Вариант 1

1. В треугольнике ABC угол BAC равен $110°$, AD – биссектриса угла A, угол C меньше угла ADC в три раза. Найдите градусную меру угла B.
Ответ: 38,75 °

2. Боковое ребро правильной треугольной призмы равно $\sqrt{3}$, а площадь полной поверхности призмы равна $36\sqrt{3}$. Найдите сторону основания призмы.
Ответ: 6

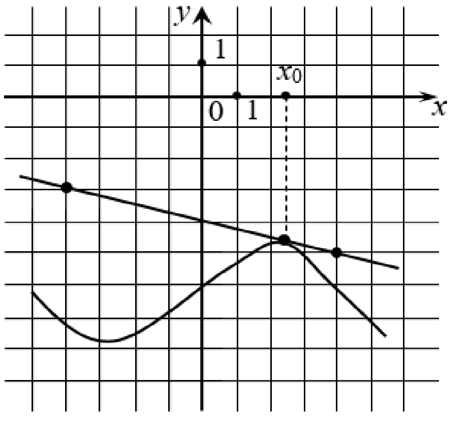
3. Куб, все грани которого раскрашены, разрезали на 1000 равных кубиков. Какова вероятность того, что наугад выбранный кубик имеет ровно две окрашенные грани?
Ответ: 0,096

4. Всем пациентам с подозрением на гепатит делают анализ крови. Если анализ выявляет гепатит, то результат анализа называется положительным. У больных гепатитом анализ даёт положительный результат с вероятностью 0,9. Если пациент не болен гепатитом, то анализ может дать ложный положительный результат с вероятностью 0,01. Известно, что 5% пациентов, поступающих с подозрением на гепатит, действительно больны гепатитом. Найдите вероятность того, что результат анализа у пациента, поступившего в клинику с подозрением на гепатит, будет положительным.
Ответ: 0,0545

5. Найдите корень уравнения $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-15} = \frac{1}{64}$.
Ответ: 18

6. Найдите значение выражения $(9x^2 + y^2 - (3x - y)^2) : (5xy)$.
Ответ: 1,2

7. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.



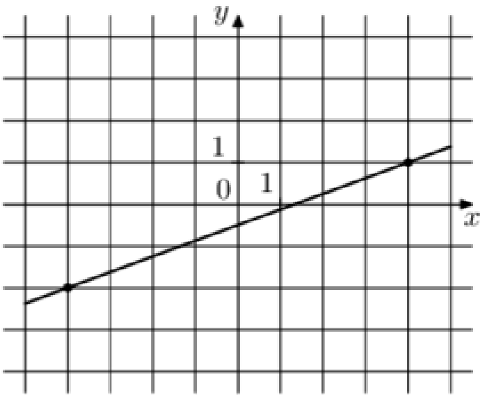
Ответ: – 0,25

8. При вращении ведёрка с водой на верёвке в вертикальной плоскости сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет неотрицательной во всех точках траектории. В верхней точке сила давления $P = m\left(\frac{v^2}{L} - g\right)$, где m – масса воды, v – скорость движения ведёрка, L – длина верёвки, $g = 10\,\text{м/с}^2$ – ускорение свободного падения. С какой минимальной скоростью (в м/с) надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась из него, если длина верёвки равна 78,4 см?
Ответ: 2,8

9. Заказ из 240 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает второй рабочий, если известно, что первый за час делает на 1 деталь больше?

Ответ: 15

10. На рисунке изображён график функции $f(x) = kx + b$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 4{,}75$.



Ответ: 14

11. Найдите наибольшее значение функции $y = 7\cos x + 14x - 9$ на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: -2

12. а) Решите уравнение $\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x$;

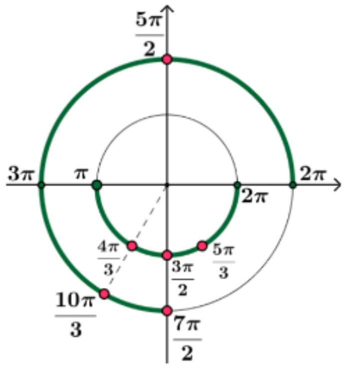
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение:

а) $\log_4\left(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x\right) = x \iff 2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x = 2^{2x} \iff$

$\iff \sqrt{3}\cos x + 2\sin x\cos x = 0 \iff \cos x\left(\sqrt{3} + 2\sin x\right) = 0 \iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sqrt{3} + 2\sin x = 0;\end{array}\right. \iff$

$\iff \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2};\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},\\ x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z},\\ x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$



б) Отбор корней $\in \left[\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ выполним с помощью числовой окружности:

$x_1 = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$; $x_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$; $x_3 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$;

$x_4 = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}$; $x_5 = 3\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$; $x_6 = \frac{7\pi}{2}$.

Ответ: (а) $\frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. (б) $\frac{4\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{2}$; $\frac{10\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{2}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а), ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения пункта а) и пункта б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

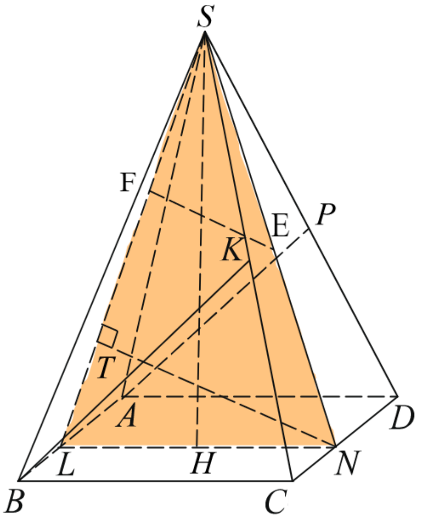
13. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания равна 14, высота SH равна 24. Точка P – середина бокового ребра SD, а точка N – середина ребра CD. Плоскость ABP пересекает отрезок SC в точке K.

а) Докажите, что прямая KP пересекает отрезок SN в его середине.

б) Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS.

Решение:

а) Поскольку $ABCD$ — квадрат, то $AB \parallel CD$, а значит, прямая CD параллельна плоскости ABP и поэтому CD не имеет общих точек с прямой PK, лежащей в плоскости сечения. Так как PK и CD не имеют общих точек и лежат в плоскости SCD, они параллельны.



В треугольнике SND прямая PK проходит через середину SD параллельно ND, то есть содержит среднюю линию треугольника, а значит, пересекает SN в её середине. Это и требовалось доказать.

б) Из того, что $PK \parallel CD$ и $CD \parallel AB$ следует, прямая PK параллельна прямой AB, а следовательно, и всей плоскости ABS. Значит, расстояние от любой точки прямой PK до плоскости ABS будет одинаковым. Найдём это расстояние от точки пересечения PK и SN — точки E.

Так как $ABCD$ — квадрат, его диагонали равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам. Поэтому треугольник CHD прямоугольный и равнобедренный, а медиана HN перпендикулярна CD. Через точки S, N и H проведём плоскость, которая пересекает ребро AB в точке L. Поскольку LN содержит HN, то $LN \perp CD$ и $LN \perp AB$, откуда следует, что четырехугольник $ADNL$ — прямоугольник и $LA = ND = \frac{1}{2}CD$, то есть L — середина AB.

Так как отрезок SL — медиана в равнобедренном треугольнике SAB с основанием AB, то $SL \perp AB$. Поскольку прямая AB перпендикулярна пересекающимся прямым LN и SL, она перпендикулярна плоскости SNL, а раз AB лежит в плоскости ABS, плоскости ABS и SNL перпендикулярны. Тогда перпендикуляры NT и EF к плоскости ABS из точек N и E плоскости SNL попадут на прямую их пересечения SL.

Прямоугольные треугольники SAL и SDN равны по гипотенузе ($SA = SD$) и катету ($LA = ND$), поэтому другие катеты SN и SL также равны. Рассмотрим равнобедренный треугольник SNL, в котором $SN = SL$, основание $NL = AD = 14$, а высота и медиана к нему $SH = 24$. По теореме Пифагора для треугольника LHS найдём

$$SL = \sqrt{7^2 + 24^2} = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25.$$

Теперь найдём высоту NT треугольника SNL, для чего выразим его площадь двумя способами: $\frac{1}{2}SH \cdot NL = \frac{1}{2}NT \cdot SL$, откуда $24 \cdot 14 = NT \cdot 25$, поэтому $NT = \frac{336}{25}$. В прямоугольном треугольнике SNT с прямым углом T отрезок EF перпендикулярен ST и проходит через середину SN, а значит, является средней линией треугольника SNT, поэтому $EF = \frac{1}{2}NT = \frac{168}{25}$.

Ответ: $\frac{168}{25}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

14. Решите неравенство: $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0.$

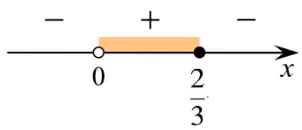
Решение:

Пусть $t = 4^{\frac{1}{x}-1} > 0$, тогда

$$t^2 - t - 2 \geqslant 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leqslant -1, \\ t \geqslant 2 \end{array}\right. \underset{t>0}{\Leftrightarrow} t \geqslant 2.$$

Вернёмся к исходной переменной

$$4^{\frac{1}{x}-1} \geqslant 2 \Leftrightarrow 2^{\frac{2}{x}-2} \geqslant 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x} - 2 \geqslant 1 \Leftrightarrow \frac{2-3x}{x} \geqslant 0 \Leftrightarrow 0 < x \leqslant \frac{2}{3}.$$



Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right]$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 2/3 ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0
Максимальный балл	2

15. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 5 млн. рублей на срок 10 лет. Условия возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на 15% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга так, чтобы на начало июля каждого года (кроме первого) долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем.

Найдите наибольшую возможную первую выплату, если известно, что последняя выплата будет не менее 0,483 млн. рублей.

Решение.
Для удобства обозначим $S = 5$ млн. рублей – сумма, взятая в кредит. Пусть S_1 млн. рублей – сумма долга после первой выплаты (в июле первого года). Условие «на начало июля каждого года (кроме первого) долг уменьшался на одну и ту же сумму по сравнению с предыдущим июлем» означает, что долг должен уменьшаться до нуля равномерно за оставшиеся 9 лет, то есть каждый июль долг будет равен

$$S,\quad S_1,\quad \frac{8}{9}S_1,\quad \dots,\quad \frac{2}{9}S_1,\quad \frac{1}{9}S_1,\quad 0.$$

Отметим, что увеличение произвольной величины A на 15% можно записать как умножение A на 1,15, так как $A+\frac{A}{100}\cdot 15 = A\cdot\left(1+\frac{15}{100}\right) = A\cdot 1{,}15$.
Оформим таблицу, показывающую изменение долга и выплаты по кредиту по годам.
Заполнять таблицу будем так: сначала заполним ячейки для долга на июль (см. выше), потом заполним ячейки для долга за январь (долг в январе равен долгу в июле прошлого года, умноженному на 1,15) и, наконец, заполним столбец выплат как разницу долгов январь и июль каждого года. Нам нужно найти наибольшую возможную первую выплату, т.е. нам надо найти наименьшее возможное значение S_1 так, чтобы последняя выплата была не менее 0,483 млн. рублей. Получаем неравенство

$$1{,}15\cdot\frac{1}{9}S_1 \ge 0{,}483 \iff S_1 \ge 3{,}78.$$

Следовательно, наибольшая возможная первая выплата равна

$1{,}15S - S_1 = 1{,}15\cdot 5 - 3{,}78 = 1{,}97.$

Ответ: 1,97 млн. рублей

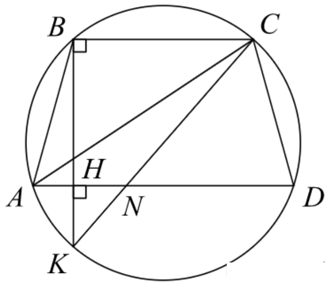
год	месяц	долг в млн. руб.	выплата в млн. руб.
1	янв.	$1{,}15S$	$1{,}15S - S_1$
	июль	S_1	
2	янв.	$1{,}15\cdot S_1$	$1{,}15\cdot S_1 - \frac{8}{9}S_1$
	июль	$\frac{8}{9}S_1$	
3	янв.	$1{,}15\cdot\frac{8}{9}S_1$	$1{,}15\cdot\frac{8}{9}S_1 - \frac{7}{9}S_1$
	июль	$\frac{7}{9}S_1$	
…	…	…	…
9	янв.	$1{,}15\cdot\frac{2}{9}S_1$	$1{,}15\cdot\frac{2}{9}S_1 - \frac{1}{9}S_1$
	июль	$\frac{1}{9}S_1$	
10	янв.	$1{,}15\cdot\frac{1}{9}S_1$	$1{,}15\cdot\frac{1}{9}S_1$
	июль	0	

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

16. Трапеция $ABCD$ с большим основанием AD и высотой BH вписана в окружность. Прямая BH вторично пересекает эту окружность в точке K.
а) Докажите, что прямые AC и AK перпендикулярны.
б) Прямые CK и AD пересекаются в точке N. Найдите AD, если радиус окружности равен 12, $\angle BAC = 30^0$, а площадь четырёхугольника $BCNH$ в 8 раз больше площади треугольника KNH.

Решение:



а) Поскольку основания трапеции AD и BC параллельны, а её высота $BH \perp AD$, то $BH \perp BC$, а значит, вписанный угол KBC, равны 90°, опирается на диаметр CK, на который опирается и вписанный угол CAK. Поэтому $AC \perp AK$.

б) Вписанные углы CKB и CAB опираются на одну дугу, а следовательно, равны. Поэтому в прямоугольном треугольнике KBC катет BC лежит напротив угла 30°, а значит, равен половине гипотенузы CK, то есть $BC = \frac{1}{2}CK = R = 12$, а катет

$$BK = CK\cdot\cos 30^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}.$$

В треугольниках KBC и KHN угол K общий, а углы KHN и KBC прямые, и, значит, треугольники подобны. Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия, поэтому

$$\frac{S_{KBC}}{S_{KHN}} = \frac{S_{KHN}+S_{BCNH}}{S_{KHN}} = \frac{S_{KHN}+8S_{KHN}}{S_{KHN}} = 9 = \left(\frac{KB}{KH}\right)^2.$$

Следовательно, $3 = \frac{12\sqrt{3}}{KH}$, то есть $KH = 4\sqrt{3}$, а значит, $BH = BK - KH = 8\sqrt{3}$.

Так как трапеция вписана в окружность, она равнобедренная, поэтому высота BH делит большее основание AD на отрезки $AH = \frac{AD - BC}{2}$ и $HD = \frac{AD + BC}{2}$. Воспользуемся теоремой о произведении отрезков пересекающихся хорд окружности, получим $AH \cdot HD = BH \cdot HK$, откуда

$$\frac{AD^2 - BC^2}{4} = 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}.$$

Тогда $\frac{AD^2 - 144}{4} = 96$, поэтому $AD^2 = 528$, то есть $AD = 4\sqrt{33}$.

Ответ: $AD = 4\sqrt{33}$.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) и обоснованно получен верный ответ в пункте б)	3
Получен обоснованный ответ в пункте б) ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а) и при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а) ИЛИ при обоснованном решении пункта б) получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б) с использованием утверждения пункта а), при этом пункт а) не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

17. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2} = 0$ имеет ровно два различных корня.

Решение. $\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2} = 0 \iff \begin{cases} x^2 - 4x + a = 0, \\ 5x^2 - 6ax + a^2 \neq 0. \end{cases}$

Система имеет два решения, если дискриминант первого квадратного трёхчлена положителен и никакой корень второго квадратного трёхчлена не является корнем первого. Найдем корни уравнения

$5x^2 - 6ax + a^2 = 0$; $x_{1,2} = \frac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 20a^2}}{10} = \frac{6a \pm 4a}{10}$; $x_1 = \frac{a}{5}$, $x_2 = a$.

Дискриминант первого квадратного трёхчлена

$$D = 16 - 4a = -4(a - 4) > 0 \iff a < 4.$$

Таким образом,

$$\begin{cases} a < 4, \\ \left(\frac{a}{5}\right)^2 - 4\frac{a}{5} + a \neq 0, \\ a^2 - 4a + a \neq 0; \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a^2 - 20a + 25a \neq 0, \\ a(a-3) \neq 0; \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a^2 + 5a \neq 0, \\ a \neq 0, \\ a \neq 3; \end{cases} \begin{cases} a < 4, \\ a \neq -5, \\ a \neq 0, \\ a \neq 3. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$.

Критерии проверки:

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точки $a = 4$	3
Верно рассмотрен хотя бы один из случаев решения, и получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением точек $a = -5$, $a = 3$ и / или $a = 4$, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения параболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

18. Даны три различных натуральных числа такие, что второе число равно сумме цифр первого, а третье – сумме цифр второго.

а) Может ли сумма трёх чисел быть равной 420?

б) Может ли сумма трёх чисел быть равной 419?

в) Сколько существует троек чисел, таких что: первое число – трёхзначное, а последнее равно 5?

Решение: а) Да, например, для числа 398 получим $398 + 20 + 2 = 420$.

б) Нет. Число и его сумма цифр дают одинаковые остатки при делении на 3, поэтому сумма трёх таких чисел всегда кратна 3, число 419 трём не кратно.

в) Поскольку число трёхзначное, его сумма цифр не превосходит 27, значит, она должна быть равна 14 или 23. Переформулируем: подходят все трёхзначные числа с остатком 5 при делении на 9, кроме тех, у которых сумма цифр 5.

Эти числа равны $11 \cdot 9 + 5 = 104$, $12 \cdot 9 + 5 = 113$, ..., $110 \cdot 9 + 5 = 995$. То есть всего имеется $110 - 11 + 1 = 100$ трёхзначных чисел с нужным остатком от деления на 9. Осталось выкинуть числа с суммой цифр 5.

Из цифр 5, 0, 0 можно составить одно такое трёхзначное число.

Из цифр 4, 1, 0 можно составить четыре таких трёхзначных числа.

Из цифр 3, 2, 0 можно составить четыре таких трёхзначных числа.

Из цифр 3, 1, 1 можно составить три таких числа.

Из цифр 2, 2, 1 можно составить три таких числа.

Других наборов с суммой 5 нет. Итого: $100 - 1 - 4 - 4 - 3 - 3 = 85$ чисел.

Ответ: а) да, б) нет, в) 85.

Критерии проверки:

Критерии оценивания выполнения задания	Баллы
Обоснованно получен верный ответ а пунктах а), б) и в).	4
Обоснованно получен верный ответ только в пункте а) или только в пункте б) и при этом обоснованно получен верный ответ в пункте в).	3
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) и в пункте б) ИЛИ Обоснованно получен верный ответ в пункте в).	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а) или в пункте б).	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4