

Задание 26

Задача 1. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в кучу один камень или увеличить количество камней в куче в три раза**. Например, имея кучу из 10 камней, за один ход можно получить кучу из 11 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 55. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 55 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 54$.

Говорят, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Выполните следующие задания. Во всех случаях обосновывайте свой ответ.

1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть первым ходом? Укажите все такие значения и выигрывающий ход Пети.

б) Укажите такое значение S , при котором Петя не может выиграть за один ход, но при любом ходе Пети Ваня может выиграть своим первым ходом. Опишите выигрышную стратегию Вани.

2. Укажите два значения S , при которых у Пети есть выигрышная стратегия, причём (а) Петя не может выиграть первым ходом, но (б) Петя может выиграть своим вторым ходом, независимо от того, как будет ходить Ваня. Для указанных значений S опишите выигрышную стратегию Пети.

3. Укажите такое значение S , при котором

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети, и при этом

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани. Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

Задача 2. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу один камень или

б) увеличить количество камней в куче в два раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 28. Если при этом в куче оказалось не более 46 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 27$.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 24, 25, 26$? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 10, 11$? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 8$? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или

таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход; в узлах – количество камней в позиции.

Задача 3. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может **добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в два раза**. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать (10, 7). Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: (11, 7), (20, 7), (10, 8), (10, 14). Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 73. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в кучах всего будет 73 камня или больше.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. Например, при начальных позициях (6, 34), (7, 33), (9, 32) выигрышная стратегия есть у Пети. Чтобы выиграть, ему достаточно удвоить количество камней во второй куче.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (6, 33), (8, 32) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (6, 32), (7, 32), (8, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. В каждом случае опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии.

Задание 3. Для начальной позиции (7, 31) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Опишите выигрышную стратегию; объясните, почему эта стратегия ведёт к выигрышу, и укажите, какое наибольшее количество ходов может потребоваться победителю для выигрыша при этой стратегии. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной Вами выигрышной стратегии. Представьте дерево в виде рисунка или таблицы.

Задача 4. Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {БАБАХКАРАРА, КРЯКРЯРАТ}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ВЕКВЕК...ВЕК, НЕКНЕК...НЕК}. В первом слове 58 раз повторяется слово ВЕК, а во втором – 14 раз повторяется слово НЕК.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {ГОЛОВА, ГОРН, ГОРОХ, ПРОФИ, ПРОХОД, ПРОДУКЦИЯ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 5. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или увеличить количество камней в куче в три раза. Например, пусть в одной куче 10 камней, а в другой 7 камней; такую позицию в игре будем обозначать $(10, 7)$. Тогда за один ход можно получить любую из четырёх позиций: $(11, 7)$, $(30, 7)$, $(10, 8)$, $(10, 21)$. Для того чтобы делать ходы, у каждого игрока есть неограниченное количество камней.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в кучах становится не менее 68. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 68 или больше камней.

В начальный момент в первой куче было шесть камней, во второй куче – S камней; $1 \leq S \leq 61$.

Будем говорить, что игрок имеет выигрышную стратегию, если он может выиграть при любых ходах противника. Описать стратегию игрока – значит описать, какой ход он должен сделать в любой ситуации, которая ему может встретиться при различной игре противника. В описание выигрышной стратегии не следует включать ходы играющего по этой стратегии игрока, не являющиеся для него безусловно выигрышными, т.е. не являющиеся выигрышными независимо от игры противника.

Выполните следующие задания.

Задание 1

а) Укажите все такие значения числа S , при которых Петя может выиграть за один ход.

б) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

Задание 2

Укажите такое значение S , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Пети.

Задание 3

Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани.

Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии Вани (в виде рисунка или таблицы). В узлах дерева указывайте позиции, на рёбрах рекомендуется указывать ходы. Дерево не должно содержать партии, невозможные при реализации выигрышающим игроком своей выигрышной стратегии. Например, полное дерево игры не является верным ответом на это задание.

Домашнее задание.

Задача 1. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может добавить в кучу один камень, добавить в кучу четыре камня или увеличить количество камней в куче в два раза. Например, имея кучу из 15 камней, за один ход можно получить кучу из 16, 19 или 30 камней. У каждого игрока, чтобы делать ходы, есть неограниченное количество камней. Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 40. Победителем считается игрок,

сделавший последний ход, то есть первым получивший кучу, в которой будет 40 или больше камней.

В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 39$.

Задание 1. При каких S : 1а) Петя выигрывает первым ходом; 1б) Ваня выигрывает первым ходом?

Задание 2. Назовите два значения S , при которых Петя может выиграть своим вторым ходом.

Задание 3. Назовите два значения S , при которых Ваня выигрывает своим первым или вторым ходом.

Задача 2. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежат две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в одну из куч (по своему выбору) один камень или

б) увеличить количество камней в куче в два раза.

Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, что в обеих кучах всего будет 38 камней или больше.

Задание 1. Для каждой из начальных позиций (7, 15), (9, 14) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 2. Для каждой из начальных позиций (7, 14), (8, 14), (9, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию.

Задание 3. Для начальной позиции (8, 13) укажите, кто из игроков имеет выигрышную стратегию. Постройте дерево всех партий, возможных при указанной выигрышной стратегии.

Задача 3. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит куча камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в кучу один камень;

б) увеличить количество камней в куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда количество камней в куче становится не менее 36. Если при этом в куче оказалось не более 98 камней, то победителем считается игрок, сделавший последний ход. В противном случае победителем становится его противник. В начальный момент в куче было S камней, $1 \leq S \leq 35$.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 32, 33, 34$? Опишите выигрышные стратегии для этих случаев.

Задание 2. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 10, 11$? Опишите соответствующие выигрышные стратегии.

Задание 3. У кого из игроков есть выигрышная стратегия при $S = 9$? Постройте дерево всех партий, возможных при этой выигрышной стратегии (в виде рисунка или таблицы). На рёбрах дерева указывайте, кто делает ход, в узлах – количество камней в позиции.

Задача 4. Два игрока, Петя и Ваня играют в следующую игру. Задан некоторый набор символьных цепочек («слов»), в котором ни одно слово не является началом другого. Игра начинается с пустой строки, в конец которой игроки по очереди дописывают буквы, по одной букве за ход так, чтобы полученная цепочка на каждом шаге была началом одного из заданных слов. Первый ход делает Петя. Выигрывает тот, кто первый составит слово из заданного набора.

Задание 1. а) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {КОБРАГИБУС, КОБИМУЛЮС}.

б) Определите, у кого из игроков есть выигрышная стратегия для набора слов {ПИРАТ... ПИРАТ, ЗОЛОТО... ЗОЛОТО}. В первом слове 155 раз повторяется слово ПИРАТ, а во втором – 14 раз повторяется слово ЗОЛОТО.

Задание 2. В наборе слов, приведённом в задании 1а, поменяйте местами две буквы в любом слове так, чтобы выигрышная стратегия была у другого игрока.

Задание 3. Дан набор слов {ВОРОНА, ВОЛК, ВОЛНА, КРОНА, КРОКУС, КРОКОДИЛ}. У кого из игроков есть выигрышная стратегия?

Задача 5. Два игрока, Петя и Ваня, играют в следующую игру. Перед игроками лежит две кучи камней. Игроки ходят по очереди, первый ход делает Петя. За один ход игрок может

а) добавить в любую кучу два камня;

б) увеличить количество камней в любой куче в три раза.

Игра завершается в тот момент, когда суммарное количество камней в двух кучах становится не менее 113. Победителем считается игрок, сделавший последний ход, т.е. первым получивший такую позицию, при которой в кучах будет 113 камней или больше. В начальный момент в первой куче было 11 камней, а во второй – S камней, $1 \leq S \leq 101$.

Задание 1. а) При каких значениях числа S Петя может выиграть в один ход? Укажите все такие значения и соответствующие ходы Пети.

б) Известно, что Ваня выиграл своим первым ходом после неудачного первого хода Пети. Укажите минимальное значение S , когда такая ситуация возможна.

Задание 2. Укажите такое значение S , при котором у Пети есть выигрышная стратегия, причём одновременно выполняются два условия:

– Петя не может выиграть за один ход;

– Петя может выиграть своим вторым ходом независимо от того, как будет ходить Ваня.

Задание 3. Укажите значение S , при котором одновременно выполняются два условия:

– у Вани есть выигрышная стратегия, позволяющая ему выиграть первым или вторым ходом при любой игре Пети;

– у Вани нет стратегии, которая позволит ему гарантированно выиграть первым ходом.

Для указанного значения S опишите выигрышную стратегию Вани.