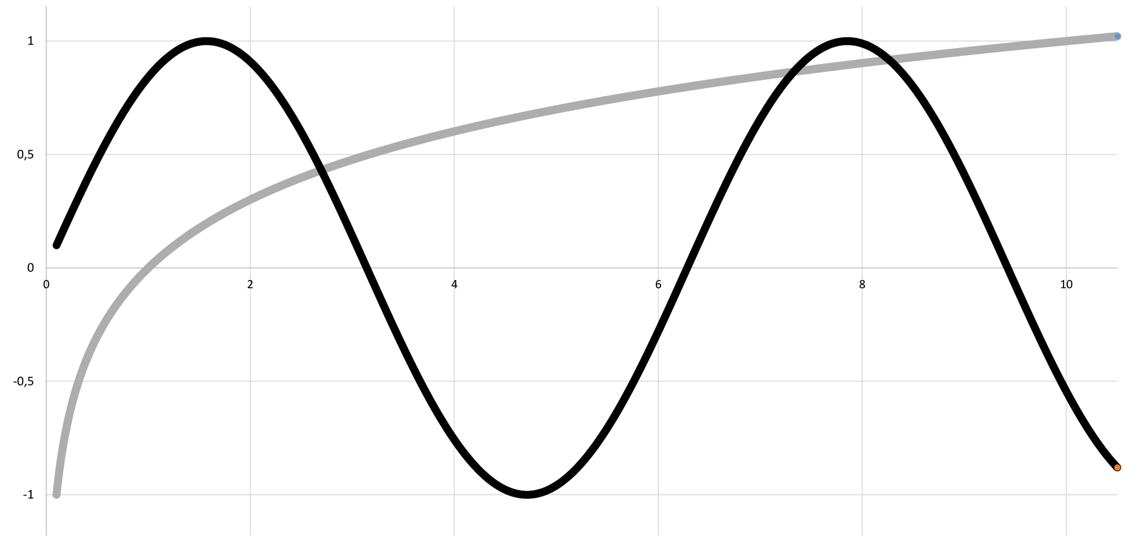
Решения задачи олимпиады „Математический олимп“ 2024 года

1. 11 класс (2 балла). Сколько решений имеет уравнение

$$\sin x = \lg x \ ?$$

Решение. Построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \lg x$.



Эти графики пересекаются в трех точках, откуда следует, что уравнение имеет три решения. Учтем, что при $x \leq 0$ и $x > 10$ решений заведомо нет. Кроме того, надо рассмотреть участки монотонности синуса.

1. 9-10 классы (2 балла). Правильный (равносторонний) треугольник и правильный шестиугольник имеют одинаковые периметры. Найти отношение площадей данных шестиугольника и треугольника.

Решение. Пусть длина стороны правильного шестиугольника A равна a. Поскольку периметры шестиугольника и равностороннего треугольника B равны, длина стороны треугольника B равна $2a$.

С другой стороны, правильный шестиугольник A может быть составлен из шести одинаковых равносторонних треугольников B_k $(k = 1, 2, ..., 6)$ со стороной a. Площадь $S(B_k)$ любого из треугольников B_k в четыре раза меньше площади $S(B)$ подобного им треугольника B, поскольку сторона треугольника B в два раза больше стороны треугольников B_k, т.е. $S(B) = 4S(B_k)$.

В итоге площадь шестиугольника A равна

$$S(A) = 6S(B_k) = \frac{6}{4}S(B) = \frac{3}{2}S(B).$$

Ответ. $S(A)/S(B) = 3/2$.

2. (3 балла). Найдите целочисленные решения уравнения

$$xy = x + y.$$

Решение. Преобразуем уравнение

$$xy = x + y \ \Leftrightarrow \ xy - x - y = 0 \ \Leftrightarrow \ x(y-1) - y + 1 = 1 \ \Leftrightarrow \ (x-1)(y-1) = 1.$$

Если x и y — целые, то $x - 1$ и $y - 1$ также целые, а произведение двух целых чисел равно 1 только в двух случаях, когда оба числа равны 1 или оба числа равны -1. Отсюда получаем два решения уравнения

$$x - 1 = y - 1 = 1 \ \Rightarrow \ x_1 = 2, \ y_1 = 2; \quad x - 1 = y - 1 = -1 \ \Rightarrow \ x_2 = 0, \ y_2 = 0.$$

3. (4 балла). Составьте многочлен с целыми коэффициентами, корнем которого является число $x_0 = \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Решение. Заметим, что числа $x_0^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ и $x_0^4 = 49 + 20\sqrt{6}$ содержат одну и ту же иррациональность. Рассмотрим биквадратный многочлен с неопределенными коэффициентами $P_4(x) = ax^4 + bx^2 + c$ и подберем коэффициенты a, b, c так, чтобы $P_4(x_0) = 0$.

$$ax_0^4 + bx_0^2 + c = 0 \ \Rightarrow \ 49a + 20a\sqrt{6} + 5b + 2b\sqrt{6} + c = 0.$$

Последнее равенство выполняется, если коэффициенты a, b, c удовлетворяют системе уравнений

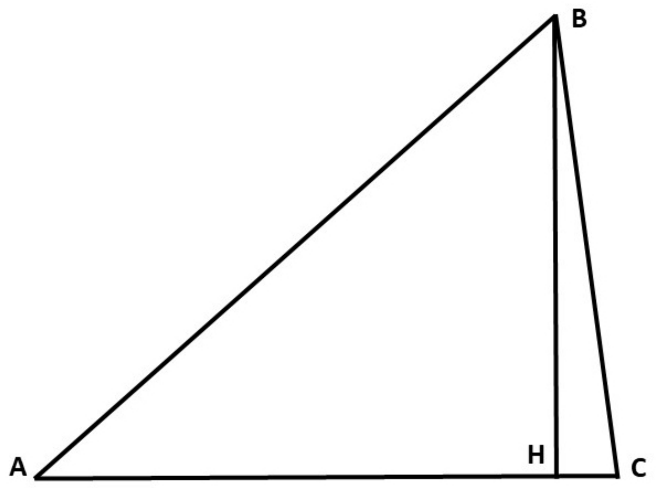
$$\begin{cases} 49a + 5b + c = 0, \\ 20a + 2b = 0 \end{cases}$$

Эта система имеет бесконечно много решений. Подберем одно из них, положив $a = 1$. Тогда $b = -10$ и $c = 1$. Таким образом,искомый многочлен имеет вид

$$P_4(x) = x^4 - 10x^2 + 1.$$

4. (4 балла). Длины сторон треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию: $BC = a$, $AC = a+1$, $AB = a+2$, причем $a \geq 3$. На сторону AC опущена высота BH. Найдите разность длин отрезков $AH - CH$.

Решение.



Обозначим $b = AC = a+1$, $x = CH$, тогда $AH = b - x$. Выразим квадрат высоты (катета) BH, применив теорему Пифагора к прямоугольным треугольникам ABH и CBH

$$BH^2 = (b+1)^2 - (b-x)^2 \qquad \text{и} \qquad BH^2 = (b-1)^2 - x^2,$$

и приравняем эти выражения: $b^2 + 2b + 1 - b^2 + 2bx - x^2 = b^2 - 2b + 1 - x^2$.
Решая это уравнение: $2b + 2bx = b^2 - 2b$, получим $2x = b - 4$, следовательно

$$AH - CH = (b-x) - x = b - 2x = b - b + 4 = 4.$$

5. (5 баллов). Сколько имеется натуральных чисел n, оканчивающихся на 00, имеющих ровно 10 различных делителей, включая 1 и само число n?

Решение. Если число n имеет ровно 10 делителей, то $D(n) = 10 = 1 \cdot 10 = 2 \cdot 5$. Отсюда следует, что либо $n = p^9$, где p – единственный простой делитель числа n, либо $n = p_1 \cdot p_2^4$, где p_1, p_2 – единственные простые делители числа n.

С другой стороны, по условию число n оканчивается на 00, т.е. делится на $100 = 2^2 5^2$, а значит n имеет как минимум два простых делителя – 2 и 5. Причем кратности этих простых делителей не ниже, чем 2.

Следовательно, n не может иметь вид $n = p^9$, т.е. иметь единственный простой делитель. Аналогично, если $n = p_1 \cdot p_2^4$, то один из простых делителей числа n имеет кратность 1, что противоречит тому, что n должно делиться на 2^2 и на 5^2.

Таким образом, чисел n, удовлетворяющих условию задачи, не существует.