схема Горнера

Для отыскания рациональных корней уравнений с целыми коэффициентами можно применить схему Горнера. Вычисления по схеме Горнера заносим в таблицу из двух строк. Слева от таблицы пишем проверяемое число. В первой строке записываем коэффициент исходного уравнения, включая нулевые. Затем в первую ячейку второй строки переписываем число из верхней ячейки, во вторую записываем сумму верхнего числа и предыдущего, умноженного на проверяемое число, и т.д. если в последней ячейке получился нуль, то проверяемое число корень уравнения, а остальные числа – коэффициенты алгебраического уравнения с уменьшенной на 1 степенью. Решая это уравнение, получаем остальные корни [1–3].

Пример 5. Решить уравнение $x^3 + x - 2 = 0$.

1. Находим все целые делители свободного члена: $\pm 1, \pm 2$.

2. Находим все натуральные делители коэффициента при старшем члене: 1.

3. Составим все дроби с найденными возможными значениями числителя и знаменателя, и рациональные корни уравнения ищем среди полученных чисел $\pm 1, \pm 2$.

Проверяем число 1:

4. Слева от таблицы записываем проверяемое число.

5. В первой строке записываем коэффициенты уравнения.

6. Во второй – в первую ячейку сносим верхнее число, а, начиная со второй, записываем сумму предыдущего, умноженного на проверяемое число, и верхнего.

$x = 1$	1	1	–2
	1	2	0

Так как в последней ячейке ноль, то $x_1 = 1$. Остальные корни находим из уравнения $x^2 + x + 2 = 0$. На множестве действительных чисел последнее уравнение не имеет корней, но на множестве комплексных чисел корнями будут $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Таким образом, исходное уравнение на множестве действительных чисел имеет один корень $x_1 = 1$, а на множестве комплексных чисел – три $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А. Сборник заданий по математике: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2015. – 160 с.

2. Голубев А.А. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ – 2017: учебное пособие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2017. – 124 с.

3. Голубев А.А. Практикум по математике для старшей школы: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 140 с.

4. Рогановский Н.М. Методика преподавания математики в средней школе.– Мн: Высшая школа, 1990.

5. Соминский И. С. Элементарная алгебра.– М.: Наука, 1964.

6. Чиркский В.Г. Уравнения элементарной математики. Методы решения.– М.: Наука, 1992.

7. Белкин Л.П., Бахмутский Ю.А. Решение уравнений 3-й и 4-й степеней в радикалах // Математика в школе. 1999. №5.

УДК 372.851

О ПРИЧИНАХ ШКОЛЬНОЙ НЕУСПЕВАЕМОСТИ И НЕКОТОРЫХ ПРИЕМАХ ЕЕ КОРРЕКЦИИ

Юлия Александровна Крылова
МОУ СОШ №20,
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: kua.78@mail.ru

Ключевые слова: *неуспевамость, коррекция, мышление.*

Аннотация. Рассматриваются причины школьной неуспеваемости и возможные способы их устранения

Являясь участниками образовательного процесса, мы постоянно встречаемся с понятием неуспеваемость. Что это такое и возможно ли учителю повысить обучаемость учащихся и снизить количество неуспевающих.

В словаре–справочнике «Дефектология» понятие *неуспеваемость* определяется как не соответствующая нормативным критериям результативность школьного обучения, выступающая следствием неспособности ребенка полноценно освоить учебный материал и выполнять учебные задания.

Проблема школьной неуспеваемости – одна из центральных и злободневных в педагогике. Школьная неуспеваемость может быть следствием причин как психологического характера (неразвитость в познавательной и мотивационных сферах), так и непсихологических (семейно – бытовые условия, педагогическая запущенность, уровень образования родителей). Большое количество причин, которые могут привести к неуспеваемости, затрудняет работу учителя по выявлению и, главное, ее ликвидации. Часто учитель выбирает традиционный способ работы со слабоуспевающими учащимися – дополнительные занятия на повторение пройденного материала. Эта работа требует большой затраты времени и сил. Но в итоге оказывается бесполезной и не дает желаемого результата.

С точки зрения психологии причины неуспеваемости делятся на 2 группы.

1. **Недостатки познавательной деятельности**, которые проявляются в несформированности приемов учебной деятельности, слабом развитии психических процессов, главным образом мыслительной сферы ребенка, неадекватном использовании ребенком своих индивидуально–типологических особенностей.

2. **Недостатки в развитии мотивационной сферы ребенка** выражаются в неразвитости широких социальных мотивов учения, слабых познавательных интересах, неразвитой мотивации достижения успеха, ведущей либо к потере интереса к учебе либо к появлению «односторонних» интересов, а также в отсутствии удовлетворения от преодоления трудностей, получения нужного результата. Другими проявлениями недостатков этой группы являются низкий уровень произвольности, недостаточное развитие волевых качеств, неумение работать и, как следствие, нарушении дисциплины.

Опишем недостатки каждой группы и приведем некоторые возможные способы коррекции.

1 тип. Недостатки познавательной деятельности

а) Несформированность приемов учебной деятельности

Неуспевающие школьники отличаются несфомированностъю правильных приёмов учебной деятельности. Об этих учащихся можно сказать, что они не умеют по–настоящему учиться. Ребёнок, поступивший в школу и столкнувшийся с необходимостью выполнять новую для себя учебную деятельность, часто не в состоянии самостоятельно найти адекватные способы работы. Если его не обучать специально необходимым навыкам и приёмам, он будет пытаться находить их сам, или вообще потеряет интерес к учебе, тогда к началу обучения в среднем звене, мы получим ученика с неправильными и неэффективными способами работы с текстом, выполнения различных упражнений и решения задач. Оставленные без внимания неправильные навыки и приёмы учебной работы, могут закрепиться и привести к стойкому отставанию школьника в учёбе. Нужно установить правильность и разумность способов учебной работы, применяемых учащимся, и при необходимости корректировать эти способы. Необходимо учить умениям планировать работу, выполнять ее в должном темпе и осуществлять контроль.

Комплекс коррекционных воздействий направлен на формирование приемов анализа и синтеза при решении, например, математических задач. С учеником отрабатывается алгоритм, применяемый при решении задачи:

1. Внимательно прочитай задачу.
2. Выдели, что дано, и что надо найти.
3. Определи те величины, которые нужны для решения.
4. Разложи задачу на действия.

Если учащийся знает очередной шаг в решении задачи, то это позволяет ему концентрироваться на достижении цели, т.е. решении задачи.

б) *Недостаточное развитие основных психических процессов* может привести к снижению успеваемости. Эта психологическая причина является более скрытой и менее очевидной. Отсюда возникают трудно выявляемые ошибки и промахи учеников, которые относятся чаще всего к мыслительным приёмам и способам работы, а также к особенностям памяти и внимания. Мышление является важнейшим среди психических процессов, влияющих на обучаемость школьника. Именно недостатки в развитии мышления, а не памяти и внимания, как это обычно считают в школе, являются распространённой психологической причиной неуспеваемости школьников.

В такой ситуации возникают сложности в операциях обобщения, абстрагирования, установления причинно–следственных связей, неумение и нежелание активно мыслить. Низкая концентрация внимания у таких учеников обусловлена тем, что в силу особенностей своего мышления они не вовлечены в активную учебную работу, им трудно в ней участвовать. Поэтому на уроках они часто отвлекаются. Для преодоления неуспеваемости у интеллектуально пассивных школьников необходимо формировать интеллектуальные умения в виде тренировки ряда мыслительных операций: абстрагирования, обобщения, анализа, классификации, сравнения.

2 тип. Недостатки в развитии мотивационной сферы ребенка

Несформированность у школьника положительной, устойчивой мотивации к учебной деятельности может стать ведущей причиной неуспеваемости. Источник активности человека – его потребности. Мотив – побуждение к активности в определенном направлении. Мотивация – это процессы, определяющие движение к поставленной цели, это факторы (внешние и внутренние), влияющие на активность или пассивность учащихся.

Для того чтобы заинтересовать учащихся, необходимо использовать все возможности учебного материала:

создавать проблемные ситуации;

активизировать самостоятельное мышление;

организовывать сотрудничество учащихся на уроке;

проявлять искреннюю заинтересованность в успехах ребят.

В основе неуспеваемости лежит не одна причина, а несколько, и довольно часто они действуют в комплексе. Бывает и так, что на первоначальную причину неуспеваемости ученика наслаиваются новые, вторичные причины как следствие отставания в учебе.

Ниже представлены некоторые приемы и способы, позволяющие в некоторой степени скорректировать развитие психических процессов и неразвитость мотивационной сферы.

Коррекция 1 типа

Для формирования познавательных действий целесообразно научить ученика выделять тип задач, соотносить задачи с ее схемой, анализировать объекты с выделением существенных и несущественных признаков, выделять существенную информацию из текстов разных видов. Вот несколько видов заданий на формирование познавательных УУД:

Упражнение "Самое главное"

Учащиеся быстро и внимательно читают математический текст из учебника. После этого им предлагается просмотреть его еще раз и охарактеризовать тему учебного материала одним словом, придумать название каждой части текста.

Упражнение "Лучший вопрос"

Учащиеся читают текст учебника, после чего каждый должен придумать вопрос к каждой части текста.

Упражнение «Поиск лишнего»

В математическом тексте по теме «Четырехугольники» найди лишнюю информацию.

Упражнение «Найди ошибку»

Обнаружить ошибку в применении «Свойств вычитания натуральных чисел».

1) 45–(25+17)=37
2) 90–67=23
3) 764–(264+40)=460
4) 301–(20+201)=120
5) 56–36–7=13
6) (200+67)–100=33
7) 32+13–5=40
8) 56+8+12–26=50
9) 1200–1100–40=1060
10) 75–31–9+15=50

Упражнения «Смысловое чтение»

Учащимся предлагается прочитать задачу и определить, какие данные есть и какие надо найти. Задачи подходящего содержания можно найти в [1], например,

«В фирме «Эх, прокачу», стоимость поездки на такси (в рублях) длительностью более 5 минут, рассчитывается по формуле $C = 150 + 11(t - 5)$, где t – длительность поездки (в минутах).

Пользуясь этой формулой, рассчитайте стоимость 12–минутной поездки. Ответ дайте в рублях»

Для развития логического мышления можно предложить учащимся выполнить следующие упражнения.

1. Даны числа 1; 10; 6. Какое число лишнее? Предложим учащимся найти несколько решений этой проблемы. Можно предложить аналогичную задачу: числа разбиты на группы, надо указать, по какому признаку числа собраны в группы:

а) 5, 8 и 14, 17, 26, 32
б) 5, 14, 32 и 8, 17, 26
в)5, 17 и 8, 14, 26, 32.

2. Продолжи ряд:

А)1,4,7…
Б) 7,77,777…
В) 1,2,4,5,7…
Г) 107,118,130,143…

Подобные упражнения можно проводить как устный счет.

Полезно применять постепенно усложняющиеся способы работы учащихся, а именно,

репродуктивные – направлены на достижение учащимися результата, максимально близкого к образцу (прочитать, переписать, воспроизвести и т.п.);

мыслительные – способствующие установлению причинно–следственных связей, формированию умений выделять в объекте его составляющие, находить отличия и сходства, делать вывод, выделять общее и существенное;

контролирующие – связаны с умением сверить продукт своей деятельности с образцом и целью, найти ошибку, проверить решение задачи, оценить результат своей деятельности или деятельности других;

продуктивные – связанные с созданием нового продукта: умений придумать вопрос, задачу, математическое выражение;

***преобразующие* –** основаны на умении применять свои знания на практике или в измененной ситуации.

В обучении слабоуспевающих учащихся иногда помогают дифференцированные способы обучения.

Дифференцированный подход может быть осуществлен почти на любом из этапов урока: при закреплении, при проверке домашнего задания, и в самостоятельной работе учащегося.

Дифференцированный подход к обучению предусматривает использование соответствующих дидактических материалов:

- специальных обучающих таблиц, плакатов и схем для самоконтроля,
- карточек – заданий, определяющих условие предлагаемого задания,
- карточек с текстами получаемой информации, сопровождаемой необходимыми разъяснениями, чертежами,
- карточек, в которых показаны образцы того, как следует вести решения,
- карточек–инструкций, в которых даются указания к выполнению заданий.

Для ликвидации пробелов в фактических знаниях можно предложить в 5 – 6 классах вести тетрадь с теорией и разбором сложных заданий, а в 7 – 8 классах ведение тетради дополнить изготовлением карточек с алгоритмами выполнения действий. Контроль усвоения можно проводить в форме тематических зачетов с индивидуальными картами усвоения теории.

Коррекция 2 типа

Одна из главных задач педагога состоит в том, чтобы помочь учащимся осознать необходимость получения новых знаний, развивать у них ответственность и активность. Поэтому, продумывая каждый урок, необходимо предусмотреть возможности для развития их любознательности.

Для коррекции недостатковв торого типа желательно применить следующий комплекс учебно–воспитательных мер, хотя на практике удается использовать только некоторые из них:

1.Формирование устойчивой мотивации достижения успеха возможно с повышением самооценки школьника (тем самым самооценка играет положительную роль в утверждении личности ребенка как школьника в посильных для него видах деятельности).

2. Преодоление неуверенности школьника в себе, т.е. рекомендуется ставить перед учеником такие задачи, которые будут ему посильны, выполнимы и соответствуют его возможностям.

3. Стараться выявить те виды деятельности, в ходе выполнения которых ученик может проявить инициативу и заслужить признание по предмету.

4. Рекомендуется закрепить осознание школьником имеющихся у него достижений и успехов.

5. Полезно поощрять, отличать и фиксировать малейшие удачи ребенка в учебной деятельности (тем самым не дать закрепиться новым неудачам).

6. Подробное обоснование поставленной оценки, а также выделение критериев, по которым идет оценивание, чтобы они были понятны самому ученику.

7. Прописывать какие знания и умения ученик должен получить при изучении каждой темы, какие виды контроля будут на уроках.

8. Наглядное представление результатов учащихся в цвете, в виде таблиц, где красным цветом будут показаны элементы темы, которые он плохо усвоил, а зеленым хорошо усвоенные разделы.

9. Формирование учебных интересов (дополнительный развивающий материал, обращение к непосредственному жизненному опыту, широкое использование собственных наблюдений, использование на уроке наглядного материала).

10. Проведение индивидуальных бесед, обсуждение достижений и промахов. Нужно постоянно интересоваться отношением ученика к процессу и результату своей деятельности

Для мониторинга причин неуспеваемости конкретного учащегося и его успехов, можно предложить педагогам составить план индивидуальной работы и вести карту его выполнения. Такая карта будет полезным источником информации для родителей и администрации.

План индивидуальной работы со слабоуспевающими учащимися

Ф.И.О. ____________________________________

Тема	Формы ликвидации пробелов	Формы контроля	Дата	Результат	Информация родителям

Акцентируя внимание на возможных путях преодоления школьной неуспеваемости, не следует забывать о важности выявления причин неуспеваемости.

Для решения проблемы неуспеваемости надо стараться применять комплексный подход: повышать эффективность каждого урока, формировать познавательный интерес к учению, создавать специальную систему домашних заданий, организовывать индивидуальный подход и усиливать работу с родителями.

Психолого–педагогическая коррекция неуспеваемости учащихся должна проходить под контролем не только учителя–предметника, но и родителей и психолога школы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://www.fipi.ru/ – Федеральная служба по надзору в сфере образования и науки, Федеральное государственное бюджетное научное учреждение «Федеральный институт педагогических измерений».

УДК 37.01

ОБЗОР СОВРЕМЕННЫХ УГРОЗ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ УЧРЕЖДЕНИЯХ: КЛАССИФИКАЦИЯ, ПРИЧИНЫ И СПОСОБЫ УСТРАНЕНИЯ

Александр Валентинович Лобанов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Елена Валерьевна Тишина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Сергей Александрович Желтов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Zheltov.SA@tversu.ru

Ключевые слова: *информационная безопасность (ИБ), интернет-безопасность, вирусы.*

Аннотация. *В настоящей статье рассматриваются основные современные угрозы информационной и программно-информационной безопасности в образовательных учреждениях. Для создания комплекса мер и мероприятий по защите информации в образовательном учреждении обязательно необходимо учитывать возможные угрозы.*

В последние десятилетия изменения в российском образовании были масштабными, подходы в образовании стремительно менялись. Так, на смену традиционному «знаниевому» подходу пришёл «компетентностный».

Информационная компетентность является одной из базовых компетентностей, на формирование которой направлена современная российская система образования, одна из целей образования.

Понятие информационной компетентности тесно связано с суждением «информационная безопасность». Информационную безопасность следует понимать, как «состояние защищенности жизненно важных интересов личности, проявляющееся в умении выявлять и идентифицировать угрозы информационного воздействия и умении скомпенсировать негативные эффекты информационного воздействия» [2]. Средствами информационного воздействия могут быть: телевиденье, литература, искусство, образование, воспитание, личное общение, и в значительной степени средства массовой коммуникации – Интернет.

Информационная безопасность выстраиваться на базе 3-х свойств информации – конфиденциальность, целостность и доступность. Лишь в совокупности этих свойств можно говорить о полноценной защите и информационной безопасности.

Сегодня, термин «информационная безопасность» нередко можно встретить в сфере образования. В любом образовательном учреждении хранится, обрабатывается и используется большой объем информации – это, и персональные данные подростков и сотрудников, и различная конфиденциальная информация по организации, и сведения об обеспечивании образовательного процесса, и иная информация, доступность к которой должен быть ограничен. Важность хранимой информации указывает на то, что обеспечение информационной безопасности в образовательном учреждении должно быть одним из приоритетных направлений работы образовательной организации.

На сегодняшний день компьютер является важнейшим средством обучения, и любое образовательное учреждение обязано защитить учащихся от доступа к негативной информации. «Информационную безопасность образовательного пространства рассматривают, как состояние защищенности персональных данных субъектов образовательного процесса, обучающихся от негативной информации, причиняющей вред их здоровью и развитию, информационных ресурсов, технологий их формирования и использования, а также прав субъектов информационной деятельности» [7].

Рассмотрим более подробно, какие угрозы ИБ существуют непосредственно в образовательном учреждении:

– Несанкционированный доступ к персональным данным, конфиденциальной информации, и программам, хранящим важные документы. Для образовательных учреждений возможна подмена исходных данных в электронных журналах учащихся, личных делах педагогов и слушателей.

– Отрицательное влияние на психику учащегося. Свободный доступ в школе/колледже/институте в Интернет открывает для подростков огромное количество информации, где помимо обучающих и развивающих ресурсов, также присутствуют и ресурсы с нежелательным контентом.

– Чрезмерное использование учащимися социальных сетей, следствием чего является разрушение нормального образовательного процесса обучения.

– Кибертерроризм, как новая форма терроризма, возможна и в образовательных учреждениях. Создание *безопасной информационно-технологической среды* существенно снизит риск кибератаки на объекты образования.

«По данным Microsoft, в 1 квартале 2017 года примерно на 15% компьютеров в России было зафиксировано вредоносное ПО, в мире этот показатель составил 9%. Годом ранее было отмечено почти в два раза больше подобных инцидентов: 27,2% – в России, 18,3% – в мире. Количество атак на облачные сервисы по всему миру увеличилось на 300%» [5].

Чтобы знать, какого рода опасности могут угрожать данным, полезно узнать, какие бывают вредоносные программы и как они работают. В целом все вредоносные программы можно разделить на следующие классы [6]:

Вирусы (Viruses): программы, которые заражают другие программы – добавляют в них свой код, чтобы получить управление при запуске зараженных файлов.

Черви (Worms): данная категория вредоносных программ для распространения использует сетевые ресурсы. Название этого класса было дано исходя из способности червей «переползать» с компьютера на компьютер, используя сети, электронную почту и другие информационные каналы. Также благодаря этому черви обладают исключительно высокой скоростью распространения.

Троянские программы (Trojans): программы, которые выполняют на поражаемых компьютерах несанкционированные пользователем действия, т.е. в зависимости от каких-либо условий уничтожают информацию на дисках, приводят систему к «зависанию», воруют конфиденциальную информацию и т.д. Данный класс вредоносных программ не является вирусом в традиционном понимании этого термина (т.е. не заражает другие программы или данные); троянские программы не способны самостоятельно проникать на компьютеры и распространяются злоумышленниками под видом «полезного» программного обеспечения. При этом вред, наносимый ими, может во много раз превышать потери от традиционной вирусной атаки.

Программы-шпионы: программное обеспечение, позволяющее собирать сведения об отдельно взятом пользователе или организации без их ведома.

Как правило, целью программ-шпионов является:

- сбор информации о содержании жесткого диска; в этом случает чаще всего речь идет о сканировании некоторых каталогов и системного реестра с целью составления списка программного обеспечения, установленного на компьютере;
- отслеживание действий пользователя на компьютере;
- сбор информации о качестве связи, способе подключения, скорости модема и т.д.

Однако данные программы не ограничиваются только сбором информации, они представляют реальную угрозу безопасности. Как минимум две из известных программ – Gator и eZula – позволяют злоумышленнику не просто собирать информацию, но и контролировать чужой компьютер. Другим примером программ-шпионов являются программы, выстраивающиеся в установленный на компьютере браузер и перенаправляющие трафик.

Одной из разновидностей программ-шпионов являются фишинг-рассылки.

Фишинг (Phishing) – почтовая рассылка, целью которой является получение от пользователя конфиденциальной информации, как правило, финансового характера. Такие письма составляются таким образом, чтобы максимально походить на информационные письма от банковских структур, компаний известных брендов. Письма содержат ссылку на заведомо ложный сайт, где пользователю предлагается ввести, например, номер своей кредитной карты и другую конфиденциальную информацию.

Программы-рекламы (Adware): программный код, без ведома пользователя, включенный в программное обеспечение с целью демонстрации рекламных объявлений. Как правило, программы-рекламы встроены в программное обеспечение, распространяющееся бесплатно. Реклама располагается в рабочем интерфейсе. Зачастую данные программы также собирают и переправляют своему разработчику персональную информацию о пользователе.

Потенциально опасные приложения (Riskware): программное обеспечение, не являющееся вирусом, но содержащее в себе потенциальную угрозу. При некоторых условиях наличие таких программ на компьютере подвергает ваши данные риску.

Программы-шутки (Jokes): программное обеспечение, не причиняющее компьютеру какого-либо прямого вреда, но выводящее сообщения о том, что такой вред уже причинен, либо будет причинен при каких-либо условиях. Такие программы часто предупреждают пользователя о несуществующей опасности, например, выводят сообщения о форматировании диска (хотя никакого форматирования на самом деле не происходит), обнаруживают вирусы в незараженных файлах и т.д.

Программы-маскировщики (Rootkit): это утилиты, используемые для сокрытия вредоносной активности. Они маскируют вредоносные программы, чтобы избежать их обнаружения антивирусными программами. Rootkit'ы также могут модифицировать операционную систему на компьютере и заменять основные ее функции, чтобы скрыть свое собственное присутствие и действия, которые предпринимает злоумышленник на зараженном компьютере.

Прочие опасные программы: разнообразные программы, которые разработаны для создания других вредоносных программ, организации DoS-атак на удаленные сервера, взлома других компьютеров и т.п. К таким программам относятся хакерские утилиты (Hack Tools), конструкторы вирусов и т.д.

Спам (Spam): анонимная, массовая почтовая корреспонденция нежелательного характера. Так, спамом являются рассылки политического и агитационного характера, письма, призывающие помочь кому-нибудь. Отдельную категорию спама составляют письма с предложениями обналичить большую сумму денег или вовлекающие в финансовые пирамиды, а также письма, направленные на кражу паролей и номеров кредитных карт, письма с просьбой переслать знакомым (например, письма счастья) и т.п. Спам существенно повышает нагрузку на почтовые сервера и повышает риск потери информации, важной для пользователя.

Среди источников проникновения вредоносных программ наиболее опасными являются [6]:

1. Интернет. Глобальная информационная сеть является основным источником распространения любого рода вредоносных программ. Зловредное ПО может попасть на компьютер при следующих действиях пользователя:

- При посещении сайта, содержащего зловредный код.
- При скачивании с сайтов зловредного ПО, маскирующегося под «KeyGen», «крэки», «патчи» и т.д.
- При скачивании через peer-to-peer сеть (например, торрент трекеры).

2. Уязвимости в программном обеспечении. Так называемые эксплойты («дыры») в программном обеспечении являются основным источником хакерских атак. Уязвимости позволяют получить хакеру, удаленный доступ к вашему компьютеру, а, следовательно, к вашим данным, к доступным вам ресурсам локальной сети, к другим источникам информации.

3. Электронная почта. Почтовые сообщения, могут содержать в себе вирусы. Вредоносные программы могут находиться как во вложении письма, так и в его теле. При открытии письма или при сохранении на диск вложенного в письмо файла вы можете заразить данные на вашем компьютере.

4. Внешние носители информации. Для передачи информации широко используются USB-флеш-накопитель, SD карты памяти, а также сетевые папки. Запуская какой-либо файл, расположенный на внешнем носителе, вы можете поразить данные на вашем компьютере вирусом и, незаметно для себя, распространить вирус на диски вашего компьютера.

5. Пользователи. Доверчивые пользователи сами устанавливают безобидные на первый взгляд программы, заражая таким образом свой компьютер. Этот метод называется социальной инженерией – вирусописатели добиваются того, чтобы жертва сама установила зловредное ПО при помощи различных уловок. Даже просто найденная «флешка» вызывает желание посмотреть какая информация находиться на ней.

6. «Облачные» сервисы. В последнее время популярность облачных сервисов увеличилось. Увеличилось и количество атак на них. «По данным исследования Microsoft, за 1 квартал 2017 года в мире было зафиксировано в 4 раза больше угроз безопасности, чем за аналогичный период годом ранее. Количество попыток входа в учетную запись Microsoft с вредоносных IP-адресов увеличилось на 44%, став самой главной причиной заражения облачных сервисов (51%). Также наиболее распространены атаки через: протокол удалённого доступа (23%), спам (19%), сканирование портов (3,7%), протокол SSH* (1,7%) и другие. Инструменты защиты Microsoft каждый день автоматически обнаруживают миллионы попыток взлома паролей и блокируют их» [5].

При исследовании информационных технологий в образовательном учреждении, обучающиеся получают свободный допуск к неограниченному объему информации. Слабо и недостаточно организованный контроль педагога на уроке, дает возможность учащемуся самостоятельно исследовать поток информации, предоставляемый просторами глобальной сети Интернет.

Все вышеперечисленные угрозы являются потенциально опасными для любого образовательного учреждения. Наличие Интернета в организации уже является угрозой для ее информационной безопасности, и указывает на необходимость построения *полноценной системы защиты информации* от существующих виртуальных угроз и создании *единой политики обеспечения информационной безопасности* в образовательном учреждении.

Одним из полезных ресурсов для получения всей необходимой информации по программно-информационной безопасности является сайт www.comss.ru. На этом портале собрана вся полезная информация: обзоры современных угроз и эффективные решения для предотвращения и устранения этих информационных угроз.

Но одна лишь борьба с вредоносными программами – это малая толика информационной безопасности в образовательном учреждении.

Важно отметить, что часто учащиеся сами не понимают опасность, которую могут встретить в интернете. Одной из проблем является отсутствие уроков информационной безопасности или минимальный объём часов, отводимых для этого. Часто учащиеся даже не понимают термина медиабезопасность.

«Представляется, что отказ от вредной информации должен быть осознанным выбором ребёнка, сформированным под влиянием просветительской деятельности, медиабезопасности» [8].

С какими психологическими угрозами чаще всего приходится сталкиваться подросткам?

- Кибербуллинг (или киберунижение) – иначе говоря, «травля» в сети.
- Сексуальные домогательства.
- Пропаганда антиобщественных ценностей (доведение до суицида, вовлечение в преступные группы, секты, расизм и национализм и пр.).
- Пропаганда и продажа наркотических веществ.
- Интернет-мошенничество.
- Интернет-зависимость, азартные игры.

Специалисты предлагают ряд решений проблемы медиабезопасности: например, посещение детьми определённого перечня безопасных сайтов, интернет-фильтр. Однако все указанные меры не должны быть скрытыми от школьника. Так, психолог Андрей Березников отмечает: «Чтобы запреты не вызвали негативного отклика (особенно когда речь идет о подростках), нужно все ограничения проговаривать в устной беседе с ребенком» [4].

Нужно отметить, что только запрет не является решением проблемы. Часто школьные психологи выделяют три типа учащихся, пользующихся Интернетом: «ботаники» (интересуются только полезной информацией), «потребители онлайн контента» (ищут общения, наиболее часто используемые ими ресурсы — это социальные сети и всевозможные чаты), а также «универсалы» (совмещают все виды сетевой активности). Запреты действуют лишь на первую группу, но ей они и не нужны. У остальных же категорий радикальные меры вызывают противоречие и подрывают доверие к взрослым [4].

Важно отметить, что специалистами предлагается и такой вариант, как список определённых правил пользования Интернетом для ребёнка. Один из них приводит В.В. Гафнер, его список состоит из следующих положений: «1. Контролировать расписание, время подключения и способ использования им Интернета. 2. Ребёнок должен понять, что его виртуальный собеседник может выдавать себя за другого. 3. Не разрешать ребенку предоставлять личную информацию через Интернет. 4. Оградить ребёнка от ненадлежащего веб-содержимого. 5. Установить на компьютер антивирусную программу» [1]. Кроме того, важным представляется знакомство учащихся с полезными сайтами. Так, многих выпускников могут заинтересовать сайты вузов, в которые они планируют поступать. Сегодня сайты вузов приобретают особое значение. Они становятся таким же источником информации, как дни открытых дверей, или информация, полученная от официальных лиц. Наглядным примером может служить сайт Тверского государственного университета http://university.tversu.ru. И, в частности, отдельный портал приемной комиссии ТвГУ http://priem.tversu.ru.

Также важно отметить, что интернет-безопасность должна быть частью образования не только школьников, но и родителей. Зачастую родители не знают об опасностях, которые ребёнок может встретить в Интернете. Не следят за временем и деятельностью детей в сети, не знают о программах *родительского контроля* и *программ фильтров для сайтов*. Часто родители считают, что интернет-образованием должна заниматься школа, однако это далеко не так. «Каждая семья должна продумать собственную стратегию родительской помощи в Интернете, состоящую из следующих элементов: *правила и ограничения, личный контроль, использование технических средств защиты, личное активное участие в виртуальной жизни детей»* [3, 4]. Таким образом, интернет-безопасность школьников должна занимать важное место, воспитывая личность, не только защищённую от негативной интернет-информации, но и способную делать собственный правильный выбор.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гафнер В. В. Информационная безопасность: учеб. пособие. – Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 324 с.

2. Малых Т. А. Педагогические условия развития информационной безопасности младшего школьника.: автореф.дисс… канд. пед. наук: 13.00.01. / Малых Татьяна Александровна. – Иркутск: 2007.

3. Обухович В. В. Интернет-безопасность в контексте системы среднего образования // Педагогика Высшей школы. Научный журнал. Спецвыпуск. Сборник материалов научно-практической конференции с международным участием «Современное образование в области безопасности жизнедеятельности: теория, методика и практика». – 2015. – № 3.1 (3.1). – С. 120–121.

4. Обухович В. В. Интернет-безопасность школьников // Педагогика высшей школы. – 2016. – №3.1. – С. 149–151.

5. Официальный сайт «Microsoft» [Электронный ресурс] / Security Intelligence Report 2017: Microsoft представила отчет по угрозам информационной безопасности. – Режим доступа: https://news.microsoft.com/ru-ru/security-intelligence-report-2017-microsoft-predstavila-otchet-po-ugrozam-informatsionnoj-bezopasnosti – Дата обращения: 1.04.2018. – Загл. с экрана.

6. Официальный сайт «Лаборатория Касперского» [Электронный ресурс] / Виды известных угроз. - Режим доступа: https://support.kaspersky.ru/614 – Дата обращения: 1.04.2018. – Загл. с экрана.

7. Федеральный закон «Об информации, информационных технологиях и о защите информации» от 27.07.2006 N 149-ФЗ [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_61798/. – Дата обращения: 01.04.2018. – Загл. с экрана.

8. Чтобы дети не угодили в сети [Электронный ресурс] // Официальный сайт Уполномоченного по правам ребенка в Санкт-Петербурге. – Режим доступа: http://spbdeti.org/id2758. – Дата обращения: 1.04.2018. – Загл. с экрана.

УДК 372.862

РАЗБОР ЗАДАНИЯ ЕГЭ ПО ИНФОРМАТИКЕ ВЫСОКОГО УРОВНЯ СЛОЖНОСТИ, ПРОВЕРЯЮЩЕГО УМЕНИЕ СТРОИТЬ И ПРЕОБРАЗОВЫВАТЬ ЛОГИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ

Елена Валерьевна Тишина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Александр Валентинович Лобанов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Ключевые слова: *ЕГЭ по информатике, задание 23, система логических уравнений.*

Аннотация. В работе рассматривается методы решения задания № 23 из ЕГЭ по предмету информатика.

Предлагается к рассмотрению задание № 23. Это задание высокого уровня сложности. Примерное время выполнения задания 10 (±5) минут. На основании методических рекомендаций для учителей, подготовленных на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2017 года, задание № 23 вызывают у учащихся наибольшую трудность [1].

Пример задания (демонстрационный вариант ЕГЭ 2018 г.):

> Сколько существует различных наборов значений логических переменных x1, x2, ...x7, y1, y2, ... y7, которые удовлетворяют всем перечисленным ниже условиям?
>
> $(\neg x1 \lor y1) \to (\neg x2 \land y2) = 1$
> $(\neg x2 \lor y2) \to (\neg x3 \land y3) = 1$
> …
> $(\neg x6 \lor y6) \to (\neg x7 \land y7) = 1$
>
> В ответе **не нужно** перечислять все различные наборы значений переменных x1, x2, ...x7, y1, y2, ...y7, при которых выполнена данная система равенств. В качестве ответа Вам нужно указать количество таких наборов.

Для выполнения задач этого типа задания ЕГЭ необходимо повторить следующие темы и понятия:

- Построение таблиц истинности
- Законы алгебры логики и правила преобразования логических выражений (включая выполнение замены переменных)
- Основы комбинаторики для подсчёта количества двоичных наборов.

В банке заданий существует большое количество разнообразных задач по этому типу и невозможно подобрать какое-то одно конкретное стандартное решение, часто в таких задачах требуется сообразить, догадаться о способе решения. Для выполнения этого задания ученик должен провести исследование системы логических выражений. На данный момент сообществом учителей информатики рассматриваются следующие методики исследования и решения задач данного типа [2]:

- метод построения отображений,
- метод решения парами,

- метод решения с помощью битовых цепочек,
- метод построения неполного дерева решения или части неполного дерева с дальнейшим анализом.

На сайте К.Ю. Полякова www.kpolyakov.spb.ru [2] представлено и разобрано большое количество задач. Решения почти всех задач представлены несколькими методами, что демонстрирует сложность освоения данными методиками.

Рассмотрим 3 из них. Рекомендуем в таком же порядке их изучать:

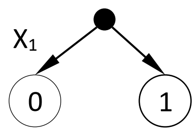
- метод построения неполного дерева решения или части неполного дерева с дальнейшим анализом,
- метод решения парами,
- метод построения отображений.

Метод построения дерева решений полезен в самом начале изучения. Здесь необходимо выписать все решения системы начиная с первого уравнения, добавляя новый уровень для каждого следующего уравнения системы. Это немного однообразно и утомительно, но и крайне полезно. Советуем для объяснения этого подхода выбирать задачи с небольшим количеством логических переменных. Кроме того, умение строить дерево пригодится для методов парами и отображения.

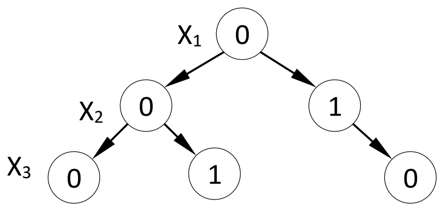
Решим задачу методом построения дерева:

> Сколько различных решений имеет система уравнений
> $(X1 \equiv X2) \vee (X1 \equiv X3) = 1$
> $(X2 \equiv X3) \vee (X2 \equiv X4) = 1$
> ...
> $(X7 \equiv X8) \vee (X7 \equiv X9) = 1$
> $(X8 \equiv X9) \vee (X8 \equiv X10) = 0$

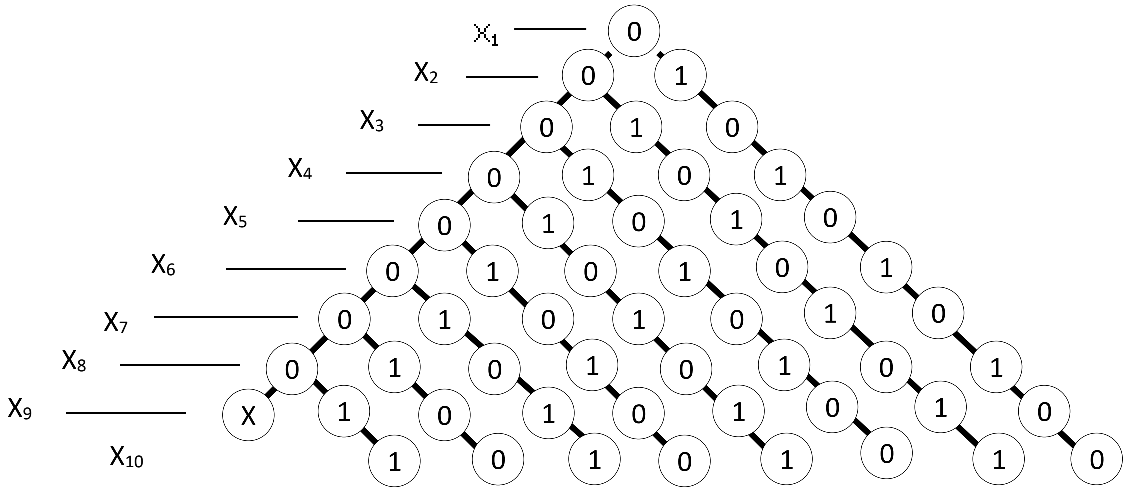
1. Исследуя первое уравнение, можно сделать вывод, что логическая переменная X1 может принимать два значения 0 или 1. (можно начинать с любой другой переменной)



2. На основе таблиц истинности для логических операций дизъюнкции и эквиваленции продолжим «растить» дерево для первого уравнения при X1= 0, исключая ветки на 0.



3. И так далее для всех уравнений. Для последнего уравнения $X8 \equiv X9 = 0$ и $X8 \equiv X10 = 0$, поэтому из решения убираем ветвь помеченную X



Т.о., для X1 = 0 количество решений 8. Строим дерево для X1 = 1, количество решений будет также 8. Ответ: 16 (8+8).

Решим задачу методом «парами»**:**

Сколько различных решений имеет система уравнений

$(X1 \vee X2) \to (X3 \vee X4) = 1$

$(X3 \vee X4) \to (X5 \vee X6) = 1$

$(X5 \vee X6) \to (X7 \vee X8) = 1$

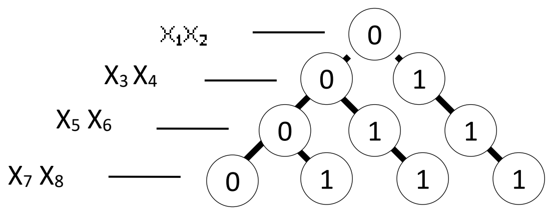
Метод решения парами сводится к упрощению логических выражений заменой части выражения на одну логическую переменную с последующим решением «деревом» и обратной заменой. В этой задаче есть пары связанных между собой переменных (X1, X2), (X3, X4), ... (X7, X8). Можно сделать замену: пару $(X1 \vee X2)$ заменить на одну переменную, назовем её - X1X2. Можно назвать переменную более коротким именем, например, T1. Но имя X1X2 удобно для подсчета решений. Пару $(X3 \vee X4)$ заменить на X3X4, пару $(X5 \vee X6)$ заменить на X5X6, пару $(X7 \vee X8)$ заменить на X7X8. Получим систему:

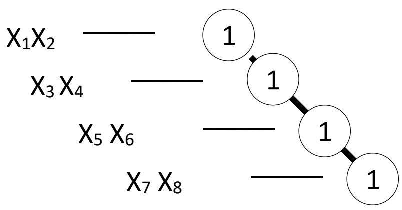
$X1X2 \to X3X4 = 1$

$X3X4 \to X5X6 = 1$

$X5X6 \to X7X8 = 1$

Построим дерево решений относительно этих пар:





Получили решение относительно пар. Всего пять решений, выпишем в таблицу решения по ветвям:

X1X2	X3X4	X5X6	X7X8	Подсчёт числа решений
0	0	0	0	1*1*1*1 = 1
0	0	0	1	1*1*1*3 = 3
0	0	1	1	1*1*3*3 = 9
0	1	1	1	1*3*3*3 = 27
1	1	1	1	3*3*3*3 = 81

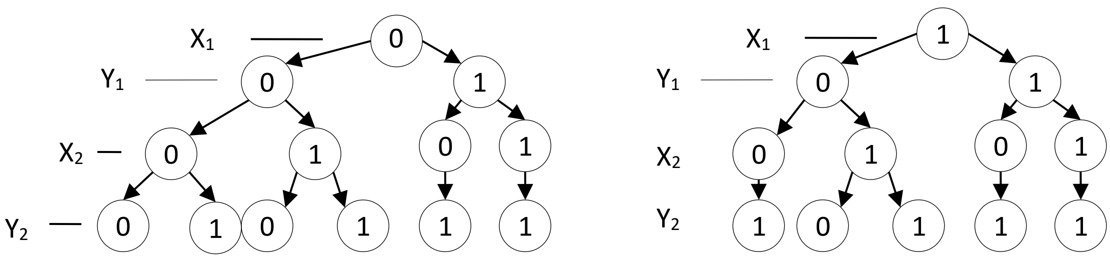
Вспоминаем про замены, что каждая пара это операция дизъюнкция. Дизъюнкция на 0 имеет одно решение, а на 1 имеет три решения.
Ответ: 121 (1+3+9+27+81).

Решим задачу методом отображений (метод предложен Е.А.Мирончик) [4]:

> Сколько различных решений имеет система уравнений
> $(x1 \to (x2 \lor y2)) \land (y1 \to y2) = 1$
> $(x2 \to (x3 \lor y3)) \land (y2 \to y3) = 1$
> ...
> $(x6 \to (x7 \lor y7)) \land (y6 \to y7) = 1$

Все уравнения системы имеют одинаковую структуру (тип). В каждом уравнении по четыре переменных. Если рассмотреть два соседних уравнения, можно заметить, что в них есть общие переменные. Например, для первого и второго уравнений общие переменные: x2 и y2. Если для первого уравнения найти количество пар (x1, y1), то с помощью дерева можно найти количество соответствующих пар (x2, y2). Так как уравнения одинаковые, пара (x2, y2) определяет пару (x3, y3) также как пара (x1, y1) определяет пару (x2, y2). То для второго уравнения по количеству пар (x2, y2) можно найти количество соответствующих пар (x3, y3). И так далее до последнего уравнения системы.

Построим дерево для первого уравнения:



Порядок переменных в дереве можно выбрать любой, но такой удобнее для решения, т.к. пара (x1, y1) определяет пару (x2, y2). Отметим как каждая пара (x1, y1) определяет пару (x2, y2).

x1, y1	x2, y2
00	00 01 10 11

x1, y1	x2, y2
01	01 11

x1, y1	x2, y2
10	01 10 11

x1, y1	x2, y2
11	01 11

Построим таблицу для вычисления количества пар для каждого уравнения:

Пары	Количество пар						
	x1, y1	x2, y2	x3, y3	x4, y4	x5, y5	x6, y6	x7, y7
00	1	1	1	1	1	1	1
01	1	4	11	26	57	120	247
10	1	2	3	4	5	6	7
11	1	4	11	26	57	120	247

В таблице для каждой пары подсчитано, сколько значений 00, 01, 10 и 11 она принимает. Например, пара (x2, y2) имеет одно значений 00, четыре – 01, два – 10 и четыре – 11 (в этом можно убедиться, по построенному выше дереву). Таким образом, сумма значений пар в столбце (x7, y7) означает, сколько решений будет иметь данная система уравнений.

Ответ: 502 (1 + 247 + 7 + 247).

Еще один важный момент: каждая ячейка таблицы, находящаяся на пересечении строки и столбца, показывает какие именно значения у переменных данной пары. Например, ячейка на пересечении строки «01» и столбца «x7y7» со значение 247, демонстрирует, что в ней переменная x7 принимает значение «0», а y7 – значение «1». Это понимать важно, если к системе добавляется дополнительные условия, например:

$(x1 \rightarrow (x2 \vee y2)) \wedge (y1 \rightarrow y2) = 1$
$(x2 \rightarrow (x3 \vee y3)) \wedge (y2 \rightarrow y3) = 1$
...
$(x6 \rightarrow (x7 \vee y7)) \wedge (y6 \rightarrow y7) = 1$
$x7 = 1$

или

$(x1 \rightarrow (x2 \vee y2)) \wedge (y1 \rightarrow y2) = 1$
$(x2 \rightarrow (x3 \vee y3)) \wedge (y2 \rightarrow y3) = 1$
...
$(x6 \rightarrow (x7 \vee y7)) \wedge (y6 \rightarrow y7) = 1$
$x7 \vee \neg y7 = 1$

В этом случае по последнему столбцу с парой «x7y7» определяем, что x7 принимает значение «1» в строке «10» и «11». Ответ: 7 + 247 = 254

В этом случае нас интересуют строки со значениями «00», «10» и «11»
Ответ: 1 + 7 + 247 = 255

Предлагаем рекомендации по решению задачи:

Первый этап – преобразовать уравнения к более компактному виду, если это возможно и имеет смысл. Приведем несколько полезных свойств логических операций [3]:

$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = x \vee (y \wedge z)$,
$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = x \wedge (y \vee z)$
$\neg x \vee y = x \rightarrow y$
$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = x \equiv y$
$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee x) = x \equiv y$
$x \wedge y \vee \neg x \wedge \neg y = x \equiv y$

Второй этап – посмотреть, можно ли систему решить методом «парами».

Третий этап – если парами решить не удаётся, то пробуем решить методом «отображения».

Четвертый этап – если методом «отображений» решить не удаётся, (например, система содержит уравнения разного типа) то решаем методом «построения дерева».

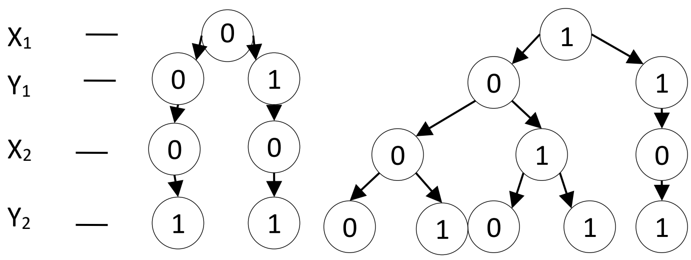
Решим задачу (демонстрационный вариант ЕГЭ 2018 г.):

> Сколько различных решений имеет система уравнений?
> (¬x1 ∨ y1) → (¬x2 ∧ y2) = 1
> (¬x2 ∨ y2) → (¬x3 ∧ y3) = 1
> …
> (¬x6 ∨ y6) → (¬x7 ∧ y7) = 1

Первый этап преобразования уравнений вполне возможен, но не уменьшит количества операций, поэтому не имеет смысла.

Второй этап, пары одинаковых переменных (x2, y2), (x3, y3), … (x6, y6) имеют разную структуру, поэтому способом замены пар с последующим решением метод «парами» здесь возможен, но последующий подсчёт решений приведёт к излишнему усложнению.

Третий этап – решаем методом «отображений». Строим дерево для первого уравнения:



Построим таблицу для вычисления количества пар для каждого уравнения:

Пары	Количество пар						
	x1, y1	x2, y2	x3, y3	x4, y4	x5, y5	x6, y6	x7, y7
00	1	1	1	1	1	1	1
01	1	4	7	10	13	16	19
10	1	1	1	1	1	1	1
11	1	1	1	1	1	1	1

Ответ: 22 (1 + 19 + 1 + 1).

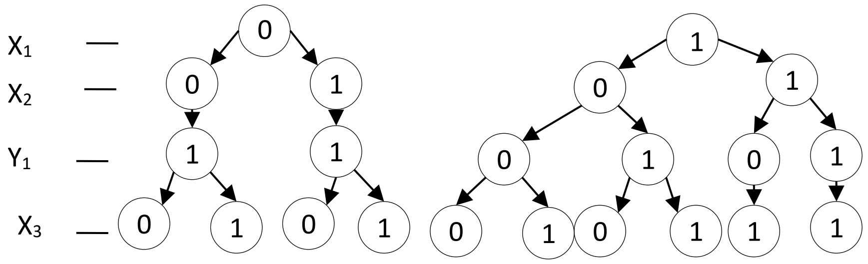
Решим задачу:

> Сколько различных решений имеет система уравнений?
> (x1 ∧ x2 → x3) ∧ (x1 ∨ y1) = 1
> (x2 ∧ x3 → x4) ∧ (x2 ∨ y2) = 1
> …
> (x5 ∧ x6 → x7) ∧ (x5 ∨ y5) = 1
> x6 ∨ y6 = 1

Первый этап преобразования уравнений вполне возможен, но не уменьшит количества операций, поэтому не имеет смысла.

Второй этап, соответствующих друг другу пар нет.

Третий этап – решаем методом «отображений». Строим дерево для первого уравнения:



Построим таблицу. Переменные Y1, Y2, … Y5 не участвуют в отображении, а только удваивают количество пар:

Пары	Количество пар						
	x1, x2	x2, x3	x3, x4	x4, x5	x5, x6	x6, x7	x6, y6
00	1	3	5	11	21	43	43
01	1	3	5	11	21	43	43
10	1 * 2	1 * 2	3 * 2	5 * 2	11 * 2	21	21 * 2
11	1 * 2	3 * 2	9 * 2	23 * 2	57 * 2	135	135 * 2

Ответ: 398 (43 + 43 + 21 * 2 + 135 * 2)

Решим задачу:

Сколько различных решений имеет система уравнений?

$(x1 \lor x2) \land (x1 \land x2 \to y1) = 1$

$(x2 \lor x3) \land (x2 \land x3 \to y2) = 1$

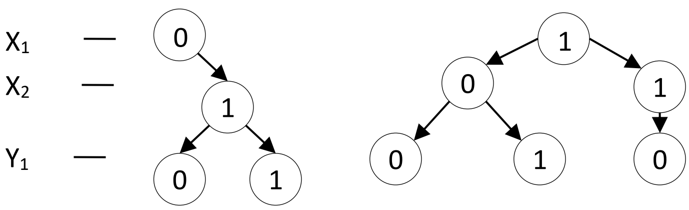
$(x3 \lor x4) \land (x3 \land x4 \to y3) = 1$

$x4 \lor y4 = 1$

Первый этап преобразования уравнений вполне возможен, но не уменьшит количества операций, поэтому не имеет смысла.

Второй этап, пар нет.

Третий этап – решаем методом «отображений». Строим дерево для первого уравнения:



Здесь пар нет, т.к. для первого и второго уравнения общими является переменная x2, а для второго и третьего – x3, поэтому здесь переменная x1 отображается на x2, x2 на x3, x3 на x4. Построим таблицу:

	Количество решений				
	x1	x2	x3	x4	y4
0	1	2	6	14	14
1	1	3	7	19	38

Переменные Y1, Y2, Y3 не участвуют в отображении, а только увеличивают количество решений т.о. «0» отображается на «1» 2 раза, а «1» – на «0» два раза и на «1» один раз.

Ответ: 52 (14 + 38).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крылов С. С. ФИПИ. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2017 года по ИНФОРМАТИКЕ и ИКТ. [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://www.fipi.ru/sites/default/files/document/1503666633/informatika_2017.pdf – Дата обращения: 08.04.2018. – Загл. с экрана.

2. Поляков К. Ю. ЕГЭ по информатике (2018). [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://kpolyakov.spb.ru/school/ege.htm – Дата обращения: 08.04.2018. – Загл. с экрана.

3. Википедиа, Алгебра логики (алгебра высказываний) [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Алгебра_логики – Дата обращения: 08.04.2018. – Загл. с экрана.

4. Мирончик Е. А. Метод отображения // Информатика. – 2013. – № 10. -С. 18-26.

УДК 159.9.072

ГЕОМЕТРИЯ НА СЛУЖБЕ У ПСИХОЛОГИИ

Елена Владимировна Лобанова
Муниципальное образовательное учреждение
Средняя общеобразовательная школа №7, Тверь
E-mail: evlobanova@mail.ru

Ключевые слова: *психогеометрия, геометрические фигуры, изучение личности.*

Аннотация. Наверняка вы замечали, как, разговаривая по телефону или слушая лекцию, пытаетесь скоротать время, рисуя на полях тетради или блокнота разные узоры. Обычно человек рисует такие изображения неосознанно. Многие годы психологи собирали и анализировали изображения, сделанные людьми в процессе телефонных разговоров, в ходе совещаний, на лекциях, в процессе ожидания и т.п. Вывод, к которому в итоге пришли ученые, таков: бессознательные рисунки, сделанные человеком, выражают его внутренний мир человека и его чувства, свидетельствуют об его эмоциональном состоянии, привычках, стиле жизни и отношению к происходящему вокруг. Вот и получается, что эти самые, на первый взгляд, бесполезные каракули могут сказать о нас больше, чем мы сами. Для человека нет интереснее объекта, чем сам человек.

Почему мы поступаем именно так, а не иначе, выбираем именно эти ценности, придерживаемся именно такого стиля межличностных отношений? Для эффективного общения с людьми, надо знать людей. Надо знать их психологию, возможные реакции и тогда легче планировать свои действия, слова, вообще отношения. Чтобы в классе образовался слаженный коллектив, который будет успешно решать любые задачи, необходимо построить фундамент отношений. Существует много различных методик, направленных на изучение личности. В последнее время в психологических исследованиях и особенно диагностике часто используются графические методы.

В моем классе было проведено запланированное тестирование школьным психологом на выявление типа личности. Участникам тестирования был выдан опросник адаптированного модифицированного варианта детского личностного опросника Кеттелла [1]. Опросник Кеттелла в настоящее время наиболее часто используется в экспериментальных исследованиях личности, и получил достаточно высокую оценку у психологов-практиков.

Меня, как классного руководителя и учителя математики, заинтересовал вопрос: «Находит ли геометрия свое воплощение в психологии: есть ли связь между поведением человека и геометрическими фигурами, которые он рисует?».

Оказалось, что существует простая и наглядная система психологического анализа личности, которая настолько наглядна и практична, что ее может без особого труда применять в своей повседневной жизни каждый человек. Она была создана в 1989 году доктором психологии, специалистом по социально-психологической подготовке управленческих кадров Сьюзен Деллингер. Эта практическая система психологического анализа личности – психогеометрия – позволяет отнести человека к одному из типов личности. В Америке эту методику используют уже более 500 компаний, при психологическом анализе личности во время приема на работу, считая именно психогеометрию более точной системой психологического анализа личности, чем традиционное тестирование [2].

В середине двадцатого столетия из области классической графологии выделилось направление, связанное не с традиционным анализом почерка как графического проявления личности, а с психоаналитической интерпретацией непроизвольных машинальных рисунков и бессознательно сделанных набросков, так называемых каракулей. Среди анализируемых автоматических набросков, машинальных рисунков или каракулей оказались и геометрические формы. Тест «Конструктивный рисунок человека из геометрических форм™», или сокращенно ТиГр (Тест Идеографический) в едином тестовом задании объединяет проективный рисунок фигуры человека с неосознанным предпочтением основных геометрических форм. Отличительная особенность теста заключается в изображении фигуры человека из простых геометрических форм – треугольника, круга, квадрата. В процессе тестирования необходимо нарисовать или сконструировать фигуру человека только из треугольников, кругов и квадратов и состоящую ровно из десяти частей [3].

Чтобы убедиться в простоте применения данных тестов на практике, я провела исследование среди учащихся моего класса. В исследовании участвовало 24 ученика 8 класса.

Цель испытания – выяснить, к какой геометрической фигуре тяготеет характер моих учеников.

Тест №1. Участникам тестирования были выданы бланки с изображением пяти основных геометрических фигур и инструкцией:

Инструкция: выберите фигурку, о которой вы можете сказать: «Это – я!». Постарайтесь почувствовать свою форму. Выберите ту, которая первой привлекла вас. Запишите ее название под номером 1.

Теперь, в порядке вашего предпочтения, пронумеруйте оставшиеся четыре фигуры.

Номер 1 – это ваша основная фигура или субъективная форма. Она дает возможность определить доминирующие черты характера и особенности поведения.

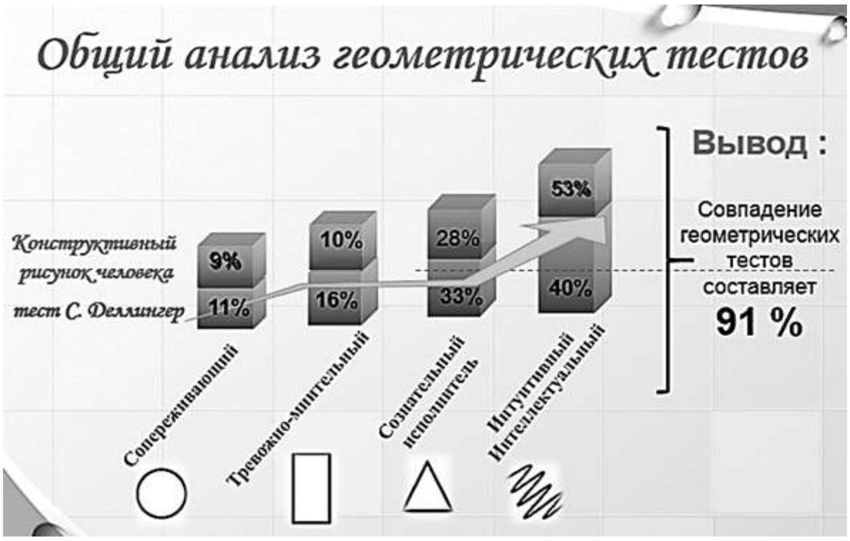
Главное здесь не придумывать ничего и выставить фигуры в порядке предпочтения за 10 секунд.

По фигуре, помещенной на первое место, определяем основные особенности личности и поведения каждого ученика. Получили диаграмму по классу.

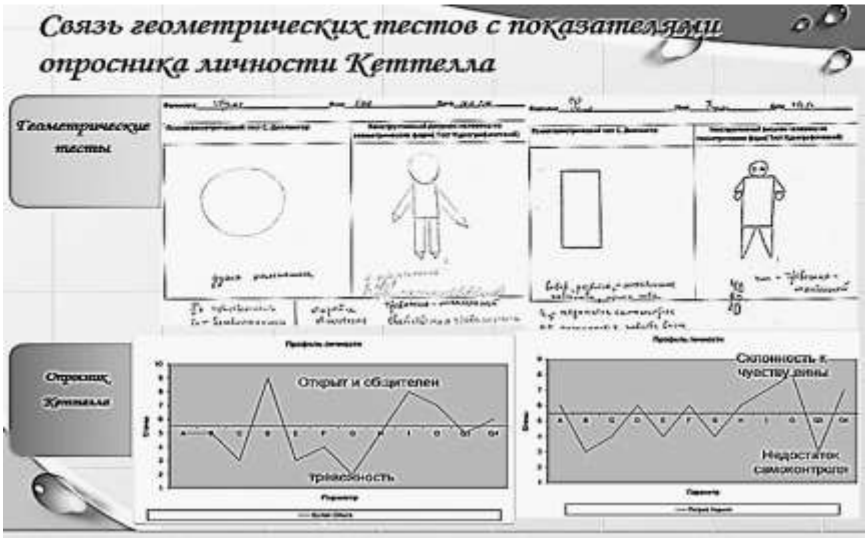
Тест № 2. Участникам теста было предложено нарисовать фигурку человека, используя 10 элементов, среди которых могут быть треугольники, круги, квадраты.

Подсчитав количество участвующих в изображении человечка треугольников, кругов и квадратов, результат записываем в виде трехзначного числа – так называемой «формулы рисунка». По формуле можно отнести ученика к определенному типу личности. По результатам построили диаграмму.

Результаты тестирования и вывод: общий анализ геометрических тестов показал их совпадение на 91%.



Следующим этапом моего исследования был анализ связи геометрических тестов с опросником Кеттелла, тестирование по которому провел школьный психолог. Считается, что точность диагностики с помощью психогеометрического метода достигает 85%. Я попыталась установить связь теста с показателями опросника личности Кеттелла. Совпадение составило 79%.

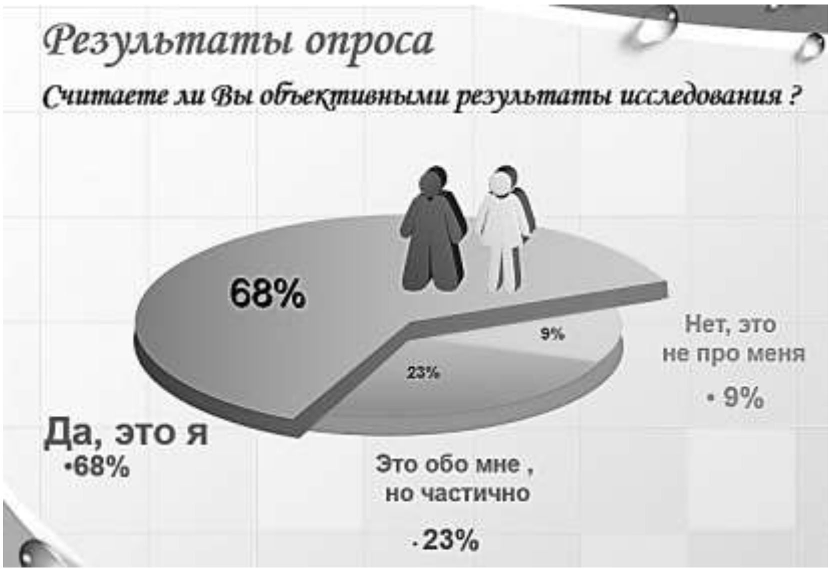


Вывод: почти все результаты сравнительного анализа подтверждают психологические характеристики геометрических форм личности.

Мнение психолога: *Учащимся 8 класса предлагалось расставить пять фигур (квадрат, треугольник, круг, прямоугольник, зигзаг) по степени привлекательности. В результате оказалось, что большинство учащихся выбирают зигзаг – 40%, затем – треугольник – 33%, прямоугольник – 16%, круг – 11%. Таким образом, у учащихся проявляются такие особенности личности как творчество, креативность, доброжелательность, общительность, лидерство, напористость, рациональность, резкость, что может относиться к переживанию подросткового кризиса учащимися на данном этапе жизни*.

Можно сделать вывод, что восприятие геометрических фигур, во многом отражает особенности характера и стиля поведения. Результаты исследования показали, что большинство подростков имеет активную жизненную позицию, ярко выраженный творческий потенциал и лидерскую позицию.

После знакомства учащихся с результатами тестов, я предложила обсудить, насколько, по мнению учащихся, полученные данные соответствуют их представлению о себе.



Все мы люди разные. И судьбы у нас разные, и характеры. Предложенные тесты не являются серьезным психологическим исследованием, но, тем не менее, они в достаточной степени отражают суть нашего характера. Тем, кому результаты не понравились, а таких было порядка 9%, мы советуем, не огорчаться, а отнестись к приведенным формулировкам с чувством юмора. В конце-то концов, результат всегда может измениться, если в будущем вы ответите «нет» там, где сегодня говорите «да»! Наша жизнь постоянно меняется, а вместе с ней и мы.

Результаты исследования были изучены учениками совместно с классным руководителем. В ходе беседы выяснилось, что эти результаты являются достаточно объективными и соответствуют реальным характеристикам детей, данным им психологом и педагогом.

Рассматриваемый подход с успехом может применяться при организации различных видов групповой работы с детьми, как учебной, так и внеклассной воспитательной. Например, при делении класса для выполнения какого-либо задания на уроке, вместо традиционных способов разбивки «по рядам», «вариантам» и т.п., можно использовать принцип группировки по психогеометрическим типам. При этом каждый член группы становится в ней представителем характерных черт поведения и стиля мышления «своего» типа, а значит, имеет больше шансов проявить свои сильные стороны.

Психогеометрия, позволяет быстро получить первое представление о незнакомом человеке. Знание психотипа дает возможность получить рекомендации, в каком направлении развиваться, узнать склонности к учёбе, творчеству, занятию спортом, профессии, лидерские качества, успешность в жизни и прочее. А также анализ внутреннего мира – это вкус внутреннего счастья и спокойствия, психические сильные и слабые стороны, развитие духовной и материальной сущности и многое другое, в каждом случае всё строго индивидуально.

Все мы любим тесты. Особенно тесты, которые скажут нам что-нибудь о нас самих. Иногда возникает ощущение, что сами себя не понимаем, но когда результаты теста говорят нам, что мы умные, талантливые, целеустремленные, то мы очень радуемся тому, что наши подозрения подтвердил независимый источник. Что интересно, если результаты не слишком соответствую нашим ожиданиям, то мы утверждаем, что тест этот неправильный и доверять ему нельзя. Хотя чаще всего тест говорит правду, просто мы не хотим в нее верить.

Таким образом, принципы психогеометрии и непосредственно психогеометрические тесты могут использоваться

- для выявления индивидуально-психологических особенностей учащихся при организации различных форм учебной, в частности, проектной деятельности;
- в работе с классными коллективами (сплочение класса, создание эффективной команды);
- в работе с родителями;
- при организации предпрофильного и профильного обучения, а также в практике профориентационной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рогов Е.И. Настольная книга практического психолога: в 2 кн. – М., 1999. – кн.2.

2. Алексеев А.А., Громова Л.А. Психогеометрия для менеджеров – Л., 1992.

3. Либин А.В., Либина А.В., Либин В.В. Психографический тест: конструктивный рисунок человека из геометрических форм – М.: Эксмо, 2008.

4. http://shkolazhizni.ru/archive/0/n-6264/ – Ежедневный познавательный журнал «ШколаЖизни.ру».

УДК 372.8

РАБОТА НАД КУЛЬТУРОЙ РЕЧИ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ (ОВЛАДЕНИЕ МОРФОЛОГИЧЕСКИМИ НОРМАМИ ОБРАЗОВАНИЯ ФОРМ ЧИСЛИТЕЛЬНЫХ)

Татьяна Алексеевна Лоншакова
Удомельская средняя общеобразовательная школа №4, Удомля, Тверская обл.
E-mail: lonshakova_ta@mail.ru

Ключевые слова: *морфологические нормы, числительные, разряды, склонение*

Аннотация. В работе рассматривается правильное формообразование числительных как необходимое условие повышения речевой культуры.

Важным условием полноценного, эффективного решения задач основного общего образования является владение языком, речью. Формирование коммуникативной и культуроведческой компетенции – цель предмета «Русский язык». Но Федеральный государственный стандарт общего школьного образования рассматривает речь как один из компонентов не только личностных, предметных, но и метапредметных результатов обучения. Необходимо применение приобретенных знаний, умений и навыков в практике речевого общения в повседневной жизни, на других уроках, в частности на математике. Речь учащихся на уроках математики должна быть, конечно, подчинена тем общим законам, которые изучались ими на уроках русского языка. Параллельно с изучением материала по предмету необходимо постоянно работать над культурой речи, лексическими, орфоэпическими, грамматическими нормами, над умением конкретно и грамотно выражать свои мысли как в устной, так и письменной речи.

Немалые трудности вызывает соблюдение морфологических норм современного русского литературного языка. Морфология – это раздел грамматики, который изучает части речи, их правильное образование и различные формы одной и той же части речи. Таким образом, морфологические нормы - это нормы образования частей речи и их форм. На уроках точных наук приоритет имеют имена числительные, а значит, надо знать, как правильно их употреблять. На письме, безусловно, удобнее пользоваться цифрами, чем словами. Но как бы ни были удобны цифры, в устной речи пользуются только словами, то есть именами числительными. Имя числительное – лексически замкнутая категория, насчитывающая всего несколько десятков слов и уже не пополняющаяся новыми образованиями. Несмотря на это, усвоение форм числительных представляет собой достаточно сложный процесс, и ошибки здесь встречаются часто. Имена числительные обладают разветвлённой системой склонения («множественность и раздробленность типов словоизменения»), по выражению В.В.Виноградова. Именно эта особенность вызывает трудности при образовании числительных. Самое большое количество ошибок связано со склонением количественных, порядковых, дробных, собирательных числительных. Рассмотрим особенности изменения по падежам этих разрядов.

Количественные числительные обозначают количество предметов, отвлечённое число и отвечают на вопрос *сколько*. По строению делятся на *простые* (один корень), *сложные* (два корня), *составные* (из нескольких слов, каждое из которых может быть как простым, так и сложным).

Склонение:

Простые числительные

1. Числительное «один» склоняется по типу притяжательных прилагательных на –ин- (*папин*)
2. Числительные «два», «три» имеют особый способ склонения. У числительного «два» различаются формы ж.р. и м.р. в Им.п. и В.п.

1. И.**четыре (два, три)**	2. И.**пять (6-20, 30)**	И.сорок, девяносто, сто
Р. Четырёх	Р.пяти	В.сорок, девяносто, сто
Д.четырём	Д.пяти	Р.сорок**а**, девяност**а**, ст**а**
В.четыре	В.пять	Д.сорок**а**, девяност**а**, ст**а**
Т. четырьмя	Т.пятью	Т.сорок**а**, девяност**а**, ст**а**
П. о четырёх	П. о пяти	П.сорок**а**, девяност**а**, ст**а**

3. Числительные от ***пяти*** до ***двадцати*** и ***тридцать*** склоняются, как существительные 3 склонения.

Сравните:

И.п. *кто? что?*	кость	шесть
Р.п. *кого? чего?*	кости	шести
Д.п. *кому? чему?*	кости	шести
В.п. *кого? что?*	кость	шесть
Т. п. *кем? чем?*	костью	шестью
П.п. о ком? о чём?	о кости	о шести

4. Обратите внимание на склонение слов: *сорок, девяносто, сто.*

И.п.	сорок,	девяносто,	сто	(рублей)
Р.п.	*сорока,*	*девяноста,*	*ста*	*(рублей)*
Д.п.	*сорока,*	*девяноста,*	*ста*	*(рублям)*
В.п.	сорок,	девяносто,	сто	(рублей)
Т.п.	*сорока,*	*девяноста,*	*ста*	*(рублями)*
П.п. *(о)*	*сорока,*	*девяноста,*	*ста*	*(рублях)*

5. В соответствии с **морфологическими нормами современного русского языка**, числительное *«тысяча»* склоняется не по третьему, а по первому склонению: *расплатиться тысячей рублей.* Тем не менее, очень типичной является ошибка, когда это числительное, как и все остальные, склоняют по третьему склонению – *тысячью.*

6. Числительные «миллион», «миллиард» склоняются, как существительные 2 склонения.

Сложные числительные

50 - 80	**200 -400**	**500 -900**
И. пятьдесят	И. двести	И.пятьсот
Р..пятидесяти	Р.двухсот	Р.пятисот
Д. пятидесяти	Д.двумст**ам**	Д.пятист**ам**
В.пятьдесят	В.двести	В.пятьсот
Т. пятьюдесятью	Т.двумяст**ами**	Т.пятьюст**ами**
П. о пятидесяти	П.о двухст**ах**	П.о пятист**ах**

При склонении сложных количественных числительных склоняется каждая часть слова, хотя пишутся они как одно слово. Особое внимание нужно обратить на склонение второй части числительных, обозначающих сотни.

Составные числительные

При склонении составных количественных числительных изменяется каждое слово.

И.семьсот восемьдесят шесть Р. Семисот восьмидесяти шести Д. семистам восьмидесяти шести В. семьсот восемьдесят шесть Т. семьюстами восьмьюстами шестью П. о семистах восьмидесяти шести

Порядковые числительные называют порядковый номер предметов при счёте. Они похожи на прилагательные, поэтому склоняются, как прилагательные.

При склонении *сложных* порядковых числительных первая часть всегда имеет форму Родительного падежа, а вторая склоняется, как прилагательное, в зависимости от рода, числа, падежа.

При склонении *составных* порядковых числительных меняется только последнее слово.

простые	сложные	составные
И. девятый	И. пятИдесятый	И.триста двадцать ***первый***
Р. девятого	Р. пятИдесятого	Р.триста двадцать ***первого***
Д. девятому	Д. пятИдесятому	Д.триста двадцать ***первому***
В. девятый	В. пятИдесятый	В.триста двадцать ***первый***
Т. девятым	Т. пятИдесятым	Т.триста двадцать ***первым***
П. о девятом	П. о пятИдесятом	П. триста двадцать ***первом***

Дробные числительные называют не целые числа.

Кроме слов *полтора, полтораста*, они все составные. Состоят из количественного числительного (числитель дроби) и порядкового (знаменатель дроби).

1. При склонении изменяются обе части по образцу склонения количественных (числитель) и порядковых (знаменатель) числительных.

И. три пятых (класса) Р. трёх пятых Д.трём пятым В.три пятых Т. тремя пятыми П.о трёх пятых

2. Склонение числительных ПОЛТОРА, ПОЛТОРАСТА. Имеют две формы:

И. В. полторы (минуты)	И.В. полторА (листа)	полторастА
Р.Д.Т.П. полУтора (минут)	Р.Д.Т.П. полУторА (листов)	полУторастА

Собирательные числительные обозначают количество предметов как одно целое.

Сочетаются

с существительными, обозначающими лиц мужского пола (трое солдат, пятеро рабочих),

с существительными общего рода (двое задир),

с существительными, не имеющими формы ед. числа (*пятеро суток, двое ножниц*),

с существительными, не имеющими формы ед. числа (*пятеро суток, двое ножниц*),

с существительными, не имеющими формы ед. числа (*пятеро суток, двое ножниц*), с названиями детёнышей животных (*четверо медвежат*),

с названиями парных предметов *(трое рукавиц, четверо лыж),* со словами *дети, ребята, детёныши),* с местоимениями *вас, нас, их.*

Особенности склонения числительных ОБА (ОБЕ)

И.п. оба (ученика **м.род**)	И.п обе (ученицы **ж.род**)
Р.п. обОих	Р.п. обЕих
Д.п. обоим	Д.п.обЕим
В.п. обОих	Вп. обЕих
Т.п. обОими	Т.п.обЕими
П.п.об обОих	П.п. об обЕих

Таковы основные морфологические нормы образования форм имени числительного и их употребления. Таким образом, важно не только выполнять различные математические действия, но и правильно употреблять числительные, а для этого знать законы языка, которым они подчиняются. Изучать грамматические нормы образования числительных – задача уроков русского языка. Но где как не на уроках математики есть возможность постоянно повторять эту тему, закреплять навыки употребления числительных, доводить до автоматизма нормы склонения числительных, то есть работать над культурой речи.

Работа эта может вестись в двух направлениях. Во-первых, в 5-6 классах учитель математики, используя материалы учебника Н.Я. Виленкина (раздел «Говори правильно», форзац с примерами склонения числительных (количественных, порядковых, дробных), обращает внимание учащихся на правила изменения числительных. Учащиеся должны пользоваться этим материалом и на уроках, и при выполнении домашнего задания, когда стоят перед необходимостью выбрать форму слова, соответствующую нормам языка. Основная трудность при организации работы состоит в том, что нужно добиться, чтобы каждый учащийся оценил по норме литературного образца образованную им форму. Для того чтобы это произошло, учащемуся нужно вспомнить, какими формами числительных, имеющимися в учебнике, он пользуется в своей речи, и если употребляемая им форма идёт вразрез с нормами языка, то запомнить ту, которая соответствует норме.

Во-вторых, усвоение морфологических норм склонения числительных возможно на основе разработки системы интегрированных уроков, которые в системе школьного образования занимают особое место, так как перспективная цель этих уроков – показать учащимся глубокую взаимосвязь разных наук, дать целостное представление об окружающем мире. На интегрированных уроках математики и русского языка параллельно с обучением основным видам действий, решением уравнений, примеров, задач, устном счёте и т.д. проводится работа по выявлению закономерностей склонения числительных в соответствии с их разрядами, то есть работа над культурой речи. Какой бы путь ни был избран, необходимо, чтобы на последующих уроках учитель математики не только проверял правильность решения, но неустанно корректировал по мере необходимости речь учащихся. С этой целью вполне оправданно будет использование экспертов из ребят, преуспевших в овладении темой «Употребление числительных в речи» и рекомендованных учителем русского языка. «Эксперты» выслушивают ответы ребят, следят за культурой речи, исправляют грамматические, речевые ошибки. В игру «Эксперт» рационально включать разных ребят, менять состав «экспертного совета». Если ошибка в произношении не замечена экспертом, учитель математики должен обратить внимание класса на неё. Такая кропотливая, постоянная работа, безусловно, будет способствовать усвоению норм правильной речи.

***Приложение.* ТЕСТ**

1. Найдите пример, в котором нарушены нормы формообразования.

1) пятьюдесятью тремя
2) шестидесяти четырёх
3) тридцати восьми
4) семидесятью двумя

2. Найдите пример, в котором нарушены нормы формообразования.

1) четырьмястами
2) девятисот
3) двухстам
4) о шестистах

3. Найдите пример, в котором нарушены нормы формообразования.

1) ста двадцати
2) девяносто девяти
3) восьмьюдесятью
4) сорока четырёх

4. Укажите словосочетание, в котором форма имени числительного образована с нарушением норм литературного языка.

1) в тысяча девятьсот сорок пятом году
2) в двух тысячи двенадцатом году
3) в две тысячи восьмом
4) в тысяча девятьсот шестьдесят первом году

5. Какой пример содержит неправильно образованную форму имени числительного?

1) полтораста книгами
2) полторы недели
3) о полутора годах
4) полтора литра

6. Выберите пример, в котором нарушены нормы сочетаемости.
1) просмотреть четыре слайда
2) поймать тридцать три бабочки
3) вызвать двадцать двух учеников
4) посетить три концерта

7. Выберите пример, в котором нарушены нормы сочетаемости числительного с существительным.
1) составить за полторы недели
2) не хватило полутора дней
3) закончить за полтора месяца
4) ждать около полутора года

8. В каком случае существительное, которое сочетается с именем числительным, употреблено правильно?
1) поздравить с Девятым маем
2) задуматься о восьмом апреля
3) выучить к первому сентябрю
4) готовиться к Двадцать третьему февралю

9. Найдите пример, в котором нарушены правила сочетаемости имени числительного с существительным.
1) трое друзей
2) двое малюток
3) четверо подруг
4) их пятеро

10. Укажите пример с ошибкой.
1) обеих девушек
2) оба пляжа
3) обоими ножницами
4) обоим друзьям

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виноградов В.В. Русский язык (грамматическое учение о слове). – М.Л., 1947.
2. Обучение русскому языку в 5-6 классах. М.Т.Баранов, Л.Т.Григорян, Т.А.Ладыженская. – М.: Просвещение, 2007.
3. Работа над умениями и навыками по русскому языку в 4-8классах. Сост.И.В. Галлингер, С.И.Львова. – М.:Просвещение, 2005.
4. Секреты стилистики. Д.Э.Розенталь, И.Б.Голуб. – М: Рольф, 2001.
5. Супрун А.Е. Имя числительное и его изучение в школе. – М., 1964.
6. Чеснокова Л.Д. Имя числительное в современном русском языке. Семантика. Грамматика.Функции. – Ростов-на-Дону, 1997.

УДК 004.42, 514.82

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СИСТЕМ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ В ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Светлана Васильевна Любавская
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: isakurai@bk.ru

Станислав Владимирович Соков
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: sokovstanislav@gmail.com

Ключевые слова: компьютерная алгебра, уравнения Эйнштейна, скалярное поле.

Аннотация. В статье рассматриваются вопросы применения систем компьютерной алгебры для решения задач гравитации. На примере программного пакета Maple проиллюстрирована возможность упрощения громоздких выкладок и получения точных решений в рамках общей теории относительности.

Решая задачи теории гравитации, студент, преподаватель, исследователь зачастую сталкивается со сложностями в осуществлении громоздких вычислений компонентов тензорных полей: тензоров кривизны, коэффициентов связности, тензора Эйнштейна.

Существенно облегчить эти вычисления могут системы компьютерной алгебры со встроенными специальными пакетами. Одним из примеров служит система компьютерной алгебры Maple, являющаяся продуктом компании Waterloo Maple Inc., которая с 1984 года выпускает программные продукты, ориентированные на сложные математические вычисления, визуализацию данных и моделирование. Основу пакета составляет специальное ядро – программа символьных преобразований. Кроме того, имеется несколько тысяч специальных функций, хранящихся в подгружаемых к ядру пакетах и библиотеках. Maple умеет не только вычислять, но и обладает богатыми возможностями графического представления математических объектов и процессов.

Система Maple содержит ряд пакетов, помогающих в решении задач гравитации:

1) **Tensor** – содержит команды для оперирования с тензорами и их использования в общей теории относительности, как в естественном базисе, так и с движущимся репером.

Этот пакет использует свой тип представления данных, называемый tensor_type, чтобы представлять объекты, как с ковариантными, так и контравариантными индексами. Говоря более конкретно, tensor_type – это таблица с двумя входами: поле компонент \`compts\` для запоминания компонент объекта и поле характеристик индексов \`index_char\` для описания ковариантных/контравариантных признаков индексов объекта. Компоненты должны запоминаться в виде массива с размерностью эквивалентной рангу объекта и со всеми диапазонами индексов, начиная с 1 и кончая размерностью пространства (разрешены только диапазоны с одинаковой размерностью) [3].

2) **DEtools** – пакет дополнительных средств для дифференциальных уравнений. Этот пакет содержит команды построения двух- и трехмерных графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными (команды DEplot, DEplot3d, и PDEplot); команды замены переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях (команда Dchangevar) и системы координат в уравнениях с частными производными (PDEchangecoord); команды понижения порядка дифференциальных уравнений и некоторые другие команды [2], [3].

3) **Plots** – команды построения специальных видов графиков функций, включая построение линий уровня, отображение неявно заданных функций, включение текстовых надписей в график, построение графиков в различных системах координат [3].

Приведем пример использования системы компьютерной алгебры Maple для решения конкретной задачи. Мы составим программу, позволяющую найти точные безмассовые решения для гравитирующего сферически-симметричного скалярного поля.

Сначала определим общий вид метрики. Для статических сферически-симметричных конфигураций полей метрику можно записать в виде

$$ds^2 = e^{2\gamma(\xi)}dt^2 - e^{2\alpha(\xi)}d\xi^2 - e^{2\beta(\xi)}(d\vartheta^2 + sin^2\vartheta d\varphi^2).$$

Для удобства вычислений используем гармонические координаты, в которых $\alpha = 2\beta + \gamma$.

Лагранжиан рассматриваемой системы имеет вид

$$L = -\frac{R}{2x} + \frac{1}{8\pi}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha},$$

где $\varphi = \varphi(\xi)$ – скалярное поле.

Из лагранжиана следуют уравнения Эйнштейна и уравнение скалярного поля:

$$G_\nu^\mu = xT_\nu^\mu, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\right) = 0. \tag{2}$$

Компоненты тензора энергии-импульса вычисляются по формуле

$$T_\nu^\mu = \frac{1}{4\pi}\left(\varphi_{,\nu}\varphi^{,\mu} - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\right).$$

Решение уравнения (2) легко найти аналитически:

$$\varphi(\xi) = C\xi + \varphi_0; \qquad C, \varphi_0 = const.$$

Для составления и решения уравнений Эйнштейна необходимо провести достаточно громоздкие вычисления, которые мы существенно сократим, используя пакет tensor.

Приведем листинг программы, позволяющей получить уравнения Эйнштейна.

```
> restart :
> with(tensor) :
> coord := [t, ξ, θ, φ];
                              coord := [t, ξ, θ, φ]
> g_compts := array(symmetric, sparse, 1 ..4, 1 ..4) :
>
```

$$g\_compts_{1,1} := \exp(2\cdot\gamma(\xi)) :$$
$$g\_compts_{2,2} := -\exp(2\cdot\alpha(\xi)) :$$
$$g\_compts_{3,3} := -\exp(2\cdot\beta(\xi)) :$$
$$g\_compts_{4,4} := -\exp(2\cdot\beta(\xi))\cdot\sin(\theta)^2 :$$

```
> g := create([-1, -1], eval(g_compts));
> α := ξ→2·β(ξ) + γ(ξ) :
> ϕ := ξ→C·ξ + ϕ0 :
> ginv := invert(g, 'detg') :
> D1g := d1metric(g, coord) : D2g := d2metric(D1g, coord) :
> Cf1 := Christoffel1 (D1g) :
> RMN := Riemann(ginv, D2g, Cf1) :
> RICCI := Ricci(ginv, RMN) :
> Cf2 := Christoffel2 (ginv, Cf1) :
> RS := Ricciscalar(ginv, RICCI) :
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS) :
> T_compts := array(symmetric, sparse, 1 ..4, 1 ..4) :
>
```

$$T\_compts_{1,1} := -\frac{g\_compts_{1,1}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$
$$T\_compts_{2,2} := diff(\phi(\xi),\xi)^2 :$$
$$T\_compts_{3,3} := -\frac{g\_compts_{3,3}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$
$$T\_compts_{4,4} := -\frac{g\_compts_{4,4}\cdot diff(\phi(\xi),\xi)^2}{g\_compts_{2,2}} :$$

```
> T := create([-1, -1], eval(T_compts)) :
> UR := lin_com(Estn, T) :
> URAVN := get_compts(UR) :
```

> $simplify\left(URAVN_{1,\,1}=0, power\right);$
$simplify\left(URAVN_{2,\,2}=0, power\right);$
$simplify\left(URAVN_{3,\,3}=0, power\right);$

$$e^{-6\,\beta(\xi)}\left(-2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)e^{2\,\beta(\xi)}\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 e^{2\,\beta(\xi)} - e^{4\,\beta(\xi)+2\,\gamma(\xi)} + 2\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\beta(\xi)\right)e^{2\,\beta(\xi)} + C^2\,e^{2\,\beta(\xi)}\right) = 0$$

$$\left(-2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)e^{2\,\beta(\xi)}\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 e^{2\,\beta(\xi)} + e^{4\,\beta(\xi)+2\,\gamma(\xi)} + C^2\,e^{2\,\beta(\xi)}\right)e^{-2\,\beta(\xi)} = 0$$

$$-e^{-2\,\beta(\xi)-2\,\gamma(\xi)}\left(\frac{d^2}{d\xi^2}\beta(\xi) - 2\left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)\left(\frac{d}{d\xi}\gamma(\xi)\right) + \frac{d^2}{d\xi^2}\gamma(\xi) - \left(\frac{d}{d\xi}\beta(\xi)\right)^2 + C^2\right) = 0$$

Далее находим общее решение полученной системы уравнений в виде

$$\gamma = \pm h\xi + \gamma_0,\ \ \beta(\xi) = -\gamma(\xi) - \ln(k^{-1}sh(k\xi)),\ \alpha(\xi) = 2\beta(\xi) + \gamma(\xi),$$

где h, γ_0 - константы интегрирования, $k = \sqrt{h^2 + C^2}$.

Это семейство решений можно получить как аналитически, так и с использованием команд для решения дифференциальных уравнений.

Поученное семейство полностью исчерпывает все сферически-симметричные статические конфигурации безмассового скалярного поля и было получено в книге [7].

Рассмотрение нестатических конфигураций приводит к ещё более громоздким вычислениям (см., например, [5], [6]), проводить которые без использования систем компьютерной алгебры практически невозможно. Более того, все реальные решения, описывающие астрофизические объекты, могут быть получены, как правило, только численно, что также предполагает использование символьных и численных методов, реализуемых в системах компьютерной алгебры.

Таким образом, изучение систем компьютерной алгебры, в том числе системы Maple, в рамках дисциплин специализации бакалавриата и магистратуры может существенно помочь студенту в его научно-исследовательской деятельности, направленной на математическое моделирование объектов и явлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аладьев В.З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба; Гродненский гос. ун-т им. Янки Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2011.

2. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple [Электронный ресурс]/ Егоров А. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2016.

3. Иванов А.О., Булычева С.В. Электронный курс. Прикладной математический пакет MAPLE. http://detc.usu.ru/assets/amath0011/index.htm

4. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011.

5. Салогуб Е.А., Столярова Г.Н., Чемарина Ю.В. Нестационарная модель сферическисимметричного топологического геона // Синергетика в общественных и естественных науках. Материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи: в 3 ч./Ответственный редактор: Лапина Г. П. – Тверь: Изд. ТГУ, 2015. С. 110-113.

6. Чемарина Ю.В. Нестационарные конфигурации гравитирующего скалярного поля // Восьмые Курдюмовские чтения "Синергетика в естественных науках": материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи. – Тверь, 2012. С. 79–82.

7. Шикин Г.Н. Основы теории солитонов в общей теории относительности. – М.: Издательство «УРСС», 1995.

УДК 372.8:51

СТАРЫЕ ОШИБКИ В ЭПОХУ ИННОВАЦИЙ

Илья Шулимович Могилевский
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: ilia.mogilevski@gmail.com

Ключевые слова: *иррациональные уравнения, графики функций, область определения.*

Аннотация. В работе рассматривается ряд задач о решении иррациональных уравнений. Обсуждаются типичные ошибки, возникающие при решении такого рода задач.

В последние годы я веду занятия с учителями средних школ, которые учатся по магистерской программе «Преподавание математики и информатики». При этом я с сожалением обнаружил, что типичные ошибки в рассуждениях и предрассудки, свойственные поступающим на математический факультет выпускникам школ, весьма широко распространены и среди учителей. Прежде всего, это относится к решению иррациональных уравнений. На вопрос «как решать уравнение, содержащие квадратные корни» немедленно следует ответ «возвести в квадрат». Предложение сначала исследовать входящие в уравнение функции и построить их графики воспринимается как придирка или помеха. Рассмотрим несколько примеров на сей счет.

1. Решите уравнение $\sqrt{1-x} = x-2$.

Решение. Найдем области определения функций, входящих в уравнение. Подкоренное выражение в левой части должно быть неотрицательным. Это означает, что $x \le 1$. Квадратный корень есть функция неотрицательная. Поэтому правая часть уравнения неотрицательна $x-2 \ge 0 \Rightarrow x \ge 2$. Мы получили, что переменная x должна удовлетворять двум несовместным неравенствам $x \le 1$ и $x \ge 2$. Следовательно, уравнение не имеет (вещественных) решений и возводить в квадрат вовсе не надо.

2. Решите уравнение $\sqrt{x} = x+3$.

Решение. Это уравнение имеет смысл при неотрицательных x, но и здесь можно обойтись без возведения в квадрат. Заметим, что на отрезке $[0,1]$ левая часть уравнения не превосходит 1, а правая – больше или равна 3. Так что на отрезке $[0,1]$ решений уравнения нет. Нет их и на луче $x > 1$. Действительно, на этом множестве функция $f(x) = \sqrt{x}$ растет медленнее, чем функция $g(x) = x$ и, следовательно, $\sqrt{x} < x+3$. Тем самым доказано, что уравнение не имеет решений. Эта ситуация изображена на рисунке 1.

3. Решите уравнение $\sqrt{x-3} = 3-x$.

Решение. Левая часть уравнения существует при $x \ge 3$. Так как квадратный корень неотрицателен, то и правая часть неотрицательна, т.е. $x \le 3$. Мы получили, что уравнение имеет смысл только при $x = 3$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x = 3$ есть решение уравнения. Возведение в квадрат здесь неуместно.

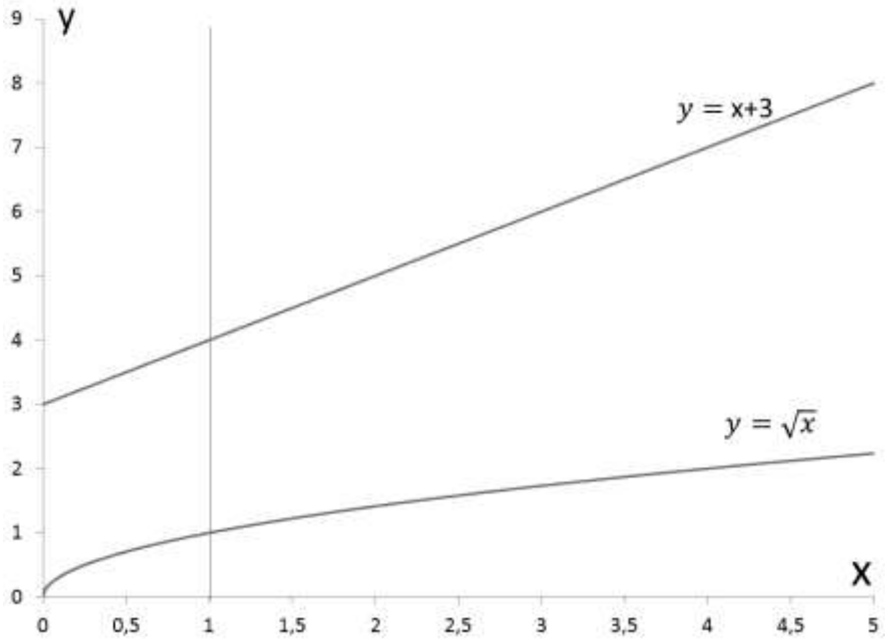


Рис. 1

4. Решите уравнение $\sqrt{4-6x-x^2}=4+x.$

Решение. Найдем множество, на котором определено это уравнение. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным.

$$4-6x-x^2\ge 0\Rightarrow x^2+6x-4\le 0\Rightarrow x^2+6x+9-13\le 0\Rightarrow (x+3)^2\le 13,$$

$|x+3|\le\sqrt{13}\Rightarrow x\le\sqrt{13}-3,\ x\ge\sqrt{13}+3.$ Правая часть уравнения также неотрицательна. $4+x\ge 0\Rightarrow x\ge -4.$ Отсюда получаем множество, на котором определено уравнение: $x\in[-4,\sqrt{13}-3]\cup[\sqrt{13}+3,+\infty).$ А вот теперь надо возвести обе части уравнения в квадрат. Получим квадратное уравнение. $4-6x-x^2=x^2+8x+16\Rightarrow x^2+7x+6=0\Rightarrow x_1=-6,\ x_2=-1.$ x_1 не входит в область определения, а x_2 входит. Тем самым получаем ответ: $x=-1.$

5. Рассмотрим несколько более сложное уравнение $\frac{1}{x}-5+\sqrt{\frac{1+x}{x}}=0.$

Решение. Найдем сначала область определения уравнения. Для этого перепишем его в виде $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=5-\frac{1}{x}.$ Прежде всего отметим, что $x\ne 0.$ Подкоренное выражение неотрицательно, поэтому $x\in(-\infty,-1]\cup(0,+\infty).$ Правая часть последнего уравнения также неотрицательна, это условие выполняется при $x\in(-\infty,0)\cup\left[\frac{1}{5},+\infty\right).$ Общая часть этих двух множеств есть область определения уравнения: $x\in(-\infty,-1]\cup\left[\frac{1}{5},+\infty\right).$ Введем новую переменную $z=\frac{1}{x}.$ Для этой переменной мы получим уравнение $\sqrt{1+z}=5-z.$ Область определения этого уравнения есть множество $z\in[-1,5].$ Вот теперь пришло время возвести последнее уравнение в квадрат. Мы получим квадратное уравнение для z: $1+z=z^2-10z+25\Rightarrow z^2-11z+24=0.$ Это уравнение имеет два вещественных корня $z_1 = 3,\ \ z_2 = 8,$ из которых только первый входит в область определения. Возвращаясь к переменной $x,$ получаем, что исходное уравнение имеет единственный корень $x = \dfrac{1}{3}.$ Нетрудно проверить, что это число принадлежит множеству $(-\infty, -1] \cup \left[\dfrac{1}{5}, +\infty\right).$

Уравнения, содержащие функции разных типов, могут быть решены только путем исследования функций, входящих в уравнение. Рассмотрим несколько задач такого рода.

6. Решите уравнение $\cos x - 1 = x^2.$

Решение. Здесь необходимо учесть, что $\cos x \le 1,$ поэтому $\cos x - 1 \le 0.$ В то же время правая часть уравнения $x^2 \ge 0.$ Отсюда следует, что решением уравнения могут быть только такие числа, при которых левая и правая части равны нулю. Правая часть уравнения равна нулю только при $x = 0.$ Для этого значения переменной и левая часть уравнения равна нулю. Тем самым получаем ответ: $x = 0.$

7. Решите уравнение $0.3^{x+1} = \sqrt{2+x}$.

Решение. Левая часть уравнения существует при всех x, а правая при $x \ge -2$. При этом функции из обеих частей уравнения неотрицательны, поэтому исследуем уравнение для $x \ge -2$. Функция 0.3^{x+1} убывает и при $x = -2$ равна $0.3^{-1} = \dfrac{10}{3}$. Функция $\sqrt{2+x}$ возрастает и при $x = -2$ равна нулю, что меньше $\dfrac{10}{3}$. Отсюда следует, что уравнение имеет единственное решение на луче $x \ge -2$. Единственный доступный школьнику способ найти решение уравнения – подобрать его. В этом деле неоценимую помощь окажет построение графиков обеих входящих в уравнение функций на одном рисунке. Эти графики изображены на рисунке 2. На рисунке видно, что графики пересекаются при $x = -1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что это число является решением уравнения. Как уже отмечалось ранее, других решений нет. Тем самым получен ответ: $x = -1$.

Замечание. В этой задаче возводить обе части уравнения в квадрат совершенно не нужно, хотя в данном случае эта операция не является ошибочной.

8. Решите уравнение $5^{1-x} = \sqrt{x}$.

Решение. Эта задача весьма похожа на предыдущую и решается она так же, как и предыдущая. Левая часть уравнения существует при всех x, а правая при $x \ge 0$. Проанализируем поведение функций из левой и правой частей уравнения.

$5^{1-x} = \dfrac{5}{5^x}$. Эта функция убывает и при $x = 0$ равна 5. Функция $\sqrt{x}$ возрастает при неотрицательных x и при $x = 0$ равна 0. Отсюда следует, что уравнение имеет единственное решение и это решение является положительным числом. Построим на одном рисунке графики входящих в уравнение функций (рисунок 3). Из рисунка видно, что возможным решением является $x = 1$.

Действительно, при $x=1$ левая и правая части уравнения равны 1. Других решений нет. Ответ: $x=1$.

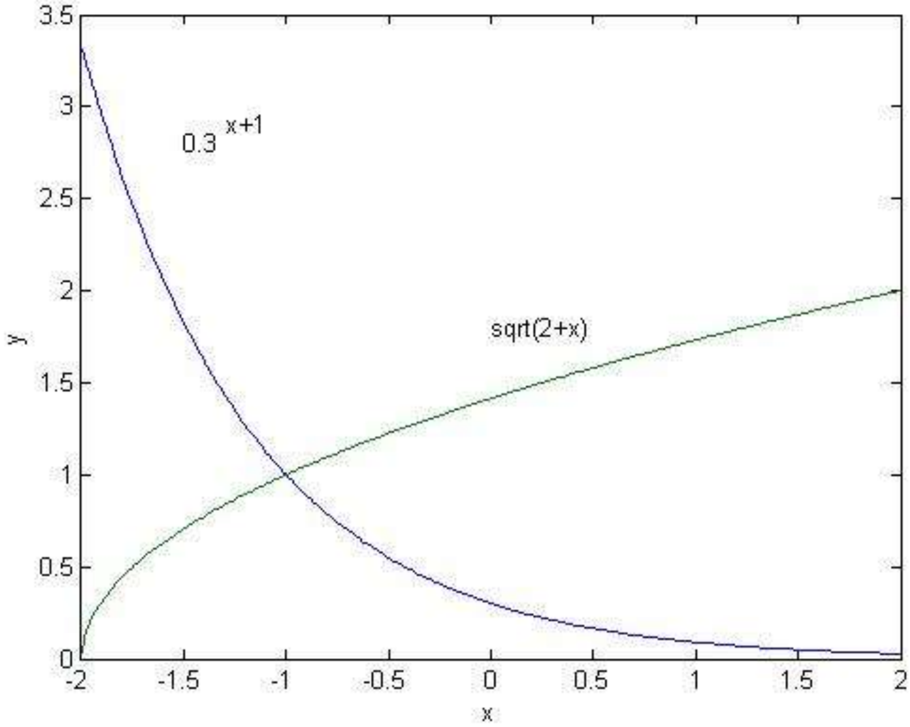


Рис. 2

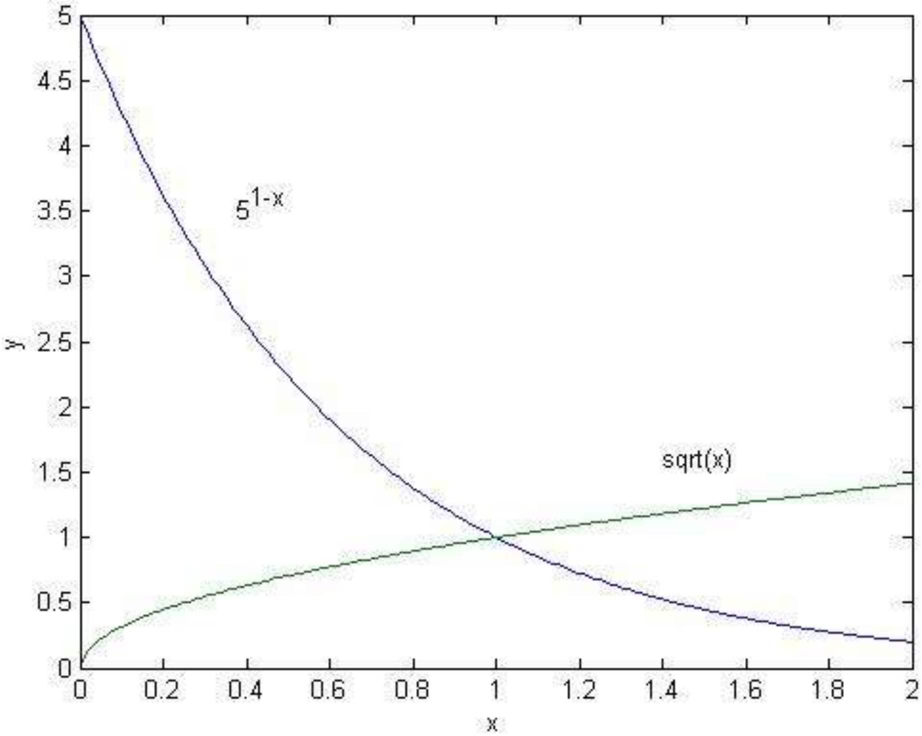


Рис. 3

9. Решите уравнение $e^x - \ln(x+1) - 1 = 0$.

<u>Решение.</u> Перепишем уравнение в виде $e^x = \ln(x+1) + 1$. Левая часть последнего уравнения определена для всех x, а правая – для $x > -1$. На этот раз в правой и

левой частях уравнения стоят возрастающие функции. Проанализируем их поведение. Показательная функция $f(x)=e^x$ растет очень быстро, а логарифмическая функция $g(x)=\ln(x+1)+1$ растет очень медленно при положительных x. Оценим эти функции. $f(1)=e>2$, $g(1)=\ln 2+1<2$. Так как f растет быстрее, чем g, то $f(x)>g(x)$ при $x\geq 1$, значит при таких x уравнение корней не имеет. На рисунке 4 изображены графики функций $f(x)=e^x$ и $g(x)=\ln(x+1)+1$. Используя рисунок как подсказку, проверим, что $x=0$ является решением уравнения. Действительно $f(0)=e^0=1$, $g(0)=\ln 1+1=1$.

Для того чтобы показать, что других решений уравнение ни имеет, нам понадобятся начальные сведения из математического анализа, которые должны быть известны старшеклассникам.

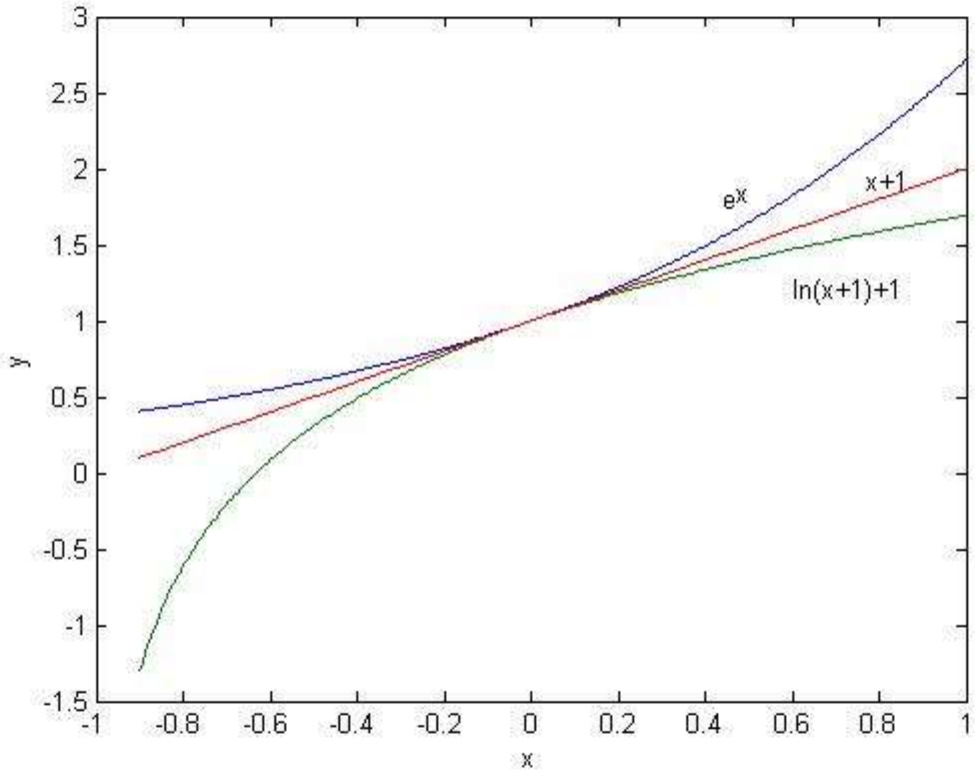


Рис. 4

Построим касательные к графикам функций $f(x)=e^x$ и $g(x)=\ln(x+1)+1$ в точке $x=0$. Для этого вычислим производные. $f'(x)=e^x \Rightarrow f'(0)=1$, $g'(x)=\dfrac{1}{1+x} \Rightarrow g'(0)=1 \Rightarrow f'(0)=g'(0)=1$. Это означает, что графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке $x=0$ общую касательную. Уравнение этой касательной имеет вид $y=kx+b$, где $k=f'(0)=g'(0)=1$. Так как касательная проходит через точку $(x=0, y=1)$, то $1=b$ и уравнение общей касательной имеет вид $y=x+1$. График этой функции также имеется на рисунке 4. Графики показательной и логарифмической функций суть выпуклые кривые. Поэтому эти кривые находятся по одну сторону от касательной. График функции $f(x)=e^x$ есть кривая, выпуклая вниз, значит она расположена выше касательной $y=x+1$. График функции $g(x) = \ln(x+1)+1$ есть кривая, выпуклая вверх, значит она расположена ниже касательной. Отсюда следует, что графики функций имеют только одну общую точку, именно, точку касания $(0,1)$. Это и означает, что уравнение $e^x - \ln(x+1) - 1 = 0$ имеет единственное решение $x = 0$.

Замечание. Утверждение о том, что выпуклая кривая лежит по одну сторону от касательной, представляется наглядно очевидным, но доказательство его нетривиально, хотя и не слишком сложно.

В настоящей статье разобраны задачи из сборника [1] или похожие на них. Некоторые из этих задач обсуждались на семинаре со студентами магистратуры, обучающимися по программе «Преподавание математики и информатики». На этом семинаре я предлагал студентам, многие из которых работают учителями математики в средней школе, не действовать по жесткому алгоритму, а предпринимая какое-либо действие, прежде всего подумать, надо ли его предпринимать и можно ли его предпринимать. Более конкретно, применительно к решению иррациональных уравнений, надо найти область определения входящих в уравнение функций, исследовать их поведение, построить графики. Мои слушатели признавали разумность такого рода действий, но говорили при этом «школьники так делать не будут». Я полагаю, что школьники будут делать то, чему их научат учителя. К сожалению, среди учителей укоренилась привычка действовать по жесткому шаблону, даже если это противоречит научному методу и здравому смыслу. И эта во многом скверная привычка передается учителями их ученикам уже много поколений. Разного рода инновации, реальные и мнимые, мало что изменили в этом смысле. Построение графиков вызывает боязнь и, как следствие, отторжение, хотя сейчас имеются эффективные электронные средства графопостроений.

В заключение хочу отметить, что одной из важнейших задач университетских преподавателей при подготовке учителей является настойчивое и неуклонное изучение научных основ решения задач, следование здравому смыслу, а не шаблону, осмысленное использование современных цифровых технологий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лаппо Л.Д., Попов М.А. Математика. Профильный уровень. Эксперт в ЕГЭ / М., Издательство Экзамен, 2017– 336 с.

УДК 004.9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ УЧАЩИХСЯ

Алиса Ивановна Наумова
МОУ «Тверской лицей», Тверь
E-mail: a_naumova_46@mail.ru

Ключевые слова: *проекты, оптимизация расчётов, математическое моделирование.*

Аннотация. В данной статье рассмотрены *проекты* учащихся Тверского лицея по социально-экономическому и физико-математическому профилям, в которых при составлении программных кодов для *оптимизации расчётов* использован метод *математического моделирования*.

В 2016-2017 учебном году в Тверском лицее под руководством преподавателя информатики высшей категории А.И. Наумовой ученица 11 класса социально-экономического профиля Кондратьева Кристина написала научную работу по теме: ”Программирование задач из курса экономики. Анализ предложений относительно концентрации рынка”, которая состоит из двух частей: *описательной* и *проектной*.

В первой части даны определения и характеристики *четырёх* основных моделей рынка (чистая конкуренция, монополия, олигополия, искусственная монополия). Во второй части последовательно представлена разработка проекта, которая включает следующие этапы:

1. Описание формальной модели проекта

Программа представляет собой расчёт по соответствующим формулам с помощью оператора case *возможной прибыли предприятия* (*фирмы*) относительно концентрации рынка, основные модели которого *чистая конкуренция, монополистическая конкуренция, олигополия, искусственная монополия* и входных данных: *цены* и *количества продукции*.

2. Компьютерная модель

Компьютерная модель разработана на языке программирования PascalABC.NET. Ниже приведен фрагмент программы по расчёту *прибыли олигополии*.

```
3:
 begin
  vmax := p * t * (100 + random(10)) / 100 - sc * q;
    //расчёт максимальной прибыли по олигополии
  if p > sc * 2.5 then vmin := vmax * (1 + random(10)) / 100
    //расчёт минимальной прибыли по олигополии
  else vmin := vmax * (10 + random(70)) / 100;
 end;
```

3. Компьютерный эксперимент

Запустить программу на выполнение можно как через *среду программирования PascalABC.NET*, так и с помощью *исполняемого файла* с расширением .exe (рис. 1, рис. 2).

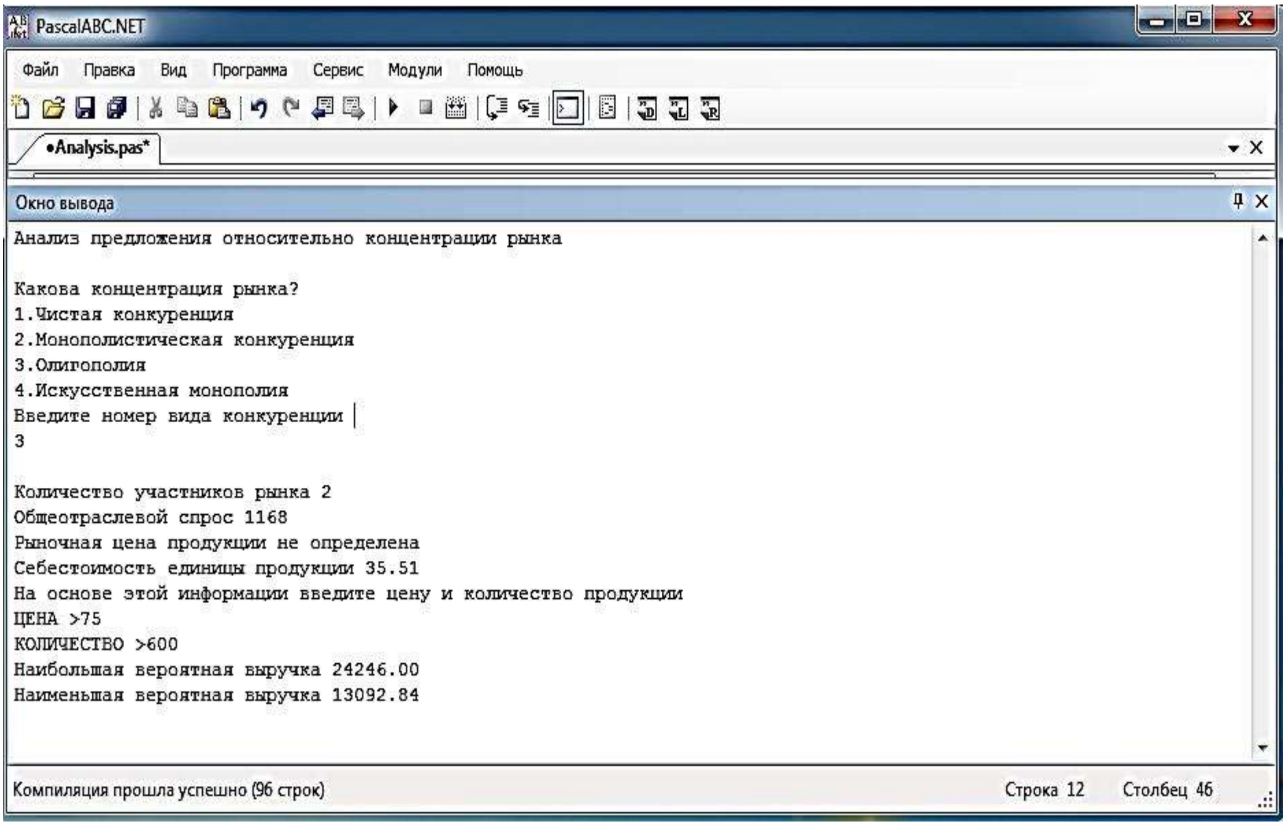


Рис. 1. Выполнение программы по тесту в среде PascalABC.NET

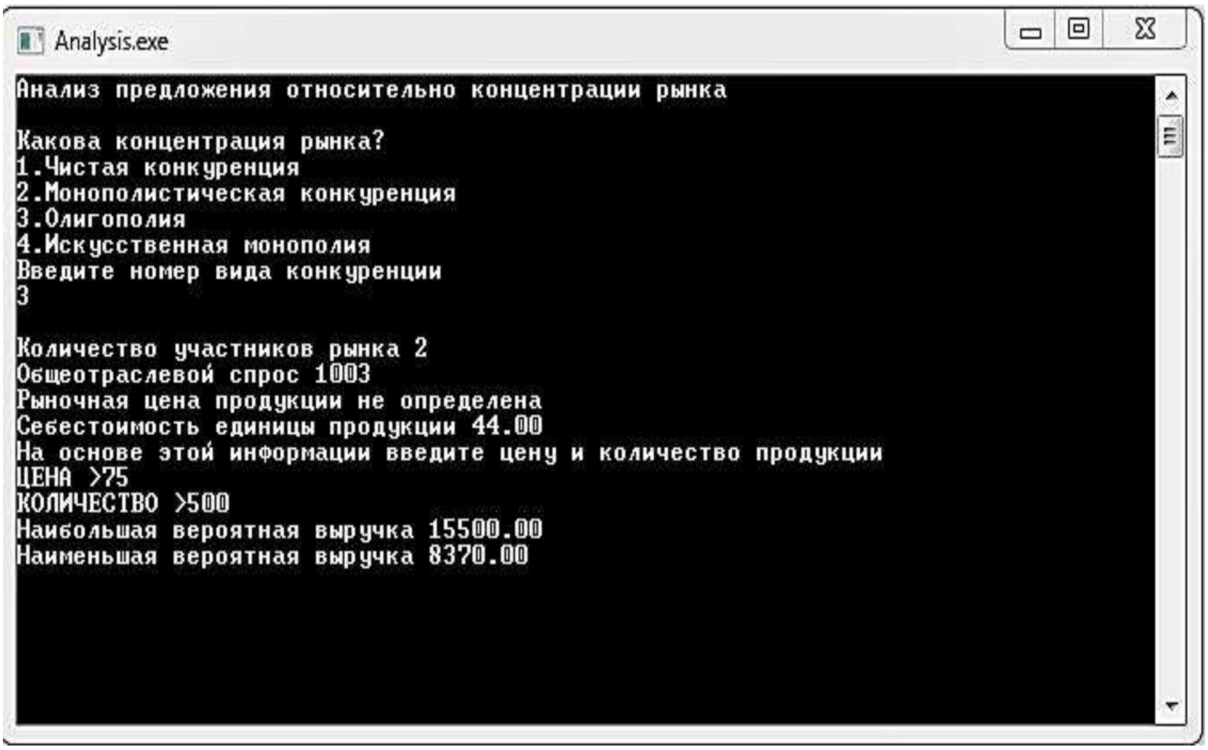


Рис. 2. Выполнение программы по тесту с помощью исполняемого файла

Математическое моделирование состоит в том, чтобы при *неоднократном* выполнении оператора case с использованием стандартной функции *random()*, получить *необходимый* результат.

Тестовый пример

модель рынка – олигополия

(**Критерии:** господство нескольких крупных фирм, единая цена).

Входные данные: h = 3, p =75, q = 600

Результат: vmax = ?, vmin = ?

Компьютерный эксперимент по тесту

В результате проведённого компьютерного эксперимента *наглядно показано*, как с помощью программы расчёта количества участников рынка, общеотраслевого спроса, рыночной цены и себестоимости единицы продукции можно *смоделировать* (подобрать необходимые значения) наиболее *оптимальную* ситуацию на рынке для *конкретного производителя*.

По итогам Всероссийского конкурса ученических рефератов "Кругозор", III Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся "Старт в науке" данная работа награждена Дипломом Победителя II Степени и опубликована в общероссийском журнале Академии Естествознания "Международный школьный научный вестник" (ЭЛ № ФС 77-67254) ISSN 2542-0372 (сентябрь, 2017 - №4). Получено Свидетельство автора научной публикации № 213**.** Электронная версия доступна по ссылке: https://school-herald.ru/pdf/2017/4/309.pdf.

В этом учебном году в Тверском лицее под руководством преподавателя информатики высшей категории А.И. Наумовой ученик 11 класса физико-математического профиля Николай Титов написал научную работу по теме: "Исследование графов при проектировании компьютерных сетей на языке объектно-ориентированного программирования Delphi", которая состоит из двух частей: *описательной и пректной.*

В первой части даны определения, классификация, технические характеристики компьютерных сетей, приведены основные понятия теории графов и представление графа с помощью матрицы смежности и дерева. Во второй части последовательно представлена разработка проекта, которая включает следующие этапы:

1. Описание формальной модели проекта

При проектировании *проводных компьютерных сетей* необходимо определить расстояние маршрута прокладки кабеля *минимальной длины*, но подходящего к каждому зданию. Для решения таких задач наиболее удобно использовать *теорию графов*, которая позволяет *оптимизировать расчёты с помощью генерации* координат вершин графа *случайным образом. Поэтапный анализ* даёт возможность найти *минимальный вес* всех рёбер построенного остовного дерева графа.

2. Создание графического интерфейса проекта (рис. 3)

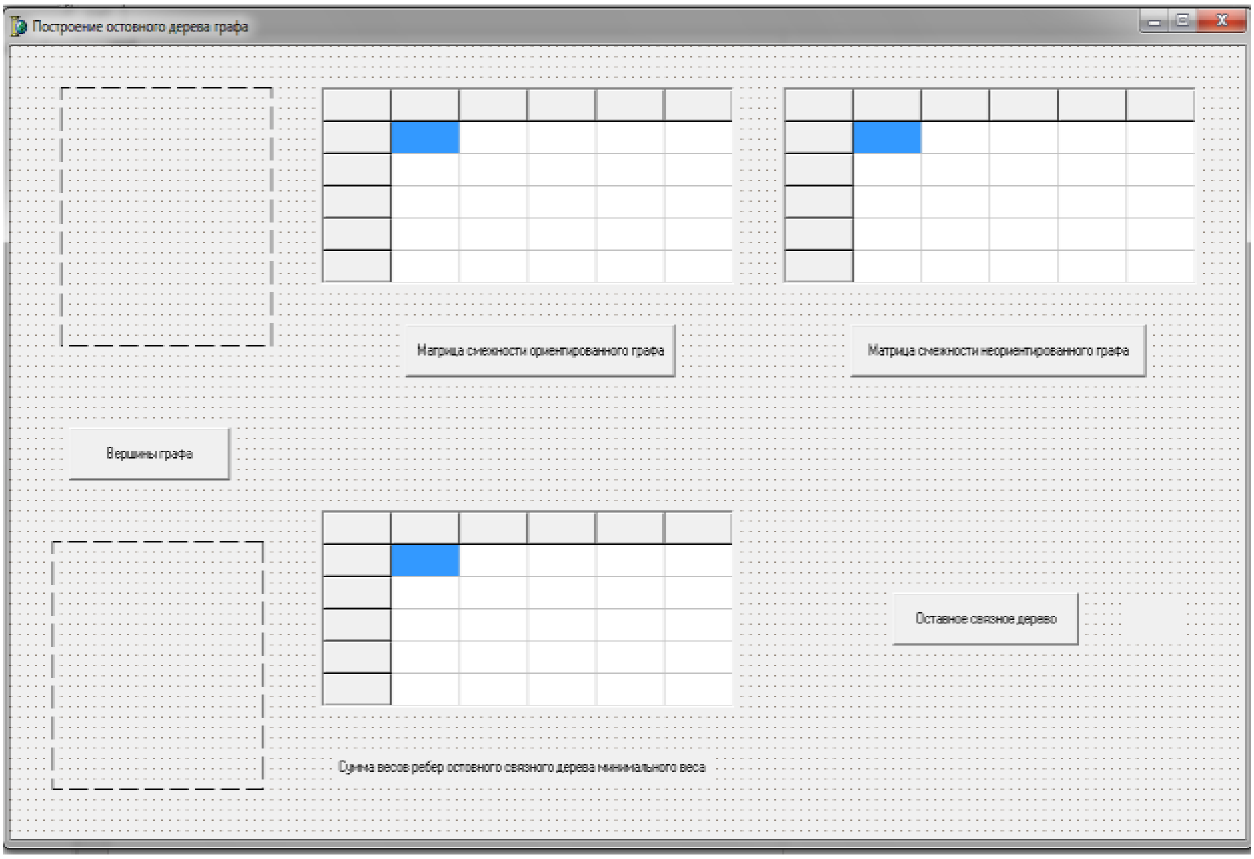


Рис. 3. Графический интерфейс проекта

3. Создание событийных процедур
генерация случайных координат вершин графа и их рисование в графическом поле, *вывод элементов матрицы* смежности взвешенного *ориентированного* графа, *вывод элементов матрицы* смежности взвешенного *неориентированного* графа, построение остовного связного дерева *минимального веса*;

4. Компьютерный эксперимент

Запустить проект на выполнение можно как через *систему программирования* Delphi, так и с помощью *исполняемого файла* с расширением .exe (рис. 4).

Щелкнуть по кнопке *Вершины графа*. В графическое поле будут выведены вершины графа и их номера. Для *моделирования расположения вершин* и выбора наиболее *оптимального* варианта щёлкнуть *несколько раз.*

В результате проведённого компьютерного эксперимента в графическом поле будет построено *остовное связное дерево* и в соответствующие ячейки таблицы будут выведены *веса рёбер* остовного дерева. На надпись будет выведена *сумма весов рёбер* остовного связного дерева ***минимального веса***.

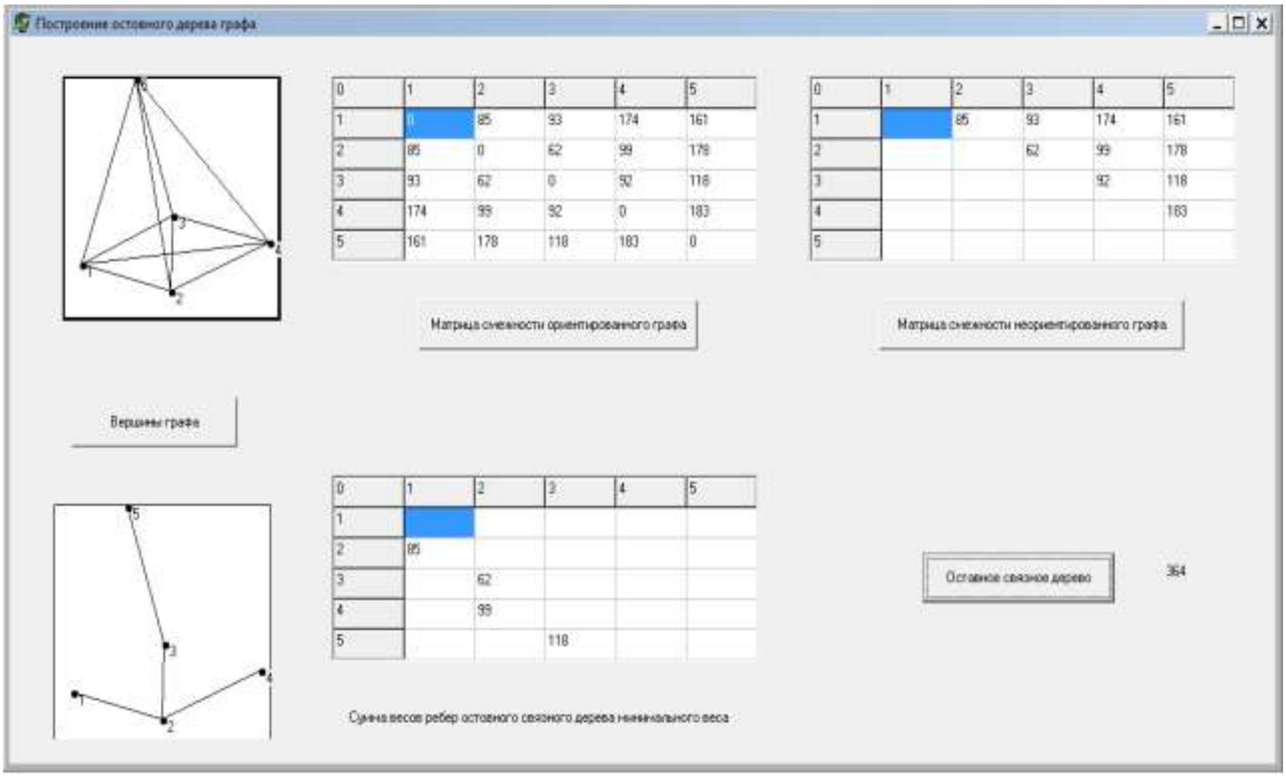


Рис. 2. Поэтапное выполнение проекта в среде Delphi

По итогам IV Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся “Старт в науке” данная работа награждена Дипломом Победителя III степени и опубликована в общероссийском журнале Академии Естествознания “Международный школьный научный вестник” (ЭЛ № ФС 77-67254) ISSN 2542-0372 (февраль, 2018 - №1). Получено Свидетельство автора научной публикации № 550**.** Электронная версия доступна по ссылке: https://school-herald.ru/pdf/2018/1/516.pdf.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. PascalABC.NET - это. Современное программирование на языке Pascal [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://pascalabc.net/ (дата обращения 21.08.2017).

2. Кондратьева К.Е. Программирование задач из курса экономики. Анализ предложений относительно концентрации рынка // Международный школьный научный вестник. – 2017. – № 4. – С. 45-53.

3. Культин Н.Б., Программирование в Turbo Pascal 7.0 и Delphi, Учебник, Санкт-Петербург, 2001.

4. Титов Н.А. “Исследование графов при проектировании компьютерных сетей на языке объектно-ориентированного программирования Delphi” // Международный школьный научный вестник. – 2018. – № 1. – С. 31-39.

5. Угринович Н., Информатика и ИКТ, Учебник для 11 класса, профильный уровень, БИНОМ, Москва, 2009.

УДК 378.147

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ НА УРОКАХ ГЕОМЕТРИИ В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Светлана Валерьевна Нечаева
МОБУ "Есеновичская СОШ", с. Есеновичи, Вышневолоцкий район, Тверская обл.
E-mail: svnechv@mail.ru

Ключевые слова: *геометрия, химия, биология, история, география, физика, литература.*

Аннотация. В работе рассматриваются примеры межпредметных связей геометрии с другими дисциплинами, изучаемыми в основной школе. Данный материал может быть использован при подготовке и проведении интегрированных уроков.

Вдохновение нужно в поэзии, как и в геометрии

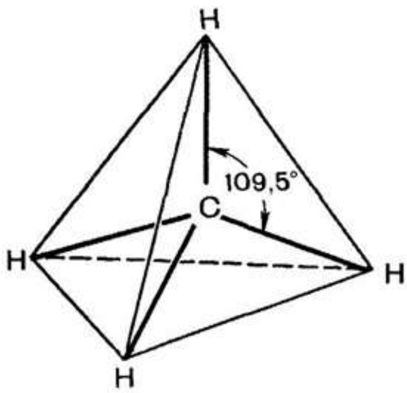
А. С. Пушкин

Предмет «Геометрии» – один из наиболее сложных предметов изучения в школьном курсе. Одна из задач учителя – развитие интереса к данной дисциплине.

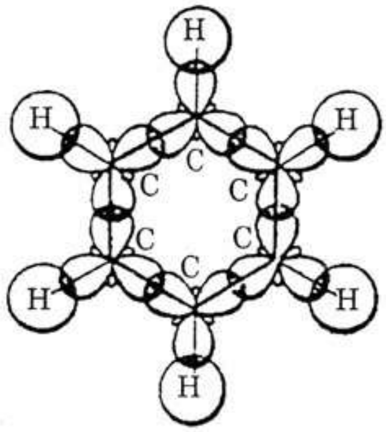
Рассмотрим способ привлечения внимания ученика через межпредметные связи. Ребенок может активно интересоваться биологией, химией, историей и другими науками, но не проявлять интереса к геометрии. Учителю необходимо найти точки соприкосновения с интересами ученика, так как важно развивать интерес к данной дисциплине.

Рассматривая материалы ГИА по математике разных лет, можно проследить, что на протяжении всего периода включались задания связанные с химией (задачи на растворы, смеси и сплавы), физикой (задачи на расчеты по формулам), экономические задачи и другие. Межпредметные связи важны для формирования и развития всесторонне развитой личности ученика. Поэтому далее приведены примеры, связанные с различными дисциплинами, изучаемые в школе.

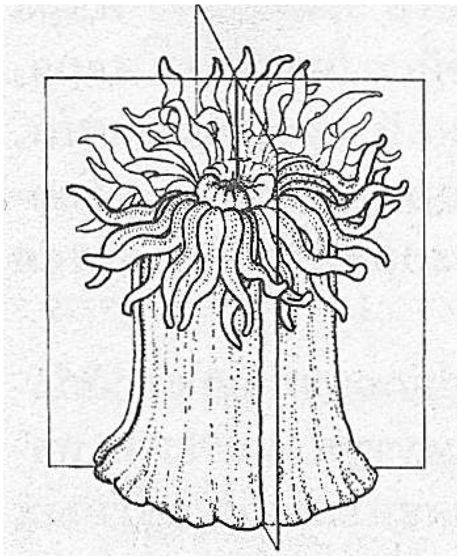
Химия. Молекула первого члена гомологического ряда алканов – метана (CH_4) – имеет тетраэдрическое строение, т.е. форму правильной пирамиды. В центре тетраэдра находится атом углерода, а в вершинах – атомы водорода. Валентный угол H-C-H равен $109^{\circ}28'$.



Бензол C_6H_6 – родоначальник ароматических углеводородов. Каждый из шести атомов связан с двумя соседними атомами углерода и атомом водорода. Валентные углы межу каждой парой (C-C, C-H) равны 120°. Таким образом, скелет связей представляет собой правильный шестиугольник, в котором все атомы углерода все связи C-C и C-H лежат в одной плоскости.

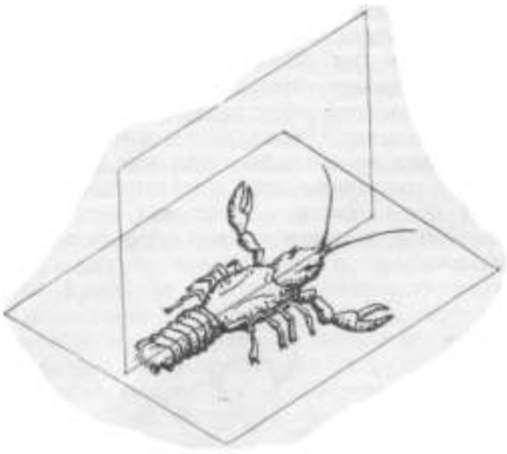


Биология. У подавляющего большинства животных части тела расположены симметрично. Различают два основных типа симметрии животных: радиальную и двустороннюю. Радиальная симметрия характеризуется тем, что одинаковые части тела и органы располагаются по радиусам от срединной продольной оси животного. Тело с радиальной симметрией может быть разделено на равные части несколькими плоскостями, проходящими через эту ось. Радиальная симметрия тела свойственна преимущественно животным, ведущим сидящий или малоподвижный образ жизни или пассивно плавающим в воде. Примером подобных животных могут служить гидры, медузы, морские звезды и пр.

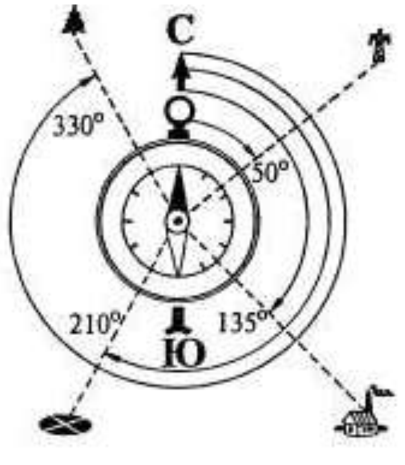


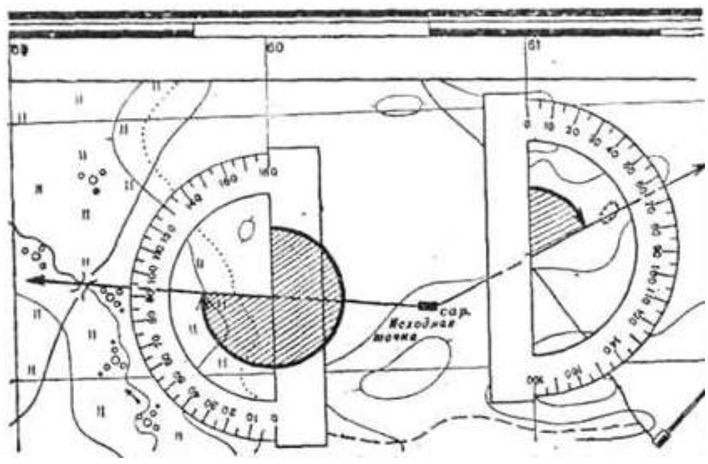
Двусторонняя симметрия тела животного отличается тем, что только одна плоскость может разделить его на две равные половины. У двустороннесимметричных животных можно различить левую и правую половины, передний и задний концы тела. Данная симметрия присуща преимущественно животным, способным к самостоятельным передвижениям.

Как правило, она бывает неполной, относительной. Обычно организм животного снаружи более или менее правильно симметричен (левая и правая половины его почти одинаковы), но в расположении многих внутренних органов наблюдается явная асимметрия. Внутренняя асимметрия любопытна будет в изучении биологии, а геометрии важно увидеть симметрию во внешнем виде тела животного.



География. Чтобы определить точное направление на объект, необходимо знать, в какой стороне горизонта он находится. Нужно определить азимут на этот объект. Азимут – это угол между направлением на север и направлением на объект. Для определения азимута с помощью компаса его сначала ориентируют. Затем на компас кладут тонкую палочку по направлению от центра компаса к предмету. Азимут отсчитывают от севера по часовой стрелке к направлению на предмет. Так, направление на восток имеет азимут 90°, на юг – 180°, на запад – 270°. При измерении азимута на плане основание транспортира совмещают с направлением на север, а центр транспортира – с вершиной угла, одной стороной которого служит направление на север, а другой – направление на объект. Далее определяют, через какую отметку на транспортире проходит сторона угла, представляющая собой направление на объект. Это и будет величина искомого азимута.

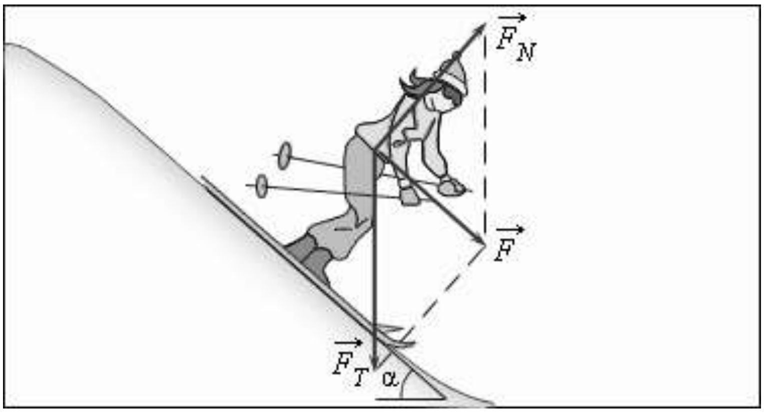




Обратимся к глобусу и мысленно рассечем земной шар плоскостями, перпендикулярными оси вращения Земли. На поверхности глобуса появляются параллельные друг другу окружности. Эти окружности так и называют параллели (от греческого слова parallelos - идущий рядом) Самая длинная и главная параллель – экватор, его длина 40076 км. Экватор находится на равном расстоянии от полюсов планеты и делит Землю на Северное и Южное полушария. Длина других параллелей уменьшается по направлению от экватора на юг и на север. Все точки, лежащие на одной параллели, одинаково удалены от экватора. Линии параллелей показывают направление запад-восток.

История. Египетские пирамиды – древние каменные сооружения пирамидальной формы, расположенные в Египте. Количество объектов, идентифицируемых как египетские пирамиды, насчитывается более сотни. Большая часть пирамид была построена в качестве усыпальниц для фараонов Древнего и Среднего царств. Древнейшие из известных пирамид находятся в Саккаре. Самой древней считается пирамида Джосера, построенная архитектором Имхотепом в период с 2667 по 2648 гг. до н.э. Самые известные пирамиды находятся на окраине Каира в Гизе, три из которых до сих пор являются одними из крупнейших сооружений, когда-либо построенные человеком. Пирамида Хеопса является самой большой пирамидой в Египте и входит в число Семи чудес света. Размеры пирамиды Хеопса удивляют даже современного человека. Ее основание занимает огромную площадь в 53 тыс. квадратных метров, что соразмерно десяти футбольным полям. Не менее поражают и другие параметры: длина основания – 230м, длина бокового ребра – столько же, а площадь боковой поверхности – 85,5 тыс. квадратных метров. Сейчас высота пирамиды Хеопса равна 138 метрам, однако изначально она достигала 147 метров, что можно сравнить с пятиэтажным небоскребом. Годы наложили свой отпечаток на сохранность пирамиды. Многочисленные землетрясения за тысячи лет обрушили каменный верх сооружения, а гладкий камень, которым были облицованы внешние стены, осыпался. И, тем не менее, интерьер достопримечательности, невзирая на множество грабительских и вандальских вторжений, остался практически неизменным.

Физика. Второй закон Ньютона – основной закон динамики. Этот закон выполняется только в инерциальных системах отсчета. Приступая к формулировке второго закона, следует вспомнить, что в динамике вводятся две новые физические величины – масса тела m и сила $\vec{F}$, а также способы их измерения. Первая из этих величин – масса – является количественной характеристикой инертных свойств тела. Она показывает, как тело реагирует на внешнее воздействие. Вторая – сила – является количественной мерой действия одного тела на другое. Если на тело одновременно действуют несколько сил (например, $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ и $\overrightarrow{F_3}$), то под силой $\vec{F}$ в формуле, выражающей второй закон Ньютона, нужно понимать равнодействующую всех сил: $\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3}$. Это яркий и наглядный пример применения сложения двух и более векторов.



Литература. Известный роман Жюля Верна «Таинственный остров» содержит не только интересный сюжет, но и достаточно много геометрических рассуждений. В этом романе наглядно описан один из способов измерения высоких объектов.

«… – Сегодня нам надо измерить высоту площадки Дальнего Вида, – сказал инженер.

– Вам понадобится для этого инструмент? – спросил Герберт.

– Нет, не понадобятся. Мы будем действовать несколько иначе, обратившись к не менее простому и точному способу.

Взяв прямой шест, футов 12 длиной, инженер измерил его возможно точнее, сравнивая со своим ростом, который был ему хорошо известен. Герберт же нес за ним отвес: просто камень, привязанный к концу веревки.

Не доходя футов 500 до гранитной стены, поднимавшейся отвесно, инженер воткнул шест фута на два в песок и, прочно укрепив его, поставил вертикально в помощью отвеса. Затем он отошел от шеста на такое расстояние, чтобы лежа на песке, можно было на одной прямой линии видеть и конец шеста, и край гребня. Эту точку он тщательно пометил колышком.

– Тебе знакомы начатки геометрии? – спросил он Герберта, понимаясь с земли.

– Да.

– Помнишь свойства подобных треугольников?

– Их сходные стороны пропорциональны.

– …Если измерим два расстояния: расстояние от колышка до основания шеста и расстояния стены, то, зная высоту шеста, сможем вычислить четвертый, неизвестный член пропорции, т. е. высоту стены…»

Учащиеся достигнут высоких результатов только тогда, когда увидят, что определенные умения необходимы ему и на других предметах. Таким образом, эффективное применение межпредметных связей позволяет сформировать и развивать у учащихся общекультурные, учебно-познавательные, информационные и коммуникативные компетенции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Биология: 7 класс: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений/ В. М. Константинов, В. Г. Бабенко, В. С. Кучменко: под. ред. проф. В. М. Константинова. – 4-е изд., испр. – М.: Вента-Граф, 2012. – 304с.

2. Всеобщая история. История Древнего Мира. 5 класс: учеб. для общеобразоват. организаций/ А. А. Вигасин, Г. И. Гозер, И. С. Свенцицкая; по ре. А. А. Искандерова. – 5-е из. – М.: Просыещение, 2015. – 303 с.

3. География. Планета Земля. 5-6 класса: учеб. для общеобразоват. организаций / А. А. Лобжанизе. – 5-е изд. – М. : Просвещение, 2015. – 159 с.

4. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 255 с.

5. Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 7-е из. – М. : Просвещение, 2017. – 383 с.

6. Жуль Верн. Таинственный остров: Роман/ Пер. с франц. Н. Немчиновой и А. Худадовой; Предисл. Е. Брандиса; Рис. П. Луганского. – М.: Дет. лит., 1984. – 606 с.

7. Физика. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций/ С. В Громов, Н. А. Родина; под ред. Н. В. Шароновой. – 12-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 174 с.

8. Химия. 10 класс. Базовый уровень: учебник / О. Г. Габриелян. – 2-е изд., стереотип. – М. : Дрофа, 2014. – 191 с.

УДК 378.147.227

КАК ПРЕПОДНЕСТИ УЧАЩИМСЯ КУРСОВОЙ ИЛИ ДИПЛОМНЫЙ ПРОЕКТ, ПОДХОД ПОСТРОЕНИЯ И ОБОСНОВАНИЯ СВЯЗИ УЧЕБНОЙ ЗАДАЧИ С РЕАЛЬНЫМ БИЗНЕС-ПРИЛОЖЕНИЕМ

Василий Владимирович Никонов
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г.Тверь
nikonov.vv@tversu.ru

Ключевые слова: *дипломный проект, «башня»*

Аннотация. В статье изложен подход по подготовке и преподнесении материалов учебных задач и тем дипломных проектов для дополнительной мотивации учащихся

Перед преподавателем стоит непростая задача не только донести необходимые знания, но и заинтересовать учащихся предметом. Личная заинтересованность, как правило, позволяет лучше погрузиться в предмет, читать статьи и книги, проходить дополнительные курсы и сдавать квалификационные экзамены, участвовать в олимпиадах и конкурсах.

Как подобрать материал и преподнести его, помочь увидеть перспективность исследуемой темы и востребованность знаний? Курсовой или дипломный проект, как правило, сложнее в плане поддержания заинтересованности, по сравнению с освоением курса лекций, так как требует индивидуальных дополнительных усилий со стороны учащегося. Выбирая из предложенных тем проектов студент, в силу разных причин, часто ориентируется на минимизацию усилий, не воспринимая работу над курсовым или дипломным проектом как повышение своего уровня реальных знаний.

Преподаватель зажат, как минимум, между:

- оставаться в рамках учебной программы;
- знания и подготовка учащихся должны быть достаточными;
- ограничение времени.

При этом перечень пожеланий очень достаточно обширный: отражение актуального научного знания и технологического развития, темы не повторялись часто, желательна практическая применимость результатов.

Ограничения существуют объективно, поэтому отталкиваться необходимо от них. Учитывая уровень подготовки учащихся, который может сильно колебаться в зависимости от специальности, курса, конкретной группы, учебную программу и сроки подготовки, необходимо выбрать ряд базовых основных учебных задач. Это будущий второй этаж «башни».

Не логично начинать строить что-то со второго этажа, но это позволит сохранить наглядность изложения.

Достраиваем «башню» вниз. Когда важный этап выбора основной задачи выполнен, не сложно подобрать простые подзадачи, которые составят первый этаж. Фундаментом являются уже имеющиеся у студента знания.

Достраиваем «башню» вверх. Отметим ключевой: после выбора задачи необходимо построить наглядную и логичную проекцию учебной задачи на некую бизнес-функцию. Переход должен быть органичным и понятным и для слушателей. Здесь помогут, прежде всего, практический опыт применения знаний в работе, а также кругозор и актуальные публикации в СМИ. Под это отдадим весь третий этаж «башни».

Четвертый этаж можно назвать научно-популярным, здесь будет обобщение отдельной бизнес-функции до крупной бизнес-задачи, где необходимо показать развитие и масштабирование, переход от частного решения к чему-то большому.

Пятый этаж ещё более популярный и описательный, его особенность — привязка построенной на предыдущем этапе бизнес-задачи к реальным событиям и компаниям, которые, как можно предположить, используют схожие бизнес-задачи. Функция этого уровня — якорь, «приземляющий» бизнес-задачу, демонстрирующий её реальную востребованность и, что не менее важно, успешность.

Верхняя часть такой «башни» — четвертый и пятый этажи — удобно использовать как вводную сразу для серии задач за счет проекций.

Получаем такую башню:

5	подборка актуальных на рынке и в СМИ компаний, которые используют схожие бизнес-задачи
4	обобщение отдельной бизнес-функции до крупной бизнес-задачи
3	проекция на бизнес-функцию
2	основная учебная задача
1	набор простых задач
0	фундамент, знания учащегося

Презентация тем курсовых и дипломных проектов идет по «башне» сверху вниз. Представим это в виде таблицы:

5	бизнес-задача с примерами востребованности на рынке
4	декомпозиция бизнес-задачи, она разбивается на отдельные простые бизнес-функции, как правило доступные одному специалисту или разработчику
3	формализация с необходимым упрощением бизнес-функции как переход к учебному материалу
2	получение формализованной задачи и ограничений для неё
1	Декомпозиция задачи в набор простых подзадач

Внимание аудитории концентрируется на первом и пятом этажах построенной «башни». Поэтому необходимо подчеркнуть, что изюминка в решении формализованной задачи, которое превращает набор простых задачи в комплекс и пробуждает синергетический эффект. Это, фактически, обратный прыжок с первого этажа на второй.

Также важно в процессе презентации подчеркнуть и пояснить на примерах эффективность алгоритмического улучшения существующих известных решений.

В рамках презентации желательно добиться эффекта, чтобы учебная задача воспринималась как линза, преломляющая уже имеющиеся знания, направленные простыми задачами в бизнес-приложения. Построить такую линзу, такой переход — вот что представляет из себя учебный проект.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никонов В.В. Как преподнести учащимся курсовой/дипломный проект или строим «башню» со второго этажа [Электронныйресурс], – URL: https://habrahabr.ru/post/311632/ (дата обращения: 06.10.2016)
2. Никонов В.В. Как «башня» превращается в «пирамиду» – на примере темы анализа и фильтрации DNS [Электронныйресурс], – URL: https://habrahabr.ru/post/325604/ (дата обращения: 29.08.2017)

УДК 372.851

КРОССВОРДЫ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯМ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Ирина Геннадьевна Одоевцева
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: dichenko-irina@list.ru

Наталья Евгеньевна Плеханова
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: dichenko-irina@list.ru, nata.ya28@mail.ru

Ключевые слова: *математический объект, понятие, определение, кроссворд, средство обучения.*

Аннотация. В данной работе рассматривается, как кроссворды помогают в обучении определениям математических объектов.

Современный этап развития отечественного образования характеризуется переходом от предметно-ориентированных технологий обучения к личностно-ориентированным. Поэтому главной задачей обучения математике является не изучение основ математической науки как таковой, а общее интеллектуальное развитие, развитие у учащихся в процессе изучения математики качеств мышления, необходимых для полноценного функционирования человека в современном обществе.

В связи с тем, что в понятиях отражены самые основные, существенные стороны предметов и явлений действительности, формирование научных понятий у учащихся является одной из основных задач обучения, ориентированного на развитие мышления. Понятия – это базисные единицы в системе знаний любой дисциплины, главным образом, в математике. Овладение понятиями тесно связано с активной мыслительной деятельностью, в частности с такими операциями как сравнение, обобщение, синтез, анализ, абстрагирование, классификация. Нельзя высказать ни одной мысли, не оперируя понятиями. Поэтому чем лучше школьники усваивают понятия, которые у них формируются, тем легче они будут строить свои суждения, умозаключения тем совершеннее та основа, которая связана с развитием мышления [1].

Вопросами организации успешного усвоения определений занимались М.Б. Волович, И.Я. Лернер, Е.И. Лященко, Г.И. Саранцев и др.

Под определением понятия понимается предложение, в котором раскрывается суть нового термина. Определить объект, значит выбрать из его свойств такие и столько, чтобы каждое из них было необходимым и достаточным для отличия объекта. При определении объекта задаются его название и перечень свойств.

Выделяют следующие уровни усвоения понятий:

- знание (обучающийся узнает понятие, знает формулировку определения);
- понимание (обучающийся отделяет существенные свойства от несущественных, может привести собственные примеры и контр примеры к

понятию, подводит объект под понятие, устанавливает связи данного понятия с другими);

- применение (обучающийся указывает для решения каких задач можно использовать данное определение, может использовать для решения задач).

Большинство задач, предлагаемых учебниками различных авторов – это задания на применение, что требует от учителя поиска и использования разнообразных средства обучения для отработки понятий на уровне «знание» и «понимание». Одним из таких средств является кроссворд.

Кроссворд – это довольно распространённая и интеллектуальная игра со словами, которая помогает развивать память, учит искать недостающую информацию [4], [6].

Работа с кроссвордами на уроках способствует достижению следующих целевых ориентаций:

1. дидактические: освоения понятийно-терминологического аппарата по изучаемой дисциплине; углубление, обобщение, систематизация и контроль знаний;

2. развивающие: развитие внимания, ассоциативного, творческого мышления; умения четко и лаконично выражать мысли, работать с различными источниками информации (печатными, Интернет-ресурсами); анализировать, систематизировать, обобщать информацию;

3. воспитывающие: повышение учебной мотивации, воспитание самостоятельности; нравственных, эстетических и мировоззренческих установок; сотрудничества, коммуникативности, толерантности;

4. валеологические: снятие эмоционального напряжения в учебном процессе [2].

При составлении учебных кроссвордов необходимо соблюдать следующие требования: кроссворды составляются по тексту учебной литературы; при составлении кроссвордов необходимо придерживаться принципов наглядности и доступности; не допускаются аббревиатуры и сокращения.

Кроме того, следует четко представлять с какой дидактической целью используется кроссворд. На уроке открытия новых знаний можно предложить небольшой кроссворд для того, чтобы обучающиеся сами искали ответы в учебнике. На уроке обобщения и систематизации в кроссворде должен содержаться материал по изученной теме или разделу, в процессе разгадывания которого обучающиеся смогут установить связи между понятиями. Также кроссворды могут быть использованы при организации итогового повторения за курс основной школы и при подготовке к ОГЭ [3].

Нами был разработан и составлен с помощью приложения LearningApps.org (приложение Web 2.0 для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей) кроссворд по геометрии для 8 класса https://learningapps.org/display?v=pq6je708c18 (рис.1) [5].

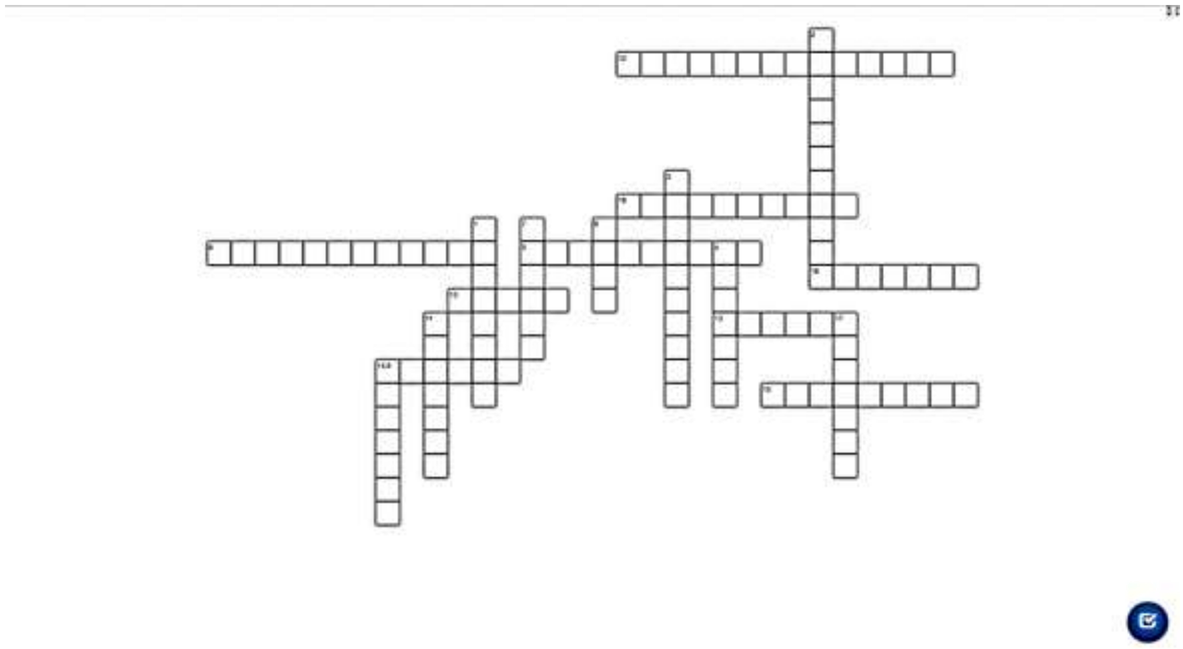


Рис. 1. Кроссворд в LearningApps.org

По горизонтали

5. Геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки.

6. Две непересекающихся прямых на плоскости.

10. Отношение противолежащего катета к гипотенузе.

12. Четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

13. Расстояние от центра окружности до какой-либо точки, лежащей на данной окружности.

14. Перпендикуляр, проведённый из любой точки противоположной стороны параллелограмма к прямой, содержащей основание.

15. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

16. Отношение противолежащего катета к прилежащему катету.

18. Треугольник, у которого стороны равны 3, 4, 5.

По вертикали

1. Сумма всех сторон многоугольника.

2. Число *k*, которое равно отношению сходственных сторон подобных треугольников – ... подобия.

3. Сторона треугольника, лежащая против прямого угла.

4. Утверждение, нуждающееся в доказательстве.

7. Длина отрезка АВ ненулевого вектора $\overrightarrow{AB}$.

8. На что опирается вписанный угол в окружности?

9. Любой многоугольник разделяет плоскость на 2 области. 1-я область.

11. Отношение прилежащего катета к гипотенузе.

17. Линия, соединяющая середины двух сторон треугольника.

Предложенный кроссворд является итоговым по изучению курса геометрии в 8 классе. С помощью него можно проверить, как ученики усвоили и запомнили определения математических объектов за год обучения, а также он позволяет вспомнить несколько понятий из 7 класса.

Кроссворд помогает учителю разнообразить процесс изучения определений, привлечь внимание учеников, повысить мотивацию к изучению математики, а главное сформировать интеллектуальные умения обучающихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баженова Н.Г. Обучение учащихся определениям математических объектов: Учеб пособие для вузов по спец. «032100 Математика». Биробиджан: Изд-во БГПИ, 2004. – 100 с.

2. Бердникова Е.Е. Математическое лото, кроссворды и кросснамберы как средство усвоения и контроля элементов комбинаторики в 5-6 классах. – Информационно-коммуникационные технологии в педагогическом образовании. 2014. № 5 (33). – 1-5 с.

3. Одоевцева И.Г., Сизинцева А.А. Интегрированный урок математики и информатики по теме «Квадрат суммы». – Постулат. 2017. №12.

4. Худадатова С.С. Математика в ребусах, кроссвордах, чайнвордах, криптограммах. 6 кл. – М.: Школьная пресса, 2002. – 32 с.

5. Что такое LearningApps.org? [Электронный ресурс] https://learningapps.org/about.php

6. Что такое кроссворд и откуда он появился? [Электронный ресурс] http://fb.ru/article/294713/chto-takoe-krossvord-i-otkuda-on-poyavilsya

УДК 004.925

ГРАФИЧЕСКИЙ ПАКЕТ TIKZ/PGF

Иван Михайлович Поташов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *компьютерная графика, визуализация, TeX/LaTeX, TikZ/PGF.*

Аннотация. В статье рассмотрены некоторые возможности и приёмы работы в среде TeX/LaTeX с использованием графического пакета TikZ/PGF. При помощи данного пакета пользователь может осуществлять вставку иллюстраций в документы, не прибегая к использованию внешних файлов.

Хорошо известно, что использование графики, визуализации как в художественной, так и в научной литературе позволяет сделать излагаемый материал более понятным и доступным для читателя. Именно поэтому многие монографии и статьи авторы снабжают рисунками, чертежами, графиками и другой визуальной информацией.

Для вёрстки и редактирования научных работ и документов математики, а также специалисты в области естественных наук часто используют систему компьютерной вёрстки TeX/LaTeX. Данная система позволяет на основе компьютерного кода, набранного в текстовом редакторе, создавать текстовые документы в форматах dvi и pdf. Однако для вставки иллюстраций в компилируемый документ системе необходимо обращаться к внешним файлам, которые предварительно создаются в других программах. Как правило, используются либо файлы в формате eps при компилировании по схеме tex—dvi—pdf или файлы форматов png, jpg и pdf при прямом компилирований tex—pdf. В ряде случаев обращения к внешним файлам можно избежать, если использовать графические пакеты, в частности, пакет Tikz/PGF.

Автором пакета Tikz/PGF является Тил Тантау (Till Tantau). Первая версия данного пакета была представлена в 2005 году. На текущий момент последняя из представленных версий — версия 3.01, разработанная в 2015 году.

Пакет Tikz/PGF является пакетом векторной графики и позволяет создавать рисунки «с нуля» при помощи специального программного кода, не прибегая к обращению к внешним файлам. При помощи этого можно создавать как простые геометрические чертежи, так и сложные схемы и диаграммы. С некоторыми примерами использования данного пакета можно ознакомиться на сайте texample.net [1]. Возможности данного графического пакета очень широки, и формат статьи не позволяет описать их все. Для более подробного изучения можно ознакомиться с работой [2] , руководством автора пакета [3], а также с учебным пособием [4]. Ниже мы рассмотрим ряд приёмом работы с данным пакетом.

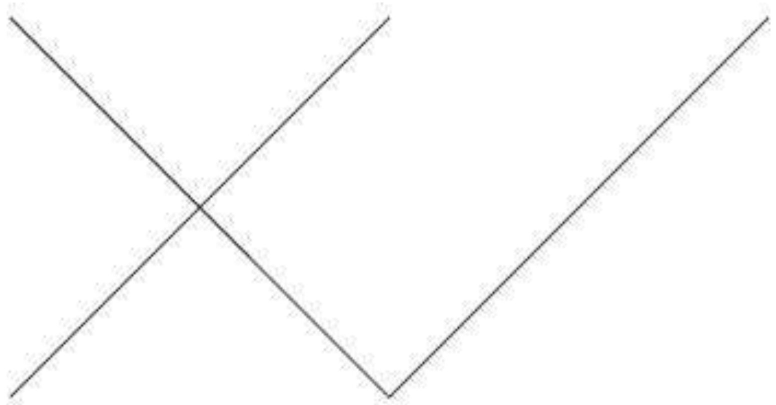
1. Подключение пакета. Данный пакет подключается так же, как и любой другой пакет в системе TeX: для этого нужно в преамбуле документа вставить команду \usepackage{tikz}. После этого можно будет приступать к набору кода для «рисования». Для построения рисунков используется окружение tikzpicture.

Данное окружение может быть использовано как самостоятельное, так в качестве вложенного в окружение figure. Таким образом, в общем виде для вставки графического файла необходимо использовать следующий код:

```
\begin{figure}
 \centering
 \begin{tikzpicture}[параметры]
   код
 \end{tikzpicture}
 \caption{название рисунка}
\end{figure}
```

Здесь выражение [параметры] обозначает те опции, которые применяются ко всему рисунку. Это могут быть толщина и цвет линий, цвет заливки, масштабирование рисунка и ряд других параметров (см. примеры и инструкции [1—4]).

2. Отрезки и ломаные. По умолчанию пакет TikZ использует декартову систему координат. Если пользователя требуется начертить отрезок, соединяющий точки (x1, y1) и (x2, y2), то для этого нужно воспользоваться командой \draw (x1,y1)--(x2,y2). Аналогично можно построить и ломаную линию с любым количеством вершин. Ниже на рисунке 1 проиллюстрирован пример построения отрезков.

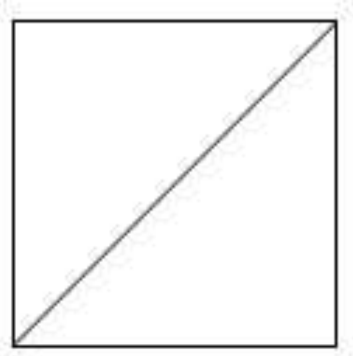


```
\begin{tikzpicture}[scale=3]
  \draw(0,0)--(1,1);
  \draw(0,1)--(1,0)--(2,1);
\end{tikzpicture}
```

Рис 1. При помощи такого простого кода можно запрограммировать рисование отрезков и ломанных. Команды в коде разделяются при помощи точки с запятой и выполняются в том порядке, в каком они заданы

Далее мы рассмотрим, как программируется рисование некоторых геометрических фигур.

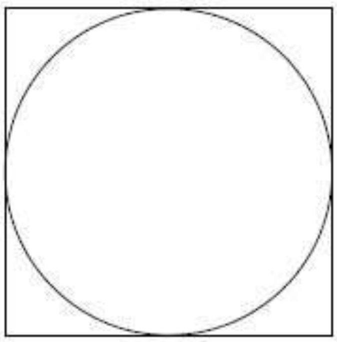
3. Прямоугольники. Приём, описанный выше для построения ломаных линий, может быть использован для построения прямоугольника. Но для построения данной фигуры можно воспользоваться и более простым кодом. Для этого используется код \draw (x1,y1) rectangle (x2,y2). Здесь в качестве параметров выступают координаты концов одной из диагоналей прямоугольника, при этом его стороны будут направлены вертикально и горизонтально. На рисунке 2 показан пример использования этой команды.



```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \draw(0,0)--(1,1);
  \draw(0,0)rectangle (1,1);
\end{tikzpicture}
```

Рис 2. Фрагмент кода с использованием rectangle. Первая команда программирует рисование диагонали, а вторая – рисования квадрата

4. Окружность. Для «рисования» окружностей в пакете TikZ используется команда \draw (x, y) circle (r). Здесь параметры x и y задают координаты центра окружности, а r – её радиус. Пример с использование данного кода показан на рисунке 3.

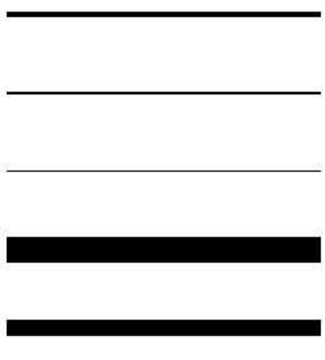


```
\begin{tikzpicture}[scale=3]
  \draw(0,0)rectangle (1,1);
  \draw(0.5,0.5)circle (0.5);
\end{tikzpicture}
```

Рис 3. Пример «рисования» окружности. При помощи данного кода мы «вписываем» окружность в квадрат, взятый из предыдущего примера

Мы рассмотрели несколько примеров программирования рисования простейших геометрических фигур. Далее мы рассмотрим несколько примеров с использованием параметров.

5. Толщина линий. В рассмотренных выше примерах толщина линий задавалась по умолчанию. Но в некоторых случаях целесообразно использовать на рисунке линии разной толщины. Для рисования линий с другой толщиной используется та же команда, но с дополнительным параметром. Пример «рисования линий с другой толщиной рассмотрен на рисунке 4.

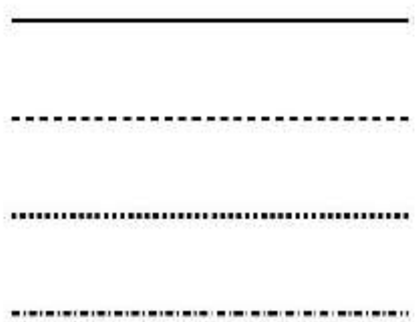


```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \draw [ultra thick] (0,2) -- (2,2);
  \draw [thick] (0,1.5) -- (2,1.5);
  \draw [thin] (0,1) -- (2,1);
  \draw [line width=9] (0,0.5) -- (2,0.5);
  \draw [line width=0.2cm] (0,0) -- (2,0);
\end{tikzpicture}
```

Рис 4. Рисование линий разной толщины

В качестве дополнительного параметра для изменения толщины могут быть использованы следующие слова: ultra thin, very thin, thin, semithick, thick, very thick, ultra thick. Также толщина линии может быть задана в явном виде. В коде к рисунку 4 четвертая команда в окружении tikzpicture программирует рисование линии толщиной в 9 пунктов, а пятая – толщиной 0,2 см.

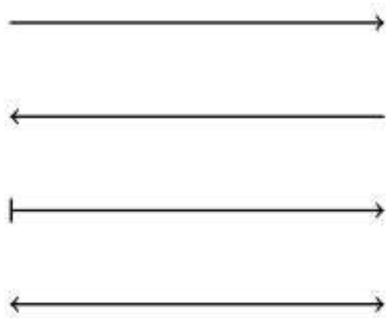
6. Стиль линий. По умолчанию все линии на чертежах рисуются сплошными. Используя дополнительные параметры, можно «рисовать» пунктирные линии, линии из точек, а также линии из пунктира и точек. На рисунке 5 продемонстрированы отрезки с различной штриховкой.



```
\begin{tikzpicture}[scale=3]
  \draw [solid, ultra thick] (0,1.5) -- (2,1.5);
  \draw [dashed, ultra thick] (0,1) -- (2,1);
  \draw [dotted, ultra thick] (0, 0.5) -- (2,0.5);
  \draw [dashdotted, ultra thick] (0,0) -- (2,0);
\end{tikzpicture}
```

Рис. 5. Линии с различными стилями

7. Стрелки. Часто на рисунках и чертежах требуется изображать отрезки со стрелками на конце. Например, это необходимо в векторной алгебре или если требуется изобразить координатные оси на чертеже. Для этих целей можно использовать специальные параметры, которые позволяют видоизменять концы отрезков. Несколько примеров с использование данных параметров показано на рисунке 6.

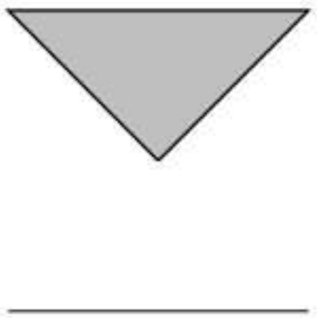


```
\begin{tikzpicture}[scale=2,thick]
  \draw [->] (0,0) -- (2,0);
  \draw [<-] (0, -0.5) -- (2,-0.5);
  \draw [|->] (0,-1) -- (2,-1);
  \draw [<->] (0,-1.5) -- (2,-1.5);
\end{tikzpicture}
```

Рис. 6. «Рисование» стрелок в Tikz

8. Цвета линий и заливка. В пакете TikZ можно менять цвета у линий. В этом случае используется дополнительный параметр draw (не путать с командой) и команда для рисования линий имеет вид \draw[draw=цвет](x1,y1)--(x2,y2)--…--(xn,yn). В качестве параметра «цвет» можно указать следующие значения: red, green, blue, cyan, magenta, yellow, black, gray, darkgray, lightgray, brown, lime, olive, orange, pink, purple, teal, violet, white. Кроме предложенных, пользователь может задавать цвета самостоятельно (подробнее смотрите инструкцию [3]).

Аналогичным образом можно задать цвет заливки внутренней области. Для этих целей используется параметр fill. Небольшой пример использования данных параметров показан на рисунке 7.



```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5,thick]
  \draw [draw=darkgray] (0,0) -- (2,0);
  \draw  [draw=black,fill=lightgray]  (1,1)--(0,2)--(2,2)--(1,1);
\end{tikzpicture}
```

Рис 7. Использование параметров draw и fill. При помощи первой команды на чертёж выводится линия тёмно-серого цвета. Вторая команда «рисует» треугольник со светло-серой внутренней областью и границей чёрного цвета

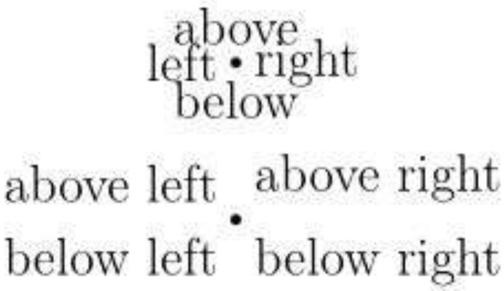
Выше были рассмотрены несколько основных параметров, которые позволяют менять свойства линий. Заметим, что при использовании нескольких параметров в квадратных скобках их нужно разделять запятой. Стоит отметить, что параметры для толщины, стиля, цвета линий, а также для заливки могут быть использованы и при рисовании прямоугольников и окружностей. Например, команда \draw [line width=1mm, dashed, draw=red, fill=blue] (0,0) circle (2cm) позволяет нарисовать круг синего цвета с центром в точке (0,0) радиуса 2 см, граница которого – красная пунктирная линия толщиной 1 мм.

Рассмотрим ещё несколько особенностей пакета TikZ/PGF, которые могут сделать чертёж более качественным.

9. Надписи. Редкий график или чертёж не обходится без надписей. Чтобы добавить надпись на рисунок, мы можем использовать следующий оператор: \draw (x,y) node[параметры] {надпись}. Здесь x и y – это координаты точки, к которой привязывается надпись; параметр в фигурных скобках – это текст, который добавляется на рисунок. Это может быть как обычный текст, так и формулы, записанные по правилам TeX. В квадратных скобках указываются опциональные параметры, определяющие свойства надписи (цвет, поворот, относительно точки привязки и другие). Мы подробно рассмотрим, как размещать надписи в стороне от точки привязки. По умолчанию надпись размещается прямо в этой точке, но надпись можно разместить слева, справа, сверху, снизу от точки привязки (им соответствуют параметры left, right, above и below), а также существуют ещё четыре промежуточных направления (above left, above right, below left, below right). Наглядно соответствие между данными параметрами и направлениями показано на рисунке 8.

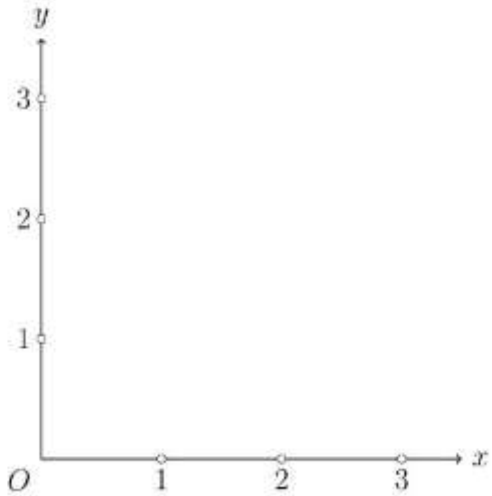
10. Циклы. При рисовании чертежей часто приходится выполнять однообразные действия, например, рисовать одинаковые фигуры. Также хорошо известно, что в программировании для выполнения повторяющихся действий используют операторы цикла. Такой оператор есть и в пакете TikZ. Форма записи оператора цикла: \foreach \x in {множество}{последовательность действий}.

Здесь \x – переменная цикла, {множество} – множество значений переменной \x, {последовательность действий} – список команд цикла. Данный оператор удобно использовать, если нужно разметить координатную ось. Результат использования команды \foreach можно увидеть на рисунке 9.




```
\begin{tikzpicture}[scale=1.5,thick]
\draw[fill=black] (0,0) circle [radius=0.025];
\draw (0,0)node [below]  {below};
\draw (0,0)node [above] {above};
\draw (0,0)node [left]  {left};
\draw (0,0)node [right] {right};
\draw[fill=black] (0,-1) circle [radius=0.025];
\draw (0,-1)node [above left]  {above left};
\draw (0,-1)node [above right] {above right};
\draw (0,-1)node [below left]  {below left};
\draw (0,-1)node [below right] {below right};
\end{tikzpicture}
```

Рис 8. Размещение надписей на рисунке. Между параметрами в скобках размещаемыми надписями здесь установлено взаимное соответствие




```
\begin{tikzpicture}[scale=2,thick]
\draw[<->] (3.5,0) --(0,0)--(0,3.5);
\draw (0,0) node [below left] {$O$};
\draw (0,3.5)node [above]  {$y$};
\draw (3.5,0)node [right] {$x$};
\foreach \x in {1,2,3}
{
\draw[thin,fill=white] (\x,0) circle (1pt);
\draw (\x,0)node[below] {\x};
\draw[thin,fill=white] (0,\x) circle (1pt);
\draw (0,\x)node[left] {\x};
};
\end{tikzpicture}
```

Рис. 9. Разметка координатных осей при помощи оператора цикла \ foreach.

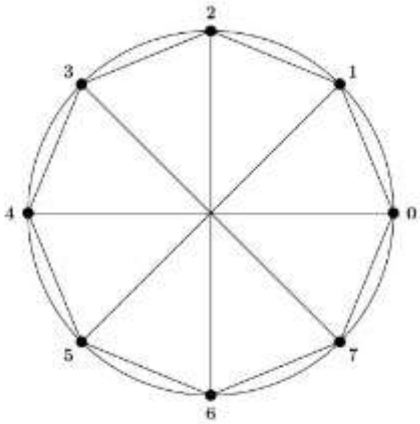
Стоит упомянуть о том, как задаются множества переменной цикла. В примере, рассмотренном выше, множество значений переменной \x состоит из трёх элементов, которые перечисляются через запятую. Однако задавать множества перечислением не всегда удобно, и в ряде случаев этого можно избежать, используя более краткую запись. Например, множество {1,…10} интерпретируется как множество всех целых чисел от 1 до 10, а запись {1, 3,…,9}, будет равносильна записи {1, 3, 5, 7, 9}.

Также стоит упомянуть, что иногда в роли переменной цикла может выступать не одна переменная, а упорядоченная пара. Пример с упорядоченной парой будет рассмотрен далее.

11. Полярные координаты. Выше было отмечено, что по умолчанию TikZ использует декартовы координаты, но существует возможность использовать и другие виды координат. В частности, в ряде случаев удобно использовать

полярные координаты. Точки в данных координатах задаются в следующем формате: (a:r), где числа a и r задают угол (в градусах) и расстояние до полюса. Обратите внимание на то, что в отличие от декартовых координат разделителем здесь служит двоеточие, а не запятая. На рисунке 10 показан пример использования полярных координат для рисования правильного многоугольника.

Мы рассмотрели основные приёмы работы с пакетом TikZ/PGF. Здесь описана только малая часть возможностей данного пакета, но этих приём вполне достаточно для построения простых рисунков, чертежей, схем, диаграмм. Этого вполне достаточно для оформления статей и монографий, он вполне подойдёт студентам и преподавателям математики и смежных дисциплин. Единственная сложность использования данного пакета – для его использования, как для всей издательской системы TeX, пользователю требуются навыки программирования. Но если пользователю небезразлично качество иллюстраций в его документах, то на этот пакет стоит обратить внимание.




```
\begin{tikzpicture}[scale=2,thick]
 \draw (0,0) circle (2.5);
  \foreach \x/\y in
{0/0,45/1,90/2,135/3,180/4,225/5,270/6,315/7}
{
  \draw (0,0)--(\x:2.5);
  \draw (\x:2.5)--(\x+45:2.5);
  \draw[fill=black] (\x:2.5) circle (2pt);
  \draw (\x:2.75) node {\bf{\y}};
};
\end{tikzpicture}
```

Рис 10. Построение правильного многоугольника в пакете TikZ. Здесь вершины задаются в полярных координатах, и цикл осуществляется по множеству восьми упорядоченных пар

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. TikZ and PGF [Электронный ресурс] – Электрон. дан. – [Б.м., 2018]. – Режим доступа: https://www.texample.net/. – Загл. с экрана. (дата обращения 30.03.18)

2. Crémer J. A very minimal introduction to TikZ [Электронный ресурс] / J. Crémer. – Электрон. дан. – [Б.м., 2011]. – Режим доступа: https://cremeronline.com/LaTeX/minimaltikz.pdf. – Загл. с экрана. (дата обращения 30.03.18)

3. T. Tantau, The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.0.1a. URL: http://mirror.macomnet.net/pub/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf. (дата обращения 30.03.18)

4. Кирютенко Ю.А. TikZ & PGF. Создание графики в LATEX2ε-документах. / Ю.А. Кирютенко ; Южный федеральный университет. – Ростов н/Д, 2014, 227 с. URL: https://open-edu.sfedu.ru/files/pgf-ru-all-method.pdf.

УДК 519.67

ОРГАНИЗАЦИЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕРАКТИВНЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ LEARNINGAPPS.ORG

Наталья Юрьевна Прохорова
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: natasha_prohorova@mail.ru

Надежда Владимировна Эйрих
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Ключевые слова: веб-сервис learningapps.org, интерактивные модули, информационно-коммуникационные технологии, самооценивание.

Аннотация: В статье рассматриваются конкретные примеры использования онлайн-сервиса LearningApps.org, а именно – приведены примеры разработанных нами интерактивных приложений по теме «Первообразная и неопределенный интеграл» по дисциплине математический анализ. Созданные нами упражнения в виде теста были разработаны с использованием шаблонов «Найти пару», «Викторина с выбором правильного ответа», «Виселица» и «Кроссворд». Эти приложения могут быть использованы для самопроверки умения вычислять неопределенные табличные интегралы и проверить знания основных определений, связанных с неопределенным интегралом.

В связи с недостаточным количеством часов, отведенных для изучения дисциплин, значимая доля времени приходится на самостоятельную работу. От того, насколько ответственно студент к ней отнесётся, зачастую зависит и результат дипломной работы. При этом целью для студентов является самостоятельно научиться приобретать и правильно применять знания на практике, проявлять инициативу в ходе выполнения заданий, используя творческий подход к выполнению работы [1].

В настоящее время особенным значением является педагогическое обеспечение самостоятельной работы студентов вуза в условиях всё более расширяющегося использования персональных компьютеров, интернета как средства обучения. Этому способствует разнообразие предоставляемых образовательных услуг; возможность совмещения образования с другими видами деятельности; возможность индивидуально выбирать темп и маршрут обучения; создание доступной информационной и учебно-научно образовательной среды; формирование «обучающих электронных учебно-образовательных модулей», предполагающих использование информационных технологий [6].

Многие ученые посвятили свои научные труды практическому применению платформы LearningApps.org в обучении различных дисциплин. Такие исследователи, как Шелякин А.В., Шибаева О.Н., Кормилицына Т.В., Великова Т.Г. [4,12,13] в своих статьях представили опыт внедрения в учебный процесс интерактивных упражнений, разработанных с использованием приложения Learningapps.org. по информатике, по физике и иностранному языку. Бурачевская О.В., Бурачевская Т.В., Бурачевская Н.И. [2] описали способы создания интерактивных обучающих модулей для детей с нарушениями речи посредством онлайн-сервиса LearningApps.org. Возможности learningapps в организации и проведении культурно-просветительских мероприятий изложили Вдовиченко А.А., Пилипенко В.В. [3].

Проект Learningapps.org - это один из бесплатных веб-сервисов для поддержки процесса преподавания или самостоятельного обучения с помощью интерактивных модулей. Одним из достоинств для пользователей является использование уже имеющихся модулей, которые можно модифицировать и создавать новые модули с использованием предлагаемого конструктора и шаблонов [10].

LearningApps.org позволяет преподавателю готовить качественные электронные наглядные пособия, включая не только тексты, но и аудио/видеоматериалы, используя нужный модуль для решения конкретных задач в своей предметной области. Главными преимуществами данного сервиса является широта возможностей (преподаватель имеет возможность редактировать в режиме онлайн и использовать ученические разработки), удобство навигации, простота в использовании. При желании любой преподаватель, не имеющий максимальные навыки работы с ИКТ, может создать свой ресурс – небольшое упражнение в игровой форме для активизации познавательной деятельности у обучающихся, для закрепления теоретических или практических знаний, тренинга, контроля [11].

Для самопроверки знаний нами были созданы 4 вида приложений по теме «Интегрирование» в LearningApps.org.

Первое упражнение на соотнесение, заключается в нахождении пары – формулы и её названия (рис. 1)

Рис. 1. Вид упражнения на соотнесение

При правильном нахождении пары, формула и её название исчезают, при неправильном – выделяется красным цветом, что дает знать о неправильном соотнесении (рис. 2).

Рис. 2. Неправильное нахождении пары

Второе упражнение «Виселица» заключается в заполнении пропусков. Если пропуск заполнен правильно, появляется переход на следующий уровень с веселым смайлом (рис.3).

Рис. 3. Правильное заполнение пропуска

Если пропуск заполнен неверно (т.е. закончились лепесточки), то игра заканчивается и появляется переход на следующий уровень с грустным смайлом, при этом приложение показывает правильное слово, которое было загадано системой (рис. 4).

Рис. 4. Конец игры

Третий тип упражнения создан в виде теста по типу викторины с правильным выбором ответа (рис. 5a), где в конце можно узнать количество правильных ответов (рис. 5b).

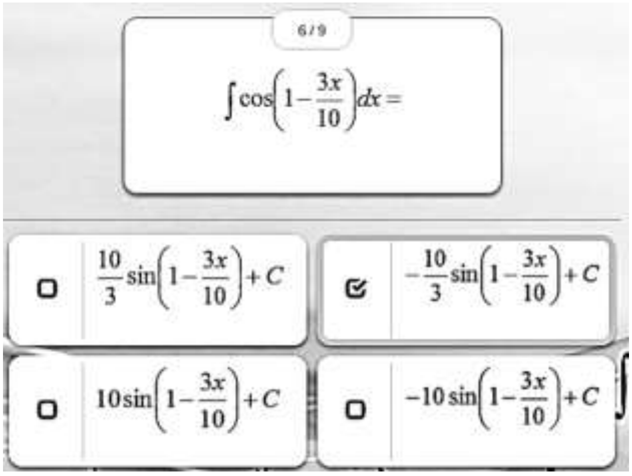


Рис. 5a. Выбор ответа **Рис. 5b. Результат теста**

Рис. 5 – Тест «Викторина»

Последнее приложение сознано в виде кроссворда, где правильные ответы выделяются зеленным цветом, а неправильные – красным (рис. 6).

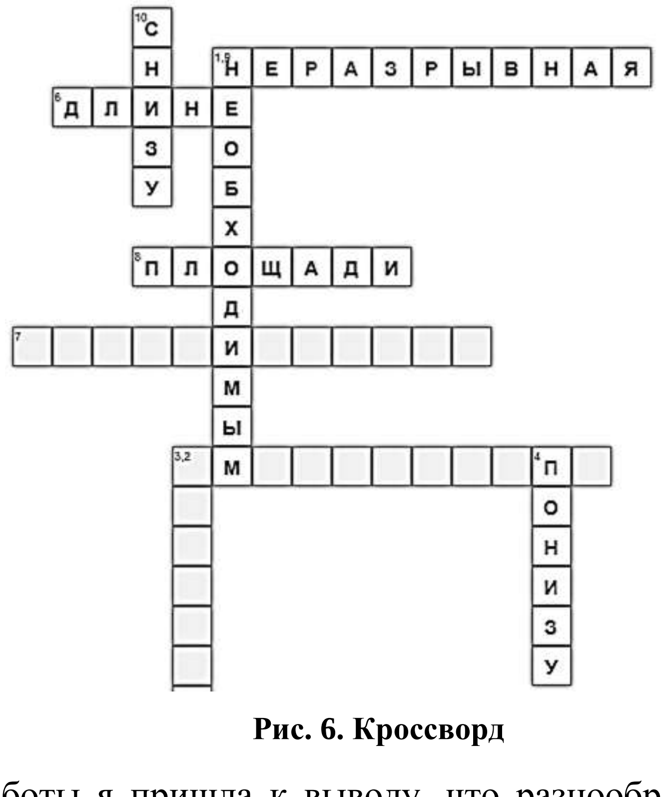


Рис. 6. Кроссворд

В процессе работы я пришла к выводу, что разнообразные упражнения, созданные с помощью онлайн сервиса LearningApps.org при обучении математики помогают:

– усилить мотивацию обучения;
– развить самостоятельность учащихся;
– активизировать познавательный интерес;

– реализовать личностно-ориентированный и дифференцированный подходы в обучении [7, 9].

Перечисленное приводит к улучшению качества усвоения учебного материала.

Подводя итог, можно сделать вывод, что LearningApps.org является одним из самых удобных и современных инструментов формирующего оценивания, который позволяет учащимся развивать свои навыки самооценивания. Выполнив задание, можно не просто проверить себя, но и сразу же увидеть, что было выполнено правильно, а что нет и провезти работу над ошибками [8].

Но несмотря на много плюсов, значительным недостатком данного проекта для физико-математических дисциплин является отсутствие возможности ввода формул, набранных в редакторе формул Microsoft Word. Приложение LearningApps.org позволяет вставлять их только в виде картинок, сохраненных в виде файлов JPG, но при дополнительных пояснениях нет возможности вставить картинку, что также является существенным недостатком [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Академия профессионального развития // Следуя за результатами: формы и виды самостоятельной работы студентов СПО по ФГОС [Электронный ресурс] / URL: https://academy-prof.ru/blog/samostoyatelnaya-rabota-studentov-spo (дата обращения 12.04.18).
2. Бурачевская О.В., Бурачевская Т.В., Бурачевская Н.И. Создание интерактивных мультимедийных логопедических игр посредством learningapps.org // Вопросы дошкольной педагогики. 2017. № 4 (10). С. 8-12.
3. Вдовиченко А.А., Пилипенко В.В. Возможности learningapps в организации и проведении культурно-просветительских мероприятий // В сборнике: инновационные стратегии развития педагогического образования сборник научных трудов Тринадцатой Международной очно-заочной научно-методической конференции: в 2 частях. 2017. С. 69-70.
4. Великова Т.Г. Разработка интерактивных упражнений по информатике с использованием приложения web 2.0 - learningapps.org // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. 2015. Т. 3. № 8-4 (19-4). С. 446-449.
5. Еровлев П.А., Семченко Р.В., Эйрих Н.В. Создание интерактивных приложений по теме «Предел последовательности» с помощью веб-сервиса learningapps.org // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 20.
6. Зенкин А.С., Кирдяев В.М., Пильгаев Ф.П., Лащ А.П. Самостоятельная работа студентов: метод указания / сост.: А.С. Зенкин, В.М. Кирдяев, Ф.П. Пильгаев, А.П. Лащ – Саранск: Изд-во Мордов. ун-та, 2009. - с. 35.

7. Куминова Е.И. Использование приложения LearningApps на уроках английского языка // Методические разработки и пособия по иностр. языку [Электронный ресурс] / URL: http://ext.spb.ru/2011-03-29-09-03-14/110-foreignlang/7879---learningapps---.html (дата обращения 12.04.18).

8. Понятовская Юлия. LearningApps – это учёба или игра? [Электронный ресурс] / URL: http://edcommunity.ru/communication/blogs/detail.php?blog=uliya-blog-s1&id=1506 (дата обращения 12.04.18).

9. Селянко О.Н. Использование приложения LearningApps на уроках информатики при изучении тем: «Устройство компьютера», «Системы счисления» // Методические разработки и пособия по ИКТ [Электронный ресурс] / URL: http://aneks.spb.ru/metodicheskie-razrabotki-i-posobiia-po-ikt/ispolzovanie-prilozheniia-learningapps-na-urokakh-informatiki-pri-izuchenii-tem-ustroistvo-kompiutera-sistemy-schisleniia.html (дата обращения 12.04.18).

10. Сервис learningapps.org: интерактивные приложения для поддержки учебного процесса [Электронный ресурс] / URL: http://window.edu.ru/resource/408/80408 (дата обращения 12.04.18).

11. Ушаков В.С., Келлер Д.С., Эйрих Н.В. Создание интерактивных приложений по теме «Вычисление производных» с помощью веб-сервиса learningapps.org // Постулат. 2017. № 12 (26). С. 40.

12. Шелякин А.В. Практическое применение интерактивной платформы learningapps.org в обучении иностранному языку как средство формирования и развития лингвистических навыков // В сборнике: информационно-инновационные технологии в педагогике, психологии и образовании сборник статей Международной научно-практической конференции: в 2 частях. 2017. С. 141-144.

13. Шибаева О.Н., Кормилицына Т.В. Применение современных технологий в обучении физике // Молодежный научный форум: технические и математические науки. 2017. № 4 (44). С. 154-159.

УДК 378.1

МОДЕЛИ ВРЕМЕНИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБРАЗОВАНИЕ[1]

Михаил Николаевич Рыбаков
Тверской государственный университет, Тверь
ЗАО НИИ ЦПС, Тверь
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Юлия Владимировна Чемарина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: chemarina.yv@tversu.ru

Дмитрий Петрович Шкатов
University of the Witwatersrand, Johannesburg
E-mail: shkatov@gmail.com

Ключевые слова: *нелинейные модели времени, математическое образование.*

Аннотация. В работе рассматриваются примеры применения нелинейных моделей времени в рамках отдельных дисциплин в области математики и программирования. Обсуждается вопрос значимости этих моделей для современного математического образования.

При чтении математических курсов и во время практических занятий со студентами каждый из авторов данной работы сталкивался с ситуацией, когда требуется использовать такую модель времени, где оно описывается не как линейно упорядоченное множество точек, а как-то иначе. При этом нередко возникали определённые трудности: во многих случаях студенты пытались «переделать» предлагаемую им модель «нелинейного времени» так, чтобы применить свои знания о времени, описанном в виде линейной модели. Мы хотим привести примеры ситуаций (разумеется, модельных, но имеющих отношение не только к теоретической, но и к практической деятельности математика и программиста), в которых время понимается «нелинейно» и обратить внимание на их значимость в современном математическом образовании.

Пример 0. *Линейные модели времени*. Линейная модель времени предполагает, что моменты времени упорядочены линейно, т.е. любые два из них можно сравнить между собой. Например, так устроено множество действительных чисел с отношением «меньше» на нём, и эта модель обычно используется для описания различных физических процессов. С этой моделью связано решение многих математических задач, знакомых со школы (задачи «на движение», «на работу» и др.). Особенность этой модели состоит в том, что время в ней понимается как непрерывное. Но время можно понимать и дискретно, моделируя его, например, множеством натуральных или целых чисел с отношением «меньше». Такая модель используется при счёте времени (в годах, днях, минутах, секундах и т.п.), её же можно применять при описании последовательных компьютерных вычислений.

[1] Работа поддержана РФФИ, гранты 16-07-01272, 17-03-00818 и 18-011-00869.

Пример 1. *Модели пространства-времени.* Модель пространства-времени специальной теории относительности, известная как модель Минковского, или пространство Минковского, [3], [4], не даёт возможности введения абсолютного, упорядоченного времени. В рамках этой модели результаты измерений временных интервалов между событиями существенным образом зависят от системы отсчёта, в которой эти измерения производятся. Лоренцева сигнатура метрики Минковского влечёт за собой ряд принципиально отличных от классической механики эффектов: события, являющиеся одновременными в одной инерциальной системе отсчёта, в другой системе могут одновременными и не быть, движущиеся часы идут медленнее неподвижных. При этом понятия «раньше» и «позже» имеют смысл только для причинно связанных событий, одно из которых находится либо на световом конусе другого, либо внутри него.

В моделях пространства-времени, учитывающих гравитацию, мы сталкиваемся с понятием горизонта событий. Появление горизонта событий свидетельствует о возникновении чёрной дыры, гравитационное поле которой качественно меняет причинную структуру пространства-времени [9]. Внешний наблюдатель может узнать о том, что происходит внутри чёрной дыры, только если он пересечёт горизонт событий. При этом часть моделей допускает существование замкнутых времениподобных траекторий, двигаясь по которым можно попасть в своё прошлое. В линейной модели времени такие эффекты недопустимы.

Отметим, что в подобных моделях важно понятие скорости взаимодействия, которое возникает не только в космологии, но и в других областях знания. Например, в акустике имеется конечная скорость распространения взаимодействия – скорость звука. Из-за этого как математический аппарат, так и физические следствия акустики и теории относительности сходны, в частности, в сверхзвуковых потоках жидкости или газа возникают свои аналоги горизонтов событий – акустические горизонты. И здесь мы тоже приходим к нелинейной модели времени.

Пример 2. *Параллельные вычисления.* При параллельных вычислениях предполагается наличие нескольких процессов, работающих одновременно. Эти процессы, вообще говоря, могут быть не согласованы между собой по тому, какие шаги одного из них выполняются раньше или позже тех или иных шагов другого. Таким образом, для описания параллельных вычислений целесообразно иметь модель, в которой время, отвечающее одному из них, не согласуется со временем, отвечающим другим.

Подобные ситуации возникают при вычислениях на многоядерных процессорах, на видеокартах, на разных находящихся в одной сети вычислительных устройствах и т.п., см. 0, 0.

Пример 3. *Недетерминированные алгоритмы.* Недетерминированные алгоритмы допускают наличие в них нескольких команд, таких, что в некоторой ситуации каждая из них может быть выполнена альтернативно по отношению к остальным. В результате этого для одних и тех же входных данных может существовать несколько различных вычислений такого алгоритма (и результаты этих вычислений, вообще говоря, могут оказаться различными).

Недетерминированные алгоритмы используются, например, в теории вычислительной сложности 0, при этом предполагается, что они решают задачи с ответами «да» и «нет»; считают, что недетерминированный алгоритм выдаёт положительный ответ на входе x, если существует хотя бы одно вычисление, начинающееся на x, которое заканчивается ответом «да». Здесь у человека, который только знакомится с таким подходом, часто возникает вопрос: а как алгоритм определяет, какое из возможных вычислений заканчивается положительно? Наша привычка к «линейности» (в данном случае речь о детерминированности) толкает нас на такое понимание получения результата, при котором необходимо выполнить (или как-то «просмотреть») все возможные вычисления, и выбрать нужное. В теории же вместо этого предполагается всего лишь нелинейная модель времени, в рамках которой никакого выбора осуществлять не требуется. Так, выполнение недетерминированного алгоритма можно было бы понимать в духе параллельных вычислений, где положительный результат получается, если он достигается хотя бы в одном из этих вычислений. В математике применением недетерминированного алгоритма можно считать поиск доказательства какого-либо утверждения методом угадывания того хода рассуждения, который к этому доказательству приведёт; «в жизни» можно представить ситуацию, когда человеку предложили несколько способов достижения желаемого результата, и он выбрал для реализации один из них. Кроме того, модель недетерминированных вычислений применяется в операционных системах. Рассмотрим соответствующий пример отдельно.

Пример 4. *Операционные системы*. В операционных системах возникает ситуация, когда система выполняет «одновременно» несколько программ. Для пользователя это выглядит так, как будто программы выполняются параллельно. Фактически же система создаёт очередь из требующих вычисление команд, при этом элементы этой очереди относятся к различным выполняемым программам. Таким образом, формально возникает модель «линейного» времени. Тем не менее, важно здесь то, что, хотя в системе выполнение программ происходит детерминированно, при повторном запуске тех же программ с теми же данными последовательность элементов в очереди выполняемых команд может оказаться иной (например, ввиду другого состояния самой операционной системы). В результате пользователю системы (скажем, программисту) во многих случаях имеет смысл понимать работу системы по формированию такой очереди команд как недетерминированную. И мы приходим к «нелинейному времени», но не в смысле параллельного выполнения программ, а в смысле некоторой неопределённости (недетерминированности), связанной с их последовательным выполнением.

Заметим, что в приведённом примере при понимании работы системы как недетерминированной мы должны несколько иначе определить успешность работы алгоритма: положительный результат должен быть достигнут не при каком-нибудь вычислении, а при каждом из возможных. Это приводит нас к обобщению понятия недетерминированного алгоритма.

Пример 5. *Альтернирующие алгоритмы*. Альтернирующие алгоритмы устроены так же, как и недетерминированные – они допускают наличие команд с альтернативным по отношению друг к другу выполнением. Отличие состоит в том, что для недетерминированного алгоритма важно лишь то, существует ли хотя бы одно вычисление, приводящее к положительному результату, а для альтернирующего возможны более сложные условия. Именно, каждой ситуации, где происходит выбор команды для исполнения, присваивается некий статус из двух возможных: пусть это будут статус e (от «exists») и статус a (от «all») Тогда для ситуаций в статусе e требуется, чтобы существовала возможность выбора хотя бы одной команды алгоритма, приводящей в дальнейшем к положительному результату, а в статусе a – чтобы в дальнейшем к положительному результату приводил выбор каждой из возможных команд.

Альтернирующие алгоритмы связаны со стратегиями. Пусть имеются два игрока E и A, которые играют в некую игру, совершая поочерёдно ходы. Пусть для игры определены ситуации её начала и завершения, а также условия, означающие победу или поражение каждого из игроков. Кроме того, пусть на каждом из ходов и E, и A имеют по одному или более вариантов выбора действий. Тогда, например, выигрышную стратегию игрока E можно понимать в духе альтернирующего алгоритма: для каждого хода игрока A (для E это будут ситуации со статусом a) у игрока E должен быть ответный ход (для E это будут ситуации со статусом e), ведущий к победе.

Пример 6. *Верификация программ*. Чтобы проверить, удовлетворяет ли программа требуемой функциональности, используют различные методы верификации программ, связанные в том числе с построением модели работы программы. Такая модель может содержать в себе описания ситуаций альтернативных вариантов работы программы, параллельных вычислений и т.п., а значит, мы снова приходим к «нелинейному времени».

Пример 7. *Верификация операционных систем*. «Нелинейное время» непременно возникает при верификации операционных систем, или, если говорить более общо, программ, выполняющих несколько параллельных вычислений, конкурирующими между собой за доступ к какому-либо вычислительному ресурсу. Поскольку последовательность выполнения инструкций меняется от вычисления к вычислению, такие программы невозможно верифицировать эмпирически. Более того, само присутствие отладчика в процессе верификации изменяет последовательность выполнения их команд. Это приводит к верификации таких программ с помощью формальных моделей, в которых время понимается как дерево, т.к. требуется рассмотреть все возможные последовательности выполнения инструкций и убедиться, что каждая из них удовлетворяет нужному нам свойству.

В качестве таких моделей рассматривают как алгебраические структуры, так и формальные языки, которые эти структуры описывают. Рассмотрим последние чуть подробнее.

Пример 8. *Формально-логические системы*. Имеется много классов формальных языков и систем, описывающих различные вычисления, в том числе детерминированные, недетерминированные, параллельные, альтернирующие. Одним из таких языков является язык первого порядка, или язык логики предикатов. Этот язык является неотъемлемой частью современной математики и для математика привычен в использовании, но многие важные вопросы для него не имеют алгоритмов решения 0. За последние несколько десятков лет были разработаны, изучаются и применяются языки нулевого порядка (без кванторов по переменным), которые, с одной стороны, позволяют описывать вычисления программ, а с другой стороны, для них оказались разрешимыми те задачи, аналоги которых в случае языка первого порядка неразрешимы. Например, это языки различных динамических логик, язык логики ветвящегося времени (известной больше как computational tree logic), язык логики линейного времени (linear temporal logic) и другие, см. 0, 0. Многие из них описывают модели времени, возникающие в вычислениях, но не только. Так, например, упоминавшаяся выше модель Минковского тоже описывается некоей формальной логической системой.

Знание подобных систем, а также подходов, заложенных в их основе, могло бы позволить студентам математических специальностей несколько иначе взглянуть на программы, вычисления, а также вопросы описания программ и их верификации.

Пример 9. *Квантовые вычисления*. Квантовые вычисления – это особая вычислительная модель 0. Её особенность позволяет решать задачи некоторых классов намного эффективнее, чем другие известные вычислительные модели (например, предложенные А. Тьюрингом и Дж. фон Нейманом). Эта модель основана на некоторых правилах преобразования информации, которые обеспечивают своего рода «параллелизацию» вычислительных процессов. В результате получаем, что вместо нескольких параллельных процессов работает один. И в этом примере мы возвращаемся к тому, что «нелинейное время» иногда можно представить в виде «линейного», правда, понимание устройства такого представления требует определённой математической подготовки, предполагающей, в частности, представление о параллельных вычислениях.

На этом мы остановимся, и других примеров приводить здесь не будем. Это вовсе не означает, что их нет; более того, мы уверены, что участники конференции смогут привести такие примеры в очень большом количестве. Мы же хотим обратить внимание на то, что всё сказанное (и многое несказанное) имеет отношение как к математике, так и к математическому образованию. При этом что-то находит отражение в математических курсах, читаемых в вузах, где работают авторы, а что-то нет.

То математическое образование, которое получают школьники и студенты сейчас, они будут использовать спустя и пять, и десять, и двадцать, и тридцать, и более лет. Что и как изменится за это время, какие задачи будут стоять перед ними – мы не знаем. Но полученное ими образование должно быть актуальным, и задача школы и вуза – позаботиться об этом. Какое-то время назад приоритетные задачи математики и математического образования во многом определялись потребностями физики (хотя, конечно же, не только физики, но и других областей знания), теперь же мы наблюдаем бурное развитие математических теорий и методов, связанных с потребностями в больших объёмах сложных вычислений, работой с большими объёмами данных и т.п., поэтому представление о различных моделях времени, лежащих в основе моделирования вычислений, конечно же, должно быть частью современного математического образования, частью основы для возможных перспектив его применения в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.А. Биллиг. Параллельные вычисления и многопоточное программирование. М., НОУ «Интуит», 2016.
2. Дж. Булос, Р. Джеффри. Вычислимость и логика. М.: Мир, 1994.
3. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия: Методы и приложения. Том.1. М.: Эдиториал УРСС, 1998.
4. Г. Вейль. Пространство, время, материя. Лекции по общей теории относительности. М., «Янус», 1996.
5. В.В. Воеводин, Вл.В. Воеводин. Параллельные вычисления. СПб., БХВ-Перербург, 2002.
6. Э.М. Кларк, О. Грамберг, Д. Пелед. Верификация моделей программ: Model checking. М.: Изд-во МЦНМО, 2002.
7. Ю.Г. Карпов. Model checking: Верификация параллельных и распределенных программных систем. СПб: БХВ-Петербург, 2010.
8. В.Н. Крупский. Введение в сложность вычислений. М., Факториал Пресс, 2006.
9. И.Д. Новиков, В.П. Фролов. Физика чёрных дыр. М., Наука, 1986.
10. Дж. Прескилл. Квантовая информация и квантовые вычисления. Т.1, М.–Ижевск, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2008.

УДК 372.851

РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА ПО ТЕМЕ «УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ»

Анастасия Александровна Сизинцева
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: sizintseva.97@mail.ru

Ключевые слова: *уравнение с параметром, неравенство с параметром, единый государственный экзамен.*

Аннотация. В данной работе приведена программа элективного курса на тему «Уравнения и неравенства с параметрами». Также приведены типовые задания, которые будут предложены ученикам. Разработанный курс предназначен для обучающихся одиннадцатых классов и направлен на подготовку учеников к единому государственному экзамену.

На сегодняшний день, при сдаче ЕГЭ, ученики сталкиваются с проблемой решения задач части С. Часто встречаются здания по теме «уравнения и неравенства с параметрами». Данные задания кажутся сложными и не выполнимыми, так как на уроках математики им уделялось недостаточно времени и многие просто не приступают к их выполнению. Для того чтобы помочь школьникам подготовится к экзамену, был разработан элективный курс по данной теме, целью которого является подготовка одиннадцатиклассников к единому государственному экзамену.

Задачи курса:

1. Сформировать у учащихся устойчивый интерес к предмету;
2. Выявить и развить математические способности;
3. Научить решать задачи с параметрами.

Составленная программа элективного курса рассчитана на 25 часов.

Название темы	**Кол-во часов**
Введение. Основные определения	1
Линейные уравнения, содержащие параметры	5
Линейные неравенства, содержащие параметры	5
Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметры	8
Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметры	6

Краткое содержание курса

1. Введение. Основные определения

Параметр – это величина, значения которой служат для различения элементов некоторого множества между собой [2].

Решить уравнение с параметром – это значит найти все значения параметра, при которых задача имеет решения.

Задачи с параметрами встречаются не только в алгебре, но и в геометрии. Например, уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=r^2$, где x, y – координаты точек – переменные, r – радиус окружности – параметр.

Моделируя различного вида задачи, можно получить различного вида уравнения, для которых нужно уметь выбирать ответы.

Пример

Сравнить: $-a$ и $3a$.

Естественно рассмотреть три случая:

- если $a<0$, то $-a>3a$;
- если $a=0$, то $-a=3a$;
- если $a>0$, то $-a<3a$.

2. *Линейные уравнения, содержащие параметры*

Алгоритм решения уравнений вида $Ax=B$:

При $A=0, B=0$.	Решением является любое действительное число
При $A=0, B\neq 0$.	Нет решений
При $A\neq 0$.	Единственное решение $x=B/A$

Пример. Решить уравнение $a(ax-1)=3(ax-1)$.

Решение. Приведём данное уравнение к виду $Ax=B$ и воспользуемся алгоритмом.

$$a(ax-1)=3(ax-1)$$
$$a^2x-a=3ax-3$$
$$a^2x-3ax=a-3$$
$$a(a-3)x=a-3$$

Рассмотрим случаи:

•Если $a(a-3)\neq 0$, то есть $a\neq 0$, и $a\neq 3$, то левую и правую части уравнения разделим на $a(a-3)$. Получим $x=\dfrac{a-3}{a(a-3)}$, сократим получившуюся дробь на $a-3$ и <u>*получим единственное решение уравнения*</u>*:* $x=1/a$.

•Если $a=0$, то подставив это значение параметра в уравнение, получим $0\cdot x=-3$ или $0=-3$ – неверное числовое равенство, следовательно, данное уравнение <u>*решений не имеет*</u>.

•Если $a=3$, то подставив это значение параметра в уравнение, получим $0\cdot x=0$ или $0=0$ – верное числовое равенство, следовательно, решением данного уравнения является <u>*любое действительное число.*</u>

Ответ: 1) при $a\neq 0$, и $a\neq 3$ – единственное решение уравнения: $x=1/a$

2) при $a=0$ – нет решений;

3) при $a=3$ – решением является любое действительное число [1].

3. Линейные неравенства, содержащие параметры

Неравенства вида $ax \geq b, ax \leq b,$ где a и b действительные числа или выражения, зависящие от параметров, x – неизвестное, называются линейными неравенствами.

В зависимости от коэффициентов a и b решением линейного неравенства может быть как неограниченный промежуток, так и числовая прямая. Существуют случаи, когда решением является пустое множество [3].

1. Решение линейных неравенств вида $ax > b.$

- Если $a > 0,$ то $x > \frac{b}{a};$
- Если $a < 0,$ то $x < \frac{b}{a};$
- Если $a = 0$ и $b < 0,$ то $x \in \mathbf{R};$
- Если $a = 0$ и $b \geq 0,$ то решений нет.

2. Решение линейных неравенств вида $ax < b.$

- Если $a > 0,$ то $x < \frac{b}{a};$
- Если $a < 0,$ то $x > \frac{b}{a};$
- Если $a = 0$ и $b > 0,$ то $x \in \mathbf{R};$
- Если $a = 0$ и $b \leq 0,$ то решений нет.

3. Решение линейных неравенств вида $ax \geq b.$

- Если $a > 0,$ то $x \geq \frac{b}{a};$
- Если $a < 0,$ то $x \leq \frac{b}{a};$
- Если $a = 0$ и $b \leq 0,$ то $x \in \mathbf{R};$
- Если $a = 0$ и $b > 0,$ то решений нет.

4. Решение линейных неравенств вида $ax \leq b.$

- Если $a > 0,$ то $x \leq \frac{b}{a};$
- Если $a < 0,$ то $x \geq \frac{b}{a};$
- Если $a = 0$ и $b \geq 0,$ то $x \in \mathbf{R};$
- Если $a = 0$ и $b < 0,$ то решений нет.

Пример. Решить неравенство $(n-1)x < 5n.$

Решение

- Если $n > 1,$ то $x < \frac{5n}{n-1};$

•Если $n<1$, то $x>\dfrac{5n}{n-1}$;

•Если $n=1$, то $x\in\mathbf{R}$;

4. Квадратные уравнения и неравенства, содержащие параметры

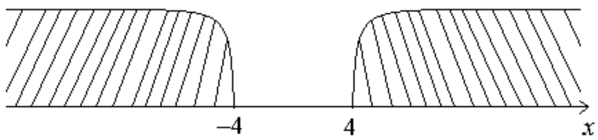
Алгоритм решения уравнений вида $A^2x+Bx+C=0$, **где** D – **дискриминант:**

При $A=0$.	Исследуем уравнение, как линейное
При $A\neq 0$.	Исследуем как квадратное: 1. $D=0\Rightarrow 1$ корень; 2. $D>0\Rightarrow 2$ корня; 3. $D<0\Rightarrow$ нет корней

Пример. Решить уравнение $x^2-bx+4=0$.

$D=b^2-16$

1) $D=0$ при $b=\pm 4$.
   При $b=4$, $x^2-4x+4=0$, $x=2$;
   При $b=-4$, $x^2+4x+4=0$, $x=-2$;
2) $D>0$ при $|b|>4$.



$$x_1=\frac{b+\sqrt{b^2-16}}{2};\quad x_2=\frac{b-\sqrt{b^2-16}}{2}.$$

3) $D<0$ при $|b|<4$ нет $\mathbf{R}$ корней.

Ответ: при $b=4$, $x=2$;
при $b=-4$, $x=-2$;
при $|b|>4$, $x_1=\dfrac{b+\sqrt{b^2-16}}{2}$, $x_2=\dfrac{b-\sqrt{b^2-16}}{2}$;
при $|b|<4$ нет $\mathbf{R}$ корней.

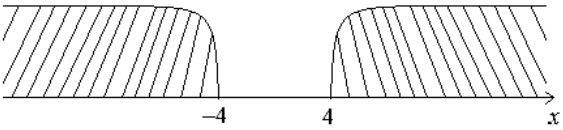
Пример. Решить неравенство: $x^2+2ax+4>0$.

$x^2+2ax+4=0$, $\quad D=4a^2-16$.

1) $D=0$ при $4a^2-16=0$

$$4a^2=16$$
$$a^2=4$$
$$a=\pm 2.$$

2) $D>0$



$x_1=-a+\sqrt{a^2-4};\ \ x_2=-a-\sqrt{a^2-4}.$

При $a=2$

$x^2+4x+4>0$

$(x+2)^2>0$

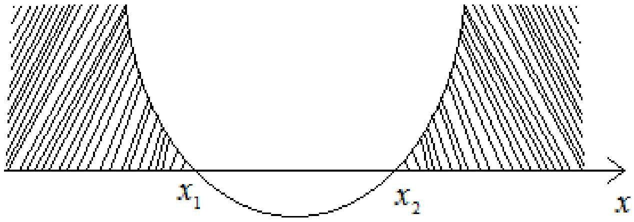
$x\neq-2$.

При $a=-2$

$x^2-4x+4>0$

$(x-2)^2>0$

$x\neq 2$.



$x<-a-\sqrt{a^2-4};\ \ x>-a+\sqrt{a^2-4}.$

3) $D<0,\ -2<a<2,\ x\in\mathbf{R}.$

Ответ: 1) При $a=-2$, $x\neq 2$;

2) При $a=2$, $x\neq-2$;

3) При $-2<a<2, x\in\mathbf{R}$;

4) При $a<-2, a>2,\ x<-a-\sqrt{a^2-4};\ x>-a+\sqrt{a^2-4}.$

5. Показательные и логарифмические уравнения, содержащие параметры

Показательное уравнение

$F\left(a, f(a)^{g(a,x)}\right)=0$ с параметром a и переменной x для вспомогательной переменной $t=f(a)^{g(a,x)}$ на множестве $\{a\,|\,f(a)>0, f(a)\neq 1\}$ равносильно системе

$$\begin{cases}F(a,t)=0\\ t>0\end{cases}\quad [2].$$

Пример. Решить уравнение: $a^{x+1}=b^{3-x}$

Решение. По определению показательной функции $a>0, b>0$.

•Если $a=1, b=1,$ то $x\in\mathbf{R}$;

•Если $a=1, b\neq 1,$ то $b^{3-x}=1$, значит $x=3$;

•Если, то $a^{x+1}=1$, значит $x=-1$;

Пусть $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Тогда прологарифмируем данное равенство по основанию a: $x+1=(3-x)\log_a b - 1$, то есть

$$1+\log_a b = 0 \text{ то есть } b=\frac{1}{a}(b\neq 1), \text{ то } x=\frac{3\log_a b - 1}{1+\log_a b}.$$

Ответ:

1. При $a=1, b=1,\ x\in \mathbf{R}$;
2. При $a=1, b\neq 1,\ x=3$;
3. При $a\neq 1, b=1,\ x=-1$;
4. При $\begin{cases} a\neq 1; b\neq 1; b\neq \dfrac{1}{a}, \\ a>0; b>0 \end{cases}$ $x=\dfrac{3\log_a b - 1}{1+\log_a b}$.

Логарифмическое уравнение

$F(a, \log_{f(a)} g(a,x))=0$ с параметром a и переменной x для вспомогательной переменной $t=\log_{f(a)} g(a,x)=0$ на множестве $\{a \mid f(a)>0, f(a)\neq 1\}$ равносильно уравнению $F(a,t)=0$ [2].

Пример. Решить уравнение: $\lg 2x + \lg(2-x) = \lg(\lg a)$.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} 2x>0 \\ 2-x>0 \\ \lg a>0 \\ a>0 \end{cases} \begin{cases} x>0 \\ x<2 \\ a>1 \\ a>0 \end{cases} \begin{cases} 0<x<2 \\ a>1 \end{cases}.$$

$$\lg\big(2x(2-x)\big)=\lg(\lg a)$$

$$4x-2x^2=\lg a$$

$$2x^2-4x+\lg a=0 \qquad D=4-2\lg a$$

1. $D=0$

$$4-2\lg a=0 \qquad 2x^2-4x+2=0$$
$$\lg a=2 \qquad x^2-2x+1=0$$
$$a=100 \qquad (x-1)^2=0$$
$$x=1$$

2. $D>0$

$$4-2\lg a>0$$
$$\lg a<2 \qquad x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-2\lg a}}{2}$$
$$a<100$$

$$\begin{cases} \dfrac{2+\sqrt{4-2\lg a}}{2} > 0 \\ \dfrac{2+\sqrt{4-2\lg a}}{2} < 2 \\ 1 < a < 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{2-\sqrt{4-2\lg a}}{2} > 0 \\ \dfrac{2-\sqrt{4-2\lg a}}{2} < 2 \\ 1 < a < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2+\sqrt{4-2\lg a} < 4 \\ 1 < a < 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2-\sqrt{4-2\lg a} > 0 \\ 1 < a < 100 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{4-2\lg a} < 2 \\ 1 < a < 100 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\sqrt{4-2\lg a} > -2 \\ 1 < a < 100 \end{cases}$$

$4-2\lg a < 4 \qquad 4-2\lg a < 4$

$\lg a > 0 \qquad \lg a > 0$

$a > 1 \qquad a > 1$

Ответ: при $a = 100, x = 1;$

при $1 < a < 100,\ x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4-2\lg a}}{2}.$

Разработка элективного курса по теме ««Уравнения и неравенства с параметрами»» необходима обучающимся для подготовки к ЕГЭ, также для вступительных экзаменов в вузы. Владение приемами решения уравнений и неравенств с параметрами можно считать критерием знаний основных разделов школьной математики, уровня математического и логического мышления.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами: Справ.пособие по математике. – 3-е изд.доработ. – Мн.:ООО»Асар», 2004. – 464 с.; ил.

2. Горбачёв В.И. Элементы теории и общие методы решения уравнения и неравенств с параметрами. – Брянск: Издательство БГПУ, 1998. – 264с.

3. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: А45 учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни; под.ред. А.Б. Жижченко. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2011. – 336 с.: ил. – ISBN 978-5-09-024936-2.

УДК 372.851

ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «МОДУЛЬ ЧИСЛА» КАК ЭЛЕМЕНТ ПРЕДПРОФИЛЬНОЙ ПОДГОТОВКИ

Анастасия Александровна Сизинцева
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: sizintseva.97@mail.ru

Ирина Геннадьевна Одоевцева
Приамурский государственный университет им. Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: dichenko-irina@list.ru

Ключевые слова: *элективный курс, предпрофильная подготовка, модуль, уравнение со знаком модуля, неравенства со знаком модуля.*

Аннотация. В данной работе приведена программа элективного курса предпрофильной подготовки на тему «Модуль числа». Также приведены типовые задания, которые будут предложены ученикам. Разработанный курс предназначен для учащихся 9 класса и предполагает подготовку учеников к основному государственному экзамену.

Профильное обучение и предпрофильная подготовка – это две главных части одной системы подготовки школьников к осознанному выбору своего профессионального пути. Один из компонентов предпрофильной подготовки – элективные курсы.

Элективный курс – это обязательный для посещения курс по выбору учащихся. Основная функция курсов по выбору – профориентационная, то есть ориентирующая в выборе будущего профиля обучения. Поэтому их число должно быть избыточным по сравнению с тем количеством элективных курсов, которые обязан выбрать учащийся. Они должны носить краткосрочный характер. Оптимальная продолжительность элективного курса в предпрофильной подготовке 8 – 12 часов. Максимальная продолжительность элективного курса – 34 часа, по 2 часа в неделю [1].

Элективные курсы на предпрофильной ступени позволяют учащимся, не только освоить саму технологию выбора курсов обучения, но и апробировать различное содержание с целью самоопределения. Содержание курса по выбору должно с одной стороны, соответствовать познавательным возможностям учащихся, а с другой стороны, предоставляя ученику возможность опыт работы на уровне повышенных требований, развивать его учебную мотивацию.

В школьном курсе математики не так много времени и внимания уделяется теме «Модуль числа». Практика показывает, что задания с модулем вызывают у учащихся затруднения, и они допускают ошибки. Основной причиной является, непонимание учащимися определения модуля числа. Именно по этой причине был разработан предпрофильный элективный курс для учащихся 9-х классов. Целью данного курса является: развитие содержания базового курса; формирование у учащихся интереса к предмету; выявление и развитие математических способностей; повышение уровня математической подготовки; подготовка к выбору профиля обучения.

Задачи курса

1. Научить учащихся преобразовывать выражения, содержащие модуль;

2. Научить учащихся решать уравнения и неравенства, содержащие модуль;
3. Научить учащихся строить графики, содержащие модуль;
4. Помочь ученикам выявить свой потенциал с точки зрения дальнейшей образовательной перспективы.

В результате изучения курса учащиеся должны:

1. Знать определение модуля числа и его геометрическую интерпретацию.
2. Уметь решать простейшие уравнения и неравенства с модулем.
3. Уметь строить графики функций с модулем.
4. Уметь выполнять алгебраические преобразования с модулем числа.

Составленная программа элективного курса рассчитана на 18 часов.

Тема	Кол-во часов
История. Определение модуля	1
Свойства модуля	2
Графики функции	4
Уравнения содержащие модуль, и их решение	5
Неравенства, содержащие модуль, их решение	5
Проверочная работа	1

Содержание курса

История. Определение модуля

На первом уроке учащиеся вспомнят, что такое модуль и узнают немного историю его возникновения.

Термин «Модуль» впервые ввёл английский математик и философ Роджер Котс, который являлся учеником знаменитого учёного Исаака Ньютона. В своих трудах и работах функцию модуля использовал Великий немецкий физик, математик, изобретатель и философ Готфрид Лейбнец. В 1841 году Карл Вейерштрасс дал общепринятое и современное значение модуля как абсолютной величины. Учёные Арган и Коши в начале девятнадцатого века ввели данное понятие и для комплексных чисел. Известно, что на сегодняшний день, функцию модуля ввели и в список стандартных функций фактически всех языков программирования, так как она очень просто вычисляется [4].

Определение. Модуль числа a или абсолютная величина числа a равна a, если a больше или равно нулю и равна $-a$, если a меньше нуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a, \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases} \quad [3].$$

Пример 1. Упростить выражение $\frac{a^2-4}{|a|+2}$.

Дробь определена для любых значений a.

При $a \geq 0$, $\frac{a^2-4}{|a|+2} = \frac{a^2-4}{a+2} = \frac{(a-2)(a+2)}{a+2} = a-2$.

При $a<0,\ \dfrac{a^2-4}{|a|+2}=\dfrac{a^2-4}{-a+2}=\dfrac{(a-2)(a+2)}{-(a-2)}=-(a+2)$.

Свойства модуля

Первый час данной темы посвящён изучению свойств модуля:

1. Модули противоположных чисел равны $|-a|=a$;
2. Квадрат модуля числа равен квадрату этого числа $|a|^2=a^2$;
3. Квадратный корень из квадрата числа есть модуль этого числа $\sqrt{a^2}=|a|$; $\sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|$, при $n\in N, n\neq 1$;
4. Модуль числа есть число неотрицательное;
5. Постоянный положительный множитель можно выносить за знак модуля
6. Модуль произведения двух (и более) чисел равен произведению их модулей $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$;

Второй час данной темы предполагает выполнение заданий.

Возможно другое решение примера 1, используя свойство $|a|^2=a^2$; имеем:

$$\frac{a^2-4}{|a|+2}.=\frac{|a|^2-4}{|a|+2}=|a|-2\,.$$

Ответ: $a-2$ при $a\geq 0$, $-(a+2)$ при $a<0$.

Пример 2. Упростить выражение $\sqrt{14-6\sqrt{5}}$.

$$\sqrt{14-6\sqrt{5}}=\sqrt{9-2\cdot 3\sqrt{5}+5}=\sqrt{(3-\sqrt{5})^2}=\left|3-\sqrt{5}\right|=3-\sqrt{5},\ \text{т.к. } 3>\sqrt{5}\,.$$

Графики функции

Первый час данной темы предполагает знакомство с графиком функции $y=|x|$, $y=|x|+a$, $y=|x+a|$. На втором уроке предлагаются задания на построение.

Пример 3. Для построения графика функции $y=|x-3|$, построим график функции $y=x-3$ – это прямая, пересекающая ось Ox в точке $(3;0)$, а затем часть прямой, лежащую ниже оси Ox симметрично отразим относительно оси Ox (рис.1).

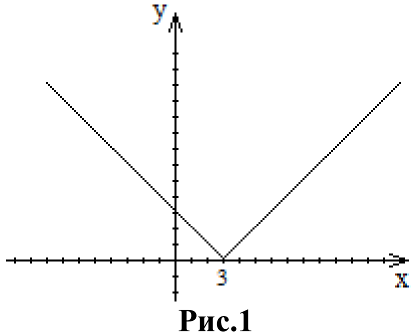


Рис.1

Уравнения содержащие модуль, и их решение

Среди методов решения уравнений, содержащих переменную под знаком модуль, выделяют: использование определения модуля, метод интервалов, графический метод.

1. *Использование определения модуля для решения уравнений*

Пример 4. $|x| + x^3 = 0$.

При $x \ge 0$

$x + x^3 = 0$

$x(1 + x^2) = 0$

$x = 0 \quad 1 + x^2 = 0$

$x^2 = -1$

$x = \varnothing$

При $x < 0$

$-x + x^3 = 0$

$-x(1 - x^2) = 0$

$-x = 0 \quad 1 - x^2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

Ответ: $x = -1, x = 0$ [2].

2. *Метод интервалов*

Суть его состоит в следующем: находим нули подмодульных функций, наносим эти нули на числовую ось, в результате чего ось разобьется на ряд интервалов, т.к. знак каждой из подмодульных функций на каждом из интервалов сохраняет свой знак, то на каждом из интервалов раскрываем модули и решаем получившуюся совокупность уравнений. Решением исходного уравнения является объединение решений уравнений полученной совокупности.

Пример 5. $|x| + |x - 7| + 2|x - 4| = 2.$

Подмодульные нули: $x = 0, x = 7, x = 4$. Наносим их на числовую ось (рис.2):

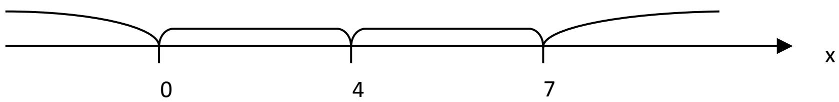


Рис.2

Числовая ось разбилась на четыре интервала. Раскрываем модули на каждом из этих интервалов.

а) Пусть $x \le 0$. Чтобы определить знаки подмодульных функций, нужно взять любое значение x, удовлетворяющее требованию $x \le 0$.

Пусть $x = -2$, тогда

$|x| = |-2| = -(-2) = 2$, т.е. $|x| = -x$

$|x - 7| = |-2 - 7| = |-9| = 9$, т.е. $|x - 7| = 7 - x$

$|x - 4| = |-2 - 4| = |-6| = 6$, т.е. $|x - 4| = 4 - x$.

Но тогда уравнение примет вид

$-x - x + 7 + 2(4 - x) = 2$

$-2x + 7 + 8 - 2x = 2$

$-4x = -13$

$x = \frac{13}{4} = 2\frac{1}{4}$.

Так как $x \le 0$, то на полуинтервале $(-\infty;0]$ исходное уравнение не имеет решений.

б) Пусть $0 \le x \le 4$. Решаем аналогично.

$x - x + 7 + 2(4 - x) = 2$

$7 + 8 - 2x = 2$

$-2x = -13$

$x = 6{,}5$

Так как $0 \le x \le 4$, то на данном отрезке исходное уравнение не имеет решений.

в) Пусть $4 \le x \le 7$, тогда уравнение примет вид

$x - x + 7 + 2(x - 4) = 2$

$7 + 2x - 8 = 2$

$2x = 3$

$x = 1\frac{1}{2}$

Т.к. $4 \le x \le 7$, то $x = \varnothing$.

г) Пусть $x \ge 7$, тогда уравнение примет вид

$x + x - 7 + 2(x - 4) = 2$

$2x - 7 + 2x - 8 = 2$

$4x = 17$

$x = 4\frac{1}{4}$, то $x = \varnothing$.

Вывод: исходное уравнение не имеет решений.

Ответ: $x = \varnothing$.

3. *Графический способ*

Пример 6. $|x - 3| = 4$.

Необходимо построить графики функций $y = |x - 3|$ и $y = 4$ (рис.3).

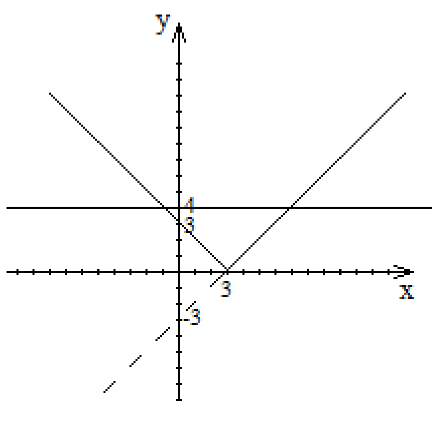


Рис.3

Решением уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков.

Прямая графика функции $y=4$ пересеклась с графиком функции $y=|x-3|$ в точках с координатами $(-1;4)$ и $(7;4)$. Следовательно, решениями уравнения будут абсциссы точек: $x=7, x=-1.$

Ответ: $x_1=7, x_2=-1.$

Неравенства, содержащие модуль, их решение

Пример 7. $x^2-|5x+6|>0$.

$\begin{cases} 5x+6\geq 0 \\ x^2-5x-6\rangle 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} 5x+6\langle 0 \\ x^2+5x+6\rangle 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x\geq -1{,}2 \\ x<-1; x>6 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<-1{,}2 \\ x<-3; x>-2 \end{cases}$

Решением первой системы является два промежутка $[-1{,}2;-1),(6,\infty)$

Решение второй системы

$$(-\infty;-3),(-2;-1.2).$$

Решением исходного неравенства будет объединение решений двух систем.

Ответ: $(-\infty;-3),(-2;-1.2)$ [2].

Разработанный элективный курс, поможет учащимся расширить свои знания по теме «Модуль числа», также выбрать профиль дальнейшего обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Инфоурок [Электронный ресурс] https://infourok.ru/elektivnie-kursi-v-predprofilnoy-podgotovke-i-profilnom-obuchenii-500909.html
2. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. – Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: Учеб. Пособие для студентов физ. – мат. Спец. Пед. ин-тов. – 3-е изд., перераб. И доп. – М.: «ABF», 1995 – 352 с.: ил. – ISBN 5-87484-023-0.
3. Математика: учеб. Для 6 кл. общеобразоват. Учреждений / М34[Г.В. Дорофеев, И.Ф. Шарыгин, С.Б. Суворова и др.]; под ред. Г.В. Дорофеева, И.Ф. Шарыгина; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования, изд-во «Просвещение».– 10-е изд. –М.: Просвещение, 2008. – 302 с.: ил. – (Академический школьный учебник).
4. [Электронный ресурс] http://www.13min.ru/video-uroki/matematika-algebra-modul/

УДК 378.025.7

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРИЁМОВ КРИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ТЕХНОЛОГИИ СИСТЕМНО-ДЕЯТЕЛЬНОСТНОГО МЕТОДА ОБУЧЕНИЯ

Светлана Викторовна Смирнова
МБОУ «СОШ ст. Старица», Старицкий район, Тверская обл.
E-mail: slws@list.ru

Ключевые слова: *критическое мышление, системно-деятельностный метод обучения.*

Аннотация. В работе рассматриваются приёмы критического мышления, используемые при применении технологии системно-деятельностного метода обучения, на примере урока «открытия нового знания».

Важнейшая задача цивилизации – научить человека мыслить.
Эдисон

Когда людей станут учить не тому, что они должны думать, а тому, как они должны думать, то тогда исчезнут всякие недоразумения.
Г. Лихтенберг

Без сомнения, математика – одна из самых сложных школьных дисциплин и вызывает трудности у многих обучающихся. Заинтересовать математикой - дело непростое. Здесь многое зависит от того, как вовлечь всех обучающихся в обсуждение сложившейся ситуации, как поставить даже очевидный вопрос. Активность учащихся, успех урока целиком зависит от методических приемов, которые выбирает учитель.

Сегодня многие учителя задумываются о том, как повысить мотивацию и активировать учебно-познавательную деятельность каждого ученика в течение всего урока.

В своей работе я использую системно-деятельностный метод обучения. Это развитие творческих способностей каждого обучающегося, раскрытие ими своих возможностей, подготовке к жизни в современных условиях, а также придание образовательному процессу воспитательной функции в широком смысле этого слова.

Системно-деятельностный метод, как педагогическая технология, может использоваться практически на любом предмете, в любой образовательной деятельности. Умение увидеть задачу с разных сторон, анализировать множество решений, из единого целого выделить составляющие, или, наоборот, из разрозненных фактов собрать целостную картину, будет помогать не только на уроках, но и в обычной жизни. Научить ребят не знаниям, а работе.

Для этого учитель ставит ряд вопросов:
- какой учебный материал отобрать и как подвергнуть его дидактической обработке;
- какие методы и средства обучения выбрать;
- как организовать собственную деятельность и деятельность учащихся;

- как сделать, чтобы взаимодействие всех этих компонентов привело к определенной системе знаний и ценностных ориентаций.

На уроках системно-деятельностного метода обучения, по-моему мнению, целесообразно использовать приёмы критического мышления.

Критическое мышление – это способность анализировать информацию с помощью логики и личностно-психологического подхода, с тем, чтобы применять полученные результаты как к стандартным, так и нестандартным ситуациям, вопросам и проблемам. Этому процессу присуща открытость новым идеям.

Определим признаки критического мышления:

1. Критическое мышление есть мышление самостоятельное.
2. Информация является отправным, а отнюдь не конечным пунктом критического мышления. Знание создает мотив, без которого человек не может мыслить критически.
3. Критическое мышление начинается с постановки вопросов и уяснения проблем, которые нужно решить
4. Критическое мышление стремится к убедительной аргументации.
5. Критическое мышление есть мышление социальное. Всякая мысль проверяется и оттачивается, когда ею делятся с другими. В результате обсуждения, спора, обмена мнениями уточняется и углубляется индивидуальная позиция.

Методические приемы для развития критического мышления, включающие в себя групповую работу, моделирование учебного материала, ролевые игры, дискуссии, индивидуальные и групповые проекты, способствуют приобретению знаний, обеспечивают более глубокое усвоение содержания, повышают интерес учеников к предмету, развивают социальные и индивидуальные навыки.

Некоторые правила использования приёмов критического мышления:

1. Задавайтесь вопросами, интересуйтесь.

Речь идет не о поверхностном любопытстве, а о любознательности, пытливости, интеллектуальной жажде. Вопросы могут служить мотивацией к изучению материала, могут способствовать лучшему закреплению изученного, а также работать на рефлексию. Основой являются вопросы, начинающиеся с вопросительных слов.

2. Анализируйте идеи, предположения, тексты.

Анализ – это исходная мыслительная операция, с которой начинается процесс мышления. Для его осуществления нужно разложить идею или объект на составные части. Анализировать можно по нескольким направлениям: “это я уже знаю”, “это я слышал”, “это не знаю”. Другой пример: “это я понимаю и объясню другому”, “это я понимаю, но объяснить не смогу”, “это я не понимаю”.

3. Исследуйте факты, доказательства.

4. Высказывайте свои предложения, мысли, идеи, а также считайтесь с другими мнениями.

Приведу пример использования приёмов критического мышления на уроке изучения нового материала по деятельностному методу обучения.

Урок открытия нового знания

1. Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности

Цель: Выработать на личностно значимом уровне внутренней готовности выполнение нормативов учебной деятельности

Деятельность учителя: создаёт условия для возникновения внутренних потребностей включения в деятельность (хочу!); активизирует требования к ученику со стороны учебной деятельности (надо!); устанавливает тематические рамки учебной деятельности (могу!).

Деятельность учащихся: ученики настроились на работу, проверили наличие учебных предметов, поделились эмоциями.

2. Актуализация знаний и фиксирование затруднений в деятельности

Цель: Подготовить мышление учащихся и организовать осознание ими внутренних потребностей к построению нового способа действий.

- *Деятельность учителя:* Активизирует все мыслительные операции, познавательные процессы (внимание, речь, память, мышление) и предоставляет задания на повторение изученного материала, на применение нового знания. Организует подготовку к изучению нового материала.

Деятельность учащихся: Воспроизводят и фиксируют ЗУНы, достаточные для построения нового способа действий. Пытаются выполнить самостоятельно задания на применение нового знания, запланированные для изучения на данном уроке. Затруднения фиксируют в громкой речи при выполнении пробного действия.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

«Корзина» идей, понятий (может использоваться на любом этапе урока)

На доске можно нарисовать корзинку, где условно собирается все, что дети знают по данной проблеме. Учитель задает вопрос о том, что известно детям о поставленной проблеме; каждый ученик самостоятельно вспоминает и записывает в тетрадь то, что он знает в этой связи (1-2 мин); обмен информацией в парах (группах); каждая пара называет одно сведение или факт, не повторяя сказанного ранее; учитель в виде тезисов записывает в «корзинке» все высказывания и идеи, включая ошибочные; по мере освоения новой информации исправляются ошибки, вносятся необходимые дополнения.

«Таблица – ЗХУ»

Работа с таблицей ведется на всех этапах урока. В начале заполняют первую часть таблицы «Знаю», вторая часть таблицы «Хочу узнать» — это определение того, что дети хотят узнать, пробуждение интереса к новой информации. Затем учащиеся строят новые представления на основании имеющихся знаний. После обсуждения текста учащиеся заполняют третью графу таблицы «Узнал».

«Найди ошибку» (может использоваться на любом этапе урока)

3. Выявление места и причины затруднения

Цель: *Организовать анализ учащимися возникшей ситуации и на этой основе выявить места и причины затруднения, осознать то, в чем именно состоит недостаточность их знаний, умений или способностей.*

Деятельность учителя: Организует выявление учащимися места и причины затруднения.

Деятельность учащихся: Анализируют шаг за шагом с опорой на знаковую запись и проговаривают вслух, что и как они делали. Фиксируют операцию, шаг, на котором возникло затруднение (место затруднения). Соотносят свои действия на этом шаге с изученными способами и фиксируют, какого знания или умения недостает для решения исходной задачи и задач такого класса или типа вообще (причина затруднения).

4. Построение проекта выхода из затруднения

Цель: *поставить цель учебной деятельности и на этой основе выбрать способ и средства её реализации*

Деятельность учителя: Учитель выступает в роли организатора. После ответов детей уточняет цель и тему урока.

Деятельность учащихся: Формулируют конкретную цель своих будущих, учебных действий, устраняющих причину возникшего затруднения (чему учиться). Предлагают и согласовывают тему урока. Выбирают средства для построения нового знания (с помощью чего?) - изученные понятия, алгоритмы, модели, формулы, способы записи и т.п.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

Учебный мозговой штурм

5. Реализация построенного проекта (Открытие детьми нового знания)

Цель: *Построить новый способ действия и сформировать умение применять его как при решении задачи, которая вызвала затруднение, так и при решении задания такого же типа.*

Деятельность учителя: Учитель выступает в роли организатора. Фиксирует новый способ действия (определение, свойства) на доске. Следит за хронометрией урока. Обращает внимание на составленные определения при проговаривании учащимися вслух.

Деятельность учащихся: Учащиеся работают в парах, группах с заданиями, теоретическим материалом учебника, используя знаковую систему. Пытаются решить причину затруднения. Решают фронтально, в парах несколько типовых заданий на новый способ действий. При этом проговаривают вслух выполненные шаги алгоритма.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

“ИНСЕРТ” проставление значков в тексте (разметка текста).

✓ – “уже знал”, + “новое”, (-) – “думал иначе или не знал”, ? – “не понял, есть вопросы” итоговая таблица.

		(-)	

Кластер (может использоваться на любом этапе урока) это способ графической организации материала, позволяющий сделать наглядными те мыслительные процессы, которые происходят при погружении в тот или иной текст.

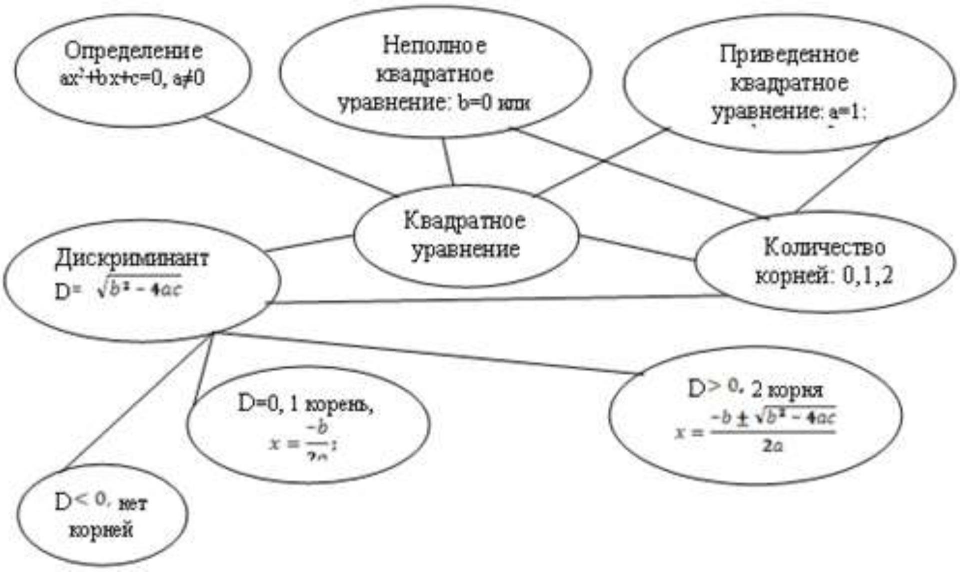
Последовательность действий при построении кластера проста и логична:

1. Посередине чистого листа (классной доски) необходимо написать ключевое слово или тезис, который является «сердцем» текста.

2. Вокруг «накидать» слова или предложения, выражающие идеи, факты, образы, подходящие для данной темы (модель «планета и ее спутники»).

3. По мере записи, появившиеся слова соединяются прямыми линиями с ключевым понятием. У каждого из «спутников» в свою очередь тоже появляются «спутники», устанавливаются новые логические связи.

В итоге получается структура, которая графически отображает размышления, определяет информационное поле данного текста. Важно уметь конкретизировать категории, обосновывая их при помощи мнений и фактов, содержащихся в изучаемом материале.



6. Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи

Цель: Усвоить учащимся новый способ действия при решении типовых задач.

Деятельность учителя: Организовывает работу учащихся.

Деятельность учащихся: Решают (фронтально, в группах, в парах) несколько типовых заданий на новый способ действия, при этом проговаривают вслух выполненные шаги и их обоснование – определения, алгоритмы, свойства и т.д.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

«Верные, неверные утверждения»

7. Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону

Цель: Интериоризировать учащимся новый способ действия и провести рефлексию достижения цели пробного учебного действия.

Деятельность учителя: Организовывает самостоятельную работу на новый способ действия, самопроверку учебных решений по эталону. Создаёт (по возможности) ситуацию успеха для каждого ребёнка, для учащихся допустивших ошибки. Предоставляет возможность выявления причин ошибок и их устранения.

Деятельность учащихся: Решают самостоятельно несколько типовых заданий на новый способ действия, пошагово проверяют свои действия самостоятельного задания. Оценивают свои результаты в освоении нового способа действия.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

Концептуальная таблица (Сравнительный анализ).

Тема “Тригонометрические функции”. 11 класс.

Можно попросить учащихся заполнить таблицу, работая в группах. Затем провести обсуждение и сравнение результатов.

Функция	Область определения	Область значений	Период	Промежутки монотонности	Промежутки знакопостоянства	Четность	Нули функции	Ограниченность
y = cos x								
y = sin x								
y = tg x								
y = ctg x								

«Перепутанные логические цепочки»

8. Включение в систему знаний и повторение

Цель: Повторение и закрепление ранее изученного и подготовка к изучению следующих разделов курса, выявление границы применимости нового знания и использование его в системе изученных ранее знаний, повторение учебного содержания, необходимого для обеспечения содержательной непрерывности, включение нового способа действий в систему знаний.

Деятельность учителя: Выявляет и фиксирует границы применимости нового знания и учит использовать его в системе изученных ранее знаний

Деятельность учащихся: Доводят новое знание до уровня автоматизированного навыка. Повторяют учебное содержание, необходимое для обеспечения содержательной непрерывности.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

«Толстый» и «тонкий» вопрос. Данная работа способствует развитию мышления и вниманию учащихся, а также развивается умение задавать "умные" вопросы. Классификация вопросов помогает в поиске ответов, заставляет вдумываться в текст и помогает лучше усвоить содержание текста.

Составьте вопросы по теме, по тексту.

Толстый	Тонкий
Объясните почему….? Почему вы думаете….? Предположите, что будет если…? В чём различие…? Почему вы считаете….?	Кто..? Что…? Когда…? Может…? Мог ли…? Было ли…? Будет…? Согласны ли вы…? Верно ли…?

«Фишбоун» – «Рыбная кость», направлен на развитие критического мышления учащихся в наглядно-содержательной форме. Суть данного методического приема – установление причинно-следственных взаимосвязей между объектом анализа и влияющими на него факторами, совершение обоснованного выбора. Дополнительно метод позволяет развивать навыки работы с информацией и умение ставить и решать проблемы. В основе Фишбоуна – схематическая диаграмма в форме рыбьего скелета. Она включает в себя основные четыре блока, представленные в виде головы, хвоста, верхних и нижних косточек. Связующим звеном выступает основная кость или хребет рыбы.

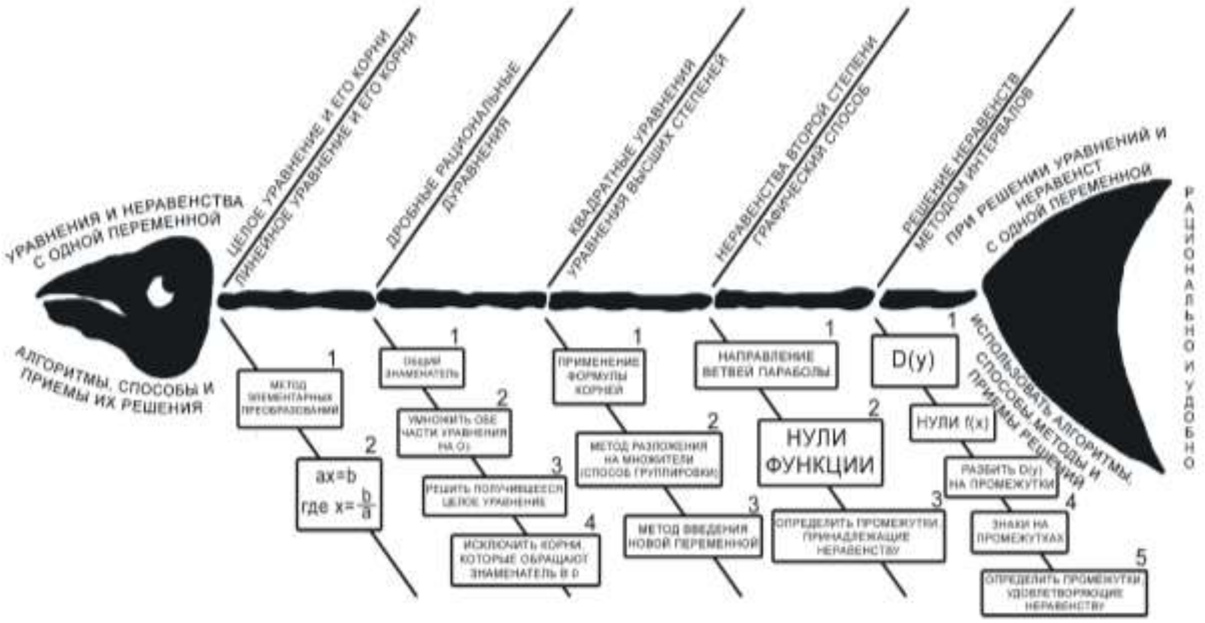
Голова – проблема, вопрос или тема, которые подлежат анализу.

Верхние косточки (расположенные под углом 45 градусов) – на них фиксируются *основные понятия темы, причины, которые привели к проблеме.*

Нижние косточки – *факты, подтверждающие наличие сформулированных причин,* или суть понятий, указанных на схеме.

Хвост – ответ на поставленный вопрос, *выводы, обобщения*.

Все записи – краткие, точные, лаконичные и отображают лишь суть понятий.



9. Рефлексия учебной деятельности

Цель: Оценить учащимися собственную учебную деятельность, осознать методы построения и границы применения нового способа действий.

Деятельность учителя: Организует рефлексию (по вопросам) и самооценку собственной учебной деятельности.

Деятельность учащихся: Соотносят цель и результат учебной деятельности. Фиксируют степень соответствия. Намечают цели и пути дальнейшей деятельности.

Приёмы критического мышления, используемые на этапе:

Синквейн, РАФТ

“Ромашка” Блума (как вариант домашнего задания) По теме составить вопросы, учитывая их назначение.

Используя названные приёмы развития критического мышления и деятельностный метод обучения, мы решаем очень важные задачи. Во-первых, делаем процесс обучения интересным. Во-вторых, формируем такие навыки работы с информацией, без которых современному человеку трудно достичь социального успеха. И, в-третьих, воспитываем качества критически мыслящей личности, способной найти правильный путь решения любой проблемы.

Разнообразные приемы, методы, технологии – это не самоцель.

Важен результат.

Педагог должен оценивать свои успехи успехами своих учеников.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Загашев И.О., Заир-Бек С.И., Муштавинская И.В. Учим детей мыслить критически. СПб: Издательство «Альянс Дельта», 2003

2. Корнева Г.Н. Наука и образование в XXI веке: Сборник научных трудов по материалам Международной научно - практической конференции 30 июня 2015г.: в 3 частях. Часть I. М.: «АР – Консалт», 2015г. – с. 24.

3. Метод "Фишбоун" (Рыбий скелет): что это такое, формы работы на уроке и примеры. http://pedsovet.su/metodika/priemy/5714

УДК 519.174.1

ЗАДАЧА О РАЗБИЕНИИ КОНЕЧНОГО МНОЖЕСТВА ОБЪЕКТОВ НА ДВА ПОДМНОЖЕСТВА ПРИ НАЛИЧИИ БИНАРНОЙ СВЯЗИ

Иван Сергеевич Филимонов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: mr.filimonov-iwan@mail.ru

Ключевые слова: теория графов, задача разбиения, гамильтонов граф, простая цепь, простой цикл, разбиение графов

В данной статье рассмотрена задача о разбиении множества объектов на два подмножества при наличии связи, которая формализуется при помощи теории графов. Устанавливаются некоторые ее связи с NP-полной задачей о поиске гамильтонова цикла в произвольном графе.

Олимпиадное программирование является перспективной областью деятельности. Помимо очевидных преимуществ, таких как закрепления знаний алгоритмов решения некоторых типовых задач, упрочнения навыков их формализации, область интересна еще и тем, что периодически в ней могут возникать задачи, которые сами по себе либо при обобщении могут оказаться нетривиальными, не решаемыми с помощью какого-либо простого широко известного алгоритма. Далее рассмотрена одна из них.

Формулировка задачи. Пусть имеется множество из N объектов. Обозначим его как V. На этом множестве задано бинарное симметричное отношение R между объектами. Назовем его связью и будем обозначать $(x, y) \in R$, если x связан с y. Требуется разделить элементы множества V на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, чтобы

(1) $\forall v_{11} \in V_1 \, \exists v_{21} \in V_2 \, (v_{11}, v_{21}) \in R$,

(2) $\forall v_{22} \in V_2 \, \exists v_{12} \in V_1 \, (v_{12}, v_{22}) \in R$,

(3) $V_1 \cup V_2 = V$.

Поскольку отношение между объектами является бинарным и симметричным, эту задачу можно промоделировать неориентированными графами. Будем считать множество V объектов множеством V графа, множество ребер обозначим как E, и примем, что для $v_1, v_2 \in V$ ребро $(v_1, v_2) \in E$ тогда и только тогда, когда между v_1 и v_2 существует связь.

Для решения поставленной задачи достаточно сделать следующее:

1. Проверить, что в графе отсутствуют компоненты связности с только одной вершиной (если есть хотя бы одна, то вершину из неё нельзя будет поместить ни в одно из двух множеств, не нарушая условия);
2. Для каждой компоненты связности зафиксировать некоторую $v \in V$ вершину разбить вершины компоненты на «уровни», соответствующие удаленности вершин, входящих в них, от v по кратчайшему пути. Далее вершины с четных уровней следует поместить во множество V_1, с нечетных – в V_2.

Сделать это позволяет алгоритм поиска в ширину. Полное описание и теоретическое обоснование этого алгоритма можно найти, например, в [1].

Причем, если для представления графа использовать список смежности, то алгоритм, решающий задачу, будет иметь линейную по количеству вершин и ребер сложность.

Таким образом, эта задача тривиальна и предполагает лишь небольшую модификацию простого в описании широко известного алгоритма. Гораздо больший интерес представляет собой её обобщение, когда требование симметричности связи снимается.

Постановка задачи. Пусть имеется множество из N объектов. Обозначим его как V. На этом множестве задано бинарное (не симметричное в общем случае) отношение R между объектами. Назовем его связью и будем обозначать $(x, y) \in R$, если x связан с y. Требуется разделить элементы множества V на два непересекающихся подмножества V_1 и V_2 так, чтобы

(4) $\forall v_{11} \in V_1 \; \exists v_{21} \in V_2 \; (v_{11}, v_{21}) \in R,$

(5) $\forall v_{22} \in V_2 \; \exists v_{12} \in V_1 \; (v_{12}, v_{22}) \in R,$

(6) $V_1 \cup V_2 = V.$

Вследствие того, что отношение осталось бинарным, задачу всё еще можно смоделировать графами, но на этот раз следует ввести ориентацию для каждого ребра. Использование простых алгоритмов обхода в ширину и в глубину в общем случае не приведет к нахождению подходящего разбиения и при этом не даст оснований полагать, что найти такое разбиение невозможно.

Следует сразу отметить, что задача не является задачей о раскраске графа двумя красками, или задачей проверки графа на двудольность (см. [1]), хотя и похожа на неё. В тех случаях, когда граф можно раскрасить с использованием двух красок, нельзя сказать ничего определенного о возможности разбиения графа вследствие того, что не учитывается ориентация каждого отдельного ребра. Наоборот, из того, что граф удалось разбить на два подмножества согласно условию, не следует, что его можно раскрасить двумя красками, поскольку при разбиении вполне могут существовать ребра между вершинами одного множества.

Попробуем связать задачу с одной из полных задач теории графов – нахождением гамильтонова цикла.

Утверждение 1. Если полустепень захода вершины равна нулю, а полустепень исхода ненулевая, она может быть помещена только во множество V_1. Аналогично, если для вершины полустепень исхода равна нулю, а полустепень захода ненулевая, она может быть помещена только во множество V_2.

Доказательство. Действительно, если из данной вершины не исходит ни одной дуги, она не может удовлетворять условию (4), если для неё нет входящих вершин, она не может удовлетворять условию (5)

Утверждение 2. Любая из этих структур: простая орцепь, простой орцикл, гамильтонов граф, может быть разбита на два множества согласно условиям, если количество вершин в ней чётно.

Доказательство. Расположим вершины простой орцепи в порядке их следования, начиная с первой: $v_1, \dots, v_n$. Тогда добавляя каждую нечетную вершину цепи во множество V_1, каждую четную – во множество V_2. Первая вершина попадет в V_1, последняя – в V_2. В итоге получим требуемое разбиение. Простой цикл $(v_1, \dots, v_n)$ можно рассматривать как орцепь $v_1, \dots, v_n$, т.е. не учитывать дугу (v_n, v_1). Тогда разбиение может быть получено аналогично цепи. Гамильтонов цикл четной длины, в свою очередь, может рассматриваться как простой орцикл четной длины, если отбросить все вершины, не входящие в последний. Благодаря этому разбиение его вершин на множества можно получить аналогично.

Утверждение 3. Ни одна из этих структур: простая орцепь, простой орцикл, гамильтонов граф с количеством дуг, равным количеству вершин, не может быть разбита на два множества согласно условиям, если количество вершин в ней нечётно.

Доказательство. Вследствие утврждения 1, начинать разметку простой орцепи следует с помещения вершины с нулевой полустепенью захода во множество V_1. Конечная вершина при этом будет помещена также во множество V_1, и для нее не будет исходящих дуг, что не соответствует условию задачи.

Рассмотрим простой цикл $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где n – нечетное положительное число. Начнем распределять вершины цикла с v_1, определив ее во множество V_1. Следующую вершину придется поместить во множество V_2, так как для нее нет входящих дуг из вершин V_1. И так далее. В результате, придется определить все вершины с нечетными номерами во множество V_1, с чётными – во множество V_2. Но в этом случае вершина v_n будет помещена во множество V_1, а единственная выходящая из нее дуга – (v_n, v_1), Следовательно, разбить вершины по множествам, определив вершину v_1 в V_1, невозможно. Поместив изначально v_1 в V_2 и проведя аналогичные рассуждения, получаем такую ситуацию: v_n находится в V_2, и для v_1 нет ни одной входящей дуги из множества V_1. Следовательно, нарушается условие (5) и при помещении v_1 в V_2 разбить вершины по множествам нельзя. Значит, вершину v_1 невозможно определить ни в одно множество, и простой цикл нечетной длины нельзя разбить на V_1 и V_2 согласно условиям задачи.

Гамильтонов орграф с нечетным количеством вершин, равным количеству дуг, является простым циклом, т.к. каких-либо дуг, кроме входящих в цикл, в нем нет. Исходя из сказанного выше, он также не подлежит разбиению на множества согласно условиям задачи.

Утверждение 4. Для того, чтобы гамильтонов граф на n вершинах, где $n \geq 3$ – нечетное число, можно было разбить на два множества, достаточно, чтобы в нем существовала такая дуга, что она вместе с некоторыми $k-1$дугами гамильтонова цикла образует орцикл длины k, где k – четное положительное число.

Доказательство. Рассмотрим гамильтонов цикл указанного графа: $(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Без ограничения общности, будем считать, что дуга исходит из некоторой вершины v_i в вершину v_1. Поскольку длина цикла по условию должна быть чётной, то i чётно. Тогда оставшееся количество вершин $n-i$ нечетно, а $(v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_i)$ – обозначенный в условии цикл длины k, т.е. $i = k$. Распределим его вершины по двум множествам следующим образом: каждую нечетную вершину поместим в V_2, каждую четную – в V_1. Такое распределение отвечает условиям задачи. Оставшиеся же вершины $v_{i+1}, \dots, v_n$ можно рассматривать как простую цепь, если отбросить все дуги, кроме дуг $(v_{j-1}, v_j), j = \overrightarrow{i+1,\ n}$. Их распределим следующим образом: каждую нечетную вершину поместим в V_1, каждую чётную – в V_2. Тогда для всех вершин, кроме v_n, условия задачи выполняются. Однако существует дуга (v_n, v_1), которая принадлежит гамильтонову циклу, причем вершина v_1 уже определена во множество V_2, а вершина v_n – в V_1. Значит, условия задачи выполняются и для вершины v_n, а, следовательно, разбиение графа на два множества найдено.

Следствие. Пусть $G = \langle V, E \rangle$ – ориентированный гамильтонов граф без петель с нечетным количеством вершин, равным количеству дуг. Пусть G_k- граф без петель, полученный добавлением к G некоторого количества k новых дуг. Тогда как минимум половина возможных графов G_k может быть разбита на два множества согласно условиям задачи.

Доказательство. Пусть гамильтонов цикл графа G есть $(v_1, v_2, \dots, v_n)$, где n – положительное нечетное число. Рассмотрим сначала графы, полученные из G добавлением одной новой дуги. Без ограничения общности, можно считать, что эта дуга соединяет некоторую вершину v_i и v_1 и идет v_i в v_1 либо ориентирована противоположно. В первом случае, согласно утв. 4, существует разбиение графа на два множества, удовлетворяющее условиям задачи. Соответственно, как минимум половина всех графов G_1, полученных из G добавлением одной новой дуги, может быть разбита на два множества. Обозначим эти графы как G_{1a}, остальные – как G_{1b}. Все другие графы G_k могут быть получены из графов G_1 добавлением $k-1$ новых дуг. Те из них, что будут получены из G_{1a}, могут быть разбиты на два множества согласно условиям задачи. К тому же, некоторые из тех графов, которые могут быть получены из G_{1b}, также могут быть разбиты на V_1 и V_2. В итоге, как минимум половина возможных графов G_k может быть разбита на два множества согласно условиям задачи.

Таким образом, рассмотренная задача оказывается тесно связанной с задачей о поиске гамильтонова цикла в графе, которая является NP-полной.

Целью исследования являлось установить связи между задачей о разбиении конечного множества объектов на два подмножества при наличии бинарной связи и задачей поиска гамильтонова цикла в графе. Исследование не претендует на полноту, и его тема предполагает дальнейшую проработку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домнин, Л.Н. Элементы теории графов: учеб. пособие / Л.Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз.гос. ун-та, 2007. – 144 с.

2. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 450 с.

УДК 517.54

ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ ТОЧЕК ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATLAB

Андрей Алексеевич Цветков
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: cvetkoandrejj@gmail.com

Александр Анатольевич Голубев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *гармонические отображения, особая точка, точки сборки, точки складки, нулевая линия якобиана, ортогональная траектория.*

Аннотация. Голоморфные квадратичные дифференциалы играют важную роль в исследовании структуры особых точек гармонических отображений [3–7]. В статье описание особенностей гармонических отображений, связанное с взаимным расположением двух систем аналитических кривых – общих складок отображения и ортогональных траекторий голоморфного квадратичного дифференциала, ассоциированного с ним – проиллюстрировано геометрическими построениями, выполненными с помощью математического пакета MATLAB.

Пусть $w = f(z)$ – функция комплексного переменного, определённая в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbf{C}$.

Определение 1. Если существует конечный предел $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta f(z_0)}{\Delta z}$, то его значение называется производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 (обозначается $f'(z_0)$), сама же функция f называется дифференцируемой в смысле комплексного анализа (или *моногенной*) в точке z_0.

Определение 2. Если существует окрестность точки z_0, в каждой точке которой функция f моногенна, то функция f называется *голоморфной* в точке z_0.

Теорема (Коши–Риман). Для того чтобы f была моногенной в точке z_0 необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

1) Действительные функции $u(x,y) = \mathrm{Re} f(x+iy)$ и $v(x,y) = \mathrm{Im} f(x+iy)$ дифференцируемы в точке $z_0 = (x_0, y_0)$ в смысле действительного анализа;
2) $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют условиям Коши–Римана в точке $z_0 = (x_0, y_0)$: $\frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0)$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0)$.

Следствие. Справедливы следующие формулы для производной функции комплексного переменного:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) \equiv \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \equiv$$
$$\equiv \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) \equiv \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).$$

Функция $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, голоморфная в области *D*, имеет производные всех порядков. Следовательно, функции u и v имеют непрерывные частные производные второго порядка в области *D*.

Продифференцируем первое из условий Коши – Римана по x, а второе – по y:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}.$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ (в силу непрерывности частных производных), сложим эти равенства и получим $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Аналогично можно показать, что $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.

Определение 3. Действительная функция $u(x,y)$, имеющая в *D* непрерывные частные производные второго порядка и удовлетворяющая в *D* дифференциальному уравнению Лапласа $\Delta u = 0$ (или $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$), называется *гармонической* в области *D*.

Из вышесказанного следует, что действительная и мнимая части голоморфной в области функции являются гармоническими функциями в этой области.

Определение 4. Гармонические функции, связанные между собой условиями Коши–Римана, называются сопряжёнными.

Таким образом, действительная и мнимая части голоморфной в области функции являются сопряжёнными гармоническими функциями.

Определение 5. Гармоническим отображением называется функция комплексного переменного $w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$= $\overline{g(z)}$+$h(z)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – гармонические функции; $g(z)$ и $h(z)$– голоморфные функции.

Предложение. Отображение $w(z)$ является гармоническим тогда и только тогда, когда $w_{z\bar{z}}$= 0. Здесь $f_z = \frac{1}{2}(f'_x - if'_y)$, $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f'_x + if'_y)$ – формальные производные.

Доказательство. f – голоморфная функция, $\begin{cases} u'_x = v'_y \\ u'_y = -v'_x \end{cases} \Leftrightarrow f_{\bar{z}} = 0$, т. к. $f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(u'_x + iv'_x$+ $i(u'_y + iv'_y))$ = $\frac{1}{2}((u'_x - v'_y)$+ $i(v'_x + u'_y))$. Таким образом, $w_z = \left(\overline{g(z)} + h(z)\right)_z = \left(\overline{g(z)}\right)_z + h(z)_z = \overline{g(z)_{\bar{z}}} + h(z)_z = 0 + h(z)_z = h_1(z) -$ голоморфная функция; $w_{z\bar{z}} = h_1(z)_{\bar{z}} = 0$.

Примеры

1) Все голоморфные и антиголоморфные функции являются гармоническими отображениями.

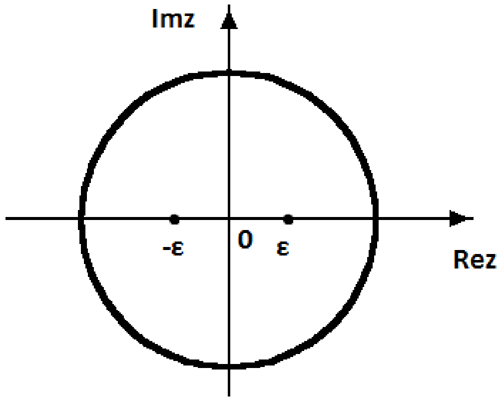
2) $w = z^2 + \bar{z}^2$ – гармоническое отображение.

Определение 6. z_0 – особая точка гармонического отображения, если $w(z)$ не является биективным в любой окрестности этой точки.

Примеры

1) $w = z^2$.

Для этого отображения особой точкой является $z_0 = 0$. Покажем это.



Возьмём $z_{1,2} = \pm\varepsilon$, принадлежащие окрестности z_0. Тогда $w(z_{1,2}) = \varepsilon^2$. Отображение w не является биективным в точке $z_0 = 0$, т.к. нарушена инъективность.

2) $w = z^2 + \bar{z}^2$.

$w = z^2 + \bar{z}^2 = (x + iy)^2 + (x - iy)^2 = 2x^2 - 2y^2$.

В точку u_0 переходят точки гиперболы $2x^2 - 2y^2 = u_0$. Таким образом, $w(z)$ не является биективным отображением в любой окрестности любой точки плоскости. Отображение $w(z)$ всю комплексную плоскость $\mathbf{C}$ переводит в действительную ось **R.** Любая точка комплексной плоскости является особой для данного отображения.

Теорема (Леви). Для гармонического отображения точка z_0 является особой тогда и только тогда, когда якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ отображения f в точке z_0 обращается в ноль: $J_f(z_0) = 0$.

Примеры

1) $w = z^2$.

$J_f = |2z|^2 - |0|^2 = 4|z|^2 = 0 \Leftrightarrow z = 0$. $z = 0$ – особая точка.

2) $w = z^2 + \bar{z}^2$.

$J_f = |2z|^2 - |2\bar{z}|^2 \equiv 0$, любая точка $z_0 \in \mathbf{C}$ является особой.

Гармоническое отображение f называется вырожденным, если его якобиан тождественно равен нулю. Всюду далее мы будем рассматривать только невырожденные гармонические отображения.

Не вырождающиеся в точки нулевые линии якобиана невырожденного гармонического отображения f являются аналитическими кривыми. Назовем их общими складками [3–7]. Изолированным нулям якобиана, как и в случае голоморфных отображений, отвечают точки ветвления отображения f. Основную трудность представляет исследование поведения f в окрестности неизолированного нуля якобиана [3–7].

Ввиду локального характера задачи без ограничения общности можно предполагать, что $z_0 = 0$ – особая точка гармонического отображения f и что

$f(0) = 0$. Тогда с помощью линейного преобразования аргумента $z \to \alpha z$ любое гармоническое отображение f приводится к стандартному виду, т.е. к виду, когда либо f либо $\overline{f}$ является классическим гармоническим отображением со следующим локальным представлением:

$$f = z^n + \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu + \sum_{\mu=m}^{\infty} \overline{\gamma_\mu z^\mu},$$

где m и n – натуральные числа, $m > n$.

Лемма. Пусть начало координат является неизолированным нулём якобиана стандартного невырожденного гармонического отображения f, n – порядок нуля функции h в точке $z = 0$. Тогда существует полином $P(z) = z^n + \sum_{\nu=1}^{k-1} \alpha_{n+\nu} z^{n+\nu}$, действительное число θ и не равные друг другу комплексные числа α и β, такие, что при $z \to 0$ справедливы асимптотические формулы:

$$f = (P(z) + \alpha z^{n+k}) + \overline{\exp(\iota\theta)\,(P(z) + \beta z^{n+k})} + o(z^{n+k}),$$

$$J_f = 2n(n+k)|z|^{2n-2} Re\{(\alpha - \beta) z^k\} + o(z^{2n+k-2}),$$

$$\varphi_f = \exp(i\theta)\, z^{2n-2}(n^2 + o(1)),$$

где $\varphi_f dz^2 = f_z \overline{f}_{\bar{z}} dz^2$ – ассоциированный с f голоморфный квадратичный дифференциал.

Определение 6. Устойчивым гармоническим отображением называется отображение, в котором $P(z) = z$ (см. лемму).

В [3–7] показано, что тип особой точки зависит от взаимного расположения нулевой линии якобиана и ортогональной траектории дифференциала.

Пример

Рассмотрим устойчивое гармоническое отображение

$$f(z) = z + z^2 + \overline{\iota z}.$$

Начало координат является неизолированным нулём якобиана. Действительно,

$$\left\{z \in \mathbf{C} : J_f = 0\right\} = \{z \in \mathbf{C} : |1 + 2z|^2 - 1 = 0\} =$$

$$= \{z \in \mathbf{C} : 2\bar{z} + 2z + 4z\bar{z} = 0\} = \left\{z \in \mathbf{C} : \ (x + \tfrac{1}{2})^2 + y^2 = \tfrac{1}{4}\right\},$$

т.е. общая складка представляет собой окружность, проходящую через точку $z = 0$ и касающуюся в начале координат оси $\mathrm{Im}z = 0$.

Получим асимптотическую формулу для голоморфного квадратичного дифференциала $\varphi_f dz^2$, ассоциированного с f:

$$\varphi_f dz^2 = (2z + 1) i dz^2 = \big(1 + o(1)\big) i dz.$$

Тогда через точку $z = 0$ проходят две ортогональные траектории, а $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ – их касательные векторы. Таким образом, общая складка и ортогональные траектории пересекаются трансверсально (см. рис. 1), и точка $z = 0$ является точкой складки.

Проиллюстрируем это с помощью математического пакета MATLAB.

Найдём образ общей складки и некоторой окрестности нуля при отображении f. Для этого перепишем в действительном виде отображение f:

$$\begin{cases} u = x^2 - x - y^2 - y, \\ v = y + 2xy - x. \end{cases} \tag{1}$$

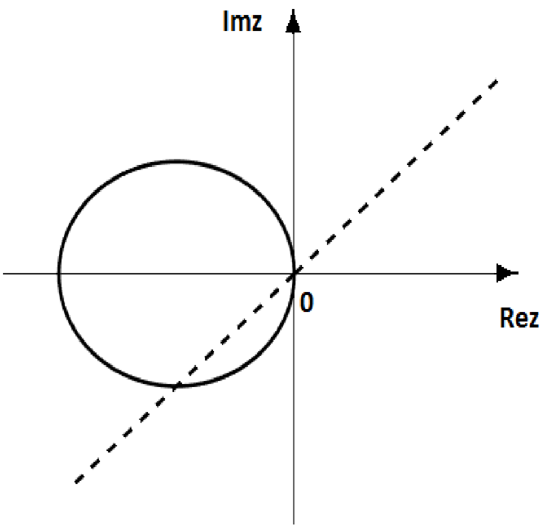


Рис. 1

Подставляя в (1) параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \pm\sqrt{-t - t^2}, t \in [-1,0]. \end{cases}$$

и отрезков прямых $z = -\frac{1}{2} + e^{i\varphi}$ получим параметрические уравнения их образов.

Проводя построения в MATLAB, получим следующее изображение:

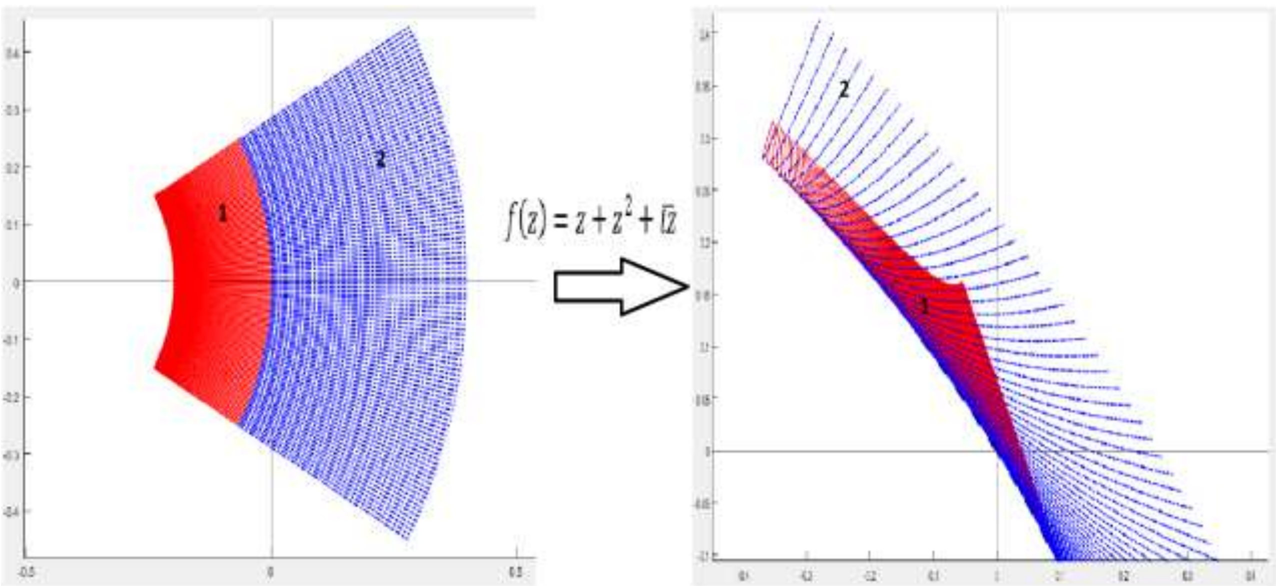


Рис. 2

Ниже приведён код программы в MATLAB:

```
u=2*t.^2+2*t-((-t-t.^2).^0.5);       % параматрическое представление образа
v=((-t-t.^2).^0.5).*(1+2*t)-t;       % верхней полуокружности
plot(u,v,'k','LineWidth',2.9)       % образ верхней полуокружности

u1=2*t.^2+2*t+((-t-t.^2).^0.5);      % параматрическое представление образа
v1=-((-t-t.^2).^0.5).*(1+2*t)-t;     % нижней полуокружности
plot(u1,v1,'k','LineWidth',2.9)     % образ нижней полуокружности

t2=0.3:0.01:0.5;                     % задаём плоскость слева от нулевой
phi=-pi/6:0.01:pi/6;                 % линии якобиана в виде сектора кольца
size1=length(phi);                   % с помощью отрезков прямых
for i=1:size1
    x1=t2*cos(phi(i))-0.5;  y1=t2*sin(phi(i));
    u2=x1.^2+x1-y1.^2-y1;   v2=y1+2*x1.*y1-x1;
    plot(x1,y1,'k','LineWidth',1.5);
    plot(u2,v2,'r','LineWidth',1.5);   % образ сектора "слева" от нулевой линии якоибана
end

t3=0.5:0.01:0.9;                     %аналогично задаём плоскость "справа"
for i=1:size1
    x1=t3*cos(phi(i))-0.5;  y1=t3*sin(phi(i));
    u2=x1.^2+x1-y1.^2-y1;   v2=y1+2*x1.*y1-x1;
    plot(x1,y1,'k','LineWidth',1.5);
    plot(u2,v2,'b','LineWidth',1.5);    % образ сектора "справа" от нулевой линии якоибана
end
```

Рис. 3

Схематично точку складки можно изобразить следующим образом:

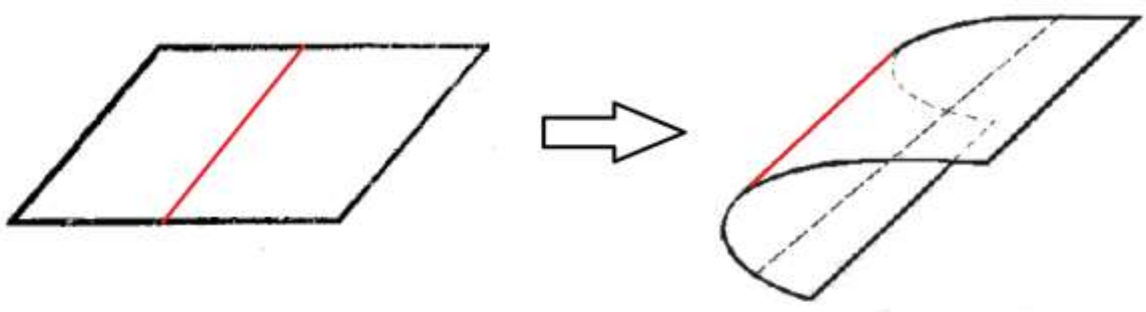


Рис. 4

Можно ли изменить отображение f так, чтобы точка $z=0$ стала точкой сборки? Для этого общая складка ортогональные траектории должны касаться в точке $z=0$ (см. рис. 5).

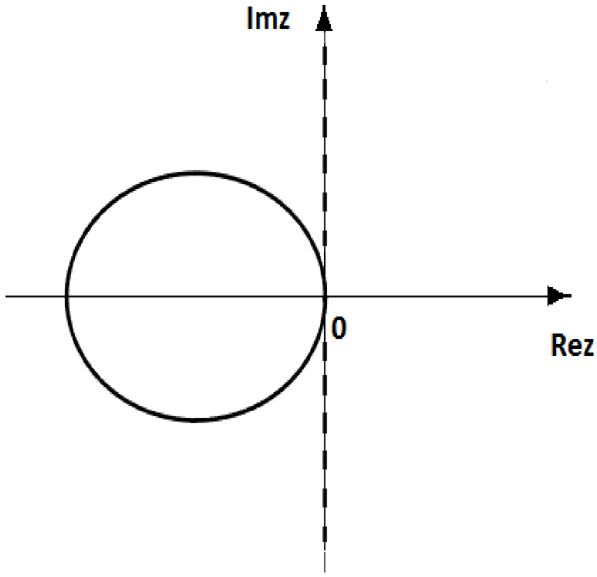


Рис. 5

Изменим коэффициент $e^{i\theta}$ (см. лемму). В исходном отображении этот коэффициент был равен i. Возьмём коэффициент равный 1, получим отображение $f(z)=z+z^2+\bar{z}$.

Заметим, что якобиан отображения при этом не изменится, однако через точку $z=0$ будут проходить две ортогональные траектории с другими касательными векторами $z_1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$, $z_2=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{2}}$. Таким образом, общая складка и ортогональные траектории касаются, и точка $z=0$ является точкой сборки.

Покажем это с помощью MATLAB.

Найдём образ общей складки и плоскости в окрестности нуля при отображении f. Для этого перепишем в действительном виде отображение f:

$$\begin{cases} u=x^2+2x-y^2, \\ v=2xy. \end{cases} \qquad (2)$$

Подставляя в (2) параметрические уравнения окружности

$$\begin{cases} x=t, \\ y=\pm\sqrt{-t-t^2}, t\in[-1,0]. \end{cases}$$

и отрезков прямых $z=-\frac{1}{2}+e^{i\varphi}$ получим параметрические уравнения их образов.

Проводя построения в MATLAB, получим:

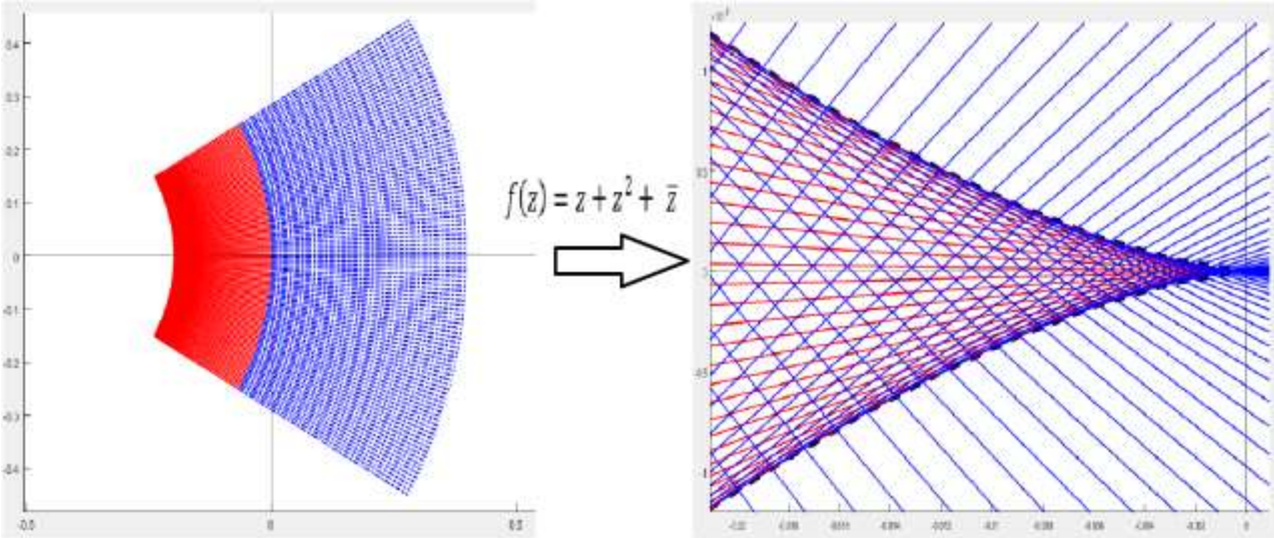


Рис. 6

Ниже приведён код программы в MATLAB.

```
t=-0.01:0.001:0;
x=t;
y=(-t-t.^2).^0.5;
u=2*x+x.^2-y.^2;   v=2*x.*y;          % параматрическое представление образа
plot(u,v,'k--','LineWidth',3.9)       % образ верхней полуокружности
plot(u,-v,'k--','LineWidth',3.9)      % образ верхней полуокружности

t2=0.3:0.01:0.5;                     % задаём плоскость слева от нулевой
phi=-pi/6:0.01:pi/6;                 % линии якобиана в виде сектора кольца
size1=length(phi);                   % с помощью отрезков прямых
for i=1:size1
    x1=t2*cos(phi(i))-0.5;  y1=t2*sin(phi(i));
    u2=2*x1+x1.^2-y1.^2;   v2=2*x1.*y1;
    %plot(x1,y1,'r','LineWidth',1.5);
    plot(u2,v2,'r','LineWidth',1.5);   % образ сектора "слева" от нулевой линии якоибана
end

t3=0.5:0.01:0.9;                     %аналогично задаём плоскость "справа"
for i=1:size1
    x1=t3*cos(phi(i))-0.5;  y1=t3*sin(phi(i));
    u2=2*x1+x1.^2-y1.^2;   v2=2*x1.*y1;
    %plot(x1,y1,'b-.','LineWidth',1.5);
    plot(u2,v2,'b','LineWidth',1.5);    % образ сектора "справа" от нулевой линии якоибана
end
```

Рис. 7

Схематично точку складки можно изобразить следующим образом:

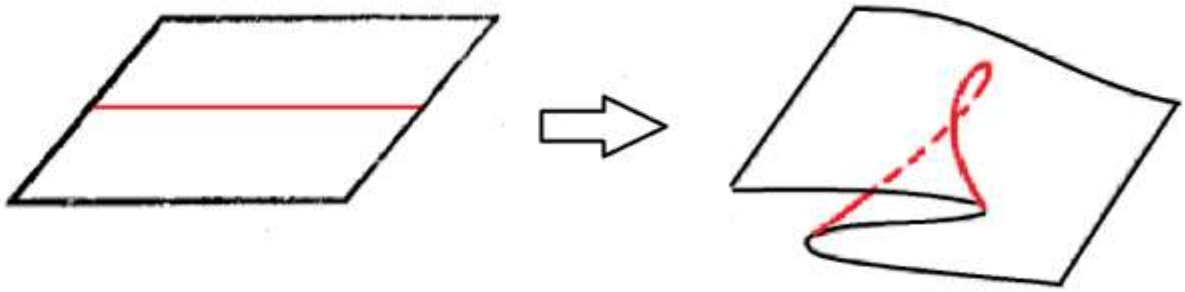


Рис. 8

Таким образом, применение математического пакета MATLAB позволило наглядно показать, как ведут себя гармонические отображения в некоторой окрестности особой точки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977.

2. Lizzaik A. A local properties of light harmonic mappings // Canad. Math. J., 1992. V. 44, № 12. P. 135 – 153.

3. Голубев А.А., Шеретова В. В. Квадратичные дифференциалы и локальные свойства гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1994. – С. 48 – 60.

4. Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали интеграла энергии // Математические заметки. 1994. Т.55, № 6. – С. 50 – 58.

5. Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали интеграла Дугласа-Дирихле и квадратичные дифференциалы / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. – С. 44 – 53.

6. Голубев А.А. Об особых точках плоских гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1997. – С. 47 – 52.

7. Голубев А.А. Об особых точках гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2014. – С. 22 – 35.

УДК 372.851

О ПИФАГОРОВЫХ ТРОЙКАХ

Алёна Анатольевна Шаповалова
Муниципальное образовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 25, Тверь
E-mail: fedotova99@rambler.ru

Ключевые слова: *пифагорова (пифагорейская) тройка, квадратный корень, квадрат суммы, прямоугольные треугольники.*

Аннотация. В статье рассматриваются числа, называемые пифагоровыми тройками и непривычные способы решения некоторых тригонометрических заданий с использованием прямоугольного треугольника.

«Рано или поздно всякая
правильная математическая идея
находит применение в том или ином деле»
А. Н. Крылов

Теорема Пифагора по праву считается самой важной в курсе геометрии и заслуживает пристального внимания. Значение её состоит в том, что из неё или с её помощью можно вывести большинство теорем. Она замечательна ещё и тем, что сама по себе вовсе не очевидна. Однако не Пифагор открыл теорему, носящую его имя. Она была известна древним египтянам еще за 1500 лет до Пифагора, но только как факт, выведенный из измерений. Таким образом, Пифагор не открыл это свойство прямоугольного треугольника, он, вероятно, первым сумел его обобщить и доказать, перевести тем самым из области практики в область науки. Теорема Пифагора является основой решения множества геометрических задач и базой изучения теоретического курса в дальнейшем; содержит богатейший исторический материал, позволяющий развивать познавательный интерес, общую культуру и творчество учащихся средствами математики и её истории.

Пифагором и его учениками были отмечены следующие закономерности:

1) Сумма любого числа из последовательных нечётных чисел, начиная с 1, есть точный квадрат:

$1 + 3 + 5 + \cdots + 2n - 1 = n^2.$

2) Всякое нечётное число, кроме 1, есть разность двух последовательных квадратов:

$(p + 1)^2 - p^2 = 2p + 1$ – формула нечётного числа.

3) Тройка натуральных чисел $a, b, c,$ удовлетворяющих условию $a^2 + b^2 = c^2$, называется пифагоровой (пифагорейской). Тройки, не имеющие общих делителей, больших 1, называются простейшими.

Числа 3, 4, 5 – единственная пифагорова тройка, состоящая из последовательных натуральных чисел:

$p^2 + (p - 1)^2 = (p + 1)^2 \;=>\; p^2 + p^2 - 2p + 1 = p^2 + 2p + 1 \;=>$

$=>\; p^2 - 4p = 0 \;=>\; p = 0$ или $p = 4$. Вывод: тройка –1, 0, 1 нам не подходит.

Имеют место также дробные пифагоровы тройки, например:

1. $3\frac{3}{11}, 4\frac{4}{11}, 5\frac{5}{11}$;
2. $8\frac{8}{17}, 15\frac{15}{17}, 18$ (или $8\frac{8}{17}, 15\frac{15}{17}, 17\frac{17}{17}$);
3. $9\frac{3}{5}, 18, 20\frac{2}{5}$ (или $8\frac{8}{5}, 15\frac{15}{5}, 17\frac{17}{5}$).

Внимание привлекает то, что в записи таких троек числитель равен целой части дроби. В итоге получаем:

$$(ka)^2 + (kb)^2 = (kc)^2,$$

где k равно в первом случае $1\frac{1}{11}$, во втором случае $1\frac{1}{17}$, а в третьем $1\frac{1}{5}$.

Таким образом, достаточно знать несколько пифагоровых троек в целых числах, чтобы написать бесчисленное множество их как в целых, так и в дробных числах.

Вывод формулы в общем виде:

Если $a, b, c -$ пифагорова тройка, то $a\frac{a}{d}, b\frac{b}{d}, c\frac{c}{d} -$ пифагорова тройка. То есть должно выполняться следующее равенство:

$$\left(a\frac{a}{d}\right)^2 + \left(b\frac{b}{d}\right)^2 = \left(c\frac{c}{d}\right)^2.$$

Доказательство. Запишем данное выражение, представив каждое смешанное число в виде суммы целой и дробной части:

$$\left(a + \frac{a}{d}\right)^2 + \left(b + \frac{b}{d}\right)^2 = \left(c + \frac{c}{d}\right)^2.$$

Применяем формулу квадрат суммы:

$$a^2 + 2 \cdot \frac{a^2}{d} + \frac{a^2}{d^2} + b^2 + 2 \cdot \frac{b^2}{d} + \frac{b^2}{d^2} = c^2 + 2 \cdot \frac{c^2}{d} + \frac{c^2}{d^2}.$$

В каждой последовательной группе из трёх слагаемых выносим за скобки общий множитель:

$$a^2\left(1 + \frac{2}{d} + \frac{1}{d^2}\right) + b^2\left(1 + \frac{2}{d} + \frac{1}{d^2}\right) = c^2\left(1 + \frac{2}{d} + \frac{1}{d^2}\right).$$

Разделим обе части равенства на выражение $1 + \frac{2}{d} + \frac{1}{d^2} \neq 0$. Получим:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ну а это неравенство верно, так как по условию $a, b, c -$ пифагорова тройка.

Следовательно $a\frac{a}{d}, b\frac{b}{d}, c\frac{c}{d} -$ пифагорова тройка.

Что и требовалось доказать.

4) Далеко не у всех прямоугольных треугольников, катеты которых соотносятся как целые числа, гипотенуза также выражается целым числом, например, треугольник с катетами одинаковой длины. Если бы его катеты были соизмеримы с гипотенузой, то квадрат гипотенузы был бы равен двум одинаковым квадратам катетов. Но известно, что среди квадратных чисел нет двух таких, одно из которых составит ровно половину другого. Поэтому катеты

этого треугольника несоизмеримы с гипотенузой: нельзя найти такой меры, которая нацело укладывалась бы как в катете, так и в гипотенузе.

В справочниках приводятся различные формулы для нахождения пифагоровых троек. Одной из наиболее популярных является следующая запись, где вместо a может быть любое натуральное нечётное число (если речь о целочисленных тройках):

$$a, \frac{a^2-1}{2}, \frac{a^2+1}{2}.$$

Например,

$7, \frac{7^2-1}{2}, \frac{7^2+1}{2}$ – это 7, 24, 25;

$11, \frac{11^2-1}{2}, \frac{11^2+1}{2}$ – это 11, 60, 61;

$13, \frac{13^2-1}{2}, \frac{13^2+1}{2}$ –это 13, 84, 85.

Рассмотрим вариант решения примеров по тригонометрии с использованием пифагоровых троек.

Задачи, в которых требуется по заданному значению функции найти значения остальных тригонометрических функций, можно решить без возведения в квадрат и извлечения квадратного корня. И многие задания такого рода можно решить устно с использованием пифагоровых троек. Рассмотрим решение такого задания.

Задание 1

Дано: $tg\,\alpha = \frac{8}{15},\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Найти: $\sin\alpha$.

Решение: зная определение тангенса, делаем вывод, что гипотенуза 17, соответственно с учетом четверти, в которой находится угол α, получаем, что $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$.

Вот и ответ. Нужно чёткое знание определения синуса, косинуса, тангенса, котангенса в треугольнике и уметь определять знак нужной функции в указанной четверти.

<u>Типовые задания:</u>

1. *Дано:* $tg\,\alpha = 2{,}4,\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. *Найти:* $\sin\alpha$.
2. *Дано:* $sin\,\alpha = 0{,}8,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. *Найти:* $tg\,\alpha$.
3. *Дано:* $cos\,\alpha = 0{,}96,\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. *Найти:* $ctg\,\alpha$.

При решении некоторых тригонометрических заданий классическое решение с помощью тригонометрических формул и большим количеством вычислений занимает время, а знание пифагоровых троек избавит от ошибок в вычислениях, так как они будут уже значительно проще и вместе с этим сэкономит время.

Задание 2

Вычислите: $\sin\left(arctg\left(-\frac{40}{9}\right) - arccos\left(-\frac{7}{25}\right)\right)$.

Решение:

Обозначим $\alpha = arctg\left(-\frac{40}{9}\right), \beta = arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$. Получаем, что

$\sin\left(arctg\left(-\frac{40}{9}\right) - arccos\left(-\frac{7}{25}\right)\right) = \sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.

Из выражения $\alpha = arctg\left(-\frac{40}{9}\right)$ следует, что $tg\alpha = -\frac{40}{9}$, где $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Находим гипотенузу, определяем знак и получаем, что $sin\alpha = -\frac{40}{41}$, а $cos\alpha = \frac{9}{41}$.

Из выражения $\beta = arccos\left(-\frac{7}{25}\right)$ следует, что $cos\beta = -\frac{7}{25}$ где $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$.

Аналогичным образом выясняем, что $sin\beta = \frac{24}{25}$.

Вычисляем:

$$\sin(\alpha - \beta) = -\frac{40}{41} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) - \frac{9}{41} \cdot \frac{24}{25} = \frac{280 - 216}{41 \cdot 25} = \frac{64}{1025}.$$

Типовые задания:

1. Вычислите: $\mathrm{ctg}(arcsin0{,}6)$;
2. Вычислите: $\mathrm{tg}\left(arccos\frac{9}{41}\right)$;
3. Вычислите: $\sin\left(arctg\left(-\frac{5}{12}\right) - arccos\frac{8}{17}\right)$;
4. Вычислите: $\cos\left(arctg\frac{7}{24} - arcsin\frac{4}{5}\right)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домкина Г. Маленькие хитрости в преподавании математики / Г. Домкина // МАТЕМАТИКА. – 2002. – № 21. – С. 20-21.

2. Домкина Г. О пифагорейских тройках / Г. Домкина // МАТЕМАТИКА. – 1996. – № 5. – С. 6.

3. Гридасова Е., Епишева О. Изучаем теорему Пифагора / Е. Гридасова, О. Епишева // МАТЕМАТИКА. – 2001. – № 24. – С. 1.

4. Жукова Л. Математическая композиция / Л. Жукова // МАТЕМАТИКА. – 2001. – № 24. – С.27-30.

УДК 372.862

ОБУЧЕНИЕ НЕЙРОННОЙ СЕТИ НА ФАКУЛЬТАТИВНОМ ЗАНЯТИИ ПО ИНФОРМАТИКЕ И ИКТ

Инна Анатольевна Шаповалова
Тверской государственный университет, г.Тверь
Shapovalova.IA@tversu.ru

Светлана Олеговна Прокофьева-Снежкова
Тверской государственный университет, г.Тверь
soprokofeva@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *нейронная сеть, персептрон, обучение с учителем, распознавание.*

Аннотация. В статье рассматривается алгоритм обучения однослойного персептрона для распознавания букв русского алфавита.

За свою полувековую историю теория искусственных нейронных сетей показала свою эффективность в решении многих практических задач поскольку они способны не только анализировать поток входящей информации, но и воспроизводить её из своей памяти. Нейронные сети успешно применяются для анализа и прогнозирования на финансовом рынке, построения систем медицинской диагностики, в робототехнике, в системах управления, в задачах обработки сигналов и изображений различной природы, классификации и кластеризации.

Искусственный нейрон представляет собой элементарный функциональный модуль, из множества этих модулей строятся нейронные сети. Искусственный нейрон обладает группой синапсов однонаправленных входных связей, соединенных с выходами других нейронов, а также наделен аксоном – выходной связью данного нейрона, с которой сигнал поступает на синапсы следующих нейронов.

В теории нейронных сетей нейроны принято называть узлами, а синапсы – связями или весовыми коэффициентами. Слой – это набор узлов, сгруппированных по какому-либо признаку. Входные слои – это набор узлов, которые получают входную информацию. Выходные слои – это набор узлов, которые выдают выходную информацию. Скрытые слои – это слои, которые обычно находятся между входными и выходными и занимаются преобразованием информации.

Нейронные сети используются для решения сложных задач, которые требуют аналитических вычислений подобных тем, что делает человеческий мозг. Для разных целей используются нейронные сети различной архитектуры. Классификация нейронных сетей включает в себя сети прямого распространения и сети с обратными связями (рекуррентные нейронные сети).

Сети прямого распространения – искусственные нейронные сети, в которых сигнал распространяется строго от входного слоя к выходному. В обратном направлении сигнал не распространяется. Сети с обратными связями – искусственные нейронные сети, в которых выход нейрона может вновь подаваться на его вход. В более общем случае это означает возможность распространения сигнала от выходов к входам.

К наиболее известным архитектурам сетей прямого распространения относятся персептрон, многослойный персептрон, радиально-базисные сети, сети каскадной корреляции. Сети с обратными связями включают в себя рекуррентные сети, сети Кохонена, нейронные сети адаптивного резонанса.

Персептрон – одна из самых распространенных и элементарных нейронных сетей, его применяют для решения задач классификации. Если имеются группы объектов, то персептрон после обучения сможет указывать к какой группе относится объект.

Персептроны нашли применение в медицинской диагностике. Входными параметрами для определения диагноза являются данные о пациенте, его жалобы на здоровье, история о болезни и т.п. Выходным значением является предположительный диагноз. С помощью персептронов можно выявить неисправность технического устройства. Входными данными являются параметры мониторинга устройства, на выходе – возможный дефект.

В теории искусственных нейронных сетей различают однослойные и многослойные персептроны.

Рассмотрим формальное описание однослойного персептрона, изображенного на рис. 1.

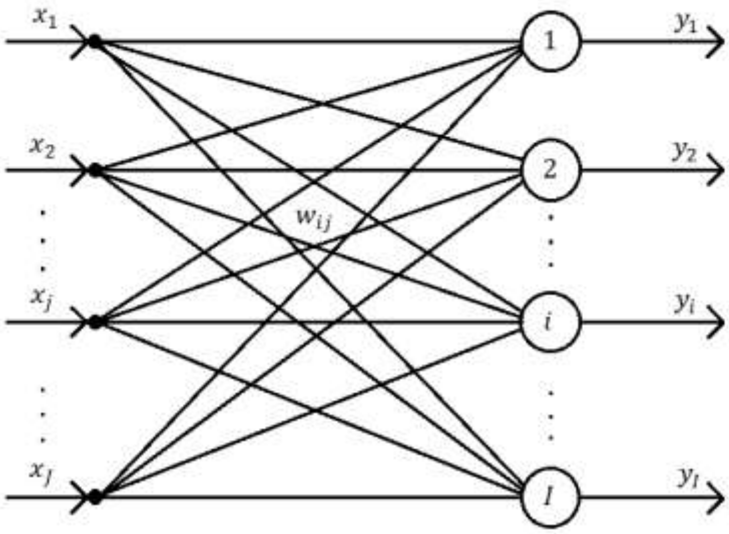


Рис. 1. Однослойный персептрон

На вход нейрон принимает сигналы $x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_J$ и суммирует их, умножая каждый входной сигнал на некоторый весовой коэффициент w_{ij}:

$$S_i = \sum_{j=1}^{J} w_{ij} x_j \, , i = \overline{1, I} \, . \qquad (1)$$

Выходной сигнал нейрона может принимать только два значения:

$$y_i = \begin{cases} 1, & \sum_{j=1}^{J} w_{ij}x_j \geq \theta, \\ 0, & \sum_{j=1}^{J} w_{ij}x_j < \theta, \end{cases} \quad i = \overline{1,I} \tag{2}$$

θ – порог чувствительности нейрона.

Обучение однослойного персептрона – обучение с учителем. При таком виде обучения формируется обучающая выборка, включающая в себя как набор входной информации, так и набор правильных ответов. Далее на вход сети подается пример из обучающий выборки $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_J$ и по формулам (1) – (2) вычисляется выходной вектор $y_i, i = \overline{1,I}$, не обязательно верный. Затем необходимо вычислить вектор ошибки $\varepsilon = d - y$, определяющий разность между желаемым выходом $d_i, i = \overline{1,I}$ и результатом работы сети $y_i, i = \overline{1,I}$. Алгоритм обучения заключается в вычисление поправок для весов сети по вектору ошибки. При этом один образ может подаваться сети несколько раз. Чаще всего однослойный персептрон обучается с помощью дельта-правила, когда весовые коэффициенты и пороговое значение корректируются по формулам:

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(d_i - y_i)x_j, \;\; i = \overline{1,I}, j = \overline{1,J}, \tag{3}$$

$$\theta(t+1) = \theta(t) - \eta\varepsilon, \;\; i = \overline{1,I}, \tag{4}$$

здесь $t = 0,1,2,\ldots$ – номер итерации, η – скорость обучения.

В качестве примере рассмотрим однослойный персептрон, предназначенный для распознавания кириллицы.

Для формирования входного сигнала на матрицу размером 4×3 накладывается изображение буквы.

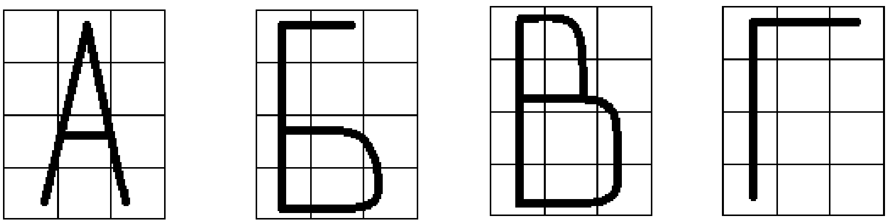


Рис. 2. Шаблоны букв

Если на соответствующий элемент матрицы попадает фрагмент буквы, то данному элементу присваивается значение 1, в противном случае – 0. Далее матрица построчно трансформируется в вектор из 12 элементов. Так изображению букв А, Б, В и Г (рис. 2) будут поставлены в соответствие векторы

буква А: {0,1,0,0,1,0,1,1,1,1,0,1},

…

буква Г: {1,1,1,1,0,0,1,0,0,1,0,0}.

Можно использовать матрицу большей размерности, это позволит более точно описать буквы и избежать совпадения образов.

В рассматриваемом персептроне каждой букве соответствует свой нейрон, следовательно, имеется 33 выходных нейрона. Если обученному персептрону будет предъявлена на вход буква А, то на выходе все нейроны, кроме первого, будут иметь нулевые значения, а $y_1 = 1$, если персептрону будет предъявлена на вход пятнадцатая буква русского алфавита Н, то на выходе все нейроны, кроме пятнадцатого, будут иметь нулевые значения, а $y_{15} = 1$.

Для обучения персептрона воспользуемся следующим алгоритмом, в который для наглядности встроены фрагменты кода программы на языке С++.

1. Формируется выборка обучающих примеров:

```
x[33][12] = {
0,1,0,0,1,0,1,1,1,1,0,1, //А
1,1,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0, //Б
1,1,0,1,1,1,1,0,1,1,1,1, //В
1,1,1,1,0,0,1,0,0,1,0,0, //Г
0,1,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1, //Д
0,0,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0, //Е
1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,0, //Ё
0,0,0,1,1,1,1,1,1,1,1,1, //Ж
0,0,0,0,1,1,0,1,1,0,1,1, //З
0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1, //И
0,1,0,1,0,1,1,1,1,1,1,1, //Й
1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,1,1, //К
0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,0,1, //Л
1,1,1,1,1,1,1,0,1,1,0,1, //М
0,0,0,1,0,1,1,1,1,1,0,1, //Н
1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,1,1, //О
1,1,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1, //П
1,1,1,1,1,1,1,0,0,1,0,0, //Р
1,1,1,1,0,0,1,0,0,1,1,1, //С
1,1,1,0,1,0,0,1,0,0,1,0, //Т
0,1,1,0,1,1,0,1,1,0,1,0, //У
1,1,1,1,1,1,0,1,0,0,1,0, //Ф
1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,0,0, //Х
1,1,0,1,1,0,1,1,0,0,1,0, //Ц
1,1,0,1,1,0,0,1,0,0,0,0, //Ч
1,0,1,1,1,1,1,1,1,0,0,0, //Ш
1,0,1,1,1,1,1,1,1,0,0,1, //Щ
1,1,0,0,1,1,0,1,1,0,0,0, //Ъ
1,0,1,1,0,1,1,1,1,1,1,1, //Ы
1,0,0,1,0,0,1,1,0,1,1,0, //Ь
1,1,1,0,0,1,1,1,1,1,1,1, //Э
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1, //Ю
1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,0,1},//Я
```

с эталонными ответами:

```
for (int i = 0; i < 33; i++)
        for (int j = 0; j < 33; j++){
            if (i == j) d[i][j] = 1;
            else d[i][j] = 0;
        }
```

2. Весовым коэффициентам и пороговым значениям нейронов присваиваются случайные значения в диапазоне от 0,05 до 0,5:

```
for (int i = 0; i < 33; i++){
        for (int j = 0; j < 12; j++){
            w[i][j] = (rand() % 10 + 1)/20;
        }
        teta[i] = (rand() % 10 + 1)/20;
}
```

3. Персептрону по порядку подаются образы букв русского алфавита в виде бинарных векторов, для каждого вектора (обозначим его через x[g]) вычисляется выходной вектор из 33-х элементов:

```
for (int i = 0; i < 33; i++){
    s[i] = 0;
    for (int j = 0; j < 12; j++)
        s[i] = s[i] + w[i][j] * x[g][j];
    if (s[i] >= teta[i]) y[i] = 1;
    else y[i] = 0;
}
```

4. Для каждого нейрона на каждом обучающем векторе вычисляется ошибка

```
for (int i = 0; i < 33; i++)
    e[i] = d[g][i] - y[i];
```

5. Если ошибка не нулевая производится корректировка весовых коэффициентов и порогового значения всех нейронов:

```
for (int i = 0; i < 33; i++){
    for (int j = 0; j < 12; j++)
        w[i][j] = w[i][j] + n*e[i] * x[g][j];
    teta[i] = teta[i] - n*e[i];
}
```

6. Шаги 3 – 5 повторяются до тех пор, пока весь набор обучающей выборки не будет распознан без ошибки:

```
while (flag == 1){
    flag = 0;
    for (int g = 0; g < 33; g++){
        шаг 3.
        шаг 4.
            if (e[i] != 0){
                flag = 1;
                шаг 5.
            }
    }
}
```

После обучения нейронная сеть будет распознавать буквы путем взвешенного суммирования входных сигналов:

```
for (int j = 0; j < 12; j++){
	std::cout << "\tВведите " << j << " элемент матрицы\t";
	std::cin >> x_[j];
}
for (int i = 0; i < 33; i++){
	s[i] = 0;
	for (int j = 0; j < 12; j++)
		s[i] += w[i][j] * x_[j];
	if (s[i] < teta[i]) y[i] = 0;
	else { y[i] = 1, nom = i; }
}
cout << "Введена буква: <<'A' + nom – 1<< "\n";
```

В зависимости от смысла и значений порогового значения нейронов, входных и выходных векторов, можно решать различные задачи распознавания и классификации. Возможности персептрона значительно расширятся, если выходной вектор будет выдавать не только бинарные сигналы в виде нулей и единиц, но и аналоговые, имеющие произвольные значения в диапазоне от 0 до 1. Для этого вводится непрерывная линейная функция активации

$$y = f_\sigma(S) = \frac{1}{1 - e^s}, \tag{5}$$

называемая сигмоидой. Сигмоида отображает точки области определение (-∞; +∞) на интервал (0; 1) и является непрерывной аппроксимацией пороговой функции. Персептроны с сигмоидными активационными функциями с одним выходом назвали адалайн, с несколькими выходами – мадалайн.

Если в нейронной сети используется сигмоидная активационная функция, то для обучения сети используется метод обратного распространения ошибки. Ошибка сети определяется формулой:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{J}(d_i - y_i)^2. \tag{6}$$

Коррекция каждого весового коэффициента вычисляется по формуле:

$$w_{ij}(t-1) = w_{ij}(t) - \eta(d_i - y_i)y_i(1 - y_i)x_j, \qquad i = \overline{1, I}, j = \overline{1, J} \tag{7}$$

Однако далеко не все практические задачи можно решить с помощью однослойного персептрона. Для решения более сложных задач используются многослойные сети, которые представляют собой каскады слоёв, причем выходы одного слоя являются входами для последующего слоя.

Для примера рассмотрим персептрон, содержащий K – 1 скрытых слоев. На вход поступают сигналы $x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_N$, являющиеся входным слоем (k = 0). Слои k =1, 2, …, K – 1 являются скрытыми. Выходной слой – это слой k = K. Нейроны входного слоя передают входные сигналы нейронам первого слоя. В общем случае каждый слой может содержать разное количество нейронов. Будем предполагать, что k-ый слой содержит H_k нейронов. Таким образом, имеется $N=H_0$ входов и $M=H_K$ выходов.

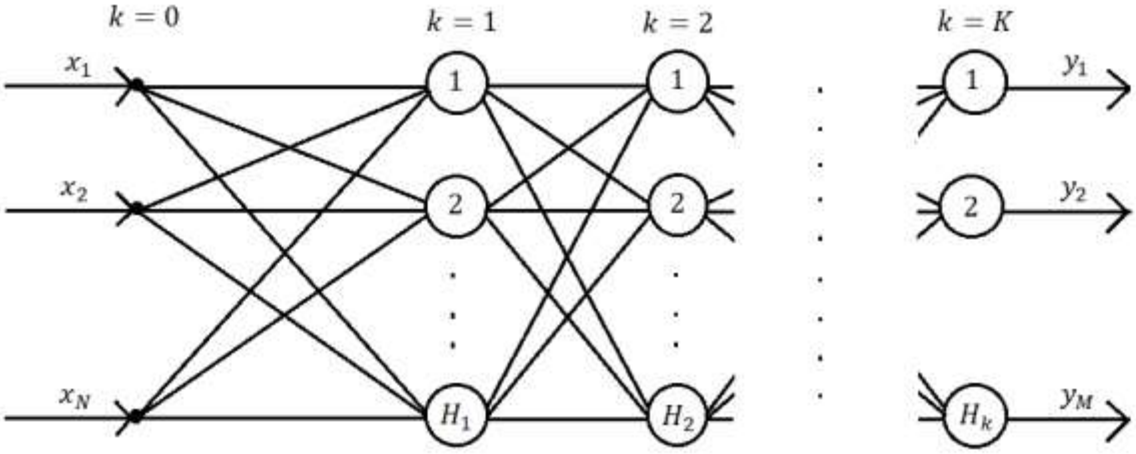


Рис. 3. Многослойный персептрон

В слоях $k = 1, 2, \ldots, K$; $i = 1, 2, \ldots, H_k$ вычисляются выходные сигналы нейронов по формулам

$$y_i^{(1)} = f_\sigma\left(\sum_{j=1}^{N} w_{ij}^{(0)}\, x_j\right), \quad i = \overline{1, H_1} \tag{8}$$

$$y_i^{(k)} = f_\sigma\left(\sum_{j=0}^{H_{k-1}} w_{ij}^{(k)}\, y_j^{(k-1)}\right), \quad i = \overline{1, H_k}\,, \quad k = \overline{2, K} \tag{9}$$

Обучение осуществляется с помощью алгоритма обратного распространения ошибки и является обучением с учителем. Синаптические веса на новой эпохе вычисляются по формулам

$$w_{ij}^{(k)}(t+1) = w_{ij}^{(k)}(t) - \eta \delta_i^{(k)} y_j^{(k-1)}, \tag{10}$$

причём для выходного слоя $k = K$

$$\delta_i^{(K)} = (d_i - y_i) y_i (1 - y_i), \tag{11}$$

а для всех других слоёв

$$\delta_i^{(k)} = y_i^{(k)}\left(1 - y_i^{(k)}\right) \sum_{l=1}^{H_{k+1}} \delta_l^{(k+1)} w_{li}^{(k+1)}. \tag{12}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ясницкий, Л.Н. Введение в искусственный интеллект: учеб. пособие/Л. Н. Ясницкий.– 2-е изд., испр.–М.: Академия, 2008. – 176с.

2. Круглов В.В., Борисов В. В. Искусственные нейронные сети. Теория и практика. – 2-е изд., стереотип. –М.: Горячая линия-Телеком, 2002. – 382 с.

3. С. Хайкин. 2-е изд. Пер. с англ. –М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1104 с.

УДК 378.1

ОБ УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЙ И НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ КАФЕДРЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ТВЕРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА В 2017 ГОДУ

Юрий Владимирович Шеретов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *Учебно-методическая работа, научно-исследовательская работа, реализация программ подготовки бакалавров и магистров в вузе.*

Аннотация. В работе проанализированы результаты учебно-методической и научно-исследовательской работы кафедры математического анализа Тверского государственного университета в 2017 году.

Кафедра математического анализа Тверского государственного университета была создана в конце тридцатых годов прошлого века. В разное время на ней работали профессора Алексей Иванович Маркушевич, Павел Петрович Коровкин, Николай Алексеевич Давыдов, Владимир Николаевич Никольский, Александр Моисеевич Рубинов, Лев Васильевич Тайков, Владимир Георгиевич Шеретов. Были заложены основы учебно-методической и научно-исследовательской работы. Традиции обучения студентов и аспирантов поддерживаются нынешним составом кафедры. В настоящее время на ней работают:

1. Шеретов Юрий Владимирович − доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой;
2. Баранова Ольга Евгеньевна − кандидат физико-математических наук, доцент;
3. Голубев Александр Анатольевич − кандидат физико-математических наук, доцент;
4. Граф Сергей Юрьевич − кандидат физико-математических наук, доцент;
5. Куженькин Сергей Николаевич − кандидат физико-математических наук, доцент;
6. Игнатьев Геннадий Альбертович − старший преподаватель;
7. Рычкова Людмила Евгеньевна − специалист по учебно-методической работе.

За кафедрой закреплены две программы обучения студентов:

1. Программа подготовки магистров «Преподавание математики и информатики» по направлению 02.04.01 − Математика и компьютерные науки (руководитель − профессор Шеретов Ю.В.);
2. Программа подготовки бакалавров по направлению 01.03.01 − Математика, профиль «Преподавание математики и информатики» (руководитель − доцент Голубев А.А.).

Летом 2017 г. полностью осуществлен набор на указанные программы в рамках контрольных цифр приема абитуриентов. Под руководством преподавателей кафедры магистерские диссертации успешно защитили студенты Леонова А.С., Ляляев Н.А., Пучешкин И.В., Самойлова Я.И., Сафонова А.А. Доцент Голубев А.А. работал председателем экзаменационной комиссии по математике на вступительных экзаменах в Тверской государственный университет.

В течение всего года кафедра готовилась к предстоящей аккредитации вуза. Составлены макеты основных образовательных программ в соответствии с новыми требованиями. Собрана вся необходимая документация. Преподаватели Голубев А.А., Граф С.Ю., Куженькин С.Н. и Шеретов Ю.В. прошли повышение квалификации по дополнительной профессиональной программе «Фундаментальная математика в современном научном и образовательном пространствах» в объеме 24 часа. Доцент Баранова О.Е. прошла повышение квалификации по программе «Организация образовательного процесса при обучении инвалидов и лиц с ОВЗ в образовательных организациях общего, среднего профессионального и высшего образования» в объеме 72 часа.

Межвузовский сборник научных трудов «Применение функционального анализа в теории приближений» начал издаваться на кафедре в начале семидесятых годов прошлого века по инициативе В.Н. Никольского. Эта деятельность продолжалась несколько десятилетий. Доцент С.Ю. Граф в настоящее время является ответственным редактором сборника, очередной тридцать восьмой выпуск которого [1] появился в РИНЦ. В сборнике опубликованы статьи работников Тверского государственного университета, Тверского государственного технического университета и Забайкальского государственного университета (г. Чита). Доценты О.Е. Баранова и А.А. Голубев выступили в качестве редакторов сборника статей [2], посвященного методике преподавания математики в школе. В 2017 году членами кафедры опубликовано четыре учебных пособия [3−6]. Эти материалы уже активно используются в процессе обучения студентов.

Научная работа на кафедре ведется по следующим направлениям:

1. Теория функций комплексной переменной (С.Ю. Граф, А.А. Голубев, О.Е. Баранова);
2. Математический и численный анализ уравнений гидродинамики (Ю.В. Шеретов);
3. Методика преподавания математики (А.А. Голубев, О.Е. Баранова, Г.А. Игнатьев);
4. Нелинейный анализ (С.Н. Куженькин);
5. Математическая экономика (А.А. Голубев);
6. Математические задачи геофизики (С.Ю. Граф).

В 2017 году членами кафедрами были опубликованы 3 статьи в журналах, входящих в Scopus [7−9], а также 10 статей в журналах из перечня ВАК [10−19]. Еще 19 научных работ представлены в РИНЦ. Студенты магистратуры Ю.А. Крылова, М.М. Пасечник и Я.И. Самойлова также опубликовали результаты своих исследований. Перечислим наиболее значимые научные результаты:

1. Построены два новых точных решения стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах. Первое решение является общим для систем Эйлера и Навье–Стокса. Второе удовлетворяет системе Навье–Стокса, но не является точным решением уравнений Эйлера. Оба решения описывают вихревые структуры в жидкости. Построены три семейства точных решений, общих для стационарной системы Навье–Стокса и соответствующей квазигидродинамической системы. Эти решения не удовлетворяют уравнениям Эйлера. Приведены конкретные примеры решений, описывающих течения вязкой жидкости. Дана их физическая интерпретация.
2. Показано, что метод Тркала построения однородно-винтовых решений нестационарных уравнений Навье–Стокса применим для квазигидродинамической системы. Рассмотрен более широкий класс течений, подчиняющихся обобщенному условию Громеки–Бельтрами. Приведены примеры точных решений, общих для системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы, но не удовлетворяющих уравнениям Эйлера.
3. Предложена упрощенная квазигидродинамическая система для описания медленных течений слабосжимаемой вязкой жидкости. Исследованы ее диссипативные свойства.
4. Для сохраняющих ориентацию гармонических в единичном круге функций получены аналоги условий однолистности Нехари. Произведено сравнение различных определений производной Шварца для гармонических функций.
5. Доказаны теоремы регулярности убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в классах выпуклых конформных отображений заданного порядка в единичном круге. Точность результатов иллюстрируется примерами.
6. Рассмотрен вопрос о регулярности роста порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости однолистных аналитических в единичном круге функций, принадлежащих известному классу S. Доказана теорема о регулярности роста порядка выпуклости и о потере регулярности с приближением к единичной окружности. Результат обобщен на случай гиперболического порядка выпуклости.
7. Разработана методика прогноза параметров трещиноватого коллектора углеводородов по сейсмическим данным. Методика основана на сочетании способов анализа скоростей и градиентов амплитуд продольных отраженных волн, с математическим моделированием обусловленных трещинами сейсмических эффектов. Методология опирается на сопоставление реально выявленных волновых эффектов с аномалиями, ожидаемыми по результатам математического сейсмомоделирования.
8. Проанализированы качественные и количественные различия между эффективными моделями трещиноватых сред, построенными на основе

различных методик. Оценен диапазон анизотропных свойств эффективных сред и возможность различения по данным сейсморазведки теоретических моделей, приводящих к заданным эффективным средам.

9. Описаны многообразие и сложность механизмов реализации модернизации экономики в России с учетом ее институциональных особенностей, макроэкономических и иных ограничениях.
10. Изучен вопрос о сосуществовании неподвижных точек различных типов отображений, осуществляемых комплексными полиномами специального вида.
11. Предложено новое доказательство критерия расходимости интерполяционного процесса Лагранжа в точке в терминах функций Лебега.
12. Исследованы свойства интегрального оператора, связанного со средними значениями непрерывной функции. Доказана его обратимость, получены оценки нормы.

Преподаватели и студенты приняли участие в трех научных конференциях различного уровня:

1. Международной летней школе-конференции «Теория функций, её приложения и смежные вопросы» (Казань, Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета, 21.08.2017 – 27.08.2017);
2. Седьмой международной научной конференции «Химическая термодинамика и кинетика» (Великий Новгород, Новгородский государственный университет имени Ярослава Мудрого, 29.05.2017 – 02.06.2017);
3. Научно-практической педагогической конференции «Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области» (Тверь, Тверской государственный университет, 18.02.2017).

Тем самым, результативность научных исследований на кафедре заметно выросла.

Кафедра активно сотрудничала с другими организациями, как в нашей стране, так и за рубежом. Доцент С.Ю. Граф был направлен за границу (приказ и.о. ректора № 1505-О от 8.11.2017) в Индийский институт статистики, г. Ченнай, с 2.12.2017 по 14.12.2017 для совместной работы с индийскими коллегами в рамках проекта Российского научного фонда № 17−11−01229 «Аналитические и гармонические инъективные отображения, их обобщения и приложения». Научный руководитель проекта − доктор физико-математических наук, профессор В.В. Старков (Петрозаводский государственный университет). Кроме того, С.Ю. Граф опубликовал несколько работ [13−15] в журналах из перечня ВАК совместно с сотрудниками ОАО «Центральная геофизическая экспедиция», г. Москва. Он был награжден почетной грамотой Российского геологического холдинга РОСГЕОЛОГИЯ «За вклад в развитие отрасли». Доцент А.А. Голубев был председателем Тверской региональной общественной организации «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». Совместно с деканом математического факультета Ю.В. Чемариной он выступил в качестве ответственного редактора сборника статей конференции «Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области» [20].

Можно сделать вывод о том, что в 2017 году коллективом кафедры математического анализа внесен значительный вклад в развитие образования и науки Тверской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. № 38. 70 с.
2. Преподавание математики в школах Тверского региона: Сборник материалов в помощь учителю. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 140 с.
3. Голубев А.А., Спасская Т.А. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ − 2017. Учебное пособие. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 124 с.
4. Голубев А.А., Спасская Т.А. Рабочая тетрадь по математике для подготовки к ЕГЭ − 2017 (Профильный уровень). Учебное пособие. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 96 с.
5. Голубев А.А., Потапенко М.С., Фридман Д.В., Цапиева Т.В. Учимся решать задачи с параметрами. Учебное пособие. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 88 с.
6. Баранова О.Е., Гусев А.И. Задачи с параметрами. Необходимые условия. Учебное пособие. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. 118 с.
7. Graf S.Yu, Ponnusami S., Starkov V.V. Univalence criterion for harmonic mappings and Ф-like functions // Complex Variables and Elliptic Functions. 2017. Pp. 1 − 13.
8. Graf S.Yu. The Schwarzian derivative of harmonic functions and univalence conditions // Issues of Analysis. 2017. V. 6(24). № 2. Pp. 1 − 16.
9. Sukharev A.N., Golubev A.A., Tolkachenko G.L., Dyuzhylova O.M. The public financial savings of the Russian Federation: the types, current status and assessments // International Journal of Economic Perspectives. 2017. V. 11, Issue 3. Pp. 58.
10. Шеретов Ю.В. О точных решениях стационарных квазигидродинамических уравнений в цилиндрических координатах // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 1. С. 85 − 94.
11. Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях стационарной системы Навье−Стокса и квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих уравнениям Эйлера // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 2. С. 5 – 15.
12. Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13 − 25.

13. Авербух А.Г., Граф С.Ю., Ахметова Э.Р., Гарнов А.В. Построение модели трещиноватого коллектора по данным сейсморазведки // Экспозиция нефть газ. 2017. № 3 (56). С. 18 − 22.

14. Авербух А.Г., Граф С.Ю., Ахметова Э.Р., Гарнов А.В. Математическое сейсмомоделирование для прогноза трещиноватости по отраженным волнам // Геофизика. 2017. № 5. С. 43 − 53.

15. Авербух А.Г., Граф С.Ю. Различимость теоретических моделей трещиноватых коллекторов в рамках сейсморазведки // Геофизика. 2017. № 5. С. 54 − 61.

16. Сухарев А.Н., Голубев А.А., Толкаченко Г.Л., Дюжилова О.М. Государственные финансовые накопления (резервы) в современной России // Финансы и кредит. 2017. Т. 23. № 44. С. 2620 – 2630.

17. Граф С.Ю., Самойлова Я.И. Регулярность убывания порядка выпуклости в классах $C(\alpha)$ // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 85 − 99.

18. Дрожжин И.А. Аппроксимация с ограничениями. Проблема Бернштейна // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 93 − 106.

19. Дрожжин И.А. Аналог теоремы Маркова // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 4. С. 73 − 83.

20. Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: Материалы научно-практической конференции. Тверь: Тверской государственный университет, 2017. Вып. 1. Ч. 1. 200 с. Ч. 2. 192 с.

УДК 514.8, 530.12

ОТНОШЕНИЕ ЗАРЯДА К МАССЕ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТОПОЛОГИЧЕСКОГО ГЕОНА

Анастасия Вячеславовна Шитова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: shitova_nastya96@mail.ru

Юлия Владимировна Чемарина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: chemarina.yv@tversu.ru

Ключевые слова: скалярное поле, электромагнитное поле, топологический геон.

Аннотация. Статья посвящена изучению свойств сферически-симметричных топологических геонов, образованных фантомным скалярным и электромагнитным полями.

Объектом нашего исследования является фантомный заряженный сферически-симметричный топологический геон со скалярным полем. В работе доказана неограниченность возможного отношения заряда геона к его гравитационной массе. Этот результат интересен тем, что для реалистичных моделей с обычным скалярным полем соответствующее отношение является ограниченным [1], [3].

Метрику статического сферически-симметричного пространства-времени запишем в форме

$$ds^2 = e^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (1)$$

где метрическая f зависит только от r.

Электромагнитный потенциал, совместимый со сферической симметрией, для статической конфигурации имеет вид $A = \sigma(r)dt$, так что из уравнений Максвелла следует, что

$$\mathcal{F} = e^F \frac{q}{r^2} dt \wedge dr.$$

Уравнения Эйнштейна имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} S g_{ij} = æ T_{ij}. \qquad (2)$$

Динамическое уравнения для скалярного поля ϕ имеет вид

$$\Box\phi - V'_\phi = 0. \qquad (3)$$

Решение уравнений (2) – (3) было получено в работах [2], [4], [5] в виде интегральных формул:

$$F = \int_r^\infty \phi'^2 r dr, \;\; f = 2r^2 e^{-2F}\left(\int_r^\infty \frac{Q - 3m}{r^4} e^F dr\right), \qquad (4)$$

$$\widetilde{V}\,(r) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3f - 1r^2\phi'^2 f + 2e^{-F}\frac{Q-3m}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right), \qquad (5)$$

где

$$Q(r) = \xi(r) + 2q^2\int_r^\infty (e^F/r^2)\,dr, \qquad \xi(r) = r + \int_r^\infty (1-e^F)\,dr. \qquad (6)$$

В случае фантомных полей удобно преобразовывать данное решение к другому виду, явно учитывающему топологию геона. Функция $\xi(r)$ может быть выбрана в качестве новой радиальной координаты. Используя обозначение $A = fe^{2F}$ и, подставляя $d\xi = e^F dr$ в метрику (1) и формулы (4), (5), мы можем записать решение в следующем виде

$$ds^2 = Adt^2 - \frac{d\xi^2}{A} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \qquad (7)$$

$$\phi_\xi = \sqrt{r_{\varepsilon\varepsilon}/r}\,, \qquad Q(\xi) = \xi + 2q^2\int_\xi^\infty \frac{d\xi}{r^2}\,, \qquad (8)$$

$$A(\xi) = 2r^2\int_\xi^\infty \frac{Q-a}{r^4}d\xi, \qquad f(\xi) = r_\xi^2 A(\xi), \qquad (9)$$

$$\tilde{V}(\xi) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3r_\xi^2 A - r_{\xi\xi}A + 2r\frac{Q-a}{r} - \frac{q^2}{r^2}\right), \qquad (10)$$

где a – постоянная, а функция $r(\xi)$ класса C^2 во всей области определения должна удовлетворять условию $r_{\xi\xi} > 0$. Задавая неотрицательную выпуклую вниз функцию $r(\xi)$, мы можем полностью восстановить решение.

В асимптотической области $\xi \to +\infty$:

$$r = \xi + b + o(1), \;\; A = 1 - \frac{2m}{\xi} + \frac{q^2 + 2mb}{\xi^2} + o\left(\frac{1}{\xi^2}\right), \; \xi \to +\infty. \qquad (11)$$

Прямая подстановка асимптотики (11) для $r(\xi)$ в (9) дает следующую формулу гравитационной массы конфигурации:

$$m = \frac{a+b}{3}\,. \qquad (12)$$

Решение (7) – (10) представляет собой симметричную конфигурацию с изометрией $\xi \to -\xi$ тогда и только тогда, когда в подынтегральном выражении в (9) стоит нечетная функция и $r(\xi)$ четная функция, поскольку только при этих условиях метрическая функция $A(\xi)$ четная. Это возможно при таком значении постоянной a:

$$a = 2q^2\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}\,. \qquad (13)$$

Таким образом, постоянная a не произвольна, а определяется через интеграл (13), т.е. зависит от величины заряда, и от поведения функции $r(\xi)$ на всей полупрямой. Следовательно, значения массы и заряда оказываются связанными величинами.

Мы исследуем связь между величинами (q, m, r_0), где $r_0 = \min r(\xi)$. А именно, может ли отношение $\frac{q}{m} \to \infty$ при ограниченном сверху r_0 и ограниченном снизу q?

Будем считать, что функция $r(\xi)$ является известной, причем выберем размер геона $r_0 = 1$. В силу масштабной инвариантности формул (7) – (10) это не накладывает дополнительных ограничений на решение.

Так как гравитационная масса m вычисляется по формуле (12), а параметр a – по формуле (13), то отношение заряда к массе равно

$$\frac{q}{m} = \frac{3q}{2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2} + b}. \tag{144}$$

Рассмотрим два логически возможных случая.

1) $b \geq 0$.

В этом случае

$$m > \frac{2q^2 \int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}{3}.$$

Так как $r < \xi + 1$, то

$$\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2} > \int_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + 1)^2} = 1.$$

Тогда:

$$m > \frac{2q^2}{3} \Rightarrow \frac{q}{m} < \frac{3}{2q}.$$

Получаем, что ограниченность заряд q снизу влечет ограниченность отношения $\frac{q}{m}$ сверху.

2) $b < 0$.

При $q \epsilon \left(\sqrt{\frac{-b}{2\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}} ; +\infty \right)$ отношение $\frac{q}{m}$ монотонно убывает от $+\infty$ до 0.

Чтобы получить неограниченно большое отношение $\frac{q}{m}$ необходимо, чтобы $q \to \sqrt{\frac{-b}{2\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}}$. Но при этом $m \to 0$. Поэтому далее мы ограничимся рассмотрением предельного случая, т.е. решений с нулевой гравитационной массой.

Для таких решений остается открытым вопрос о возможных значениях оставшихся параметров q и r_0. При нормировке $r_0 = 1$ необходимо установить величину заряда q.

Если $m = 0$, то $a + b = 0$ и $a = -b$. Выразим q^2 из (13):

$$q^2 = \frac{-b}{2\int_0^\infty \frac{d\xi}{r^2}}. \tag{15}$$

Отметим ряд особенностей решений с нулевой гравитационной массой:

1) Топологический геон можно получить только при условии $b < 0$.
2) Заряд q однозначно определен функцией $r(\xi)$, при этом решение может оказаться не топологическим геоном, а черной дырой с топологической особенностью под горизонтом событий.
3) Решение будет являться топологическим геоном тогда и только тогда, когда:

$$A(0) = 2\int_0^\infty \left(\frac{\int_0^\xi \left(1 - \frac{2q^2}{r^2}\right) d\xi}{r^4} \right) > 0. \tag{16}$$

Очевидно, что из формулы (16) оценить величину q достаточно сложно. Приведем верхнюю оценку для величины заряда q, которую нам удалось получить с помощью конкретных решений.

Выберем $r(\xi)$ в следующем виде:

$$r(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi| < k \\ 1 + (\,|\xi| - k)h\,, & k \leq \,|\xi| \leq l\,, \\ |\xi| - 2, & l < \,|\xi| \end{cases}$$

где

$$h = \frac{n-1}{n},\ \ k = \frac{1}{n^2},\ \ l = \frac{3n^3 - n + 1}{n^2},\ n \epsilon \mathbb{N},\ \ b = -2.$$

Величину заряда q будем искать по формуле (15):

$$q = \sqrt{\frac{(3n^3 - n + 1 - 2n^2)n^2}{3n^5 + n^4 + 2n^3 - n + 1 - 2n^2}}.$$

Очевидно, что при $n \to \infty$ заряд $q \to 1$.

Используя формулу (16), найдем значение метрической функции A в точке $\xi = 0$:

$$A(0) = \frac{81n^{17} - 81n^{16} + 261n^{15} - 246n^{14} + 201n^{13} - 165n^{12}}{3n^4(3n^5 + n^4 + 2n^3 - 2n^2 - n + 1)(3n^3 - 2n^2 - n + 1)^3} +$$

$$\frac{-789n^{11} + 1350n^{10} + 167n^{9} - 1418n^{8} + 501n^{7} + 585n^{6}}{3n^{4}(3n^{5} + n^{4} + 2n^{3} - 2n^{2} - n + 1)(3n^{3} - 2n^{2} - n + 1)^{3}} +$$

$$\frac{-397n^{5} - 75n^{4} + 115n^{3} - 12n^{2} - 12n + 3}{3n^{4}(3n^{5} + n^{4} + 2n^{3} - 2n^{2} - n + 1)(3n^{3} - 2n^{2} - n + 1)^{3}}.$$

Метрическая функция A в точке $\xi = 0$ положительна при любых $n\epsilon\mathbb{N}$. Это означает, что решение может быть интерпретировано как топологический геон при любом $n\epsilon\mathbb{N}$.

Построенный модельный пример показывает, что возможно добиться любой величины заряда $q\epsilon[0,1)$ при $r_0 = 1$ и заряда $q\epsilon[0, r_0)$ в случае геона произвольного размера.

Наше исследование показало, что сферически-симметричные статические топологические геоны с фантомным скалярным полем могут обладать сколь угодно большим отношением заряда к гравитационной массе. При росте этого отношения гравитационная масса стремится к нулю, а величина заряда геона оказывается ограниченной сверху его размером.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kratovich P.V., Tchemarina Ju.V. On the charge-to-mass ratio for selfgravitating systems of scalar and electromagnetic fields // Mathematical Modelling and Geometry. 2017. Т. 5. № 2. С. 20–29.

2. Kratovitch P.V., Potashov I.M., Tchemarina Ju.V., Tsirulev A.N. Topological geons with self-gravitating phantom scalar field // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Volume 934. Issue 1. art. no. 012047. DOI: 10.1088/1742-6596/934/1/012047

3. Голубева Е.В., Чемарина Ю.В. Об отношении заряда к массе для системы скалярного и электромагнитного полей // Применение функционального анализа в теории приближений. 2014. № 35. С. 63–71.

4. Малинкина А.Н., Чемарина Ю.В. Фантомное скалярное поле. Кротовые норы и черные дыры // Применение функционального анализа в теории приближений. 2012. №33. С. 75–81.

5. Соловьев Д.А., Цирулев А.Н., Чемарина Ю.В. Математические модели гравитирующих конфигураций с фантомным скалярным полем // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2011. № 23. С. 7–18.

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТВЕРИ И ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ

Материалы
Второй Всероссийской научно-практической конференции

Тверь, 21 апреля 2018 года

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано в печать 16.04.2018. Формат $60 \times 84\ ^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 14,75. Тираж 200 экз. Заказ № 218.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.