Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Тверской государственный университет»

Ю. В. Чемарина

Сборник задач
по теории функций комплексного переменного

Учебно-методическое пособие
для студентов физико-технического факультета

Тверь 2010

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК В 161.55я73-4
Ч-42

Автор-составитель Чемарина Ю.В.

Ч-42 Сборник задач по теории функций комплексного переменного: Учеб.-метод. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2010. – 24 с. Библ.: 7 назв.

Сборник задач составлен на основе опыта чтения курса лекций и ведения практических занятий по ТФКП на физико-техническом факультете ТвГУ в течение ряда лет.

Подобранные автором задачи охватывают основные разделы курса ТФКП. Каждый раздел сборника содержит краткие теоретические сведения и перечень задач различного уровня сложности.

Предназначен для студентов физических и технических специальностей университетов, но может представлять интерес и для студентов-математиков.

УДК 517.53/.55(075.8)
ББК В 161.55я73-4

Печатается по решению кафедры
математических методов современного естествознания
(протокол заседания каф. № 3 от 03.12.2010).

Оглавление

1 Комплексные числа

1.1 Арифметические операции

$z = x + iy$ - алгебраическая форма записи комплексного числа;
$x = \operatorname{Re} z$ (реальная часть), $\quad y = \operatorname{Im} z$ (мнимая часть);
$\overline{z} = x - iy$ - число, комплексно-сопряженное числу z.
Операции:

$$(x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = x_1 \pm x_2 + i\,(y_1 \pm y_2)\,;$$

$$(x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,;$$

$$\frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2};$$

$$\forall z \neq 0 \;\; z \pm \infty = \infty\,,\; z \cdot \infty = \infty\,,\; z \div 0 = \infty;$$

$$\forall z \neq \infty \;\; z \div \infty = 0.$$

Задача 1.1.1 Доказать тождества:

1) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$; $\quad$ 2) $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2\,i}$; $\quad$ 3) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}\,$; $\quad$ 4) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Задача 1.1.2 Выполнить действия:

1) $(5+i)(1+2i)$; $\quad$ 2) $(3-i)(2i-4)$; $\quad$ 3) $(7-i)\overline{(1+2i)}$; $\quad$ 4) $\overline{(i-3)}(3+i)$;

5) $i(2-i)-(1-i)(4+3i)$; $\quad$ 6) $i(4-i)-(2+i)^2$; $\quad$ 7) $(1+i)^2-\overline{(1-3i)(1+i)}$;

8) $\dfrac{2}{1-3i}$; $\quad$ 9) $\dfrac{6+5i}{i}$; $\quad$ 10) $\dfrac{1-i}{1+i}$; $\quad$ 11) $\dfrac{4+3\,i}{2-i}$; $\quad$ 12) $\dfrac{3+11\,i}{5\,i-1}$; $\quad$ 13) $\dfrac{1+5i}{2-3i}$;

14) $\dfrac{3+i}{(1+i)(1-2i)}$; $\quad$ 15) $\dfrac{7-i}{1+i}-\dfrac{5+i}{2i-3}$; $\quad$ 16) $\dfrac{(1+i)(3+i)}{(3-i)}+\dfrac{(1-i)(3-i)}{(3+i)}$.

1.2 Тригонометрическая и показательная формы записи

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{– модуль числа } z = x + iy$$

$$\operatorname{Arg}\, z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2\pi n\,, n \in \mathbb{Z}\,, & \text{если } x > 0\,, \\[2ex] \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + \pi + 2\pi n\,, n \in \mathbb{Z}\,, & \text{если } x < 0\,, \\[2ex] \operatorname{sign}(y)\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n\,, n \in \mathbb{Z}\,, & \text{если } x = 0; \end{cases} \quad \text{– аргумент числа } z$$

$$\arg z \;\; \text{– главное значение аргумента,} \;\; \arg z \in (-\pi; \pi]\,.$$

Тригонометрическая форма записи числа:

$$z = |z| \left(\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)\right),$$

где φ – одно из значений $\mathrm{Arg}\, z$.
Формула Эйлера: $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$.
Показательная форма записи числа:

$$z = |z|\, \mathrm{e}^{i\varphi} .$$

Задача 1.2.1 Найти модуль комплексного числа:

1) $1+\sqrt{3}i$; 2) i; 3) $-2+3i$; 4) $-1-i$; 5) $6-\sqrt{13}i$; 6) $-\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 1.2.2 Найти аргумент и главное значение аргумента комплексного числа:

1) $2i$; 2) -10; 3) $4+5i$; 4) $-1+i$; 5) $\sqrt{3}+i$; 6) $\sqrt{3}-3i$; 7) $-\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Задача 1.2.3 Записать число в тригонометрической и показательной формах:

1) $-3i$; 2) $2+7i$; 3) $1-i$; 4) $\dfrac{3}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $-\sqrt{3}+i$; 6) $-\sqrt{2}-i\sqrt{2}$;

7) $5\cos\dfrac{\pi}{4} - 5\,i\sin\dfrac{\pi}{4}$; 8) $-2\left(\cos\dfrac{\pi}{7} + i\sin\dfrac{\pi}{7}\right)$; 9) $-3\sin\dfrac{\pi}{3} + 3\,i\cos\dfrac{\pi}{3}$.

Задача 1.2.4 Найти геометрическое место точек, удовлетворяющих условиям:

1) $|z-2+i| = 1$; 2) $1 < |z-i| < 3$; 3) $|z+1| \geq 2$; 4) $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$;

5) $\dfrac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \dfrac{5\,\pi}{6}$; 6) $\mathrm{Re}\, z = -1$; 7) $0 \leq \mathrm{Re}\,(iz) \leq 2$; 8) $\mathrm{Im}\, z \geq 0$;

9) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 1$; 10) $|z-2+2i| = |z|$; 11) $(2-i)\, z + (2+i)\, \overline{z} + 1 = 0$;

12) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -2$; 13) $|2z-i| < |2+iz|$; 14) $\mathrm{Im}\, \overline{(z^2-z)} = 2 - \mathrm{Im}\, z$;

15) $|z-1| + |z+1| = 4$; 16) $||z-2i| - |z+2i|| = 2$; 17) $|z| = Re\, z + 1$.

Задача 1.2.5 Доказать тождества:

1) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$; 2) $|z_1+z_2| \ge |z_1|-|z_2|$; 3) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$;

4) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$; 5) $z\cdot\overline{z} = |z|^2$; 6) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$;

7) $Arg\,(z_1\cdot z_2) = Arg\,z_1 + Arg\,z_2$; 8) $Arg\,(z_1 \div z_2) = Arg\,z_1 - Arg\,z_2$.

1.3 Возведение в степень с рациональным показателем

$$(r\,(\cos\varphi + i\cdot\sin\varphi))^n = r^n\cos n\varphi + i\cdot r^n \sin n\varphi \text{ – формула Муавра;}$$

$$z^n = |z|^n\,(\cos(n\cdot arg\,z) + i\cdot\sin(n\cdot arg\,z)) = |z|^n\,\mathrm{e}^{i\cdot n\cdot arg\,z}, \quad n\in\mathbb{Z};$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\,\mathrm{e}^{i\frac{arg\,z+2\pi k}{n}}, \quad k=\overline{0,n-1}, \quad n\in\mathbb{N};$$

$$z^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{z}\right)^m, \quad m\in\mathbb{Z},\, n\in\mathbb{N}.$$

Задача 1.3.1 Вычислить:

1) i^{99}; 2) $(1+i)^6$; 3) $\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^5$; 4) $\left(-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i\right)^4$; 5) $(1+2i)^6$;

6) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}\right)^{12}$; 7) $\left(\cos\dfrac{\pi}{15} - i\sin\dfrac{\pi}{15}\right)^{-5}$; 8) $\left(\cos\dfrac{\pi}{14} + i\sin\dfrac{\pi}{14}\right)^{\frac{7}{2}}$.

Задача 1.3.2 Найти все значения корня и отметить их на комплексной плоскости:

1) $\sqrt{-1}$; 2) $\sqrt{1+\sqrt{3}i}$; 3) $\sqrt{3+4i}$; 4) $\sqrt[3]{-1}$; 5) $\sqrt[3]{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i}$;

6) $\sqrt[3]{27\,i}$; 7) $\sqrt[4]{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$; 8) $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$; 9) $\sqrt[6]{-i}$; 10) $\sqrt[8]{1}$.

Задача 1.3.3 Решить уравнения:

1) $z^2=-1$; 2) $z^2=i$; 3) $z^2-6z+13=0$; 4) $z^2+4z+5=0$;

5) $z^2+2z+17=0$; 6) $z^2-2z+10=0$; 7) $z^3-z^2+z-1=0$;

8) $z^2-z\,(8+3i)+13+13i=0$; 9) $|z| = z+2i+1$; 10) $z\,|z|+2z+i=0$.

Задача 1.3.4 С помощью формулы Муавра выразить $\cos 4\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$.

2 Функции комплексного переменного

2.1 Элементарные функции

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x\left(\cos\, y + i \sin\, y\right)\,;$$

$$\mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\, z, \quad \ln z = \ln|z| + i\arg z \text{ (главное значение } \mathrm{Ln}\, z)\,;$$

$$z_1^{z_2} = \mathrm{e}^{z_2 \mathrm{Ln}\, z_1}, \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ z_1 \neq 0\,;$$

$$\sin\, z = \frac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i},\ \cos\, z = \frac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2},\ \mathrm{tg}\, z = \frac{\sin\, z}{\cos\, z},\ \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos\, z}{\sin\, z}\,;$$

$$\mathrm{sh}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2},\ \mathrm{ch}\, z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2},\ \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z},\ \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}\,.$$

Задача 2.1.1 Найти значения функции $f(z) = \mathrm{e}^z$ в точках:

1) $\pi(1-i)$; 2) $1+\dfrac{\pi}{2}i$; 3) $ln\, 2-\dfrac{\pi}{3}i$; 4) $3+\dfrac{\pi}{4}i$; 5) $\pi - i\ln 10$.

Задача 2.1.2 Найти значения функций $\mathrm{Ln}\, z$ и $\ln z$ в точках:

1) -1; 2) $(1+i)^2$; 3) $\sqrt{3}+i$; 4) $1-i$; 5) ei; 6) $3+4i$.

Задача 2.1.3 Какое приращение получит функция $f(z) = \mathrm{Ln}\,\left(z^2+1\right)$ при обходе в положительном направлении вдоль окружности:

1) $|z| = \dfrac{1}{2}$; 2) $|z - i| = 1$; 3) $|z + i| = 1$; 4) $|z - 2\,i| = 4$.

Задача 2.1.4 Пользуясь определениями функций, доказать что:

1) $\mathrm{e}^{z_1+z_2} = \mathrm{e}^{z_1}\cdot \mathrm{e}^{z_2}$; 2) $\mathrm{Ln}\,(\mathrm{e}^z) \neq z$; 3) $\mathrm{e}^{\mathrm{Ln}\, z} = z$; 4) $\mathrm{Ln}\,(z^n) \neq n\,\mathrm{Ln}\, z$.

Задача 2.1.5 Вычислить:

1) 1^i; 2) $(1-i)^i$; 3) $1^{\sqrt{2}}$; 4) i^i; 5) $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2}\right)^{1-i}$; 6) $\left(\dfrac{1-2i}{\sqrt{5}}\right)^{1+i}$.

Задача 2.1.6 Доказать тождества:

1) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$; 2) $\sin(iz) = i\ \mathrm{sh}\, z$;

3) $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$; 4) $\cos(iz) = \mathrm{ch}\, z$;

5) $\sin(z_1+z_2) = \sin(z_1)\cos(z_2) + \sin(z_2)\cos(z_1)$;

6) $\cos(z_1+z_2) = \cos(z_1)\cos(z_2) - \sin(z_1)\sin(z_2)$;

7) $\mathrm{sh}(z_1+z_2) = \mathrm{sh}(z_1)\,\mathrm{ch}(z_2) + \mathrm{sh}(z_2)\,\mathrm{ch}(z_1)$;

8) $\mathrm{ch}(z_1+z_2) = \mathrm{ch}(z_1)\,\mathrm{ch}(z_2) + \mathrm{sh}(z_1)\,\mathrm{sh}(z_2)$.

Задача 2.1.7 Вычислить:

1) $\sin(6i)$; 2) $\cos(-i)$; 3) $\sin(3\,\pi - 2\,i)$; 4) $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - i\right)$; 5) $\sin\left(i - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

6) $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - 3i\right)$; 7) $\mathrm{tg}\,\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\,i\right)$; 8) $\mathrm{ctg}\,\left(\dfrac{\pi}{3} + i\,\ln 7\right)$; 9) $\mathrm{sh}\left(1 - i\dfrac{2\pi}{3}\right)$;

10) $\mathrm{ch}\left(\ln 3 + i\,\dfrac{\pi}{2}\right)$; 11) $\mathrm{th}\left(i\,\dfrac{\pi}{4}\right)$; 12) $\mathrm{th}\,(\ln 2 + \pi\, i)$; 13) $\mathrm{cth}\,(2 + i)$.

Задача 2.1.8 Доказать тождества:

1) $\mathrm{Arccos}\,(z) = i\,\mathrm{Ln}\,\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$;

2) $\mathrm{Arctg}\,(z) = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\left(\dfrac{i + z}{i - z}\right)$;

3) $\mathrm{Arcsin}\,(z) = -i\,\mathrm{Ln}\; i\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$;

4) $\mathrm{Arcctg}\,(z) = \dfrac{i}{2}\,\mathrm{Ln}\,\left(\dfrac{z - i}{z + i}\right)$;

5) $\mathrm{Arch}\,(z) = \mathrm{Ln}\,\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$;

6) $\mathrm{Arth}\,(z) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\left(\dfrac{1 + z}{1 - z}\right)$;

7) $\mathrm{Arsh}\,(z) = \mathrm{Ln}\,\left(z + \sqrt{z^2 + 1}\right)$;

8) $\mathrm{Arcth}\,(z) = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{Ln}\,\left(\dfrac{z + 1}{z - 1}\right)$.

Задача 2.1.9 Вычислить:

1) $\mathrm{Arcsin}\;(5)$; 2) $\mathrm{Arccos}\;(2)$; 3) $\mathrm{Arsh}\;(-1)$; 4) $\mathrm{Arth}\;(1 - i)$.

Задача 2.1.10 Решить уравнения:

1) $\cos\, z = 2$; 2) $\mathrm{th}\, z = \pi\, i$; 3) $\sin\, z - \cos\, z = 3$; 4) $\mathrm{e}^z = -i$; 5) $\mathrm{ch}\, z = 0$.

2.2 Геометрическая интерпретация

Задача 2.2.1 Найти образ единичной окружности $|z| = 1$ при отображениях:

1) $w = (1+i)z$; 2) $w = \dfrac{1}{z}$; 3) $w = \dfrac{z - i}{z + i}$; 4) $w = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$; 5) $w = \ln z$.

Задача 2.2.2 Найти образ координатной сетки $x = Const$, $y = Const$ при отображениях:

1) $w = z^2 + z$; 2) $w = \mathrm{e}^z$; 3) $w = \mathrm{ch}\; z$; 4) $w = \sin\; z$; 5) $w = \mathrm{tg}\, z$.

Задача 2.2.3 В какую область функция $w = \frac{1}{z}$ преобразует полосу между прямыми $x = 1$ и $x = 2$?

3 Дифференцирование функций комплексного переменного

3.1 Моногенность и голоморфность

Функция $f(z) = u(z) + i\,v(z)$, определенная в некоторой окрестности точки z_0, называется моногенной (дифференцируемой) в этой точке, если

$$\exists \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f\,'(z_0).$$

$f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \Longleftrightarrow u(z)$ и $v(z)$ дифференцируемы в точке z_0 и выполняются условия Коши-Римана:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}\,, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}\,. \end{cases}$$

Функция $f(z) \in Hol\,(D)$ или является голоморфной (аналитической) в области D , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Выражение для производной функции $f(z)$: $\quad f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Геометрический смысл производной:
$|f'(z_0)|$ - коэффициент растяжения, $\arg f'(z_0)$ - угол поворота плоскости в точке z_0 при отображении $w = f(z)$.

Задача 3.1.1 Найти все точки, в которых дифференцируема функция:

1) $\overline{z}$; 2) $\operatorname{Im} z$; 3) $\operatorname{Re} z$; 4) $|z|^2$; 5) $\sin x + i\cos x$; 6) $x^2 - 2iy$; 7) $\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}$.

Задача 3.1.2 Доказать голоморфность и найти производные функций:

1) z^2; 2) $\dfrac{1}{z}$; 3) e^z; 4) $\ln z$; 5) $\sin z$; 6) $\cos z$; 7) $\operatorname{sh} z$; 8) $\operatorname{ch} z$.

Задача 3.1.3 Доказать, что для функции $\sqrt{|xy|}$ в точке $z = 0$ выполняются условия Коши-Римана, но она не дифференцируема в этой точке.

Задача 3.1.4 Пусть $f(z) \in Hol\,(D)$, $f(z) \neq Const$. Будет ли голоморфна в области D функция $\overline{f(z)}$?

Задача 3.1.5 Показать, что если $f(z) \in Hol\,(D)$ и справедливо одно из условий:

1) $\operatorname{Re} f = Const$; 2) $\operatorname{Im} f = Const$; 3) $|f| = Const$; 4) $\arg f = Const$,

то $f(z) = Const$ всюду в D.

Задача 3.1.6 Найти производную функции $f(z)$ в точке z_0:

1) $f(z) = (i\,z+1)^3 + 2iz$, $z_0 = -1+i$; 2) $f(z) = i\,(1-z^2) - 2z$, $z_0 = 1$;

3) $f(z) = \mathrm{e}^{iz}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{6}$; 4) $f(z) = z\mathrm{e}^z$, $z_0 = \pi i - 1$; 5) $f(z) = i\operatorname{sh} z$, $z_0 = \dfrac{i\pi}{4}$.

Задача 3.1.7 Найти коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображениях:

1) $w = z^2+(i-1)z+2$, $z_0 = 1$; 2) $w = \dfrac{z+i}{z-i}$, $z_0 = 2i$; 3) $w = \mathrm{e}^{-iz}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

Задача 3.1.8 Выяснить, какая часть плоскости сжимается, а какая растягивается при отображениях:

1) $w = \dfrac{1}{z-1}$; 2) $w = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z} + z\right)$; 3) $w = 2z^2-4z-1$; 4) $w = i\,z^2+2z+3$;

5) $w = z^3$; 6) $w = \ln(z+1)$; 7) $w = \ln(iz-1)$; 8) $w = \mathrm{e}^{iz}$; 9) $w = \mathrm{e}^{2z-i}$.

3.2 Восстановление голоморфной функции по ее реальной или мнимой части

Функция $u(x,y)$ является реальной (мнимой) частью функции $f \in Hol\,(D)$ тогда и только тогда, когда $\Delta u \equiv 0$ в D. Если область D многосвязна, то f может быть многозначной.

Оператор Лапласа: $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Формулы для восстановления голоморфной функции:

$$f(z) = 2\,u\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2}, \frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right) - \overline{f(z_0)}, \quad u(x,y) = Re\,f(z);$$

$$f(z) = 2\,i\,v\left(\frac{z+\overline{z_0}}{2}, \frac{z-\overline{z_0}}{2i}\right) + \overline{f(z_0)}, \quad v(x,y) = Im\,f(z).$$

Задача 3.2.1 Существует ли голоморфная функция $f = u + i\,v$, для которой:

1) $u = \dfrac{y}{x^2+y^2}$; 2) $u = \mathrm{e}^y \operatorname{sh} x$; 3) $v = \mathrm{e}^x\left(\cos\, x + \sin\, y\right)$; 4) $v = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$.

Задача 3.2.2 Восстановить голоморфную функцию $f = u + i\,v$ по ее реальной (мнимой) части:

1) $u = 3x+y-1$; 2) $v = xy - x$; 3) $u = \dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$; 4) $v = \dfrac{y}{\left(x+1\right)^2+y^2}$;

5) $u = x^3 - 3xy^2 + y + 2$; 6) $v = \mathrm{e}^y\left(\cos\, x - \sin\, x\right)$; 7) $u = 2\,\sin\, 3x\, \operatorname{ch} 3y$;

8) $v = \operatorname{sh} x\, \cos\, y + y$; 9) $u = \dfrac{1}{2}\,\ln\left(x^2+y^2\right)$ *в области* $\mathbb{C}\backslash\{x \geq 0,\, y = 0\}$.

Задача 3.2.3 Восстановить голоморфную функцию $f = u + i\,v$ по условиям:

1) $u = x^2 - y^2 + 2\,x + 1$, $f(0) = 1 + 3\,i$; 2) $v = 3\,x^2\,y - y^3 + y$, $f(i) = 2$;

3) $u = \dfrac{x}{x^2+y^2}$, $f(1+i) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$; 4) $v = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$, $f(0) = 1$;

5) $u = \mathrm{e}^{-2x}\sin\, 2y + xy$, $f(0) = 3i$; 6) $v = \mathrm{e}^x\left(y\cos\, y + x\sin\, y\right)$, $f(0) = 2$;

7) $u = \cos\, 2x\, \operatorname{ch} 2y + 2$, $f(\pi) = 3-2i$; 8) $v = \dfrac{\sin\, x\, \cos\, x}{\operatorname{ch}^2\, y - \sin^2\, x}$, $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = i$;

9) $u = x\cos x\operatorname{ch} y + y\sin x\operatorname{sh} y$, $f(0) = 0$; 10) $v = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $y > 0, f(i) = 0$.

4 Конформные отображения

Непрерывное взаимно-однозначное (однолистное) отображение $w = f(z)$ области $D \subset \mathbb{C}_z$ на область $f(D) \subset \mathbb{C}_w$ называется конформным, если оно сохраняет направление обхода границы и в каждой точке области D выполнены условия сохранения: углов между кривыми и их образами, коэффициентов растяжения по всем направлениям.

Отображение $w = f(z)$ является конформным в области $D \subset \mathbb{C}_z$ тогда и только тогда, когда $f(z)$ - однолистная и голоморфная в D функция.

Принцип соответствия границ: Если ∂D - кусочно-гладкая жорданова кривая, то конформное в области D отображение $w = f(z)$ непрерывно и взаимно-однозначно отображает ∂D на $\partial f(D)$. И обратно, если функция $f(z) \in Hol(D)$ непрерывно и взаимно-однозначно отображает ∂D на $\partial f(D)$, то отображение $w = f(z)$ конформно в D.

Теорема Римана: Пусть D - односвязная в смысле расширенной комплексной плоскости область, граница которой состоит более чем из одной точки. Тогда существует конформное отображение $w = f(z)$ области D на единичный круг $|w| < 1$. Единственность такого отображения определяется условиями: $f(z_0) = w_0$, $\arg f'(z_0) = \alpha$, где $z_0 \in intD$, $w_0 \in int\, f(D)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

4.1 Дробно-линейные преобразования

Дробно-линейными называют преобразования вида

$$w = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}, \quad a\,d - b\,c \neq 0\,.$$

Эти преобразования конформно отображают расширенную комплексную плоскость на себя.

Задача 4.1.1 Доказать, что дробно-линейные преобразования переводят обобщенные окружности (окружности и прямые) в обобщенные окружности.

Задача 4.1.2 Найти образ полуплоскости $y > x$ при отображении

$$w = \frac{z-1}{z+1}\,.$$

Задача 4.1.3 В какую область преобразуется полукруг $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ при отображении

$$w = \frac{z+2}{z-i}\,.$$

Задача 4.1.4 Найти образ кольца $1 < |z| < 2$ при отображении

$$w = \frac{z+2\,i}{z-1}\,.$$

Задача 4.1.5 В какую область преобразуется круговая луночка $|z| < 1$, $|z-1| < \sqrt{2}$ при отображении

$$w = \frac{z-i}{z+i}\,.$$

Задача 4.1.6 Найти конформное отображение плоскости $\mathbb{C}_z$ на плоскость $\mathbb{C}_w$, удовлетворяющее условиям:

1) $w(-1) = -1, w(i) = 0, w(1) = 1$; 2) $w(0) = -1$, $w(1) = 0$, $w(\infty) = 1$;

3) $w(-1) = 0, w(i) = 2i, w(1+i) = 1-i$; 4) $w(i) = 1$, $w(1) = \infty$, $w(2) = i$.

Задача 4.1.7 Найти общий вид конформного отображения:

1) *верхней полуплоскости на себя;*

2) *верхней полуплоскости на единичный круг;*

3) *единичного круга на себя.*

Задача 4.1.8 Найти конформное отображение верхней полуплоскости на себя так, чтобы:

1) $w(1+i) = i,\ \arg w'(1+i) = \pi;$ 2) $w(i) = 2i,\ w(0) = 1.$

Задача 4.1.9 Найти конформное отображение верхней полуплоскости на единичный круг так, чтобы:

1) $w(2i) = 0,\ \arg w'(2i) = \dfrac{\pi}{2};$ 2) $w(i) = 0,\ \arg w'(i) = 0.$

Задача 4.1.10 Найти конформное отображение единичного круга на себя так, чтобы:

1) $w\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0,\ \arg w'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3};$ 2) $w\left(\dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{1}{3},\ \arg w'\left(\dfrac{i}{2}\right) = -\dfrac{\pi}{2}.$

Задача 4.1.11 Найти конформное отображение полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$ на круг $|w| < 1$ при условии $w(0) = 0,\ \arg w'(0) = \pi/2.$

Задача 4.1.12 Найти конформное отображение внешности круга $|z - 1 - i| > 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ при условии $w(0) = i,\ w(1) = 0.$

Задача 4.1.13 Найти конформное отображение полукруга $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ на квадрант $\operatorname{Re} w > 0,\ \operatorname{Im} w > 0$ при условии $w(1) = \infty,\ w(i) = 0,\ w(-1) = 1.$

4.2 Преобразования: Жуковского, $\mathbf{w} = \mathbf{z}^{\alpha}$, $\mathbf{w} = \mathrm{e}^{\mathbf{z}}$

Функция Жуковского

$$w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

конформно отображает внешность (внутренность) единичного круга на плоскость с разрезом по отрезку $[-1\,,\,1]$ действительной оси.

Степенная функция $w = z^{\alpha}$, $\alpha > 0$ конформно отображает сектор $0 < \arg z < \gamma, \quad \gamma \in \left(0\,, \frac{2\pi}{\alpha}\right)$ на сектор $0 < \arg w < \alpha\gamma$.

Комплексная экспонента $w = \mathrm{e}^{z}$ конформно отображает полосу $0 < \operatorname{Im} z < h, \quad h \in (0\,, 2\pi)$ на сектор $0 < \arg w < h$.

Задача 4.2.1 Найти образ следующих областей при преобразовании Жуковского:

1) $\operatorname{Im} z > 0$; 2) $\operatorname{Re} z > 0$; 3) $\operatorname{Im} z > 0\,, |z| < 1$; 4) $\dfrac{\pi}{4} < \arg z < \dfrac{3\pi}{4}$.

Задача 4.2.2 Найти конформное отображение плоскости с разрезом по отрезку $[-1\,, 1]$ действительной оси на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ при условии $w(i) = i$, $w(1) = 1$.

Задача 4.2.3 Найти конформное отображение первого квадранта $\operatorname{Re} w > 0$, $\operatorname{Im} w > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ при условии $w(1+i) = i$, $w(1) = 0$.

Задача 4.2.4 Найти конформное отображение сектора $0 < \arg z < \frac{\pi}{5}$ на круг $|w| < 1$.

Задача 4.2.5 Найти конформное отображение полукруга $|z| < 1$, $\operatorname{Im} z > 0$ на полуплоскость $\operatorname{Im} w > 0$ при условии $w(-1) = -1$, $w(0) = 0$, $w(1) = 1$.

Задача 4.2.6 Найти конформное отображение полосы, ограниченной прямыми $y = x - 1$ и $y = x + 1$, на верхнюю полуплоскость.

Задача 4.2.7 Найти конформное отображение полосы $0 < \operatorname{Im} z < 1$ на полуплоскость $\operatorname{Re} w < 0$.

Задача 4.2.8 Найти конформное отображение полуполосы $-2\pi < \operatorname{Re} z < 2\pi$, $\operatorname{Im} z > 0$ на верхнюю полуплоскость при условии $w(-\pi/2) = -1$, $w(0) = 0$, $w(\pi/2) = 1$.

Задача 4.2.9 Найти конформное отображение круговой луночки $|z| < 2$, $|z - 1| < 1$ на круг $|w| < 1$.

5 Интегрирование функций комплексного переменного

5.1 Интеграл по контуру. Первообразная

Пусть $z = z(t)$, $t \in [a;b]$ – параметризация контура γ. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\,d\,z = \int\limits_{a}^{b} f\left(z(t)\right) z'(t) d\,t.$$

Если $F'(z) = f(z) \implies F(z)$ – первообразная функции $f(z)$. В односвязной области D интеграл от голоморфной функции $f(z)$ не зависит от пути интегрирования и справедливы выражения:

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\,\xi + Const, \;\; z_0, z \in D\,;$$

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)\,d\,z = F(z_2) - F(z_1) \text{ – формула Ньютона-Лейбница.}$$

В многосвязной области первообразная $F(z)$ является, вообще говоря, многозначной функцией.

Задача 5.1.1 Вычислить интегралы:

1) $\int\limits_{\gamma} \overline{z}\,d\,z$, γ - *отрезок, соединяющий точку* 1 *с точкой* i*;*

2) $\int\limits_{\gamma} \operatorname{Re}\left(z^2\right) d\,z$, γ - *отрезок, соединяющий точку* 1 *с точкой* $1-2i$*;*

3) $\int\limits_{-i}^{i} \overline{z}\,|z|\,d\,z$ *вдоль полуокружности* $|z| = 1$, $Re\,z \geq 0$;

4) $\int\limits_{-i}^{i} \overline{z}^2 d\,z$ *вдоль параболы* $y^2 = x+1$;

5) $\int\limits_{|z|=2} z\,Im\left(z^2\right) d\,z$; 6) $\int\limits_{|z+2-3i|=1} \dfrac{Re\left(z^2 - 2\,\overline{z}\right)}{z+2-3i} d\,z.$

Задача 5.1.2 С помощью формулы Ньютона-Лейбница вычислить интегралы:

$$1)\ \int\limits_{-i}^{1+i} \big(z^3-(1-i)\,z\big)\ d\,z;\ \ 2)\ \int\limits_{1}^{i} \ln z\,d\,z;\ \ 3)\ \int\limits_{\pi}^{\frac{\pi}{2}+i} \sin\,z\,d\,z;\ \ 4)\ \int\limits_{0}^{1+i\pi} z\,\mathrm{e}^{-z}\,d\,z;$$

$$5)\ \int\limits_{0}^{i} \big(z^2+z+1\big)\cos\Big(2z+\frac{\pi}{4}\Big)\,d\,z; \qquad 6)\ \int\limits_{-i}^{i} \big(z^2-iz\big)\,\mathrm{ch}\,(\pi\,z+1)\ d\,z.$$

Задача 5.1.3 Объяснить, почему интеграл

$$\int\limits_{0}^{z} \frac{d\,z}{z^2+4}$$

не зависит от пути интегрирования в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\,z>0$ и зависит в нижней полуплоскости $\mathrm{Im}\,z<0$.

5.2 Интегральная формула Коши

Интегральная теорема Коши:

$$f\in Hol\,(D) \quad\Longrightarrow\quad \oint_{\partial\,D} f(z)\,d\,z=0.$$

Интегральная формула Коши:

$$f\in Hol\,(D) \quad\Longrightarrow\quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial\,D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\,\xi.$$

Задача 5.2.1 Выяснить, применима ли интегральная теорема Коши к интегралу

$$\int\limits_{\gamma} \frac{d\,z}{z\,(z^2+9)}$$

вдоль контуров γ:

1) $|z|=1$; 2) $|z+i|=1$; 3) $|z-2|=2$; 4) $|z-2\,i|=2$; 5) $|z|=4$.

Задача 5.2.2 Найти значения интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z+i|=2} \frac{\xi^2-1}{\xi-z}\,d\,\xi$$

в точках: 1) $z=0$; 2) $z=3\,i$; 3) $z=1-i$; 4) $z=-2+i$.

Задача 5.2.3 Применяя интегральную формулу Коши, вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z-4i|=3} \frac{d\,z}{z^2+9}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2} \frac{z^3}{z-1}\,d\,z$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=\frac{3}{2}} \frac{\mathrm{e}^z}{z(z-3)}\,d\,z$; 5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos\,z}{z^2-\pi^2}\,d\,z$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=1} \frac{d\,z}{(1+z)(z-1)^3}$;

7) $\displaystyle\oint\limits_{|z+1|=2} \frac{(3z+i)}{z^2-2z-3}\,d\,z$; 8) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2i|=2} \frac{\sin(2z)}{z^2+4}\,d\,z$; 9) $\displaystyle\oint\limits_{|z+i|=1} \frac{\mathrm{ch}\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{z^2+1}\,d\,z$.

Задача 5.2.4 Применяя интегральную формулу Коши, вычислить интеграл

$$\oint\limits_{\gamma} \frac{z\,d\,z}{z^2-1}$$

по замкнутому контуру γ, если:

1) точка $z=1$ лежит внутри γ, а точка $z=-1$ лежит вне γ;

2) точка $z=-1$ лежит внутри γ, а точка $z=1$ лежит вне γ;

3) обе точки $z=1$ и $z=-1$ лежат внутри γ.

6 Ряды голоморфных функций

6.1 Степенные ряды. Ряд Тейлора

Степенной ряд с центром в точке z_0 имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(z-z_0)^n\ .$$

Область сходимости: круг $|z-z_0|<R$.

Радиус сходимости ряда можно вычислить по формулам

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|,\quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}\,,$$

если указанные пределы существуют.

Сумма ряда – голоморфная функция, имеющая на границе круга сходимости по крайней мере одну особую точку.

Рядом Тейлора голоморфной функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 называют ряд

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}\left(z_0\right)}{n!}\left(z-z_0\right)^n .$$

Точка z_0 является нулем n-го порядка функции $f(z)$, если ее ряд тейлора в окрестности точки z_0 имеет вид

$$f(z)=c_n\left(z-z_0\right)^n+c_{n+1}\left(z-z_0\right)^{n+1}+\ldots\,, \quad c_n\neq 0.$$

Задача 6.1.1 Определить радиус сходимости степенных рядов:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+1)^n}{3^n}$; 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{(n+1)!}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n\,(z-1)^n}{2^{\,n}}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$;

5) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-i)^n}{n^2\,(1+i)^n}$; 6) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(z+3)^n}{n^n}$; 7) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2i)^n}{n(2n+1)}$; 8) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^n n^n$.

Задача 6.1.2 Разложить функции в ряд Тейлора в окрестности точки z_0 и указать радиус сходимости этих рядов:

1) $f(z)=\mathrm{e}^z(1-z)$, $z_0=0$; 2) $f(z)=\operatorname{ch} z$, $z_0=0$; 3) $f(z)=\sin^2 z$, $z_0=0$;

4) $f(z)=\dfrac{z}{z+2}$, $z_0=1$; 5) $f(z)=\dfrac{iz}{z-4}$, $z_0=2$; 6) $f(z)=\dfrac{1}{z^2+4}$, $z_0=0$;

7) $f(z)=\dfrac{z}{z^2-4z+13}$, $z_0=1-i$; 8) $f(z)=\ln\left(z^2-3z+2\right)$, $z_0=3$;

9) $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)^2}$, $z_0=0$; 10) $f(z)=\ln\dfrac{1+z}{1-z}$, $z_0=0$.

Задача 6.1.3 Разложить функцию $f(z)=z^5+iz^4-z$ по степеням $z-i$.

Задача 6.1.4 Найти первые три ненулевых члена разложения функции $f(z)$ в ряд Тейлора в точке z_0 и определить радиус сходимости ряда:

1) $f(z)=\ln\left(\sin z\right)$, $z_0=\dfrac{\pi}{2}$; 2) $f(z)=\dfrac{1}{\cos z}$, $z_0=-i$;

3) $f(z)=\ln\left(z+\sqrt{1-z^2}\right)$, $z_0=0$; 4) $f(z)=\mathrm{e}^{\sin z}$, $z_0=0$.

Задача 6.1.5 Просуммировать ряды:

1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n\,z^n$; 2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n}$; 3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{z^n}{n}$; 4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{\,2n+1}}{2\,n+1}$.

Задача 6.1.6 Определить порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0:

1) $f(z) = (\sin z - z)^2$, $z_0 = 0$; 2) $f(z) = \ln(1-\cos z)$, $z_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

3) $f(z) = \mathrm{e}^{(z-i)^3} - 1$, $z_0 = i$; 4) $f(z) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2}z\right)\ln z$, $z_0 = 1$.

6.2 Ряд Лорана

Голоморфная в кольце $r < |z - z_0| < R$, $z_0 \in \mathbb{C}$ функция $f(z)$ представляется в этом кольце сходящимся рядом Лорана:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n ,$$

причем единственным образом.

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ – главная часть ряда Лорана;

$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ – регулярная (правильная) часть ряда Лорана.

Ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n, \quad |z| > R,$$

$\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{0} c_n z^n$ – регулярная часть ряда, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} c_n z^n$ – главная часть ряда.

Задача 6.2.1 Разложить функцию в ряд Лорана в заданном кольце:

1) $f(z) = \dfrac{1}{z-i}$, $|z| < 1$; 2) $f(z) = \dfrac{1}{z^2-1}$, $|z| > 1$;

3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$, $0 < |z-1| < 1$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$, $1 < |z| < \infty$; 5) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z+i)}$, $0 < |z| < 1$;

6) $f(z) = \dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$, $1 < |z| < 3$;

7) $f(z) = \dfrac{1}{z^2(z^2-9)}$, $1 < |z-1| < 2$; 8) $f(z) = z^3 \mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$, $|z| > 0$;

9) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z(1-z)}$, $0 < |z| < 1$; 10) $f(z) = z^3 \cos\left(\dfrac{1}{z-2}\right)$, $|z-2| > 0$.

Задача 6.2.2 Разложить функции в окрестности точки $z_0 = \infty$ в ряд Лорана. Указать область сходимости и выделить главную часть:

1) $f(z) = z^2 \cos\dfrac{1}{z}$; 2) $f(z) = \dfrac{z^3}{z^2+1}$; 3) $f(z) = \dfrac{z^6}{(z^2+1)(z^2-4)}$.

4) $f(z) = \dfrac{z^4-1}{z^4+1}$; 5) $f(z) = \ln\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)$; 6) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^4}$; 7) $f(z) = \mathrm{e}^{z+\frac{1}{z}}$.

Задача 6.2.3 Выяснить, допускает ли функция разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки:

1) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$; 2) $f(z) = \cos\dfrac{1}{z}$, $z_0 = \infty$; 3) $f(z) = \operatorname{th}\dfrac{1}{z}$, $z_0 = 0$;

4) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z}$, $z_0 = \infty$; 5) $f(z) = \ln z$, $z_0 = 0$; 6) $f(z) = \ln\dfrac{1}{1-z}$, $z_0 = 1$.

7 Теория вычетов

7.1 Изолированные особые точки. Вычеты

Классификация изолированных особых точек функции $f(z)$:

1)$\nexists \lim\limits_{z\to z_0} f(z) \implies z_0$ – существенно особая точка;

2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \infty \implies z_0$ – полюс;

Если $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)\,(z-z_0)^n = Const \neq 0 \implies z_0$ – полюс n-го порядка.

3) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = Const \implies z_0$ – устранимая особая точка.

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}, \quad z_0 \in \mathbb{C}, \qquad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1},$$

где c_{-1} - коэффициент ряда Лорана $f(z)$ в окрестности соответствующей точки.

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)\,(z-z_0)$ - вычет в полюсе 1-го порядка.

$\operatorname*{Res}\limits_{z=z_0} f(z) = \dfrac{1}{(n-1)!}\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)(z-z_0)^n]^{(n-1)}$- вычет в полюсе n-го порядка.

Если функция $f(z)$ имеет на $\mathbb{C}$ конечное число особых точек, то сумма всех вычетов, включая вычет в точке $z=\infty$, равна нулю.

Задача 7.1.1 Найти изолированные особые точки и указать их тип:

1) $f(z)=\dfrac{z^5}{z^4+1}$; 2) $f(z)=\dfrac{\sin z}{z(z^2-9)^2}$; 3) $f(z)=\dfrac{1}{z^3(\cos z-1)}$;

4) $f(z)=\dfrac{z+2}{z(z+1)(z-1+i)^3}$; 5) $f(z)=\dfrac{\sin\frac{1}{z}}{(z^3+1)(z-1)^2}$;

6) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^4(z^2-1)(z^2+1)^2}$; 7) $f(z)=\dfrac{z^{10}+1}{(z^2+4)^2(z+2)^5}$.

Задача 7.1.2 Вычислить вычеты функций в точках z_0:

1) $f(z)=\dfrac{iz}{z^2-1}$, $z_0=1$; 2) $f(z)=\dfrac{z}{z^2+9}$, $z_0=3i$;

3) $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)^2(z+3)}$, $z_0=-1$; 4) $f(z)=\dfrac{z+1}{(z^2-iz)^2}$, $z_0=i$;

5) $f(z)=\dfrac{2}{z^8-1}$, $z_0=1$; 6) $f(z)=\dfrac{14}{z^7+1}$, $z_0=-1$;

7) $f(z)=\dfrac{2z}{(z-1)(z+2)}$, $z_0=\infty$; 8) $f(z)=\dfrac{iz-1}{(z+3)(z-i)}$, $z_0=\infty$;

9) $f(z)=\dfrac{\sin 3z}{z^2(z^2-4)^2}$, $z_0=0;\ \pm2;\ \infty$; 10) $f(z)=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}z}{z^9+1}$, $z_0=0;\ -1$;

11) $f(z)=\dfrac{z^2+2}{z^2(z-1)}$, $z_0=0;\ 1;\ \infty$; 12) $f(z)=\dfrac{\cos 2z}{z^2(z^2+1)}$, $z_0=0;\ \pm i;\ \infty$.

7.2 Вычисление интегралов с помощью вычетов

Теорема Коши о вычетах:

$$f(z)\in Hol\,(D\setminus\{z_1,...,z_n\})\Longrightarrow\oint\limits_{\partial D}f(z)\,d\,z=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k}f(z).$$

Задача 7.2.1 Вычислить интегралы с помощью теоремы Коши о вычетах:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=2}\frac{z\,d\,z}{(z-i)(z-3)}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z-i|=1{,}5}\frac{d\,z}{z(z^2+1)^2}$; 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z-2|=2{,}5}\frac{z\,d\,z}{(z^2-1)(z-2)^2}$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4}\frac{3z\,d\,z}{z^2+2z-3}$; 5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=7}\frac{\operatorname{ctg}\,z}{4z-\pi}\,d\,z$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z-3i|=4}\frac{\sin\,2z}{(z^2+9)(z^2-1)}\,d\,z$.

Задача 7.2.2 Вычислить интегралы с помощью теоремы Коши о вычетах:

1) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=4} \frac{d\,z}{(z+1)^2\,(z-3)^2}$; 2) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \frac{z^3}{2z^4+1}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \sin\left(\frac{1}{z}\right)\,d\,z$;

4) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=7} \frac{z}{\mathrm{e}^z-1}\,d\,z$; 5) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=1} \operatorname{th}^2\left(\frac{1}{z}\right)\,d\,z$; 6) $\displaystyle\oint\limits_{|z|=5} \frac{z}{\sin z\,(1-\cos z)}\,d\,z$.

Задача 7.2.3 Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{d\,\varphi}{3+\cos\,\varphi}$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi}{5+3\cos\varphi}\,d\,\varphi$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi+\cos\varphi}{2\sin\varphi+3}\,d\,\varphi$.

Задача 7.2.4 Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{z^2}{z^4+1}\,d\,z$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^2}{(z^2+1)\,(z^2+4)}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{z\,d\,z}{(z^2+4z+13)^2}$.

Задача 7.2.5 Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin z}{z^2+4}\,d\,z$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos 2z}{(z^2+1)^2}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z^3\sin z}{(z^2+1)\,(z^2+1)}\,d\,z$.

Задача 7.2.6 Вычислить интегралы:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sqrt{z}}{z^2+4}\,d\,z$; 2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln^2 z}{z^2+9}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\ln z}{\sqrt{z}\,(z^2+1)^2}\,d\,z$.

Задача 7.2.7 Найти главные значения интегралов:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{z^2}{z^4-1}\,d\,z$; 2) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos z}{z^2-1}\,d\,z$; 3) $\displaystyle\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{z\sin z}{z^2-5z+6}\,d\,z$.

Список литературы

[1] *Волковысский Л.И., Лунц Г.Л., Араманович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1975.

[2] *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987.

[3] *Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С.* Задачи по теории функций комплексного переменного с решениями. – М.: Мир, 2005.

[4] *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1984.

[5] *Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И.* Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1982.

[6] *Старков В.Н.* Задачи по теории функций комплексного переменного. – СПб.: Изд-во С.-Петербургского университета, 1998.

[7] *Хапланов М.Г.* Теория функций комплексного переменного. – М.: Просвещение, 1965.

Технический редактор А.В. Жильцов

Подписано в печать 06.12.2010. Формат 60 84 1/16.

Усл. печ. л. 1,5. Тираж 45 экз. Заказ № 505.

Тверской государственный университет

Редакционно-издательское управление

Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, ул. Желябова, 33.

Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.