Задачи для олимпиады математического факультета 2018 года
11 класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ y=5+|x-1| \end{cases}.$$

<u>Решение</u>. Выразим из первого уравнения $|x-1|$ и подставим во второе. Получим уравнение относительно y.

$$y=6-|y-5|.$$

Из второго уравнения исходной системы следует, что $y \geq 5$. Поэтому из последнего уравнения получаем

$$y=11-y \quad \Rightarrow \quad y=\frac{11}{2}.$$

Теперь из первого уравнения системы получим

$$|x-1|+\frac{1}{2}=1 \quad \Rightarrow \quad |x-1|=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad x_1=\frac{3}{2}, \quad x_2=\frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что решениями системы являются две пары чисел

$$\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{2},\frac{11}{2}\right).$$

2. Решите уравнение

$$e^x=\ln(x+1)+1.$$

<u>Решение</u>. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x=0$ является решением уравнения. Покажем, что других решений нет. Для этого отметим, что функции $f(x)=e^x$ и $g(x)=\ln(x+1)+1$ имеют в точке $x=0$ равные производные.

$$f'(0)=1,\ g'(0)=1.$$

Поэтому графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют в точке $x=0$ общую касательную $y=x+1$. График функции $f(x)$ есть кривая, выпуклая вниз, а график функции $g(x)$ есть кривая, выпуклая вверх. Поэтому эти кривые лежат по разные стороны от касательной, а значит не имеют других общих точек, кроме точки $x=0, y=1$. Это и означает, что уравнение имеет только одно решение $x=0$.

3. Докажите, что если натуральные числа m, n, k удовлетворяют уравнению

$$m^2+n^2=k^2,$$

то хотя бы одно из чисел m или n кратно трем.

<u>Решение</u>. Докажем сначала, что для натурального числа k остаток от деления числа k^2 на 3 может быть равен 0 или 1, но не может равняться 2. Действительно, пусть $k=3\,l$, тогда k^2 делится на 3. Если $k=3\,l+1$, то $k^2=3\,r+1$, если же $k=3\,l+2$, то $k^2=9\,l^2+12\,l+4=3(3\,l^2+4\,l+1)+1$.

Дальнейшее доказательство проведем методом „от противного“. Именно, предположим, что оба числа m и n не кратны трем. Рассмотрим четыре возможных случая.

1) $m=3i+1,\ n=3j+1$; 2) $m=3i+1,\ n=3j+2$; 3) $m=3i+2,\ n=3j+1$;
4) $m=3i+2,\ n=3j+2$,

где i, j — целые неотрицательные числа. В случае 1

$$k^2=(3i+1)^2+(3j+1)^2=9i^2+6i+9j^2+6j+2=3(3i^2+2i+3j^2+2j)+2,$$

что невозможно по доказанному ранее. В случае 2

$$k^2=(3i+1)^2+(3j+2)^2=9i^2+6i+9j^2+12j+5=3(3i^2+2i+3j^2+4j+1)+2,$$

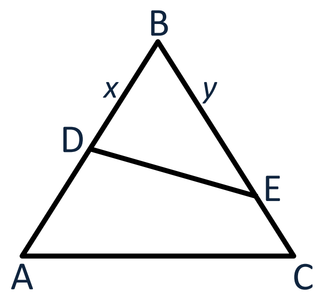
что также невозможно. Случай 3 рассматривается точно также, как и случай 2. В случае 4

$$k^2 = (3i+2)^2 + (3j+2)^2 = 9i^2 + 12i + 9j^2 + 12j + 8 = 3(3i^2 + 4i + 3j^2 + 4j + 2) + 2,$$

что опять же невозможно. Полученные противоречия показывают, что хотя бы одно из чисел m или n кратно трем.

4. Найдите отрезок наименьшей длины, соединяющий две точки на сторонах правильного треугольника и делящий этот треугольник на две фигуры равной площади.

Решение. Пусть сторона правильного треугольника ABC равна a. Пусть, далее, искомый отрезок соединяет точки D и E на сторонах AB и BC соответственно. Обозначим через x длину отрезка DB, через y длину отрезка BE, через S площадь треугольника ABC, через S_1 площадь треугольника DBE.



Хорошо известно, что

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2, \quad S_1 = \frac{1}{2} DB \cdot BE \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{4} xy.$$

По условию задачи $S_1 = \frac{1}{2} S$. Отсюда мы получаем соотношение между x и y.

$$\frac{\sqrt{3}}{4} xy = \frac{\sqrt{3}}{8} a^2 \quad \Rightarrow \quad xy = \frac{a^2}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{a^2}{2x}.$$

Используя теорему косинусов для треугольника DBE, выразим квадрат длины отрезка DE.

$$DE^2 = DB^2 + BE^2 - 2DB \cdot BE \cdot \cos\frac{\pi}{3} = x^2 + y^2 - 2 \cdot xy \cdot \frac{1}{2} = x^2 + y^2 - xy.$$

Отсюда и из предыдущего соотношения получаем

$$DE^2 = x^2 + \frac{a^4}{4x^2} - \frac{a^2}{2}.$$

В задаче требуется найти минимальную длину отрезка DE. Если DE принимает наименьшее значение, то и DE^2 принимает наименьшее значение. Найдем минимум DE^2, исходя из предыдущего выражения. $x \in (0, a)$, поэтому $x^2 \in (0, a^2)$. Введем новую переменную $t = x^2$ и найдем минимум функции

$$f(t) = t + \frac{a^4}{4t} - \frac{a^2}{2}$$

на отрезке $[0, a^2]$. Функция $f(t)$ достигает минимума в точке t_0, в которой производная $f'(t)$ обращается в ноль. Найдем эту точку.

$$f'(t) = 1 - \frac{a^4}{4t^2}, \quad 1 - \frac{a^4}{4t^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{a^4}{4t^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad t^2 = \frac{a^4}{4} \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{a^2}{2}.$$

В этой точке производная $f'(t)$ меняет знак с минуса на плюс, а это означает, что функция $f(t)$ в точке $t_0 = \frac{a^2}{2}$ достигает минимума. Найдем этот минимум.

$$f_{min} = f(t_0) = \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2a^2} - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

Найденное значение есть минимум квадрата длины отрезка DE, поэтому искомый минимум равен $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

5. Несколько натуральных чисел образуют возрастающую геометрическую прогрессию с натуральным знаменателем. Сумма прогрессии равна 157. Найдите эти числа.

Решение. Числа, образующие геометрическую прогрессию, суть следующие $b, bq, bq^2, ..., bq^n$, где b и $q > 1$ — натуральные числа. По условию задачи

$$b + bq + ... + bq^n = 157 \quad \Rightarrow \quad b(1 + q + ... + q^n) = 157.$$

157 — простое число, поэтому

$$b = 1, \ 1 + q + ... + q^n = 157 \quad \Rightarrow \quad q + ... + q^n = 156.$$

Разложим левую и правую части последнего равенства на множители.

$$q(1 + ... + q^{n-1}) = 3 \cdot 4 \cdot 13.$$

Так как $q > 1$, то это число может быть одним из следующих

$$1)\ q = 2, \quad 2)\ q = 3, \quad 3)\ q = 4, \quad 4)\ q = 6, \quad 5)\ q = 12.$$

Рассмотрим каждую из этих возможностей.

$$q = 2, \ 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1} = 78.$$

Это невозможно, так как $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{n-1}$ есть нечетное число.

$$q = 3, \ S_n \equiv 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = 52.$$

Это невозможно, так как $S_4 = 40$, а $S_5 = 121$.

$$q = 4, \ S_n \equiv 1 + 4 + 4^2 + ... + 4^{n-1} = 39.$$

Это невозможно, так как $S_3 = 21$, а $S_4 = 85$.

$$q = 6, \ S_n \equiv 1 + 6 + 6^2 + ... + 6^{n-1} = 26.$$

Это невозможно, так как S_n нечетное.

$$q = 12, \ S_n \equiv 1 + 12 + 12^2 + ... + 12^{n-1} = 13.$$

Это возможно при $n = 2$.

Тем самым получено, что $b = 1$, $q = 12$, $n = 2$ и искомые числа суть следующие $1, 12, 144$.