

1. Поскольку средний рост всех троих – 1 метр 74 сантиметра, суммарный рост всех составляет 5 метров 22 сантиметра. Средний рост двух братьев равен 1 метр 75 сантиметров, поэтому их суммарный рост составляет 3 метра 50 сантиметров. А значит, рост среднего брата составляет 1 метр 72 сантиметра.

2. Сделав замену $n = m + 1$, получим $n^3 + 11n - 1 = (m + 1)^3 + 11(m + 1) - 1 = m(m^2 + 3m + 14) + 11$, при $m = 11$ (т.е. при $n = 12$) оно делится на 11 (равно $11 \cdot 169$).
 Ответ. Неверно.

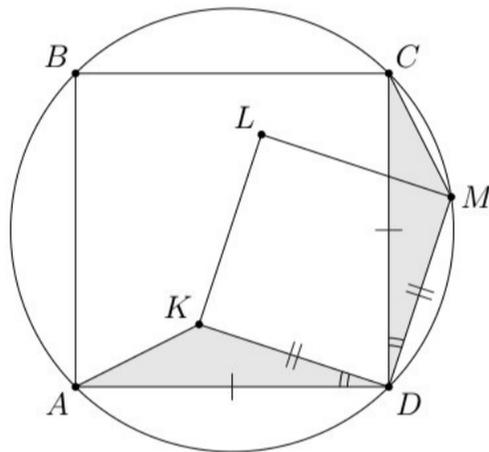
3. Многочлен $f(x)$ имеет корни $1 \pm \sqrt{1+a}$, многочлен $g(x)$ – корни -1 и $-a$. Приравняв $1 - \sqrt{1+a} = -1$, получим решение $a = 3$, из равенств $1 \pm \sqrt{1+a} = -a$ – решения $a = -1$, $a = 0$.

Ответ. При $a = -1$, $a = 0$, $a = 3$.

4. Обозначим $a = 1 - x$, $b = 1 + x$. Так как $|x| < 1$, то $0 < a, b < 2$. Кроме того $a + b = 2$. Поэтому, используя бином Ньютона, получаем

$$2^n = (a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k} = b^n + a^n + \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k a^k b^{n-k} > b^n + a^n.$$

5. Докажем равенство треугольников DAK и DCM .



Проверим, что выполнены условия первого признака равенства треугольников. Отрезки DA и DC равны как стороны квадрата $ABCD$, отрезки DK и DM равны как стороны квадрата $KLMD$. Далее, поскольку углы $\angle ADC$ и $\angle KDM$ исходных квадратов прямые, можно записать $\angle ADK = 90^\circ - \angle KDC = \angle CDM$. Таким образом, треугольники DAK и DCM действительно равны. Следовательно, $\angle AKD = \angle CMD$. Но $\angle CMD = 135^\circ$, так как он вписанный и опирается на дугу $DABC$ окружности Γ , а мера этой дуги равна 270° . Таким образом, $\angle AKD = 135^\circ$.

6. Выберем x и y так, чтобы аргументы функций, стоящих в левой части равенства, стали равными, т.е. $2x^2 - y = 2x - xy$. В этом случае левая часть равенства обращается в ноль. Имеем

$$2x^2 - y = 2x - xy \Rightarrow 2x^2 - 2x = y - xy \Rightarrow 2x(x - 1) = y(1 - x) \Rightarrow y = -2x.$$

Подставляя $y = -2x$ в уравнение, получаем

$$0 = f(x) + 4x^4 + 4x^2 - 5x^2 - 4x^4 + 1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 1.$$

Отсюда получаем *ответ*: $f(5) = 24$.