Контрольные измерительные материалы
по МАТЕМАТИКЕ 2019 г.
(пробный ЕГЭ)

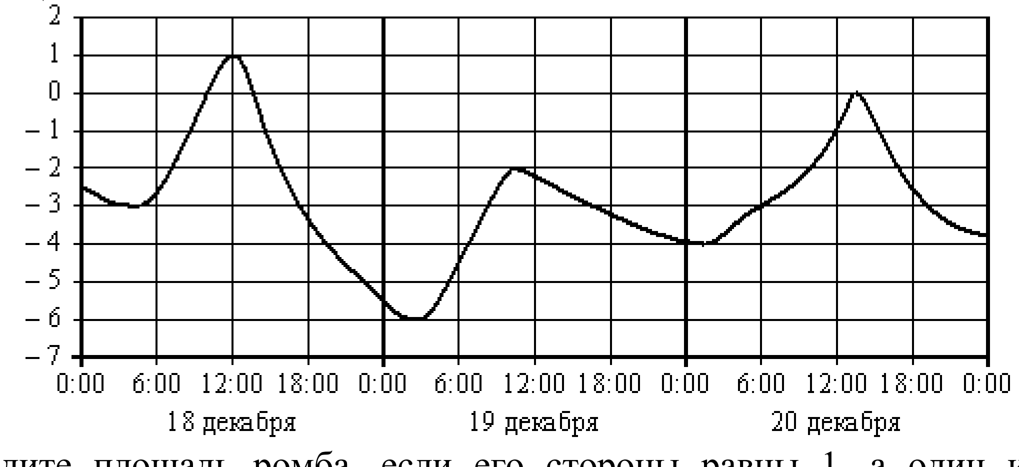
Вариант состоит из двух частей и содержит 19 заданий. Часть 1 состоит из 8 заданий базового уровня сложности. Часть 2 содержит 11 заданий повышенного и высокого уровней сложности, проверяющих уровень профильной математической подготовки. Задания 1–12 с кратким ответом в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Задания 13–19 с развёрнутым ответом. Правильное решение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Правильное решение каждого из заданий 13, 14 и 15 оценивается 2 баллами; 16 и 17 – 3 баллами; 18 и 19 – 4 баллами. Максимальный первичный балл за выполнение всей работы – 32 балла.

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Полученный ответ запишите в бланк ответов №1. Единицы измерений писать не нужно.

Часть 1

1. Система навигации самолёта информирует пассажира о том, что полёт проходит на высоте 37 000 футов. Выразите высоту полёта в метрах. Считайте, что 1 фут равен 30,5 см.

2. На рисунке показано изменение температуры воздуха на протяжении трёх суток. По горизонтали указывается дата и время, по вертикали – значение температуры в градусах Цельсия. Определите по рисунку разность между наибольшей и наименьшей температурой воздуха 20 декабря. Ответ дайте в градусах Цельсия.



3. Найдите площадь ромба, если его стороны равны 1, а один из углов равен $150°$.

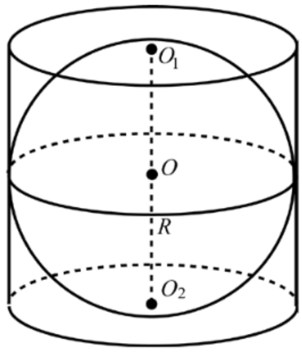
4. Ковбой Джон попадает в муху на стене с вероятностью 0,9, если стреляет из пристрелянного револьвера. Если Джон стреляет из непристрелянного револьвера, то он попадает в муху с вероятностью 0,4. На столе лежит 10 револьверов, из них только 4 пристрелянные. Ковбой Джон видит на стене муху, наудачу хватает первый попавшийся револьвер и стреляет в муху. Найдите вероятность того, что Джон промахнётся.

5. Найдите корень уравнения $(x+7)^3 = 216$.

6. Основания равнобедренной трапеции равны 24 и 10. Радиус описанной окружности равен 13. Центр окружности лежит внутри трапеции. Найдите высоту трапеции.

7. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $y = 3x^2 - 3x + c$. Найдите c.

8. Шар вписан в цилиндр. Площадь полной поверхности цилиндра равна 81. Найдите площадь поверхности шара.



Часть 2

9. Найдите значение выражения $27\operatorname{tg}33° \cdot \operatorname{tg}57° - 48$.

10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна $I = \dfrac{\varepsilon}{R+r}$, где ε – ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом – его внутреннее сопротивление, R – сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20 % от силы тока короткого замыкания $I_{кз} = \dfrac{\varepsilon}{r}$?

11. Имеется два сплава. Первый содержит 10% никеля, второй – 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 250 кг, содержащий 25% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава была меньше массы второго?

12. Найдите точку максимума функции $y = 2 - \sqrt{x^2 + 6x + 12}$.

Задания 13–19 – задания с развёрнутым ответом. Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. а) Решите уравнение $\log_2(-\sin x) + \log_2 \cos x = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}, SB = \sqrt{85}, SD = \sqrt{57}$.

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

15. Решите неравенство $\dfrac{3^{x^2+x} - 4\sqrt{3}^{x^2+x} + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+4}} \le 0$.

16. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 6, CM = 4$, Q – точка пересечения прямых KM и AB, а T – такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

17. В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$1 - \sin x \cdot (a\cos x - 8\sin x) = 0$$

не имеет действительных решений.

19. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Ответы к задачам

№ задания	1	2	3	4	5	6
ответ	11 285	4	0,5	0,4	-1	17

№ задания	7	8	9	10	11	12
ответ	7	54	-21	4	50	-3

13. а) $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

б) $x_1 = \frac{23\pi}{12}$, $x_2 = \frac{19\pi}{12}$.

14. б) $\arccos\frac{14}{55}$.

15. $\{0\} \cup [1;\ \infty)$.

16. б) $\frac{24\sqrt{5}}{5}$.

17. 13 млн рублей.

18. $a \in (-6; 6)$.

19. а) да, б) нет; в) 7.

13. а) Решите уравнение $\log_2(-\sin x) + \log_2 \cos x = -2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

Решение. а) Данное уравнение равносильно системе:

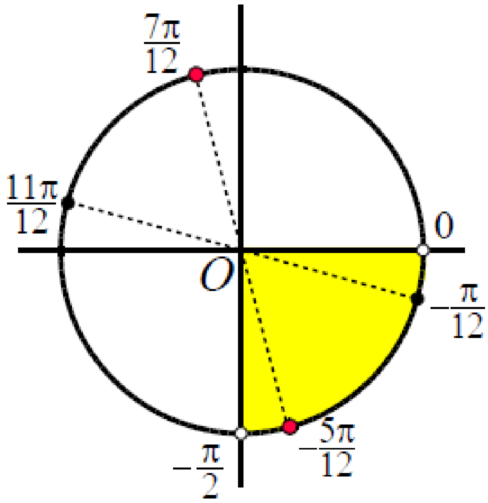
$$\begin{cases} -\sin x > 0, \\ \cos x > 0, \\ \log_2(-\sin x \cos x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x < 0, \\ \cos x > 0, \\ \sin x \cos x = -0{,}25. \end{cases}$$

Решим последнее уравнение этой системы:

$$\sin x \cos x = -0{,}25 \Leftrightarrow \sin 2x = -0{,}5 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{aligned} 2x &= -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ 2x &= -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{12} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= -\frac{5\pi}{12} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

С учётом неравенств системы



$$\left[\begin{aligned} x &= -\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x &= -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

б) С помощью тригонометрического круга отберём корни, принадлежащие заданному промежутку.

$$x_1 = -\frac{\pi}{12} + 2\pi = \frac{23\pi}{12}, \; x_2 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi = \frac{19\pi}{12}.$$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z},\ x = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

б) $x_1 = \frac{23\pi}{12}$, $x_2 = \frac{19\pi}{12}$.

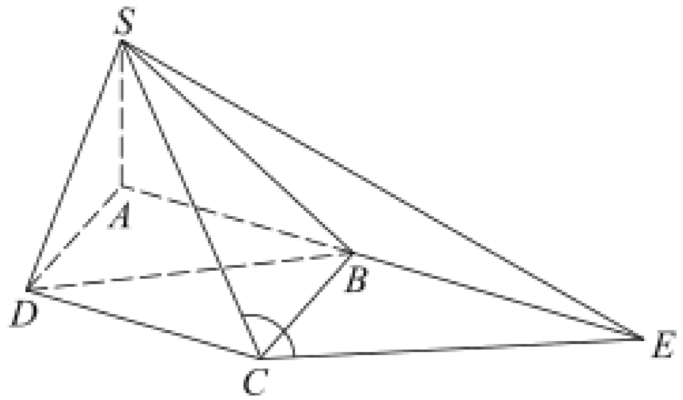
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	**2**
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения уравнения и отбора корней	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**2**

14. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 8$ и $BC = 6$. Длины боковых рёбер пирамиды $SA = \sqrt{21}\,, SB = \sqrt{85}\,, SD = \sqrt{57}\,.$

а) Докажите, что SA – высота пирамиды.

б) Найдите угол между прямыми SC и BD.

Решение.



а) В треугольнике SAB:

$$SB^2 = 85 = 21 + 64 = SA^2 + AB^2,$$

Поэтому треугольник SAB прямоугольный с гипотенузой SB и прямым углом $\angle SAB$. Аналогично, из равенства

$$SD^2 = 57 = 21 + 36 = SA^2 + AD^2,$$

Получаем, что $\angle SAD$ – прямой.

Так как прямая SA перпендикулярна прямым AB и AD, то она перпендикулярна плоскости (ABD) и отрезок SA является высотой пирамиды.

б) На прямой AB отметим такую точку E, что $BDCE$ – параллелограмм. Тогда $BE = DC = AB$ и $DB = CE$. Найдём угол $\angle SCE$. По теореме Пифагора:

$$AC = BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 10,$$

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 11,$$

$$SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \sqrt{277}.$$

По теореме косинусов:

$$SE^2 = SC^2 + CE^2 - 2SC \cdot CE \cos \angle SCE \Leftrightarrow 277 = 121 + 100 - 220 \cos \angle SCE \Leftrightarrow$$

$$\cos \angle SCE = -\frac{14}{55}.$$

Искомый угол равен $\arccos \frac{14}{55}$.

Ответ: б) $\arccos \frac{14}{55}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б*	**2**
Выполнен только один из пунктов – *а* или *б*	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**2**

15. Решите неравенство $\dfrac{3^{x^2+x} - 4\sqrt{3}^{x^2+x} + 3}{\sqrt{x} - \sqrt{x+4}} \leq 0$.

Решение.

Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3}^{x^2+x} - 1)(\sqrt{3}^{x^2+x} - 3)}{\sqrt{x} - \sqrt{x+4}} \leq 0, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\begin{cases} \dfrac{(\sqrt{3} - 1)(x^2 + x - 0)(x^2 + x - 2)}{x - (x+4)} \leq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x(x+1)(x-1)(x+2) \geq 0, \\ x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \ x \in \{0\} \cup [1;\ \infty).$$

Ответ: $\{0\} \cup [1;\ \infty)$.

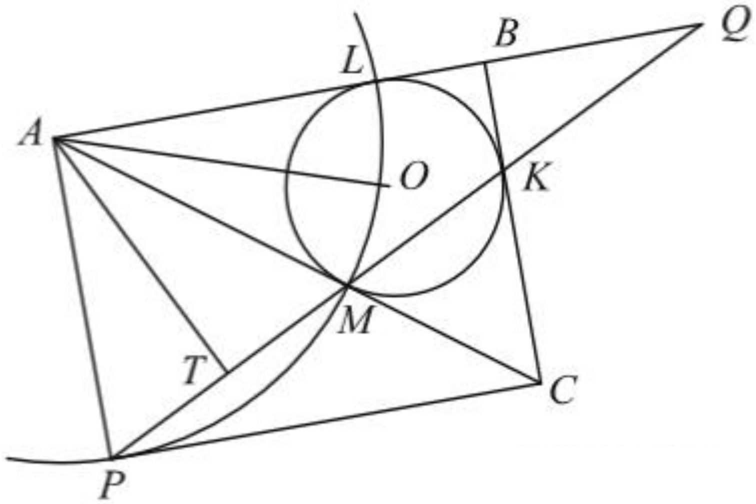
Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	**2**
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0, ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**2**

16. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается его сторон BC, AB и AC в точках K, L и M соответственно. Прямая KM вторично пересекает в точке P окружность радиуса AM с центром A.

а) Докажите, что прямая AP параллельна прямой BC.

б) Пусть $\angle ABC = 90°$, $AM = 6, CM = 4$, Q – точка пересечения прямых KM и AB, а T – такая точка на отрезке PQ, что $\angle OAT = 45°$. Найдите QT.

Решение.



а) Так как $CK = CM$ и $AP = AM$, то треугольники MCK и PAM – равнобедренные, причём $\angle CKM = \angle KMC = \angle PMA = \angle MPA$. Следовательно, прямая AP параллельна прямой BC.

б) Обозначим $BK = BL = x$. Тогда $CK = CM = 4, AL = AM = 6$ по свойству отрезков касательных, проведённых из одной точки.

В прямоугольном треугольнике ABC: $BC = 4 + x, AB = 6 + x, AC = 10$.

По теореме Пифагора $100 = (4 + x)^2 + (6 + x)^2$, откуда $x = 2, BC = 6, AB = 8$.

Поскольку $BC = AP = 6$, $BC \parallel AP$ и $\angle ABC = 90°$, то четырёхугольник $ABCP$ – прямоугольник. Значит, $CP = AB = 8$.

Треугольник AMQ подобен треугольнику CMP с коэффициентом

$$\frac{AM}{MC} = \frac{3}{2}, \text{поэтому } AQ = \frac{3}{2}CP = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12.$$

По теореме Пифагора $PQ = \sqrt{AP^2 + AQ^2} = \sqrt{36 + 144} = 6\sqrt{5}$.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда

$$\angle MAO = \frac{\alpha}{2}, \angle MAT = 45° - \frac{\alpha}{2}, \angle PAT = 90° - \left(45° + \frac{\alpha}{2}\right) = 45° - \frac{\alpha}{2},$$

поэтому AT – биссектриса, а значит, и высота равнобедренного треугольника MAP.

Таким образом, AT – высота прямоугольного треугольника PAQ, проведённая из вершины прямого угла, следовательно,

$$AT=\frac{AP\cdot AQ}{PQ}=\frac{6\cdot 12}{6\sqrt{5}}=\frac{12\sqrt{5}}{5},\ \ QT=\sqrt{AQ^2-AT^2}=\sqrt{144-\frac{144}{5}}=\frac{24\sqrt{5}}{5}.$$

Ответ: $\frac{24\sqrt{5}}{5}$.

Содержание критерия	**Баллы**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	**3**
Получен обоснованный ответ в пункте *б*, ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	**2**
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**3**

17. В июле 2019 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S – целое число. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2019	Июль 2020	Июль 2021	Июль 2022
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором разница между наибольшей и наименьшей выплатами будет меньше 1 млн рублей.

Решение.
Долг перед банком (в млн рублей) на июль каждого года должен уменьшаться до нуля следующим образом:

$$S;\ 0{,}7S;\ 0{,}4S;\ 0.$$

По условию, в январе каждого года долг увеличивается на 25%, значит, долг в январе каждого года равен:

$$1{,}25S;\ 0{,}875S;\ 0{,}5S.$$

Следовательно, выплаты с февраля по июнь каждого года составляют:

$$0{,}55S;\ 0{,}475S;\ 0{,}5S.$$

По условию, разность между наибольшей и наименьшей выплатами должна быть меньше 1 млн рублей:

$$0{,}55S - 0{,}475S < 1 \Leftrightarrow S < 13\frac{1}{3}.$$

Наибольшее целое решение этого неравенства – число 13. Значит, искомый размер кредита – 13 млн рублей.

***Ответ*:** 13 млн рублей.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	**3**
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели и получен результат: – неверный ответ из-за вычислительной ошибки; – верный ответ, но решение недостаточно обосновано	**2**
Верно построена математическая модель, решение сведено к исследованию этой модели, при этом решение может быть не завершено	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**3**

18. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$1 - \sin x \cdot (a\cos x - 8\sin x) = 0$$

не имеет действительных решений.

Решение.

Преобразуем уравнение:

$$\sin^2 x + \cos^2 x - a\sin x\cos x + 8\sin^2 x = 0,$$

$$9\sin^2 x - a\sin x\cos x + \cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части на $\cos^2 x \neq 0$, получим:

$$9\,\mathrm{tg}^2\, x - a\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0.$$

Сделаем замену $\operatorname{tg} x = t,\ t \in \mathbb{R}$:

$$9t^2 - at + 1 = 0.$$

Данное уравнение не имеет решений при условии

$$D = a^2 - 36 < 0 \iff a \in (-6; 6).$$

Ответ: $a \in (-6; 6)$.

Содержание критерия	**Баллы**
Обоснованно получен верный ответ	**4**
Решение обосновано, но ответ неверный из-за вычислительной ошибки	**3**
С помощью верного рассуждения получен ответ, отличающийся от верного на одно или оба из значений $a = -6,\ a = 6$	**2**
Задача верно сведена к исследованию квадратного уравнения	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**4**

19. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.
а) Да, все НОД могут быть равны единице. Пример:

11 18

12 17

13 10

14 9

15 16

б) Допустим, что все НОД попарно различны. Их десять, поэтому среди них найдётся двузначное число. Если два различных числа имеют двузначный НОД, то хотя бы одно из них больше либо равно 20. Но в нашем наборе такого числа нет – противоречие.

в) Из предыдущего пункта следует, что количество попарно различных НОД не превосходит девяти. Далее, НОД двух чисел данного набора не может равняться 7 или 8, так как на 7 делится только 14, а на 8 – только 16. Значит, количество попарно различных НОД не более семи. Пример расстановки, при которой количество различных НОД равно семи.

10 15

14 9

11 18

13 12

17 16

В самом деле, НОД(18,9) = 9, НОД(9,15) = 3, НОД(15,10) = 5, НОД(10,14) = 2, НОД(16,12) = 4, НОД(12,18) = 6, а остальные НОД равны 1.

Ответ: а) да, б) нет; в) 7.

Содержание критерия	**Баллы**
Верно получены все перечисленные (см. критерийна 1 балл) результаты	**4**
Верно получены три из перечисленных (см. критерийна 1 балл) результатов	**3**
Верно получены два из перечисленных (см. критерийна 1 балл) результатов	**2**
Верно получен один из следующих результатов: – обоснованное решение п. *а*; – обоснованное решение п. *б*; – искомая оценка в п. *в*; – пример в п. *в*, обеспечивающий точность предыдущей оценки	**1**
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	**0**
Максимальный балл	**4**