Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Тверская региональная общественная организация
«Ассоциация учителей и преподавателей математики
Тверской области»

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
III Всероссийской научно-практической конференции
Тверь, 24–26 марта 2022 года

ТВЕРЬ 2022

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я43
П27

П27 **Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации:** материалы III Всероссийской научно-практ. конф. (24–26 марта 2022 года, г. Тверь) // под ред. Ю.В. Чемариной, А.А. Голубева. – Тверь: Тверской государственный университет, 2022. – 274 с.

ISBN 978-5-7609-1718-8

В сборнике трудов представлены материалы III Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 24–26 марта 2022 г. в г. Твери. Организаторами конференции выступили математический факультет Тверского государственного университета и Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области».

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я43

ISBN 978-5-7609-1718-8

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 530.12

ПАРАМЕТРЫ ОРБИТ ВБЛИЗИ СКАЛЯРНЫХ ЧЕРНЫХ ДЫР

Андре Лумонансони Эдуарду
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: leandre@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *приливные эффекты, приливные силы, скалярное поле, черная дыра, темная материя.*

Аннотация. Рассматриваются статические, асимптотически плоские, сферически-симметричные черные дыры, образованные самогравитирующим скалярным полем с минимальной связью и произвольным потенциалом самодействия. Мы рассматриваем скалярную черную дыру как простую модель сверхмассивных черных дыр в центрах галактики, окруженных темной материей. Радиус внутренней устойчивой круговой орбиты и радиус горизонта событий такого объекта меньше, чем у черной дыры Шварцшильда с той же массой. При этом они могут быть сколь угодно малы, так что приливные силы, действующие на звезду, вращающуюся вокруг черной дыры скалярного поля вблизи ее горизонта, может быть достаточно большой, чтобы разрушить звезду. Кроме того, угол прецессии перицентра орбиты у скалярных черных дыр является отрицательным. Приливные эффекты и расчеты углов прецессии могут играть важную роль в интерпретации наблюдений в галактической астрофизике.

1. Введение. Одна из ключевых проблем современной астрофизики – уверенное определение природы сильно гравитирующих объектов вблизи центров нормальных галактик [1 – 4]. Наблюдения звезд, разрушенных приливными силами, дают нам новые возможности для идентификации этих объектов. В данной статье мы сравниваем орбиты в центральных областях черных дыр со скалярным полем некоторой фиксированной массы с таковыми вблизи черной дыры Шварцшильда той же массы. Мотивация для обсуждения данной проблемы возникает из двух следующих общепринятых концепций о сверхмассивных черных дырах в центрах галактик. Во-первых, такие черные дыры окружены темной материей [5 – 9] и, таким образом, их не следует рассматривать как объекты, расположенные в пустом пространстве. В нашем подходе темная материя в галактиках моделируется нелинейным самогравитирующим скалярным полем [10, 11]. Во-вторых, приливные силы, действующие на звезду в перицентре орбиты вблизи галактического центра, приводят к ее разрушению (это наблюдаемый эффект). В разделе 2 описываются математические основы сферически-симметричного самогравитирующего минимально связанного скалярного поля с произвольным потенциалом самодействия. Раздел 3 посвящен аналитической формулировке и релятивистской трактовке приливных сил. В разделе 4 мы сравниваем параметры орбит вблизи горизонта событий рассматриваемой конфигурации с вакуумным случаем, т.е. с орбитами в пространстве-времени Шварцшильда. В этой статье мы используем сигнатуру метрики $\{1,-1,-1,-1\}$ и геометрическую систему единиц, в которой $G=1, c=1$.

2. Сферически-симметричные черные дыры со скалярным полем

Для наших целей удобно записать метрику статического сферически-симметричного пространства-времени в шварцшильдовских координатах как

$$ds^2 = Adt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \qquad (1)$$

где метрические функции A и f зависят только от радиальной координаты. Действие для самогравитирующего, минимально связанного, вещественного скалярного поля, имеет вид

$$S = \frac{1}{8\pi}\int\left(-\frac{1}{2}S - \langle d\emptyset, d\emptyset\rangle - 2V(\emptyset)\right)\sqrt{|g|}d^4x, \qquad (2)$$

где S – скалярная кривизна, угловые скобки обозначают точечное скалярное произведение с относительно метрики $\emptyset$ – скалярное поле, а $V(\emptyset)$ – его потенциал самодействия. Любое статическое сферически-симметричное решение уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона для действия (2) с произвольным физически допустимым потенциалом $V(\emptyset)$ подчиняется квадратурным формулам [12 – 16]

$$A(r) = 2r^2\int_r^\infty \frac{\xi - 3M}{r^4}e^F dr\ , \quad f(r) = e^{-2F}A, \qquad (3)$$

$$F(r) = -\int_r^\infty {\emptyset'}^2 r dr\ , \quad \xi(r) = r + \int_r^\infty (1 - e^F)dr, \qquad (4)$$

$$\tilde{V}(r) = \frac{1}{2r^2}\left(1 - 3f + r^2{\emptyset'}^2 f + 2e^{-F}\frac{\xi - 3M}{r}\right), \qquad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по r, $\tilde{V}(r) = V(\emptyset(r))$, а положительный параметр M — масса Шварцшильда. «Метод обратной задачи» состоит в выборе монотонной функции $\emptyset(r)$ и нахождении последовательно функций $e^{F(r)}, \xi(r), A(r), f(r), \tilde{V}(r)$, а также и потенциала $V(\emptyset) = \tilde{V}(r(\emptyset))$. Квадратуры (3) – (5) дают нам общее, в некотором смысле, решение уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона.

Пусть $\emptyset(r)$ принадлежит классу $C^2[(0,\infty)]$ и имеет асимптотическое поведение

$$\emptyset = O\left(r^{-1/2-\alpha}\right),\ r \to \infty \qquad (\alpha > 0). \qquad (6)$$

Функции $F(r)$, $e^{F(r)}$, и $\xi(r)$ подчиняются очевидным соотношениям

$$F' > 0\ , \xi > r\ , 0 < \xi' = e^F \le 1\ , \ \xi'' = (e^F)' \ge 0 \ \text{для всех}\ r > 0, \qquad (7)$$

$$e^F = 1 + O(r^{-1})\ , \ \xi = r + O(1)\ , \ r \to \infty, \qquad (8)$$

Подставляя разложения (7) и (8) в квадратуру (3) и используя условия (6) и (7), мы находим, что $A(r)$ имеет асимптотическое поведение

$$A(r) = 1 - \frac{3M}{r} + o(1/r)\,, r \to \infty. \tag{9}$$

Это решение определяет черную дыру тогда и только тогда, когда $3M > \xi\,(0)$. Кроме того, из квадратуры (3) и второго неравенства в (7) непосредственно следует, что для данного скалярного поля радиус горизонта событий r_h черной дыры с массой $M > \xi\,(0)/3$ меньше, чем соответствующий радиус Шварцшильда, т. е. $r_h < 2M$. Далее мы будем рассматривать компактные черные дыры, для которых $3M \to \xi\,(0) + 0$ и, следовательно, $r_h \ll 2M$.

3. Приливные силы в системе центра масс звезды

Мы будем использовать ортонормированный базис векторных полей, связанный с метрикой (1), и дуальный базис 1-форм, так что компоненты метрики диагональны и равны $\left(g_{ij}\right) = diag\{1, -1, -1, -1\}$. Эти базисы определяются, соответственно, как

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{A}}\partial_t\,,\;\; e_1 = \sqrt{f}\partial_r\,,\;\; e_2 = \frac{1}{r}\;\partial_\theta\,,\;\; e_3 = \frac{1}{rsin\theta}\;\partial_\varphi, \tag{11}$$

и

$$e^0 = \sqrt{A}dt,\;\; e^1 = \frac{1}{\sqrt{f}}dr\,,\;\; e^2 = rd\theta\,,\;\; e^3 = rsin\theta d\varphi. \tag{12}$$

Нам понадобится также соответствующий ортонормированный базис 2-форм

$$\begin{gathered}\alpha^1 = e^0 \wedge\, e^1, \alpha^2 = e^0 \wedge\, e^2, \alpha^3 = e^0 \wedge\, e^3,\\ *\,\alpha^1 = e^3 \wedge\, e^2, *\,\alpha^2 = e^1 \wedge\, e^3\,, *\,\alpha^3 = e^2 \wedge\, e^1,\end{gathered} \tag{13}$$

где $*$ – звездный оператор Ходжа. 1-формы связности $\omega^i_j\left(\nabla_X e_j = \omega^i_j(X) e_i\right)$ и кривизну в базисах (11) – (13) можно найти из структурных уравнений Картана. Опуская подробности, выпишем алгебраически независимые 1-формы:

$$\omega^0_1 = \sqrt{f}\left(\frac{f'}{2f} + F'\right)e^0\,,\;\; \omega^1_2 = -\frac{\sqrt{f}}{r}e^2\,,\;\; \omega^1_3 = -\frac{\sqrt{f}}{r}e^3, \omega^2_3 = -\frac{cot\theta}{r}e^3, \tag{14}$$

и $\omega^\alpha_0 = \omega^0_\alpha\,,\;\omega^\alpha_\beta = -\omega^\beta_\alpha\;\;(\alpha, \beta = 1,2,3)$. Кривизна имеет вид

$$\begin{gathered}R = -\left(\frac{f''}{2} + \frac{3}{2}F'f' + F''f + {F'}^2 f\right)\alpha^1 \otimes \alpha^1 -\\ -\left(\frac{F'f}{r} + \frac{f'}{2r}\right)(\alpha^2 \otimes \alpha^2 + \alpha^3 \otimes \alpha^3) -\\ -\frac{1-f}{r^2} *\alpha^1 \otimes * \alpha^1 + \frac{f'}{2r}(*\,\alpha^2 \otimes * \alpha^2 + * \alpha^3 \otimes * \alpha^3),\end{gathered} \tag{15}$$

$$R_{0101} = -\frac{f''}{2} - \frac{3}{2}F'f' - F''f - {F'}^2 f = \frac{1-f}{r^2} + {\emptyset'}^2 f,\;\; R_{1212} = R_{1313} = \frac{f'}{2r}, \tag{16}$$

$$R_{0202} = R_{0303} = -\frac{F'f}{r} - \frac{f'}{2r} = -\frac{f'}{2r} - \emptyset'^2 f, \quad R_{2323} = -\frac{1-f}{r^2}. \qquad (17)$$

Компоненты удельной (на единицу массы) приливной силы даются выражением

$$F^i \equiv \frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R^i_{jkm} U^j U^k \eta^m \,, \qquad (18)$$

где U^k компоненты 4-скорости в базисе (11). Из этих формул непосредственно видно, что величина приливной силы обратно пропорциональна радиальной координате перицентра в четвертой степени. Например, радиальная скорость $U^1 = (1-f)/r^2 + \emptyset'^2 f + f'A'/(rA)$.

4. Орбиты вблизи горизонта событий скалярной черной дыры

Рассмотрим конкретный пример для метрики, определяемой анзацем

$$\xi = \sqrt{r^2 + 2ar + 5a^2} - a \,, \quad e^F = \frac{r+a}{\sqrt{r^2+2ar+5a^2}} \,. \qquad (23)$$

Путем прямого интегрирования в (3), получаем

$$A(r) = 1 + \frac{2a}{3r} - 2\frac{a+3M}{15a}\left\{\frac{\sqrt{r^2+2ar+5a^2}}{r}\left(1 + \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2}\right) + \frac{r^2}{a^2}\right\}, \qquad (24)$$

где a – параметр интенсивности скалярного поля.

В сферически-симметричном пространстве-времени лагранжиан для геодезических постоянен вдоль каждой геодезической и не зависит явно от координат t и φ. Запишем соответствующие интегралы движения как

$$\frac{dt}{ds} = \frac{E}{A}, \; \frac{d\varphi}{ds} = \frac{J}{r^2}, \quad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = e^{-2F}(E^2 - Veff), \quad Veff = A\left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right), \; (25)$$

где E — удельная энергия, а J – удельный угловой момент массивной свободной частицы.

Эффективный потенциал пространства-времени черной дыры обращается в нуль на горизонте, стремится к единице при $r \to \infty$, и имеет при достаточно больших J по крайней мере один минимум и один максимум вне горизонта. Нас в первую очередь интересуют форма связанной орбиты и угол прецессии $\Delta\varphi$ орбиты, которая может быть выражена очевидными соотношениями

$$\varphi_{OSC} = 2J\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{e^F}{r^2\sqrt{E^2-Veff}}dr \,, \; \Delta\varphi = \varphi_{OSC} - 2\pi, \qquad (26)$$

где r_{min} и r_{max} являются решениями уравнения $E^2 - Veff = 0$, которые определяются однозначно требованием быть расположенным ближе всего к минимуму (и по разные стороны от него) эффективного потенциала. Таким образом, связанная орбита общего типа колеблется вблизи устойчивой круговой орбиты, а φ_{OSC} – угол между двумя последовательными колебаниями. Существует ключевое различие между близкими к горизонту орбитами вокруг компактных скалярных черных дыр и черной дырой

Шварцшильда той же массы: в первом случае угол прецессии $\Delta\varphi$ отрицателен.

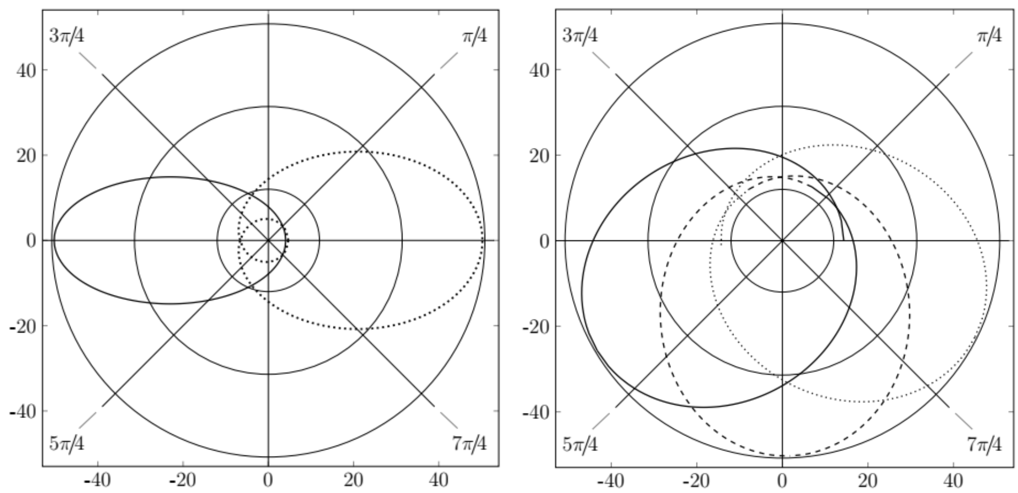


Рис. 1. Формы орбит вокруг скалярной черной дыры для $a = 3$. Радиальная координата дана в единицах массы M черной дыры. На левой панели расстояние до перицентра $4M$, что меньше радиуса последней устойчивой орбиты ($6M$)

Рис. 1 показывает типичные траектории пробной частицы. Орбита с отрицательным углом прецессии $\Delta\varphi = -\pi$ показана на левой панели. Две вытянутые связанные орбиты (с одним и тем же радиусом апоцентра) вокруг компактной черной дыры представлены на правой панели. Следует подчеркнуть, что такие формы связанных орбит и дефицит угла прецессии типичны для компактных скалярных черных дыр.

5. Заключение

Мы рассмотрели компактные сферически-симметричные черные дыры с минимально связанными скалярными полями и сосредоточили внимание на асимптотически плоских самогравитирующих конфигурациях, имеющих горизонты событий, расположенные на радиусах значительно меньших 2M. Такие конфигурации можно рассматривать как строгие математические модели сильно гравитирующих объектов, окруженных темной материей, в центрах обычных галактик. Мы обнаружили, что радиус горизонта событий скалярно-полевой черной дыры всегда меньше (возможно, намного меньше) шварцшильдовского радиуса вакуумной черной дыры той же массы и может быть сколь угодно близким к нулю. Мы также изучили формы связанных орбит вокруг компактных черных дыр и нашли, что угол между ближайшими точками перицентров таких орбит либо отрицателен (для орбит близких к горизонту событий), либо, по крайней мере, меньше, чем у черной дыры Шварцшильда той же массы. Численные эксперименты показывают, что соответствующий радиус самой внутренней устойчивой круговой орбиты также меньше, чем в вакуумном случае. Эти признаки играют ключевую роль в различении конфигураций типа скалярных черных дыр, вакуумных черных дыр, кротовых нор, голых сингулярностей и бозонных звезд. Отметим, что бозонные звезды не имеют крайних внутренних устойчивых круговых орбит, а скалярно-полевые кротовые норы и голые сингулярности (одной и той же положительной массы) имеют вырожденные устойчивые круговые орбиты с нулевым угловым моментом пробных частиц. Полученные результаты могут быть применены в интерпретации будущих астрономических наблюдений. В частности, можно надеяться, что прямое наблюдение за центральной областью нашей Галактики скоро станет возможным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Akiyama K et al 2015 Astrophys. J. 820, 90 (arXiv: 1602.05527).
2. Fish V L et al 2016 Astrophys. J. 820, 150 (arXiv: 1505.03545).
3. Goddi G et al 2017 Int. J. Mod. Phys. D20, 1730001-239 (arXiv: 1606.088879).
4. Li Z and Bambi C 2014 Phys. Rev. D 90, 024071 (arXiv: 1405.1883).
5. Vieira R S S, Schee J, Klu´zniak W, Stuchl´ık Z, and Abramowicz M 2014 Phys. Rev. D 90, 024035.
6. De Laurentis M, Younsi Z., Porth O., Mizuno Y., and Rezzolla L. 2018 Phys. Rev. D 97, 104024.
7. Stashko O. S. and Zhdanov V. I. 2018 Gen. Relat. Gravit. 50, Issue 5, 105 (arXiv: 1702.02800).
8. Mishra A and Chakraborty S 2018 Eur. Phys. J. C 78, Issue 5, 374 (arXiv: 1710.06791).
9. Willenborg F., Grunau S, Kleihaus B, and Kunz J 2018 Phys. Rev. D 97 124002 (arXiv: 1801.09769).
10. Kratovitch P. V., Potashov I M, Tchemarina Ju V, and Tsirulev A N 2017 Journal of Physics: Conference Series 934, Issue 1, 012047 (arXiv: 1805.04447).
11. Nikonov V. V., Tchemarina Ju V and Tsirulev A N 2008 Class. Quantum Grav. 25 138001.
12. Bechmann O and Lechtenfeld O 1995 Class. Quantum Grav. 12 1473 (arXiv: gr-qc/9502011).
13. Bronnikov K A and Shikin G N 2002 Grav. Cosmol. 8 107 (arXiv: gr-qc/0109027).
14. Tchemarina Ju V and Tsirulev A N 2009 Grav. Cosmol. 15 94.
15. Azreg-Ainou M 2010 Gen. Rel. Grav. 42 1427 (arXiv: gr-qc/0912.1722).
16. Solovyev D A and Tsirulev A N 2012 Class. Quantum Grav. 29 055013.

УДК 004.032.26

ИСКУССТВЕННЫЕ НЕЙРОННЫЕ СЕТИ В СИСТЕМАХ ОБНАРУЖЕНИЯ ВТОРЖЕНИЙ

Андреева Елена Аркадьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Кожеко Людмила Георгиевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Ключевые слова: *нейронная сеть, архитектура искусственной нейронной сети, компьютерная атака, обучающая выборка***,** *метод совпадений, метод главных компонент.*

Аннотация. В работе рассматриваются архитектуры нейронных сетей, используемых в системах обнаружения вторжений (СОВ); анализируются методы, улучшающие работу этих систем на основе нейронных сетей.

Модели нейронных сетей, используемые в системах обнаружения вторжений

В качестве выборок для нейронной сети может использоваться информация, полученная специальным программным средством для сбора данных - сетевых пакетов, каждый из которых содержит заголовки и тело. Также можно воспользоваться готовым решением – базой данных собранных заранее последовательностей, например, KDD – 99. Эта база содержит много записей, которые представляют собой последовательность TCP – пакетов (время передачи конечно, моменты начала и конца сессии строго определены; пакеты передаются с IP-адреса источника на IP-адрес приёмника и обратно, используя выбранный протокол) [3], [4]. Каждая запись содержит 41 параметр трафика и метку «атака»/ «не атака». Будем использовать именно эту базу данных, т.к. в нашем случае это более удобно.

Перед тем как подавать данные в ИНС (искусственная нейронная сеть) их необходимо перевести в пригодный для работы формат. LSTM сетям (нейронные сети долгой краткосрочной памяти) не нужны метки классов, многослойному перцептрону пригодятся выходные лейблы для правильной классификации.

- Входные данные должны быть записаны в общем виде, т.е. действительными числами, а затем с помощью z-оценки помещаем каждое значение в диапазон от –1 до 1 (z-оценка равна минус среднему арифметическому всех значений данного столбца, делённому на среднеквадратическое отклонение данных столбца).
- Чтобы избежать переобучения рекуррентных сетей можно использовать функцию выбрасывания нейронов (dropout). Данная функция выключает из процесса обработки сигналов определённые нейроны на

текущей операции, что позволяет сети лучше аппроксимировать обучающую выборку, а не просто запоминать входные последовательности.

- Функция потерь вычисляется в ходе обучения модели.
- Методом оптимизации определяются метрики для оценки выводов, сделанных сетью.

Выбор архитектуры нейронной сети для обнаружения компьютерных атак

Существует множество архитектур нейронной сети. Несомненно, каждая из них имеет свои преимущества и недостатки при решении конкретных задач. Например, многослойные персептроны способны решать алгоритмически неразрешимые задачи, но для которых определен набор примеров с известными решениями [1]. Такие сети при обучении выявляют закономерности между входными и выходными данными. Есть рекуррентные нейронные сети. Рециркуляционные нейронные сети позволяют добиться успехов в сжатии и восстановлении информации. Этот перечень можно продолжить.

Одно из требований, которое применяется к СОВ, это работа в реальном времени. Для этого необходимо минимизировать время обучения ИНС. Будем рассматривать архитектуру сети с минимальным временем обучения, а, следовательно, и размером выборки. Размер выборки для многослойного персептрона: количество входных нейронов $n = 41$, количество скрытых нейронов $m = 10$, выходных - $k = 2$.

Согласно [3] для корректного обучения нейронной сети размер обучающей выборки должен удовлетворять формуле:

$$\mathrm{L} = \mathrm{O}\left(\frac{\mathrm{W}}{\varepsilon}\right) \tag{1}$$

где W – общее количество настраиваемых параметров (весовых коэффициентов и пороговых значений); ε – допустимая точность ошибки классификации; $O(\dots)$ – порядок величины, т.е., например, для ошибки в 5% количество примеров обучения должно в 5 раз превосходить количество свободных параметров сети W.

Общее количество настраиваемых параметров вычисляется по формуле:

$$W = m(n + 3) + 2 \tag{2}$$

Тогда согласно (1) и (2) при ε = 0,1 выборка должна содержать в себе 4420 образов.

В сети встречного распознавания [2,4], в скрытом слое используются нейроны Кохонена. Размер обучающей выборки удовлетворяет неравенству [3]:

$$L \geq 2m \tag{3}$$

Получаем, что для корректного обучения такой сети достаточно 82 образа.

Формирование обучающей выборки

Для обучения используется выборка, взятая в соотношении 4 к 1 (атак к легальным подключениям соответственно), т.к. такое соотношение показало наилучший результат. Входные данные выбирались из базы данных KDD Cup1999 Data.

Ниже приведены результаты обнаружения атак.

Таблица 1. Результаты обнаружения атак

Тип атаки	5/1	4/1	3/1	2/1	1/1
DoS	95,4%	98,1%	97,4%	96,3%	96,1%
Probe	59,1%	65,0%	63,9%	62,2%	61,6%
R2L	32,6%	36,5%	34,9%	33,9%	33,1%
U2R	16,9%	20,7%	19,1%	18,7%	17,0 %

Из таблицы 1 следует, что выборка 4 к 1 является оптимальной. Значит соотношение между количеством нейронов Кахонена, характеризующих различные классы также должно быть 4 к 1.

В итоге получаем следующую формулу:

$$\frac{\mathrm{f}}{\mathrm{l}} = \frac{4}{1} \qquad (4)$$

где f – первые нейроны слоя Кохонена, они отвечают за наличие атаки; 1–последние нейроны слоя Кохонена - отвечают за легальное подключение.

Метод главных компонент

Метод главных компонент используется для уменьшения объема данных и повышения быстродействия ИНС.

Математически этот метод выглядит так:

$$\mathrm{X} = \mathrm{T}P^T + \mathrm{E} \qquad (5)$$

где X – матрица данных, каждая строка которой является вектором предобработанных данных. Матрицу данных можно представить в следующем виде: $\mathrm{X} = \{x_1, \dots, x_m\}^T$, где m– число векторов данных, n – размерность пространства данных; P – матрица нагрузок, в которой каждый столбец отображает вектор главных компонент. Матрица нагрузок представлена в следующем виде: P = $\{a_1, \dots, a_k\}$, где k – количество векторов главных компонент, выбранных для проецирования; T – матрица счетов, в которой каждая строка представляет собой проекцию вектора данных на k главных компонент. Матрицу счетов можно представить в виде T = $[t_{ij}]$, где $t_{ij} = (x_i, a_j)$; E – матрица ошибок, вычисляемая по формуле $E = X$ - $\mathrm{T}P^T$.

Исходя из количества информации, которая содержится в каждой последующей главной компоненте, можно определить какое количество компонент дальше использовать нецелесообразно.

На рис. 1 представлена зависимость количества информации от числа главных компонент.

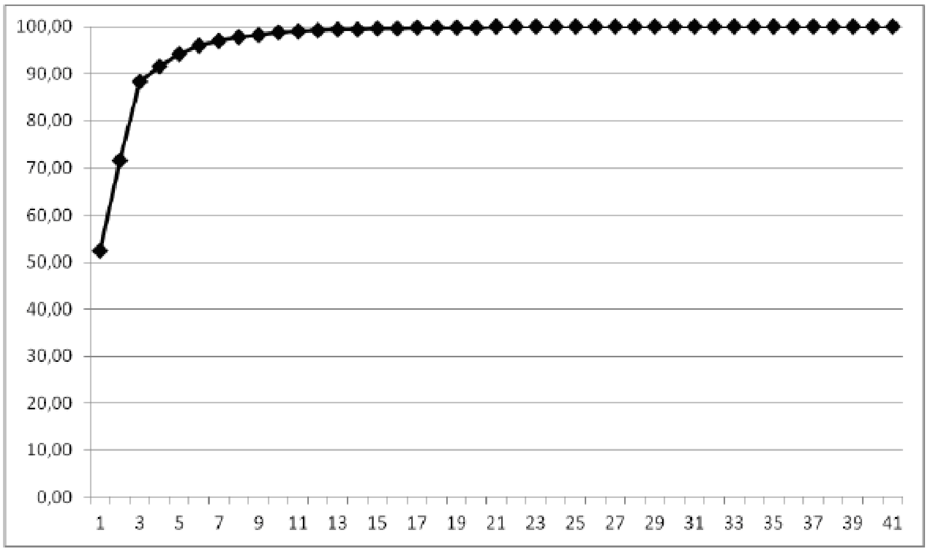


Рис. 1 Зависимость количества информации от числа главных компонент

Из рис. 1 можно увидеть, что основное количество информации о подключениях содержится в первых компонентах. Благодаря методу главных компонент мы выяснили, что гораздо целесообразнее подавать на вход ИНС не 41 параметр, а всего 12.

При таком подходе количество входных нейронов равно 12 (соответствует количеству главных компонент), по которым и определяется принадлежность соединения.

Из таблиц выше видно, что за счет применения метода главных компонент удалось улучшить качество работы нейронной сети. И несмотря на то, что результаты были разные для разных типов атак (на некоторых улучшения не было или было крайне мало) можно утверждать, что в целом сеть стала работать значительно лучше.

Несмотря на довольно хороший результат в целом, некоторые типы атак обнаружить довольно сложно и над этим нужно работать в будущем.

Метод совпадений

Для улучшения эффективности работы СОВ и минимизации количества ложных срабатываний применяется метод совпадений [2]. Его идея заключается в использовании нескольких нейронных сетей для анализа трафика. Для достижения наилучших результатов с помощью данного метода необходимо брать ИНС с разными топологиями. Использовались 3 искусственные нейронные сети: многослойный персептрон сеть радикально базисных функций *и самоорганизующаяся карта Кохонена.* На все сети подаются одинаковые пакеты трафика. Каждая ИНС обрабатывает сетевой пакет независимо от других и определяет его принадлежность к классу атак или нормальному соединению. Результат, выдаваемый ИНС, представлен в виде многомерного вектора, каждая координата которого соответствует виду атак. При обнаружении атаки выводится 1, иначе 0.

При использовании нескольких ИНС с различными топологиями возникает потребность в приведении входящих данных к одному формату. Для этого можно использовать базу данных KDD и формат данных из KDD. Приведение IP-пакетов к формату NLS-KDD заключается в выделении ряда признаков из сетевого трафика.

В итоге можно выделить основные этапы метода совпадений:

1. Получение сетевого трафика.
2. Приведение сетевых пакетов к формату NLS-KDD.
3. Анализ сетевых пакетов, используемых ИНС.
4. Сложение результатов работы ИНС.
5. Вывод.

Существует множество способов улучшения модели искусственной нейронной сети для обнаружения вторжений, в частности изменением количества слоев или количества нейронов в отдельном слое, изменением параметров обучающей выборки и многое другое. Однако, как повлияет то или иное действие на результат работы ИНС можно узнать только на практике.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Кратович П.В. Оптимизация нейронных сетей: учебное пособие. – Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2015. - 116 с.

2. Головко В.А. Нейронные сети: обучение, организация, применение. М.: ИПРЖР, 2001. — 256 с.

3. Хайкин С. Нейронные сети: полный курс / С. Хайкин. – М.: Вильямс, 2006. –1104 с.

4. Understanding LSTM Networks [Электронный ресурс] URL: http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/

УДК 004.032.26

ОПТИМИЗАЦИЯ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ИММУННОЙ СИСТЕМЫ

Андреева Елена Аркадьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Кожеко Людмила Георгиевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Ключевые слова: *математическая модель иммунной системы, оптимизация искусственной нейронной сети, дискретная задача оптимального управления, градиентный метод, генетический алгоритм.*

Аннотация. В работе рассматривается математическая модель, описывающая процессы, происходящие в иммунной системе с точки зрения искусственных нейронных сетей, формализуемая как задача управления динамической системой; приводится алгоритм решения задачи, исследуется зависимость решения от параметров модели.

Эффективная защита организма зависит от слаженного взаимодействия множества клеток и молекул. Действие повреждающих факторов может вызывать разнообразные нарушения в том или ином звене иммунной защиты, а также нарушать их кооперацию. Это, в свою очередь, приводит к различным патологическим процессам - аллергическим, аутоиммунным (направленным против собственных клеток и тканей организма), развитию опухолей и снижению устойчивости к инфекциям.

Иммунная система является высокоразвитой биологической системой, функция которой заключается в выявлении и уничтожении чужеродного агента, которым может оказаться болезнетворный микроорганизм, инородное тело, ядовитое вещество или переродившаяся клетка самого организма. Для того чтобы сделать это, иммунная система должна распознавать множество разнообразных возбудителей — от вирусов до паразитических червей — и отличать их от биомолекул собственных клеток. В иммунной системе, однако, эти процессы могут проходить за несколько дней, делая иммунную систему идеальным кандидатом для изучения и моделирования адаптационных процессов.

Реализация математических моделей осуществляется с помощью методов вычислительной математики, которые непрерывно совершенствуются вместе с прогрессом в области компьютерной техники. Теоретическое исследование сложных процессов, допускающих математическое описание, осуществляется посредством вычислительного эксперимента. При этом используются методы численного решения систем линейных алгебраических уравнений, методы решения задачи Коши и краевых задач для линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных, методы численного решения интегро-дифференциальных и интегральных уравнений.

В связи с этим развиваются методы аппроксимации, устойчивости и сходимости, образующие необходимую базу поиска эффективных разностных схем для задач математической биологии. Широко используются безитерационные методы решения разностных уравнений, соответствующих дифференциальным задачам, допускающим разделение переменных, такие, как быстрое преобразование Фурье и циклическая редукция многомерной задачи к последовательности одномерных задач. Развиваются также методы решения систем нелинейных уравнений. Совершенствование вычислительной техники привело к распространению метода Монте-Карло и имитационного моделирования. Широко применяются методы теории вероятностей, теории стохастических процессов, нейронные сети, методы статистической физики. Широкое применение получили методы оптимизации параметров математических моделей, методы теории графов, теории игр и оптимального управления, теории автоматов [3], [4].

Математическая модель, описывающая процессы, происходящие в иммунной системе с точки зрения искусственных нейронных сетей

В работе рассматривается система, состоящая из n типов антител и N антигенов. Обозначим через x_i концентрацию i-того типа антитела, через y_i – концентрацию i-того типа антигена. Состояние иммунной системы можно описать через концентрации всех типов антител $\{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\dot{x_i} = \mathrm{c}\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ji}x_i x_j - k_1 \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^{N} w_{ji}x_i y_j\right] - k_2 x_i\,, \quad i = \overline{1,n} \qquad (1)$$

Первая сумма – стимуляция паратопа антитела i-го типа эпитопом антитела j-го типа (Эпитоп (англ. epitope), – часть макромолекулы антигена, которая распознаётся иммунной системой (антителами, В-лимфоцитами, Т-лимфоцитами). Часть антитела, распознающая эпитоп, называется паратопом). Вторая – подавление антитела i-го типа, если его эпитоп опознан паратопом [антитела] j-го типа.

Форма этих сумм имеет такой вид, поскольку вероятность столкновения антитела i-го типа и антитела j-го типа пропорциональна $x_i x_j$. Здесь c – параметр частоты столкновений, зависящий от того, сколько их происходит за единицу времени, и от того, сколько образуется антител при первом столкновении.

m_{ij} – определяют, какая реакция происходит при столкновении. Первый индекс – относится к эпитопу, а второй – k паратопу, константа k_1 – возможное неравенство между стимуляцией и подавлением. Третья сумма отвечает за взаимодействие с антигенами (y_i – их концентрации).

Четвёртое слагаемое – это скорость, с которой клетки (антитела) умирают без всяких взаимодействий.

k_2 – определяет скорость этого умирания.

Так как $n \geq N$, уравнение (1) имеет вид:

$$\dot{x_i} = c\left[\sum_{j=1}^{n} w_{ji}x_i x_j - k_1 \sum_{j=1}^{n} w_{ij}x_i x_j + \sum_{j=1}^{n} w_{ji}x_i y_j\right] - k_2 x_i\,, i = \overline{1,n}\,, \quad (2)$$

где $y_j = 0$, $j = \overline{N+1, n}$.

Будем рассматривать модель, в которой на весовые коэффициенты наложены ограничения $0 \le w_{ji} \le 1$.

После упрощения выражение (2) примет вид:

$$\dot{x_i} = x_i(c\left[\sum_{j=1}^{n}((w_{ji} - k_1 w_{ij})x_j + w_{ji}y_j\right] - k_2)\,. \quad (3)$$

Дискретизируем (3):

$$\frac{x_i^{k+1} - x_i^k}{\Delta t} = x_i^k\left(c\left[\sum_{j=1}^{n}((w_{ji}^k - k_1 w_{ij}^k)x_j^k + w_{ji}^k y_j\right] - k_2\right), i = \overline{1,n}, k = \overline{1,q}$$

$$x_i^{k+1} = \Delta t x_i^k\left(c\left[\sum_{j=1}^{n}((w_{ji}^k - k_1 w_{ij}^k)x_j^k + w_{ji}^k y_j\right] - k_2\right) + x_i^k. \quad (4)$$

Минимизируемый функционал:

$$I = \left(A_i - x_i^q\right)^2, i = \overline{1,n}\,. \quad (5)$$

Составим функцию Лагранжа L и $\frac{\partial L}{\partial x_i^k}$

$$L = \lambda\left(A_i - x_i^q\right)^2 + p_i^{k+1}(x_i^{k+1} - \Delta t x_i^k\left(c\left[\sum_{j=1}^{n}((w_{ji}^k - k_1 w_{ij}^k)x_j^k + w_{ji}^k y_j\right] - k_2\right) + x_i^k),$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^k} = p_i^k - p_i^{k+1}(\Delta t(c\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{ji}^k - k_1 w_{ij}^k\right)x_j^k + w_{ji}^k y_j\right) - k_2) + 1) -$$

$$\Delta t c\sum_{l=1}^{n} p_l^{k+1}\left(w_{li}^k - k_1 w_{il}^k\right)p_l^i,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^q} = p_i^q + 2x_i^q - 2A_i.$$

Приравняем $\frac{\partial L}{\partial x_i^k}$ к 0 и вычислим p_i^k:

$$p_i^k = p_i^{k+1}(\Delta t(c\sum_{j=1}^{n}\left(\left(w_{ji}^k - k_1 w_{ij}^k\right)x_j^k + w_{ji}^k y_j\right) - k_2) + 1) -$$

$$\Delta t c\sum_{l=1}^{n} p_l^{k+1}\left(w_{li}^k - k_1 w_{il}^k\right)x_l^k\,, i = \overline{1,n}, \quad k = \overline{1, q-1}\,,$$

$$p_i^q = -2x_i^q + 2A_i \quad i = \overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L}{\partial w_{ij}^k} = p_i^{k+1}x_j^k x_i^k \Delta t c k_1 + x_j^k \Delta t p_j^{k+1} c\left(y_i + x_i^k\right), i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n},$$

$$k = \overline{1, q-1}.$$

Задача (4), (5) решалась численно градиентным методом и с помощью генетического алгоритма.

Генетический алгоритм – это алгоритм поиска, используемый для решения задач оптимизации и моделирования путём случайного подбора, комбинирования и вариации искомых параметров с использованием механизмов, аналогичных естественному отбору в природе. Является разновидностью эволюционных вычислений, с помощью которых решаются оптимизационные задачи с использованием методов естественной эволюции, таких как наследование, мутации, отбор и кроссинговер. Отличительной особенностью генетического алгоритма является акцент на использование оператора «скрещивания», который производит операцию рекомбинации решений-кандидатов, роль которой аналогична роли скрещивания в живой природе.

Для генетического алгоритма, в отличие от градиентного спуска, не важны начальные значения весовых коэффициентов, что позволяет находить решения тогда, когда с помощью градиентного это сделать затруднительно (сложно правильно подобрать начальные весовые коэффициенты). В контрольном примере для реализации метода градиентного спуска понадобилось 16 итераций; с помощью генетического алгоритма решение находилось в среднем за 600 итераций. В рассматриваемой задаче градиентный метод является более эффективным при построении оптимального решения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А. Оптимизация нейронных сетей. Тверь: ТвГУ, 2008.

2. Андреева Е.А., Кратович П.В. Оптимизация нейронных сетей*:* учебное пособие. – Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2015. – 116 с.

3. Андреева Е.А., Кожеко Л.Г. Использование нейронных сетей в задачах управления. Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25–27 марта 2021 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2021. С. 12–16.

4. Андреева Е.А., Кожеко Л.Г. Использование искусственных нейронных сетей в медицине. Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25–27 марта 2021 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2021. С. 17–21.

УДК 83.03.51

ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗЫ ОБ АВТОРСТВЕ «12 СТУЛЬЕВ» МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Анненкова Елена Сергеевна
Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, г. Москва
E-mail: 200116@stud.rguk.ru,

Суетин Валерий Юрьевич
Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, г. Москва
E-mail: suetin-vu@rguk.ru

Ключевые слова: *авторский инвариант, критерий Манна-Уитни, математическая статистика.*

Аннотация: Методами математической статистики опровергнута гипотеза о том, что автором «12 стульев» является М.А. Булгаков. Использовалась численная характеристика – относительное количество служебных слов в выборках из 6000 слов.

В 2013 году в Германии литературовед Ирина Амлински выпустила книгу под названием «12 стульев от Михаила Булгакова». В ней автор не только выдвигала сенсационную версию, но и убедительно, с приведением множества фактов доказывала, что знаменитые романы Ильи Ильфа и Евгения Петрова на самом деле написаны М.А. Булгаковым [1]. Мы решили проверить эту гипотезу методами математической статистики, используя в качестве авторского инварианта относительное количество служебных слов Исследование проведено в соответствии с методикой, предложенной в работе [2], в которой опытным путем выведен объём устойчивости авторского инварианта на объёме 6000 слов.

Мы выделили из текстов «Мастера и Маргариты» и «12 стульев» по 9 выборок по 6000 слов через равные интервалы в 10 страниц и получили следующую таблицу относительных значений числа служебных слов на каждой такой выборке:

	1	2	3	4	5
Мастер и Маргарита	0,2332	0,2497	0,2418	0,2388	0,2313
12 стульев	0,2211	0,2012	0,2003	0,2068	0,1955

	6	7	8	9
Мастер и Маргарита	0,2413	0,238	0,2508	0,2568
12 стульев	0,2201	0,214	0,2052	0,208

Равномерность распределений проверили через критерий Шермана [3]. Пусть по выборке независимых наблюдений случайной величины X построен вариационный ряд $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Проверка сложной гипотезы о принадлежности равномерному закону эквивалентна проверке простой гипотезы о принадлежности части выборки меньшего объёма $n-2$, соответствующей ряду $x_2 < \cdots < x_{n-1}$, равномерному закону на отрезке $[x_1; x_n]$, который соответствует размаху выборки.

Введём величины

$$U_{i-1} = \frac{x_i - x_1}{x_n - x_1}, \quad i = 2, \cdots, n-1; \;\; U_0 = 0; \;\; U_{n-1} = 1.$$

Статистика критерия Шермана имеет вид

$$\omega_n = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n+1}\left|U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right|.$$

В нашем случае $n = 7$, и мы получаем следующие значения:

Для «Мастера и Маргариты»

x_i	U_i	$\left\lvert U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right\rvert$
0,2313	0	
0,2332	0,074509804	0,05049
0,238	0,262745098	0,063235
0,2388	0,294117647	0,093627
0,2413	0,392156863	0,026961
0,2418	0,411764706	0,105392
0,2497	0,721568627	0,184804
0,2508	0,764705882	0,081863
0,2568	1	0,110294
	$\omega_n =$	0,358333

Для «12 стульев»

x_i	U_i	$\left\lvert U_i - U_{i-1} - \frac{1}{n+1}\right\rvert$
0,1955	0	
0,2003	0,1875	0,0625
0,2012	0,222656	0,089844
0,2052	0,378906	0,03125
0,2068	0,441406	0,0625
0,208	0,488281	0,078125
0,214	0,722656	0,109375
0,2201	0,960938	0,113281
0,2211	1	0,085937
	$\omega_n =$	0,316406

Критическое значение статистики критерия Шермана для $n = 7$ и уровня значимости 0,05 равно 0,488, критерий правосторонний: нулевая гипотеза отклоняется, если значение статистики больше критического. Как видим, нет оснований отвергать гипотезу о равномерном распределении на уровне значимости 0,05 для обеих выборок.

Далее с помощью критерия Манна-Уитни мы проверили эти выборки на однородность. Нулевая гипотеза состоит в том, что различия в выборках не являются статистически достоверными и носят случайный характер.

Единый ранжированный ряд обеих сопоставляемых выборок с приписанными рангами имеет вид

выборка	12С	12С	12С	12С	12С	12С	12С	12С	12С
значения	0,1955	0,2003	0,2012	0,2052	0,2068	0,208	0,214	0,2201	0,2211
номер	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ранг	1	2	3	4	5	6	7	8	9

МиМ	МиМ	МиМ	МиМ	МиМ	МиМ	МиМ	МиМ	МиМ
0,2313	0,2332	0,238	0,2388	0,2413	0,2418	0,2497	0,2508	0,2568
10	11	12	13	14	15	16	17	18
10	11	12	13	14	15	16	17	18

Сумма рангов «12 стульев» = 45, сумма рангов «Мастера и Маргариты» =126. Напомним, что статистика Манна-Уитни вычисляется по формуле

$$U = n_x \cdot n_y + \frac{n(n+1)}{2} - T,$$

где n_x и n_y – объёмы выборок, T – большая сумма рангов из выборок, n – объём выборки с большей ранговой суммой.

В нашем случае U=0, тогда, учитывая, что критическое значение критерия Манна-Уитни для наших объёмов с уровнем значимости 0,05 равно 17, мы принимаем альтернативную гипотезу, подтверждая, что различия являются статистически достоверными.

Таким образом, мы показали, что с точки зрения математической статистики М.А. Булгаков не являлся автором «12 стульев».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амлински И. 12 стульев от Михаила Булгакова. Берлин: Kirschner Verlag. 2013. 328 с.

2. Фоменко В.П., Фоменко Т.Г. Авторский инвариант русских литературных текстов. Методы количественного анализа текстов нарративных источников. М.: АН СССР. Ин-т Истории СССР. 1983. с. 86-109.

3. Лемешко Б.Ю., Блинов П.Ю. Критерии проверки отклонения распределения от равномерного закона (Руководство по применению). Новосибирск. НГТУ. 2015. 182 с.

УДК 372.851

ОСОБЕННОСТИ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Баранова Анастасия Владимировна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: nastia.friend@yandex.ru

Ключевые слова: *решение задач, внимание, умение читать.*

Аннотация. Данная статья помогает учителю понять, на какие основные моменты стоит обращать внимание при решении задач.

Задача – вопрос, требующий решения на основании определенных знаний и размышлений [1].

Я считаю, что основная цель математики – научить анализировать и решать задачи.

Для начала нужно разбирать с учащимися, где условие задачи (что дано), а где вопрос задачи. Но самое главное, нужно убедиться, что учащиеся понимают смысл задачи. *Важно задать вопросы: О чем данная задача? Как иначе можно сформулировать данную задачу?*

Я предлагаю объяснять «на руках» как это часто делают родители. Например, при объяснении текстовых задач про сложение яблок, можно использовать несколько карандашей. Конечно, это будет происходить не всегда, а на начальном уровне обучения, но это необходимо делать, чтобы прочувствовать ситуацию, о которой говорится в задаче. Это поможет развить навык моделирования у ребенка и позволит в будущем представлять задачу уже не вживую, а в голове.

Вторым этапом *нужно научить детей искать взаимосвязи между всеми данными.* Для этого необходимо регулярно задавать вопросы: Что может дать мне эта величина? Зачем она в этой задаче? Как она связана с другими? Что мне нужно найти, чтобы ответить на вопрос задачи?

Третий этап, необходимо определиться, *как решать задачу*: геометрическим способом или алгебраическим, аналитическим, графическим методом, составить и решить уравнение или логическими рассуждениями дойти до ответа.

Безусловно каждый из способов имеет свои плюсы и минусы. На мой взгляд, в начале обучения полезно каждую задачу решать несколькими способами и комбинировать их.

Например, использование геометрического метода имеет следующие плюсы. Во-первых, легче будет воспринимать в дальнейшем предмет «Геометрия». Во-вторых, откроется больше способов и возможностей решать задачу, будет развито воображение и аналитическое мышление, легче будут читаться схемы и графики.

Четвертый этап, обратимся к внимательности учеников. Типичные ошибки учеников: действия с разными единицами измерения и величинами.

Важно задавать наводящий вопрос: одинаковые ли единицы измерения у величин?

Еще одна типичная ошибка: нашли не ту величину, которую требовалось. Поэтому после окончания решения задачи ученику задать вопросы: Что нужно было найти? Каков вопрос задачи? Что мы нашли? Соответствует ли это вопросу задачи?

Таким образом, обучение поиску решения математических задач осуществляется на протяжении всех 11 лет обучения в школы.

Важно развить у ребенка аналитическое мышление, воображение и моделирование, способность видеть связи и анализировать, зачем эти величины нужны в данной задаче.

И, конечно же, постараться развить внимательность у учеников, а также приучить к проверке своего решения и ответа.

Задача 1.

Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из двух поселков, расстояние между которыми 74 км. Через 2 часа они встретились. Какова скорость каждого велосипедиста, если известно, что скорость одного из них на 3 км/ч меньше скорости другого? [2]

Решение.

Что нам дано? Расстояние между объектами 74 км; в пути были два часа, скорость первого больше на 3 км/ч.

Что надо найти? Скорость каждого велосипедиста.

Если за x мы обозначим скорость второго велосипедиста, то, чему будет равняться скорость первого? $x + 3$, так как эта скорость на 3 км/ч больше.

У нас единицы измерения величин одинаковые? Да.

Сколько они были в пути? 2 часа.

Какая есть взаимосвязь между скоростью объекта и временем в пути? $s = vt$.

Можем ли мы найти расстояние, если мы уже обозначили скорости каждого и время? Да.

Результаты рассуждений оформим в виде таблицы.

Величины	1 велосипедист	2 велосипедист
Скорость	$x + 3$	x
Время	2	2
Расстояние	$2(x + 3)$	$2x$

Таблица 1. Задача на движение

Мы знаем, что расстояние между ними 74 км, если они встретились, то они вместе преодолели 74 км.

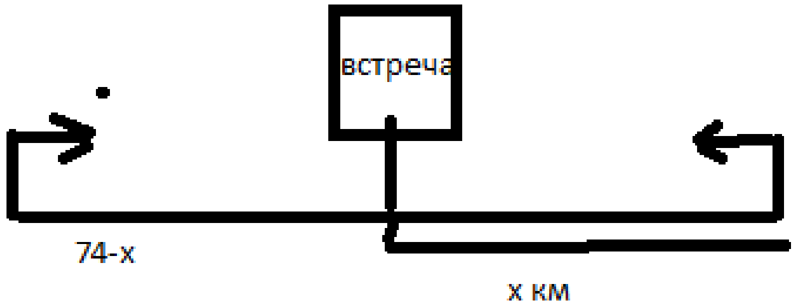


Рис. 1. Задача 1

То есть сумма расстояний равна 74 км.

$$2(x + 3) + 2x = 74;\ 4x = 68;\ x = 17\ (\text{км/ч})$$

– скорость второго велосипедиста.

Нам еще нужно найти скорость первого $x + 3 = 20$ (км/ч).

Ответ: 20 км/ч.

Задача 2.

На крыше сидело 6 голубей. $\frac{1}{3}$ из них улетели. Сколько осталось голубей?

Решение.

1 способ. Вспомним правило: чтобы найти целое, нужно умножить число на дробь, то есть $6 * \frac{1}{3} = 2$. Проверяем, нам нужно было узнать, сколько голубей осталось.

Что мы узнали прошлым действием? Мы узнали, сколько будет от 6 целых $\frac{1}{3}$. Но $\frac{1}{3}$ – улетели, то есть мы узнали, что 2 голубя улетели. А, значит, осталось $6 - 2 = 4$ голубя.

2 способ. $\frac{1}{3}$ – улетели. А, значит, $\frac{2}{3}$ голубей осталось. И теперь выполним действие: $6 * \frac{2}{3} = 4$. Чтобы проверить правильно ли решили, можно воспользоваться правилом: нужно найти часть, то есть мы должны получить меньшее число. Если мы умножим $6 * \frac{2}{3}$, получим 4, а если разделим $6/\frac{2}{3}$, получим 9. Нам нужно число меньше шести, значит, в этом случае надо было умножать. Со временем правило, как найти часть от целого, станет привычкой.

Задача 3.

Бригада должна выполнить норму за 10 дней. Ежедневно перевыполняя норму на 20 деталей в день, бригада за 144 часа изготовила на 40 деталей больше, чем надо было по плану. Сколько деталей в день должна была изготовить бригада по плану? [2]

Решение.

Посмотрим на единицы измерения величин:

20 деталей и 40 деталей – одинаковые единицы измерения.

10 дней и 144 часа – разные единицы измерения. Переведем все в дни, 1 день $-\ 24$ часа, то есть $\frac{144}{24} = 6$ дней. Теперь единицы измерения величин одинаковые.

За сколько дней должны были выполнить заказ? За 10 дней. Почему бригада выполнила заказ раньше? Производительность была выше.

Какие величины есть в задаче? Время работы, производительность. Что нужно найти? Производительность.

Рассмотрим фразу: «перевыполняя норму на 20 деталей в день». Какая эта характеристика? Производительность. То есть фактическая производительность была на 20 деталей больше.

Вспомним формулу работы $(\mathrm{A} = \mathrm{pt})$ и составим таблицу по данным рассуждениям.

Величины	По плану	Фактически
Производительность	x	$x + 20$
Время работы	10	6
Объем работы	$10x$	$6(x + 20)$

Таблица 2. Задача на работу

Мы нашли выражения для объема работы фактического и по плану. Фактический объём по условию на 40 деталей больше. Имеем

$$10x + 40 = (x + 20) * 6.$$

Далее решаем уравнение

$$10x + 40 = 6x + 120;\ 4x = 80;\ x = 20\left(\frac{\text{дет}}{\text{день}}\right).$$

Смотрим, ответили ли мы на вопрос задачи. За x мы брали производительность по плану. Вопрос задачи: Какая производительность по плану.

На вопрос задачи ответили. Пишем ответ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кучугурова Н.Д. Интенсивный курс общей методики преподавания математики. 2014. – С. 43–58.

2. Дорофеев Г.В. Проверка решения текстовых задач // Математика в школе. 1974. – №5.

УДК 372.851

ОБЩИЙ ВИД РЕШЕНИЯ ДВУХ ТИПОВ «НОВЫХ» ЗАДАЧ ПО ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ОТКРЫТОГО БАНКА ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ ПРОФИЛЬНОГО УРОВНЯ

Баранова Ольга Евгеньевна
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», г. Тверь
E-mail: baranova.oe@tversu.ru

Романова Светлана Анатольевна
МОУ СОШ «Тверская гимназия №8», г. Тверь
E-mail: svetaromadoma@yandex.ru

Ключевые слова: *задачи по теории вероятностей в ЕГЭ, открытый банк задач ЕГЭ по математике профильного уровня, теоремы о сложении и умножении вероятностей, формула полной вероятности, формула Байеса.*

Аннотация. В работе приведены решения в общем виде двух типов «новых» задач по теории вероятностей из открытого банка задач ЕГЭ по математике профильного уровня.

Задача 1. [1] В викторине участвуют m команд. Все команды разной силы, и в каждой встрече выигрывает та команда, которая сильнее. В первом раунде встречаются две случайно выбранные команды. Ничья невозможна. Проигравшая команда выбывает из викторины, а победившая команда играет со следующим случайно выбранным соперником. Известно, что в первых n играх победила команда A. Какова вероятность того, что эта команда выиграет $(n+1)$-й раунд?

Решение. Рассмотрим событие $B=$«команда A выиграла n раундов». Такое событие может произойти совместно с одной из гипотез $H_i=$«команда A является i-ой по силе», $i=\overline{1,m}$. Условные вероятности события B равны

$$P(B/H_i)=0,\ i=\overline{1,n};\ P(B/H_{n+k})=\frac{C_{n+k-1}^{n}}{C_{m-1}^{n}},\ k=\overline{1,m-n}.$$

Тогда по формуле полной вероятности находим

$$P(B)=\sum_{i=1}^{m}P(B/H_i)\cdot P(H_i)=0+\sum_{k=1}^{m-n}\frac{C_{n+k-1}^{n}}{C_{m-1}^{n}}\cdot\frac{1}{m}=\frac{1}{m\cdot C_{m-1}^{n}}\cdot S_1,$$

где $S_1=\sum_{k=1}^{m-n}C_{n+k-1}^{n}=\dfrac{m!(m-n)}{(n+1)n!(m-n)!}$.

По формуле Байеса переоценим вероятности гипотез. Имеем

$$P(H_i/B)=0,\ i=\overline{1,n},\ P(H_{n+k}/B)=\frac{P(B/H_{n+k})\cdot P(H_{n+k})}{P(B)}=\frac{C_{n+k-1}^{n}}{S_1},\ k=\overline{1,m-n}.$$

Пусть событие C=«команда A выиграла $(n+1)$-й раунд при условии, что она выиграла n раундов». Событие C может произойти совместно с одной из гипотез H_i/B, $i=\overline{1,m}$. Условные вероятности события C равны

$$P(C/(H_i/B))=0,\ i=\overline{1,n};\ P(C/(H_{n+1}/B))=0,$$

$$P(C/(H_{n+k}/B))=\frac{k-1}{m-n-1},\ k=\overline{2,m-n}.$$

Теперь по формуле полной вероятности находим

$$P(C)=0+\sum_{k=2}^{m-n}\frac{k-1}{m-n-1}\cdot\frac{C_{n+k-1}^{n}}{S_1}=\frac{1}{(m-n-1)\cdot S_1}\cdot\sum_{k=2}^{m-n}(k-1)\cdot C_{n+k-1}^{n}=\frac{S_2}{(m-n-1)\cdot S_1},$$

где $S_2=\sum\limits_{k=2}^{m-n}(k-1)\cdot C_{n+k-1}^{n}=\dfrac{m!\cdot(m-n-1)\cdot(m-n)}{(n+2)\cdot n!\cdot(m-n)!}$.

Окончательные преобразования с учётом вида сумм S_1 и S_2 дают

$$P(C)=\frac{m!\cdot(m-n-1)\cdot(m-n)}{(n+2)\cdot n!\cdot(m-n)!}\cdot\frac{(n+1)\cdot n!\cdot(m-n)!}{(m-n-1)\cdot m!\cdot(m-n)}=\frac{n+1}{n+2}.$$

Задача 2. [2] Турнир настольному теннису проводится по олимпийской системе в несколько туров: если в туре участвует чётное число игроков, то они разбиваются на случайные игровые пары. Если число игроков нечётно, то с помощью жребия выбираются случайные игровые пары, а один игрок остаётся без пары и не участвует в турнире. Проигравший в каждой паре (ничья невозможна) выбывает из турнира, а победители и игрок без пары если он есть, выходят в следующий тур, который проводится по таким же правилам. Так продолжается до тех пор, пока не останутся двое, которые играют между собой финальный тур, то есть последнюю партию, которая выявляет победителя турнира. Всего в турнире участвует n игроков, все они играют одинаково хорошо, поэтому в каждой встрече вероятность выигрыша и поражения у каждого игрока равна 0,5. Среди игроков два друга – Иван и Алексей. Какова вероятность того, что этим двоим в каком-то туре придётся сыграть друг с другом?

Решение. Пусть $n=2^p-\alpha_{p-1}2^{p-1}-\alpha_{p-2}2^{p-2}-...-\alpha_2 2^2-\alpha_1 2^1-\alpha_0 2^0$, $\alpha_i\in\{0;1\}, i=\overline{0;p-1}$. Если $\alpha_{p-1}=0$, то в турнире стоится ровно p туров.

Рассмотрим первый тур. В нём участвуют n игроков.

1.1. Пусть число игроков n – чётное, т.е. $\alpha_0=0$. Тогда число способов разбить n игроков на $\frac{n}{2}$ пар равно $N=\dfrac{C_n^2\cdot C_{n-2}^2\cdot...\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{(n/2)!}$, а число способов разбить n игроков на пары так, чтобы А и И оказались в одной паре, равно

$M=\dfrac{C_{n-2}^2\cdot C_{n-4}^2\cdot\ldots\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{((n-2)/2)!}$. Тогда вероятность того, что А и И сыграют в первом туре равна $P_{1ч}=\dfrac{M}{N}=\dfrac{1}{n-1}$. Вероятность того, что А и И пройдут в следующий тур, т.е. вероятность события «А и И не играли в одной паре, и каждый выиграл у своего соперника», равна $P=\left(1-\dfrac{1}{n-1}\right)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{n-2}{4(n-1)}$.

1.2. Пусть число игроков n –нечётное, т.е. $\alpha_0=1$. В том турнире играют $\frac{n-1}{2}$ пар и один «лишний» игрок не участвует в турнире. Число способов разбить $n-1$ игрока на $\frac{n-1}{2}$ пар с учётом одного не участвующего в турнире игрока равно $N=n\cdot\dfrac{C_{n-1}^2\cdot C_{n-3}^2\cdot\ldots\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{((n-1)/2)!}$. Число способов разбить $n-1$ игрока на пары так, чтобы А и И оказались в одной паре и один игрок не участвовал в турнире, равно $M=(n-2)\cdot\dfrac{C_{n-3}^2\cdot C_{n-5}^2\cdot\ldots\cdot C_4^2\cdot C_2^2}{((n-3)/2)!}$. Тогда вероятность того, что А и И сыграют в первом туре, равна $P_{1н}=\dfrac{M}{N}=\dfrac{1}{n}$.

Игроки А и И проходят в следующий тур, если один из них не участвовал в том туре, а второй выиграл у своего соперника, или они оба участвовали в туре, но не играли в одной паре, и выиграли. Тогда А и И проходят в следующий тур с вероятностью

$$P=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2}+\left(1-\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{n+1}{4n}.$$

Таким образом, для событий B_1 = «А и И играют в этом туре» и C_1 = «А и И проходят в следующий тур» находим

$$P(B_1)=\begin{cases}\dfrac{1}{n-1}, n-\text{чётное}, \alpha_0=0,\\ \dfrac{1}{n}, n-\text{нечётное}, \alpha_0=1,\end{cases}=\frac{n-\alpha_0}{n(n-1)},$$

$$P(C_1)=\begin{cases}\dfrac{n-2}{4(n-1)}, n-\text{чётное}, \alpha_0=0,\\ \dfrac{n+1}{4n}, n-\text{нечётное}, \alpha_0=1,\end{cases}=\frac{n-1-(-1)^{\alpha_0}+\alpha_0}{4(n-1+\alpha_0)}.$$

В следующий тур проходит m игроков, где

$$m=\begin{cases}\dfrac{n}{2}, n-\text{чётное}, \alpha_0=0,\\ \dfrac{n+1}{2}, n-\text{нечётное}, \alpha_0=1,\end{cases}=\frac{n+\alpha_0}{2}.$$

Рассмотрим второй тур, в котором участвуют m игроков, используя рассуждения, проведенные в пунктах 1.1 и 1.2.

2.1. Пусть число игроков m − чётное, т.е. $\alpha_1 = 0$. Тогда вероятность того, что А и И в одной паре

$$P_{2ч} = \frac{1}{m-1} = \begin{cases} \frac{2}{n-2}, n - \text{чётное}, \alpha_0 = 0, \\ \frac{2}{n-1}, n - \text{нечётное}, \alpha_0 = 1. \end{cases}$$

Вероятность того, что А и И сыграют во втором туре

$$P_2 = P_{2ч} \cdot P(C_1) = \begin{cases} \frac{n}{2n(n-1)}, n - \text{чётное}, \alpha_0 = 0, m = \frac{n}{2} - \text{чётное}, \alpha_1 = 0; \\ \frac{n+1}{2n(n-1)}, n - \text{нечётное}, \alpha_0 = 1, m = \frac{n+1}{2} - \text{чётное}, \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Вероятность того, что А и И пройдут в следующий тур, равна

$$P = \frac{m-2}{4(m-1)} = \begin{cases} \frac{n-4}{4(n-2)}, n - \text{чётное}, \alpha_0 = 0, \\ \frac{n-3}{4(n-1)}, n - \text{нечётное}, \alpha_0 = 1. \end{cases}$$

2.2. Пусть число игроков m − нечётное, т.е. $\alpha_1 = 1$. Тогда вероятность того, что А и И сыграют в одной паре

$$P_{2н} = \frac{1}{m} = \begin{cases} \frac{2}{n}, n - \text{чётное}, \alpha_0 = 0, \\ \frac{2}{n+1}, n - \text{нечётное}, \alpha_0 = 1. \end{cases}$$

Вероятность того, что А и И сыграют в этом туре, определяется следующим образом

$$P_2 = P_{2н} \cdot P(C_1) = \begin{cases} \frac{n-2}{2n(n-1)}, n - \text{чётное}, \frac{n}{2} - \text{нечётное}, \alpha_0 = 0, \alpha_1 = 1, \\ \frac{n-1}{2n(n-1)}, n - \text{нечётное}, \frac{n+1}{2} - \text{нечётное}, \alpha_0 = 1, \alpha_1 = 1. \end{cases}$$

Вероятность того, что А и И пройдут в следующий тур, имеет вид

$$P = \frac{m+1}{4m} = \begin{cases} \frac{n+2}{4n}, n - \text{чётное}, \\ \frac{n+3}{4(n+1)}, n - \text{нечётное}. \end{cases}$$

Таким образом, для событий $B_2 =$ «А и И играют во втором туре» и $C_2 =$ «А и И проходят в следующий тур» находим

$$P(B_2)=\begin{cases}\frac{n}{2n(n-1)}, n-\text{чётное}, \frac{n}{2}-\text{чётное}, \alpha_0=0, \alpha_1=0,\\ \frac{n+1}{2n(n-1)}, n-\text{нечётное}, \frac{n+1}{2}-\text{чётное}, \alpha_0=1, \alpha_1=0,\\ \frac{n-2}{2n(n-1)}, n-\text{чётное}, \frac{n}{2}-\text{нечётное}, \alpha_0=0, \alpha_1=1,\\ \frac{n-1}{2n(n-1)}, n-\text{нечётное}, \frac{n+1}{2}-\text{нечётное}, \alpha_0=1, \alpha_1=1\end{cases}=\frac{n-2\alpha_1+\alpha_0}{2n(n-1)};$$

$$P(C_2)=\begin{cases}\frac{n-4}{4(n-2)}, n-\text{чётн.}, \frac{n}{2}-\text{чётн.}, \alpha_0=0, \alpha_1=0,\\ \frac{n-3}{4(n-1)}, n-\text{неч.}, \frac{n+1}{2}-\text{чётн.}, \alpha_0=1, \alpha_1=0,\\ \frac{n+2}{4n}, n-\text{чётн.}, \frac{n}{2}-\text{неч.}, \alpha_0=0, \alpha_1=1,\\ \frac{n+3}{4(n+1)}, n-\text{неч.}, \frac{n+1}{2}-\text{неч.}, \alpha_0=1, \alpha_1=1?\end{cases}=\frac{n-2-2(-1)^{\alpha_1}+2\alpha_1+\alpha_0}{4(n-2+2\alpha_1+\alpha_0)}$$

Продолжая эти рассуждения, получим, что вероятности событий $B_{p-1}=$«А и И сыграют в $p-1$-ом туре» и $B_p=$«А и И сыграют в p-ом туре» равны

$$P\left(B_{p-1}\right)=\frac{n-2^{p-2}\cdot\alpha_{p-2}+2^{p-3}\cdot\alpha_{p-3}+\ldots+2^1\cdot\alpha_1+\alpha_0}{2^{p-2}\cdot n(n-1)},$$

$$P\left(B_p\right)=\frac{n-2^{p-1}\cdot\alpha_{p-1}+2^{p-2}\cdot\alpha_{p-2}+\ldots+2^1\alpha_1+\alpha_0}{2^{p-1}\cdot n(n-1)}.$$

Поскольку события B_1, B_2, …, B_p несовместны, то вероятность события $D=B_1+B_2+\ldots+B_p=$«А и И сыграют в каком-нибудь туре» равна

$$P(D)=P(B_1)+P(B_2)+\ldots+P\left(B_p\right)=$$

$$=\frac{n-\alpha_0}{2^0\cdot n(n-1)}+\frac{n-2\alpha_1+\alpha_0}{2^1\cdot n(n-1)}+\ldots+\frac{n-2^{p-2}\cdot\alpha_{p-2}+2^{p-3}\cdot\alpha_{p-3}+\ldots+2\alpha_1+\alpha_0}{2^{p-2}\cdot n(n-1)}+$$

$$+\frac{n-2^{p-1}\cdot\alpha_{p-1}+2^{p-2}\cdot\alpha_{p-2}+2\alpha_1+\alpha_0}{2^{p-1}\cdot n(n-1)}=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\left(n\cdot\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\alpha_0\cdot\left(-\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^{p-1}}\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\cdot\left(-\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\ldots+\frac{1}{2^{p-2}}\right)+\ldots+\alpha_{p-2}\cdot\left(-\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}\right)-\alpha_{p-1}\cdot\frac{1}{2^0}\right)=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)}\cdot\left(n\cdot\frac{1}{2^{p}}\left(2^{p}-1\right)+\alpha_0\cdot\left(-1+\frac{1}{2^{p-1}}\left(2^{p-1}-1\right)\right)+\right.$$

$$\left.+\alpha_1\cdot\left(-1\frac{1}{2^{p-2}}\left(2^{p-2}-1\right)\right)+\ldots+\alpha_{p-2}\cdot\left(-1+\frac{1}{2}\right)-\alpha_{p-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)2^{p-1}}\cdot\left(n\cdot\left(2^{p}-1\right)-\alpha_0-2\alpha_1-\ldots-\alpha_{p-2}\cdot 2^{p-2}-\alpha_{p-1}\cdot 2^{p-1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n(n-1)2^{p-1}}\cdot\left(n\left(2^{p}-1\right)+n-2^{p}\right)=\frac{(n-1)2^{p}}{n(n-1)2^{p-1}}=\frac{2}{n}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Открытый банк задач ЕГЭ по Математике [Электронный ресурс] / Московский Центр непрерывного математического образования. URL : https://prof.mathege.ru/clones/?position=183&parent=159149. (дата обращения: 12.03.22)

2. Открытый банк задач ЕГЭ по Математике [Электронный ресурс] / Московский Центр непрерывного математического образования. URL : https://prof.mathege.ru/clones/?position=183&parent=159153 (дата обращения: 12.03.22)

УДК 303.732.4:330.46(004.4+004.9)

КОМПЕТЕНЦИИ СИСТЕМНЫХ АНАЛИТИКОВ В ОБЛАСТИ РАЗРАБОТКИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОГРАММНЫХ ПРОДУКТОВ

Васильев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru

Ключевые слова: *компетенция, программный продукт, профессиональный стандарт, требования работодателей, системный аналитик.*

Аннотация. В работе детализированы требования профессионального стандарта к компетенциям системного аналитика в области разработки и использования программных продуктов на основе анализа мнений экспертного сообщества и требований работодателей. Результаты исследования могут быть полезны для адаптации основных образовательных программ подготовки системных аналитиков к запросам рынка труда.

Введение. В настоящее время главным трендом, трансформирующим все сферы деятельности (в том числе, подходы к управлению организациями), является цифровизация, которая переводит все виды информации в цифровую форму [1, с. 444]. Центральным элементом цифровой трансформации являются кадры, поэтому в цифровой экономике возрастает потребность в специалистах в сфере цифровых технологий, аналитики данных, а также в специалистах, получивших образование в области науки, технологий, инжиниринга и математики [2, с. 8-9]. К таким востребованным в цифровой экономике специалистам относится системный аналитик – специалист широкого профиля, способный находить оптимальные решения задач междисциплинарного характера на основе методов системного анализа [3, с. 54]. В связи с этим объектом данного исследования являются компетенции системного аналитика.

В соответствии с профессиональным стандартом основная цель профессиональной деятельности системного аналитика заключается в разработке, восстановлении и сопровождении требований к программному обеспечению (ПО), продукту, средству, программно-аппаратному комплексу, автоматизированной информационной системе или автоматизированной системе управления на протяжении их жизненного цикла [4, с. 1]. Поэтому предмет исследования состоит в анализе компетенций системного аналитика в области разработки и использования программных продуктов. В общем виде эти компетенции, нацеленные на получение системных знаний, умений и навыков, сформулированы в профессиональном стандарте и в федеральном государственном образовательном стандарте высшего образования бакалавриата по направлению подготовки 38.03.05 Бизнес-информатика. Детализация профессиональных компетенций для адаптации выпускников к запросам рынка труда производится на основе анализа мнений экспертного сообщества и требований работодателей. Цель исследования заключается в определении актуальных компетенций системного аналитика в области разработки и использования программных продуктов, востребованных на рынке труда.

1. Требования профессионального стандарта. Требования профессионального стандарта “Системный аналитик” к знаниям в области разработки и использования программных продуктов заключаются в знании [4, с. 2-36]: 1) методов обработки текстовой, числовой и графической информации; 2) основ операционных и файловых систем; 3) устройства ПО; 4) основ теории и методов оценки качества программных систем; 5) классификации дефектов программного обеспечения; 6) принципов создания пользовательских интерфейсов; 7) теории и методов функционального и приемочного тестирования ПО; 8) нотаций моделирования ПО; 9) способов описания алгоритмов.

Требования этого стандарта к умениям в области разработки и использования программных продуктов заключаются в умениях [4, с. 2-36]: 1) применять текстовые и графические редакторы для создания и обработки текста и изображений; 2) применять табличные процессоры для обработки числовых данных; 3) устанавливать и удалять прикладное ПО; 4) макетировать пользовательские интерфейсы; 5) выполнять ручные функциональные тесты ПО; 6) применять соглашение о моделировании; 7) исполнять приемочные тесты ПО; 8) моделировать бизнес-процессы.

2. Компетенции системного аналитика на основе анализа его ролей. В [5, с. 92-93] на основе выделения ролей системного аналитика в организации (“Аналитик требований”, “Технический писатель”, “Бизнес-аналитик”, “Системный архитектор”, “Бизнес-архитектор”) и их анализа определен наиболее важный набор его знаний и навыков. К таким знаниям и умениям в области разработки и использования программных продуктов отнесены: 1) знание нотаций моделирования (IDEF, EPC); 2) знание языка запросов SQL; 3) умение работать с базами данных; 4) знание языка программирования, используемого для разработки системы; 5) знание основ работы с техническим инструментарием, используемым в проекте; 6) знание объектно-ориентированного программирования, теории баз данных и основ информационной безопасности; 7) умение работать по командной методологии разработки программного продукта.

В настоящее время командная методология разработки программного продукта, как правило, базируется на гибком подходе к разработке программного обеспечения (Agile, или Agile software development), в рамках которого разработано более 10 методик гибкого проектного управления [6, с. 58]. Среди них наиболее часто применяются методологии Srum и Kanban.

К наиболее распространенным программным продуктам для моделирования бизнес-процессов относятся [7, с. 1461]: ARIS Express; Bizagi Business Process Management Suite; Bizagi Modeler; Business Process Simulator Community; Draw.io; ELMA Business Process Management; Gliffy; Visual Paradigm; Business Studio; ALLFusion Process Modeler. Следует отметить, что функциональные возможности программных продуктов для моделирования бизнес-процессов с точки зрения изобразительных средств моделирования считаются примерно одинаковыми [8, с. 37].

3. Требования работодателей. Результаты разведочных исследований и анализа 100 актуальных объявлений работодателей г. Москвы на сайте HeadHunter в марте 2022 г. о вакансиях системного аналитика приведены в табл. 1-7. В указанных таблицах приведены только сведения о компетенциях, упоминаемых, как правило, не менее чем в 5 % объявлений. В 7 % объявлений к претендентам на вакансию предъявлялось требование иметь навыки работы с набором инструментов и технологий для сбора, анализа, визуализации и обработки данных о состоянии бизнеса Business Intelligence (BI).

Таблица 1

Требования работодателей к владению языками программирования

Язык программирования	Доля упоминаний (в %)
SQL (язык структурированных запросов)	56
XML (язык разметки, рекомендованный Консорциумом Всемирной паутины)	24
XSD (также называют XML Schema, язык описания структуры XML-документа)	11
Java (объектно-ориентированный язык программирования общего назначения)	8
C# (объектно-ориентированный язык программирования)	6
Python (объектно-ориентированный язык программирования общего назначения)	5

Таблица 2

Требования работодателей к владению нотациями моделирования

Нотация моделирования	Доля упоминаний (в %)
UML (объектно-ориентированное моделирование)	55
BPMN (функциональное и объектно-ориентированное моделирование)	54
IDEF (функциональное моделирование)	16
EPC (моделирование событийно-функциональных диаграмм)	8

Таблица 3

Требования работодателей к владению средствами интеграции ПО

Инструмент интеграции ПО	Доля упоминаний (в %)
Rest API (способ взаимодействия сайтов и веб-приложений с сервером)	45
SOAP (протокол обмена структурированными сообщениями в распределенной вычислительной среде)	38
JSON (текстовый формат обмена данными, основанный на JavaScript; может использоваться практически с любым языком программирования)	25
API (средство интеграции приложений)	23

Таблица 4

Требования работодателей к владению средствами командной работы

Инструмент для командной работы	Доля упоминаний (в %)
Jira (коммерческая система отслеживания ошибок, предназначенная для организации взаимодействия с пользователями; используется также для управления проектами)	37
Confluence (тиражируемая вики-система для внутреннего использования организациями с целью создания единой базы знаний; пространство для командной работы, удобное для распределенных команд)	35

Таблица 5

Требования работодателей к владению СУБД

Система управления базами данных (СУБД)	Доля упоминаний (в %)
PostgreSQL (свободная объектно-реляционная СУБД)	15
MS SQL (система управления реляционными базами данных)	5
Oracle Database (объектно-реляционная СУБД**)**	5
Redis (резидентная СУБД)	4

Таблица 6

Требования работодателей к владению методологиями разработки ПО

Методология разработки ПО	Доля упоминаний (в %)
Scrum (гибкая методология разработки ПО, позволяющая за фиксированные небольшие промежутки времени предоставлять заказчику работающий продукт с новыми возможностями, имеющими наибольшую важность)	20
Kanban (гибкая методология разработки ПО, реализующая принцип “точно в срок” и способствующая равномерному распределению нагрузки между работниками)	12
Waterfall (методика управления проектами, которая подразумевает последовательный переход с одного этапа на другой без пропуска и возвращений на предыдущие этапы)	4

Таблица 7

Требования работодателей к владению брокерами сообщений

Брокер сообщений	Доля упоминаний (в %)
RabbitMQ (программный брокер сообщений на основе стандарта AMQP)	6
Apache Kafka (распределенный программный брокер сообщений с открытым исходным кодом, написанный на языках программирования Java и Scala)	5

В единичных объявлениях (менее 5 %) упоминаются также:

1) языки программирования разного назначения: PHP; JavaScript; Kotlin; T-SQL; PL/SQL; C++; ISBL; ML; Groovy; Spark; WSDL; XSLT;

2) нотация моделирования VAD;

3) системы управления базами данных: MongoDB; PostgresPro; GreenPlum; Vertica; Apache Hive;

4) программные продукты для моделирования бизнес-процессов (бизнес-архитектуры): Aris; Camunda Modeler; Bizagi Modeler; Business Studio; Rational Rose; Camunda BPM; SILA Union; Comindware; PowerDesigner; Enterprise Architect; Visual Paradigm; Бизнес-инженер;

5) фреймворки для спецификаций: Swagger; RESTFUL; OpenAPI;

6) инструменты для разработки интерфейсов: ReactJS; DRF; XD; Vue.js;

7) инструменты для работы с контейнерами: Docker; K8s; OpenShift; Istio;

8) инструменты прототипирования пользовательских интерфейсов: Axure; Figma; Balsaminq Wireframes;

9) программные продукты для разработки и тестирования ПО: .NET; Jenkins; Git; GitLab; Postman; TFS; Visual Studio Team System;

10) программные продукты фирмы 1С (1С: Предприятие 8; 1С: CRM; 1С: Документооборот).

Выводы

1. К наиболее важным компетенциям системного аналитика работодатели относят владение: языками моделирования; нотациями моделирования; средствами интеграции ПО; средствами командной работы; СУБД; методологиями разработки ПО; брокерами сообщений.

2. Данные компетенции практически совпадают с компетенциями системного аналитика, выявленными на основе анализа его ролей в организации.

3. Периодический анализ требований работодателей к компетенциям системного аналитика позволяет выявить конкретные востребованные инструменты разработки ПО и конкретные программные продукты, используемые в его работе, для корректировки основных образовательных программ подготовки системных аналитиков. Это позволит обеспечить конкурентоспособность выпускников этой специальности на рынке труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атлас новых профессий 3.0 [Текст] / Под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. М.: Интеллектуальная Литература, 2020. 456 с.

2. Глобальное исследование цифровых операций в 2018 г. “Цифровые чемпионы”: Как лидеры создают интегрированные операционные экосистемы для разработки комплексных решений для потребителей [Электронный ресурс]. М.: PwC, 2018. Режим доступа: https://www.pwc.ru/ru/iot/digital-champions.pdf (дата обращения: 23.02.2022).

3. Шаперова В.С., Гришанова Л.И. Роль бизнес-аналитика в работе организации [Текст] // Системный анализ и логистика. 2020. № 4(26). С. 54-58.

4. Профессиональный стандарт "Системный аналитик" (Утв. приказом Минтруда России от 28.10.2014 N 809н) [Электронный ресурс]. М.: Портал ФГОС. Режим доступа: https://fgosvo.ru/uploadfiles/profstandart/06.022.pdf (дата обращения: 23.02.2022).

5. Кондуров И.В., Тушев А.Н. Технические основы системного аналитика для успешной коммуникации с командой разработки [Текст] // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2020. Т. 4, № 2. С. 91-95.

6. Озорнин С.Ю., Терлыга Н.Г. Аналитический обзор моделей гибкого проектного управления в условиях цифровизации менеджериальных процессов [Текст] // Интеллект. Инновации. Инвестиции. 2021. № 5. С. 53-63.

7. Ковылкин Д.Ю., Новикова В.Н., Ратафьев С.В. Возможности современных инструментальных средств моделирования бизнес-процессов [Текст] // Креативная экономика. 2019. Т. 13, № 7. С. 1457-1473.

8. Алеников А.С., Мамонова И.В., Кололеева К.И. Вариативные подходы к выбору нотации при моделировании бизнес-процессов на предприятии [Текст] // Вестник Академии знаний. 2020. № 39(4). С. 33-41.

УДК 372.862

О КОМПЬЮТЕРНЫХ СЕТЯХ ДЛЯ ШКОЛЬНИКОВ С MIKROTIK

Гаврилов Дмитрий Борисович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: dbgavrilov@edu.tversu.ru

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова: *компьютерные сети, DHCP – сервер, DNS – сервер, MAC – адрес, IP – адрес, mikrotik.*

Аннотация. В работе рассматривается теоретический материал для углубленного знакомства учеников старших классов с основами компьютерных сетей, а также представлены примеры лабораторных работ способные закрепить изученный материал на оборудовании Mikrotik.

Современная школьная программа даёт очень мало знаний о компьютерных сетях. В основном эти знания носят теоретический характер. Практическая составляющая, в лучшем случае, сводится к задачам следующего вида: подсчёта битовой маски ip-адреса; нахождения числа компьютеров в сети по заданному ip-адресу и маске; перевод из двоичной системы в десятичную и наоборот. Эти задачи дают только общие понятия о том, как устроена локальная сеть. Такое положение дел имеет место и для других разделов общего курса информатики и ИКТ средней школы. [1, 2]

Для закрепления практических навыков работы с компьютерными сетями учащимся могут быть предложены лабораторные работы. Они помогут углубить знания о компьютерных сетях, а также понять, как устроен и работает интернет. Оборудование для проведения лабораторных работ должно удовлетворять целому ряду условий. Среди них – доступность, стоимость распространённость и популярность, надёжность. Этим критериям удовлетворяет сетевое оборудование компании Mikrotik, которое базируется на системе RouterOS.

Основы компьютерных сетей

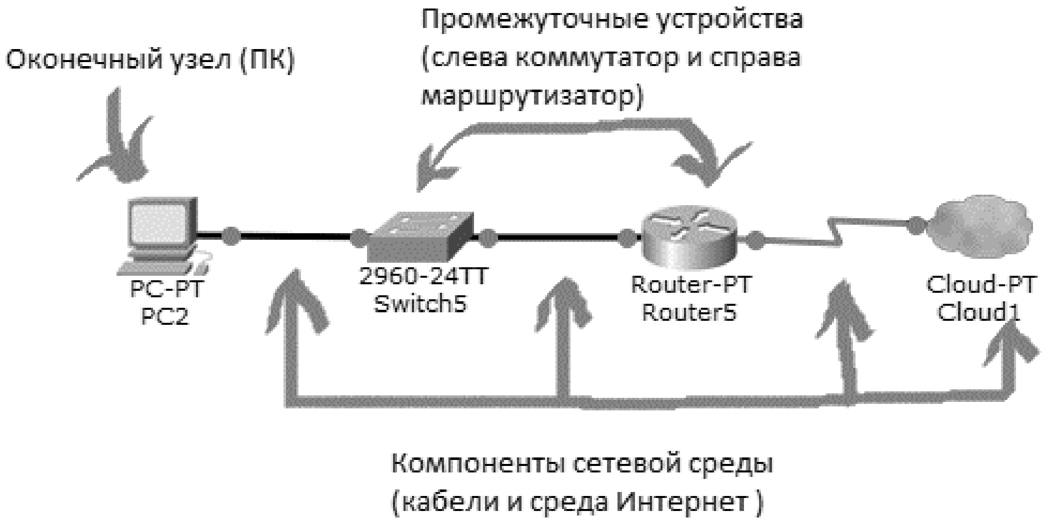
Рассказывая учащимся о том, как устроена компьютерная сеть, необходимо дать определения следующих понятий: сеть, оконечные узлы, промежуточные устройства, сетевые среды.

Сетью называется два или более устройств, которые подключены друг к другу (логически или физически) и общающиеся между собой.

Оконечные узлы – это устройства, которые способны принимать и получать данные. В качестве примеров можно привести телевизор с поддержкой wi – fi, мобильный телефон, ноутбук, планшетный компьютер.

Промежуточные устройства – это устройства, главная задача которых соединять группу или даже группы сетей в одно целое. Это маршрутизатор, концентратор, модем.

Сетевые среды – это то, с помощью чего непосредственно происходит передача данных от оконечного узла, к другому узлу, или же от устройства к устройству. Для наглядности ученикам можно показать следующую картинку:



Современному школьнику не нужно объяснять, для чего используются компьютерные сети, но в качестве примера можно привести несколько интерактивных приложений, игр, сетевых ресурсов, а также образовательных сред.

Для взаимодействия сетевых устройств внутри компьютерной сети любому сетевому устройству необходимы MAC–адрес, IP–адрес, а также DNS–имя.

MAC–адрес. Любое сетевое устройство, будь смартфон, компьютер, умная колонка, также, как и каждый ученик в классе имеют свой индивидуальный идентификатор. MAC–адрес представляет собой уникальный шестибайтный номер, который “зашит” в сетевой карте при его изготовлении. Это также, как к примеру каждому подростку при достижении 14 лет выдаётся паспорт с уникальными серией и номером паспорта. В больших сетях, так называемых широковещательных сетях, MAC–адреса позволяют уникально идентифицировать каждый узел сети, а также доставлять данные только по этому узлу сети. MAC–адрес служит для идентификации устройства внутри сети, а также присвоению ему IP–адреса при выполнении пересылки данных внутри сети. В случае отсутствия MAC–адреса на сетевом устройстве системному администратору необходимо задать MAC–адрес вручную.

IP-адрес. Уникальный сетевой адрес узла в компьютерной сети. IP-адрес состоит из 32 двоичных бит (единиц и нулей). Человеку сложно воспринимать большой однородный ряд чисел, 11100010101000100010101110011110 (здесь 32 бита информации) поэтому, было решено разделить ряд на четыре 8-битных байта и получилась следующая последовательность:

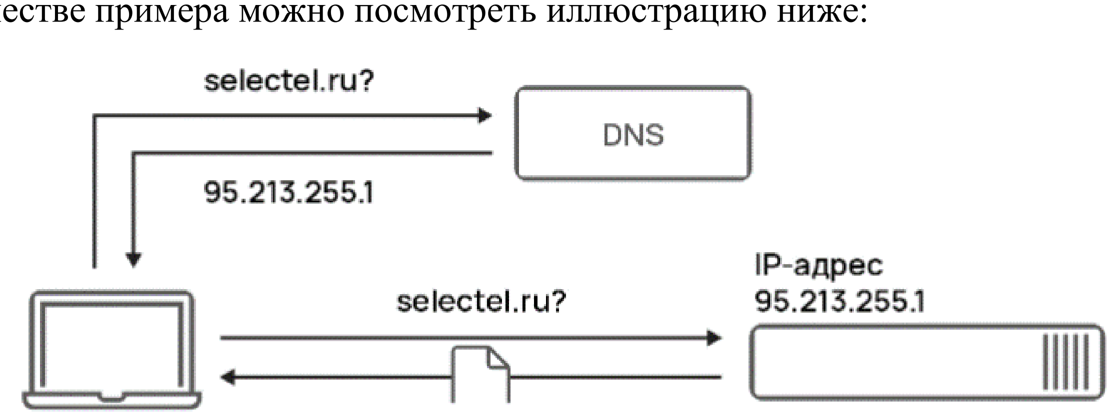
11100010.10100010.00101011.10011110.

Лучше преобразовать данный числовой ряд 226.162.43.158. Получится ряд, который состоит из четырёх разрядов, или октетов. Данный IP адрес определяется протоколом IPv4. По такой схеме адресации можно создать более 4 миллиардов IP-адресов.

IP–адрес – это уникальный идентификатор, который позволяет передавать информацию между устройствами в сети. [3]

Маска подсети. Позволяет определить диапазон IP–адресов, которые может использовать сеть. Также с её помощью можно разделить сеть на различные подсети. Задача маски подсети – скрыть сетевой элемент адреса. Одна из наиболее распространенных масок класса С – 255.255.255.0. Каждый раздел адреса маски подсети может содержать любые числа от 0 до 255. Первы 3 раздела для 255.255.255.0 заполнены, таким образом, IP–адреса устройств в этой подсети совпадают с начальными 3 разделами. Последний же раздел может быть числом от 0 до 255. Маска подсети, а также подсети используются, чтобы позволить множеству устройств подключаться к интернету с одним IP–адресом через маршрутизатор. [4]

DNS-сервер. Это специализированный компьютер (или группа), который хранит IP-адреса сайтов. Последние, в свою очередь, привязаны к именам сайтов и обрабатывает запросы пользователя. В интернете много DNS-серверов, они есть у каждого провайдера и обслуживают их пользователей. Принцип работы DNS–сервера довольно прост. Каждому сайту соответствует IP–адрес, который задаётся в формате 000.000.000.000. В момент времени, когда мы вводим в адресной строке браузера, например, math.tversu.ru или же в поиске переходим по ссылке, которая указывает на этот сайт, то наш компьютер отправляет запрос на специализированный DNS–сервер, в этот же момент нашему компьютеру с DNS–сервера происходит отправка IP этого сайта, по которому мы уже переходим. В качестве примера можно посмотреть иллюстрацию ниже:



Главная задача DNS–сервера – это хранение информации о доменах и её предоставление по запросам пользователей. А также хранении DNS–записей серверов, о которых писалось ранее. [5]

DHCP–сервер. Это физическое или виртуальное устройство, которое способно выдавать IP–адрес при подключении компьютера в сеть.

Принцип работы DHCP – сервера:

1. Поиск.

Изначально сетевое устройство, например, компьютер не имеет своего IP-адреса. Он отправляет в сеть так называемый широковещательный запрос, ещё он называется broadcast запрос.

2. Предложение.

DHCP – сервер как бы говорит: “я здесь, вот тебе IP-адрес” и выдаёт IP-адрес, который может подойти клиенту.

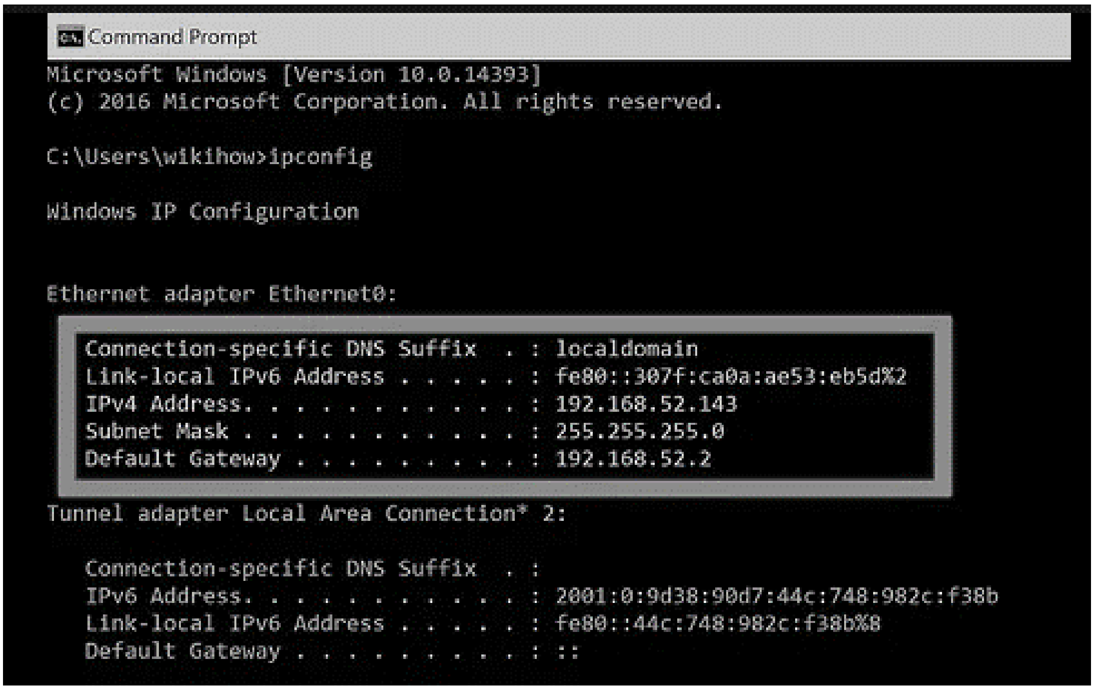
3. Запрос.

Когда компьютер получил IP–адрес, он отправляет на сервер сообщение запрос, который содержит в себе сообщение о том, что он принимает предложенный ему IP–адрес.

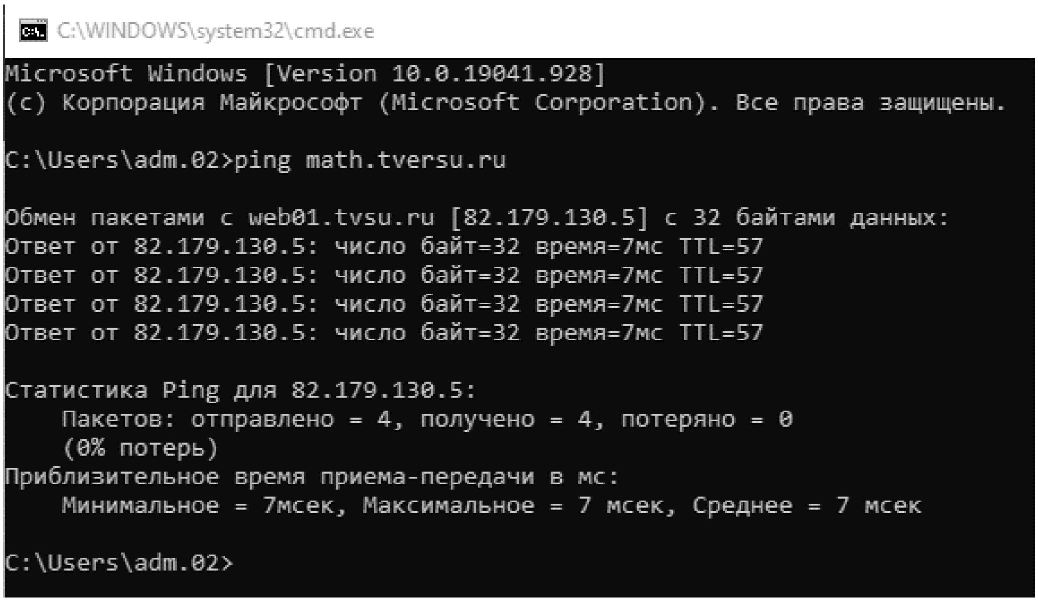
4. Подтверждение.

DHCP–сервер получает от сетевого устройства запрос и уже окончательно подтверждает передачу IP–адреса, отправляя нашему компьютеру сообщение с подтверждением.

В качестве вводной лабораторной работы учащимся можно продемонстрировать как узнать MAC, IP адреса, а также DNS–имя своего компьютера или же компьютера в учебном классе. Для этого в командной строке Windows необходимо ввести команду *ipconfig*. В результате успешного выполнения команды на экране компьютера будет выведена вся необходимая информация.



Также можно продемонстрировать ученикам работу DNS–сервера. Для этого в командной строке Windows преподавателю необходимо ввести команду *ping math.tversu.ru*.

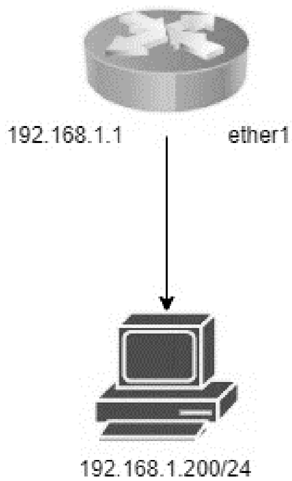


```
C:\WINDOWS\system32\cmd.exe
Microsoft Windows [Version 10.0.19041.928]
(c) Корпорация Майкрософт (Microsoft Corporation). Все права защищены.

C:\Users\adm.02>ping math.tversu.ru

Обмен пакетами с web01.tvsu.ru [82.179.130.5] с 32 байтами данных:
Ответ от 82.179.130.5: число байт=32 время=7мс TTL=57
Ответ от 82.179.130.5: число байт=32 время=7мс TTL=57
Ответ от 82.179.130.5: число байт=32 время=7мс TTL=57
Ответ от 82.179.130.5: число байт=32 время=7мс TTL=57

Статистика Ping для 82.179.130.5:
    Пакетов: отправлено = 4, получено = 4, потеряно = 0
    (0% потерь)
Приблизительное время приема-передачи в мс:
    Минимальное = 7мсек, Максимальное = 7 мсек, Среднее = 7 мсек

C:\Users\adm.02>
```

Компания Mikrotik специализируете на производстве преимущество сетевого оборудования так называемого SOHO – сегмента, что значит бюджетного. Операционной системой на устройствах является Router OS, которая базируется на ядре Linux. Таким образом, в качестве учебной среды можно использовать виртуальный рабочий стол в среде hyper v, или же virtual box, с развернутом дистрибутивом Router OS 6. Учебным стендом могут быть использованы: WiFi роутер MIKROTIK RB941-2ND, Wi-Fi роутер MIKROTIK hAP mini, N300 или же развёрнутый в виртуальной среде Router OS 6 дистрибутив, которой является бесплатным и может быть скачан с официального сайта *MikroTik Routers and Wireless*. [6]

Лабораторная работа №1 (Обновление роутера, сброс до заводских настроек)

1. Соединить компьютер с 1-м портом роутера.
2. Отключить все сетевые интерфейсы, кроме подключенного к роутеру.
3. Прописать адрес сетевой карте компьютера, как показано на рисунке.
4. Запустить утилиту Netinstall и прописать IP адрес 192.168.1.115.
5. Отключить все антивирусы и фаервол.
6. Зажать на роутере кнопку Reset и после этого подключить шнур питания к роутеру.



7. Не отпуская кнопку, дождаться, когда индикатор на роутере погаснет (15–20 сек.)

8. Убедиться, что роутер появился в окне утилиты Netinstall.

9. Выбрать соответствующий. npk файл и нажать install

Прошивка на роутере обновлена, роутер сброшен до заводских настроек.

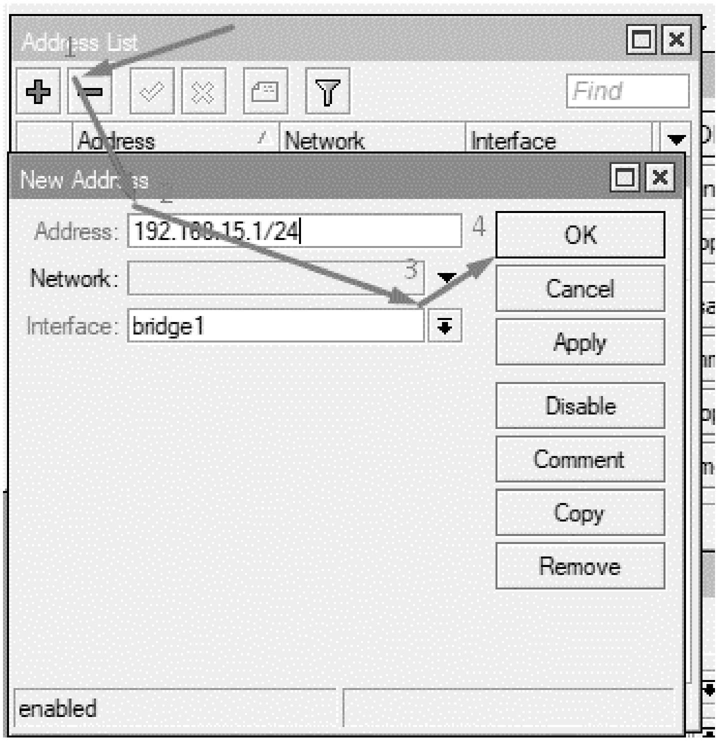
Лабораторная работа №2

1. С помощью утилиты Winbox подключиться к роутеру, программа попросит создать пароль.

2. Объдинить порты в Bridge – для этого в разделе Bridge создать новый bridge1.

3. Настройки не изменять. Появился bridge1. Переходим на вкладку ports и жмем плюсик. Добавляем в brdige1 все порты, кроме WAN. WAN – это тот порт, к которому подключен интернет.

4. Настроим статический ip–адрес для нашего роутера. В Winbox заходим на вкладку IP → Addressess. Назначаем для выше созданного соединения Bridge IP–адрес.



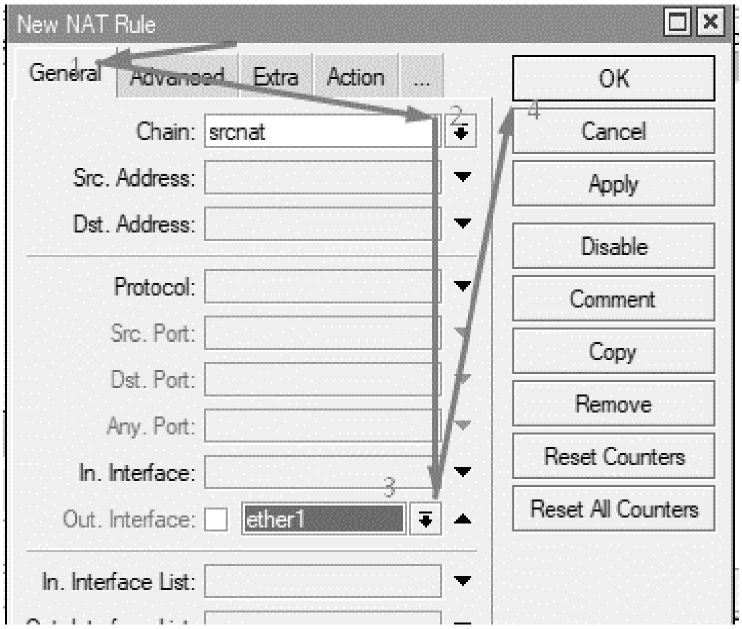
Лабораторная работа №3 (настройка DHCP-сервера, DNS-сервера)

1. Переходим в winbox в раздел IP → DHCP Server, нажимаем на значок DHCP Setup, в DHCP Adress Sourse прописываем 192.168.15.1/24 и нажимаем «ОК». DHCP сервер сконфигурирован, теперь каждому подключенному компьютеру к роутеру будет выдаваться ip–адрес из 15-ой подсети.

2. Переходим в раздел IP → DNS и в открывшемся окне вводим самые популярные DNS – сервера 8.8.8.8 и 1.1.1.1 (это DNS – сервера google и

yandex). Теперь наш роутер знает, что 82.179.130.5 – это https://math.tversu.ru.

3. Настроим интернет на роутере. Для этого в Winbox нужно перейти на вкладку IP → Firerwall, вкладка NAT, в chain выбрать srcnat, а во вкладке Out.Interface выбрать ether1, затем нажать «ОК».



В качестве проверки можно зайти на сайт математического факультета, и, если всё сделано правильно – он у вас откроется.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов С.А., Миловидов А.Е. Знакомство с криптографией на уроках информатики и ИКТ // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27–28 марта 2020 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2020. – С. 83 – 86.

2. Гаврилов Д.Б., Миловидов А.Е., Шестакова М.А. Знакомство школьников с принципами работы беспроводной компьютерной сети // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25 – 27 марта 2021 года, г. Тверь), с.42 – 45.

3. Линьков В. Всё об IP адресах и о том, как с ними работать // https://habr.com/ru/post/350878.

4. Маска подсети – как узнать: виды сетей // https://elcomienzo.ru/maska-podseti/

5. Что такое DNS-сервер – объясняем простыми словами // https://selectel.ru/blog/dns-server/

6.MikroTik Routers and Wireless // https://mikrotik.com.

УДК 378.14

ВЫВОДЫ ОБ ИТОГАХ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2021 ГОДУ

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *единый государственный экзамен, основные рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета.*

Аннотация. Публикуется часть статистико-аналитического отчёта о результатах государственной итоговой аттестации по образовательным программам среднего общего образования в Тверской области 2021 года.

В данной работе автор делится своими наблюдениями и выводами по результатам работы предметной комиссии, осуществляющей проверку экзаменационных работ участников ЕГЭ по математике (профильного уровня) в Тверской области в 2021 году.

«Единый государственный экзамен (ЕГЭ) – централизованно проводимый в Российской Федерации экзамен в средних учебных заведениях – школах, лицеях и гимназиях, форма проведения ГИА по образовательным программам среднего общего образования [1]. Служит одновременно выпускным экзаменом из школы и вступительным экзаменом в вузы… При проведении экзамена на всей территории России применяются однотипные задания и единые методы оценки качества выполнения работ. С 2009 года ЕГЭ является единственной формой выпускных экзаменов в школе и основной формой вступительных экзаменов в вузы, при этом есть возможность повторной сдачи ЕГЭ в последующие годы»[1].

Среди общих проблем выпускников средних школ Тверского региона следует отметить следующие [2]:

1) отсутствие у большого числа выпускников устойчивых вычислительных навыков;

2) отсутствие у большого числа выпускников базовой логической культуры;

3) значительные пробелы в геометрии.

Таким образом, необходимо усиление методической и учебной работы по рассмотрению тематики программы по математике, задания в рамках которой, вызывали затруднения у участников ЕГЭ.

Основной проблемой математического образования остаётся низкая мотивация учащихся к изучению предмета.

Тем не менее, усвоение всех элементов содержания, умений и видов деятельности школьниками региона в целом можно считать достаточным,

---

[1] https://clck.ru/BdSoG – Материал из Википедии – свободной энциклопедии.

показатели выполнения заданий всех элементов содержания – удовлетворительными.

Достаточно усвоенными всеми школьниками региона в целом можно считать следующие элементы содержания / умений и видов деятельности:

1.1. Выполнять арифметические действия, сочетая устные и письменные приемы; находить значения корня натуральной степени, степени с рациональным показателем, логарифма.

1.2. Вычислять значения числовых и буквенных выражений, осуществляя необходимые подстановки и преобразования.

1.3. Проводить по известным формулам и правилам преобразования буквенных выражений, включающих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции.

2.1. Решать рациональные, иррациональные, показательные, тригонометрические и логарифмические уравнения, их системы.

2.2. Решать уравнения, простейшие системы уравнений, используя свойства функций и их графиков; использовать для приближенного решения уравнений и неравенств графический метод.

3.1. Определять значение функции по значению аргумента при различных способах задания функции; описывать по графику поведение и свойства функции, находить по графику функции наибольшее и наименьшее значения; строить графики изученных функций.

5.1. Моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи; исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

6.2. Описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, прикладные задачи, в том числе социально-экономического и физического характера, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения.

Недостаточно усвоенными всеми школьниками региона в целом можно считать следующие элементы содержания / умений и видов деятельности:

3.3. Исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функции.

4.1. Решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей).

4.2. Решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы).

Особого внимания на протяжении многих последних лет требует элемент содержания «Уметь выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами».

Наблюдается существенное снижение процента выполнения заданий с развернутым ответом №№ 17, 18; повышение процента выполнения заданий с развернутым ответом №№ 15, 16, 19:

– № 15. Типичная ошибка в решении: ученик, выполнив замену переменного, получает квадратное неравенство и, не решив данного неравенства до конца, делает обратную замену (и/или отбор корней) на этапе нахождения вспомогательного квадратного уравнения. Кроме того, многие школьники так и не научились корректно решать рациональные неравенства методом интервалов. Также, вероятно, имеются очень приблизительные представления об обобщённом методе интервалов и грамотном оформлении решения этим методом.

– № 16. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли примерно в 3 раза. Связать это можно, скорее всего, с более простой задачей 2021 года. Можно сделать вывод о том, что лишь незначительный процент школьников усваивает материал по геометрии на хорошем уровне.

– № 17. С одной стороны, задача 2021 года проще задачи 2020 года: нет необходимости выполнять преобразования в общем виде (возможна работа с конкретными числовыми значениями), с другой стороны, ровно эти же обстоятельства могли сыграть злую шутку, поскольку неверные вычисления приводили к неверной математической модели.

Задания по геометрии № 14 (стереометрия) и № 16 (планиметрия), а также задания № 18 (задача с параметром) и № 19 – задания повышенного и высокого уровня сложности с наименьшими процентами выполнения (с процентом выполнения ниже 15%).

– № 18. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания снизились более, чем в 1,5 раза. Многие неверные решения содержали неточные рассуждения, связанные с областью допустимых значений подкоренного выражения.

– № 19. В сравнении с 2020 годом показатели выполнения задания выросли более, чем в 3,5 раза. Задача 2021 года оказалась проще, чем в 2020 году.

В заключение сформулируем тезисно основные рекомендации по совершенствованию организации и методики преподавания предмета в субъекте Российской Федерации на основе выявленных типичных затруднений и ошибок.

– Анализ результатов выполнения заданий ЕГЭ профильного уровня в 2021 году по математике показывает, что участники экзамена допускают большое количество вычислительных ошибок. Таким образом, на протяжении всех лет обучения математике в школе необходимо регулярно проводить работу с учащимися по совершенствованию вычислительных навыков, уделяя особое внимание рациональным способам вычислений.

– При подготовке учащихся к ЕГЭ необходимо большое внимание уделять навыкам самоконтроля и самопроверки выполненных заданий.

– Нередкие ошибки в решении заданий вызваны неверным прочтением условия задания. На уроке математики необходимо уделять достаточно времени развитию умений верного прочтения и точным интерпретациям условия и вопроса задачи, а также умений математически корректно записывать решение задания.

– У участников экзамена проверяются умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни, а также умение строить и исследовать простейшие математические модели. Поэтому при подготовке к экзаменам необходимо большое внимание уделять изучению практической, жизненно важной математики. Учащиеся должны научиться применять полученные знания в практической деятельности, быть способными анализировать, сопоставлять, делать выводы и уметь пользоваться справочными материалами.

– Большинство выпускников не смогли продемонстрировать навыки строгого и логичного доказательства геометрических утверждений, знаний свойств геометрических фигур и формул (задания № 14 и № 16). Необходимо продолжить работу над обучением школьников строгим доказательствам утверждений.

– Необходимо регулярно проводить диагностические работы, направленные на установление уровня подготовки обучающихся по отдельным темам и планирование дальнейшей работы с обучающимися с учётом полученных результатов. Для организации целенаправленной подготовки выпускников к ЕГЭ проводить контрольные и самостоятельные работы, используя структуру КИМ ЕГЭ по математике и материалы открытого банка заданий ЕГЭ по математике. Для успешного прохождения ГИА необходим дифференцированный подход в обучении математике.

– Необходимо ознакомить школьников с демонстрационным вариантом ЕГЭ 2022 года по математике, что позволит учащимся получить представление об уровне трудности и типах заданий предстоящей экзаменационной работы.

– Администрациям школ необходимо обеспечить прохождение всеми учителями соответствующей подготовки и их участие в методических мероприятиях, проводимых в регионе. При организации подготовки к ЕГЭ в 2022 году следует в рамках методических семинаров и ФПК учителей математики проанализировать используемые учебники и УМК в разрезе результатов ЕГЭ. Целесообразно организовать сетевое взаимодействие между школами, продемонстрировавшими высокие результаты, и учебными заведениями с низкими результатами ЕГЭ.

– Полезно не только знакомить родителей с текущей успеваемостью и результатами пробных испытаний их детей, но и своевременно информировать о нормативных документах по подготовке к ЕГЭ, самой процедуре проведения экзамена, а также методических рекомендациях и всевозможных доступных ресурсах.

– Необходимым условием успешной подготовки обучающихся к ЕГЭ является освоение учителем материалов, публикуемых ФИПИ (демонстрационного варианта, кодификатора элементов содержания и кодификатора требований к уровню подготовки, спецификации КИМ по математике), изучение заданий открытого банка, их систематизация, выделение основных способов решения различных классов заданий.

– Основной проблемой математического образования остаётся низкая мотивация учащихся к приобретению математических знаний. Органам управления образования, администрациям образовательных организаций, учителям необходимо усилить разъяснительную работу среди учащихся и родителей, направленную на популяризацию математического образования.

– Большую роль в обучении математике в школе играет квалификация педагога. Органам управления образования, администрациям образовательных организаций необходимо вести систематическую работу по подготовке новых педагогических кадров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Минобрнауки России от 26.12.2013 N 1400. legalacts.ru. Дата обращения: 7 марта 2022.

2. Пиджакова Л.М. Преподавание математики в школах Тверского региона / Сборник материалов в помощь учителю. Под. ред. Голубева А.А., Барановой О.Е. Тверь, 2019. С. 83-97.

УДК 004.946

МЕТОДИКА ПРЕПОДАВАНИЯ ИНФОРМАТИКИ ЧЕРЕЗ СОЗДАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЙ ДЛЯ ВИРТУАЛЬНОЙ РЕАЛЬНОСТИ

Горбатых Вячеслав Валерьевич
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
E-mail: icewation15@gmail.com

Беляева Ирина Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru

Ключевые слова: *Unity 3D, VR, Virtual reality, Game design, Юнити 3D, Виртуальная реальность, геймдизайн, геймификация, информатика, методика*

Аннотация. В работе рассматривается практический метод преподавания информатики, путём освоения нескольких IT дисциплин, погружение в разработку VR приложений и игр, когда каждое задание рассматривается как игровой квест с получением определённого опыта и результата. Выбирая психологический метод сокрытия общей сложности и количества заданий, мы вдохновляем ребят на изучение информационных технологий в той или иной сфере, делая упор на интерактив и геймификацию в обучении.

Создание и разработка технологий виртуальной реальности (VR) еще не преодолело состояние начальной фазы – поэтому именно в данный момент времени стоит начинать обучаться и обучать разработке в VR, чтобы максимально увеличить возможность создания такого контента. Придумать захватывающие миры и среды, максимально оптимизировать их с возможностью взаимодействия в трех измерениях, а также с окружающей средой. Порог вхождения в данное направление IT технологий все еще крайне низок, однако вновь прибывшему придется разобраться с 3D-моделированием, сканированием, анимированием, редакторами и движками 3D-игр, панорамными фотографиями и видео. Обязательно знание языков программирования C, C++, C#, комплектов для разработки программного обеспечения (SDK).

Мы начали с малого: разработав и внедрив программу дополнительного образования «Новый свет», я начал обучать учеников базовым принципам 3D моделирования, программирования, анимации, геймдизайна и т. д. Это можно назвать подготовительным этапом.

Все эти действия были также направлены на геймификацию подобного обучения, чтобы интерес детей и подростков не был утрачен с появлением более сложных заданий.

«Я создаю мотивацию посредством самой игры: продвижение в рейтинге, получение сертификатов о завершении курса, получение дополнительного опыта, повышения уровня персонажа и т. д. Ведь через некоторое время ребята сами не замечают, как активно начинают использовать полученные навыки уже без интерактивной системы» (рис. 1 и рис. 2). [1]

Рис 1. Обучение курсу программирования на C++ разновозрастной группы

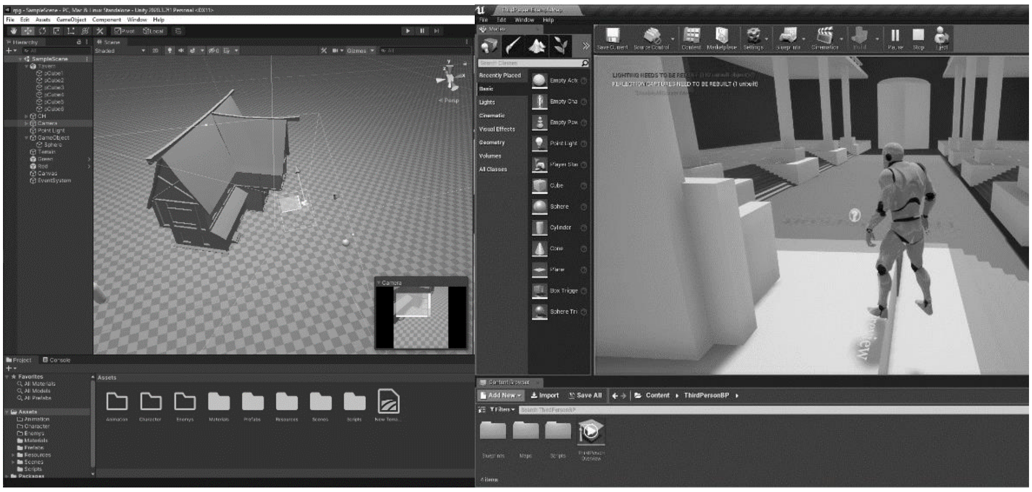


Рис 2. Обучение курсу моделирования и анимации разновозрастной группы

Когда получены базовые знания, ребята получают достижение и разблокируют следующий этап курса. На данном этапе они получают три базовых задания: ознакомится с игровым движком (средой разработки), понять, что такое виртуальная реальность и как она взаимодействует с окружением, и последнее – окунуться в виртуальную реальность. Для разработки приложений и игр для виртуальной реальности необходим ряд аппаратного обеспечения определённых характеристик.

Аппаратное обеспечение

Виртуальная реальность и вся 3D-разработка повсеместно использует весьма производительное оборудование. Изучив требования двух самых популярных платформ VR (HTC Vive и Oculus Rift), мы увидим их схожесть. Рекомендуемые технические характеристики компьютера:

- Процессор: Intel Core i5-4590 или AMD FX 8350.
- Видеокарта: NVIDIA GeForce GTX 1060 или AMD Radeon RX 480 и выше.
- Оперативная память: 8 ГБ и выше.
- Порты: 3x USB 3.0.
- Операционная система: Windows 7 или выше.

У нас в распоряжении менее мощное оборудование, однако же это не мешает нам активно заниматься изучением разработки VR приложений и игр. На текущий момент в нашем распоряжении имеется два шлема виртуальной реальности фирмы Oculus компьютер с многопоточной материнской платой и процессором и две видеокарты GeForce GTX 1650.

Этого вполне достаточно для разработки.

Устройства виртуальной реальности

Устройства VR (шлема или очки) классифицируются по степени свободы (DOF или Degrees of freedom), т. е. по способу перемещения объекта. На текущий момент есть всего два варианта: 3-DOF и 6-DOF. Три степени свободы означают, что вы сможете взаимодействовать с виртуальным миром в трех измерениях (в системе координат X, Y, Z) с помощью головного дисплея (HMD), но не сможете двигаться вперед или назад. С шестью степенями свободы двигаться получится во всех шести направлениях.

После знакомства с устройством (рис. 3) мы начинаем изучение его возможностей через среду разработки Unity 3D.

Рис. 3. Знакомство с VR устройством

Создание первого VR-проекта

Наш чек лист выглядит так:

Создаем тестовый VR проект в Unity с геометрическим примитивом, с которым мы будем взаимодействовать в VR.

Шаг 1: создаём новый пустой проект с главного экрана Unity.

Шаг 2: выбираем в качестве платформы для использования необходимую платформу, посетив File>BuildSettings из верхнего меню.

Шаг 3: создаём новый графический примитив (GameObject> 3D Object>) и распологаем его перед базовой камерой по умолчанию в новой пустой сцене с помощью инструмента Translate.

Шаг 4: сохраняем сцену (файл > сохранить сцену).

Шаг 5: переходим в Edit>ProjectSettings>Player и устанавливаем флажок, чтобы включить "виртуальная реальность поддерживается".

Шаг 6: входим в режим воспроизведения, нажав Play в верхней части интерфейса.

Теперь мы просматриваем свою сцену через VR устройство, с одной камерой, зеркально отраженной на игровом виде.

После изучения базовых шагов мы начинаем более глубоко погружаться в принципы работы VR устройства, его степеней свободы, а также работы его контроллеров (рис. 4).

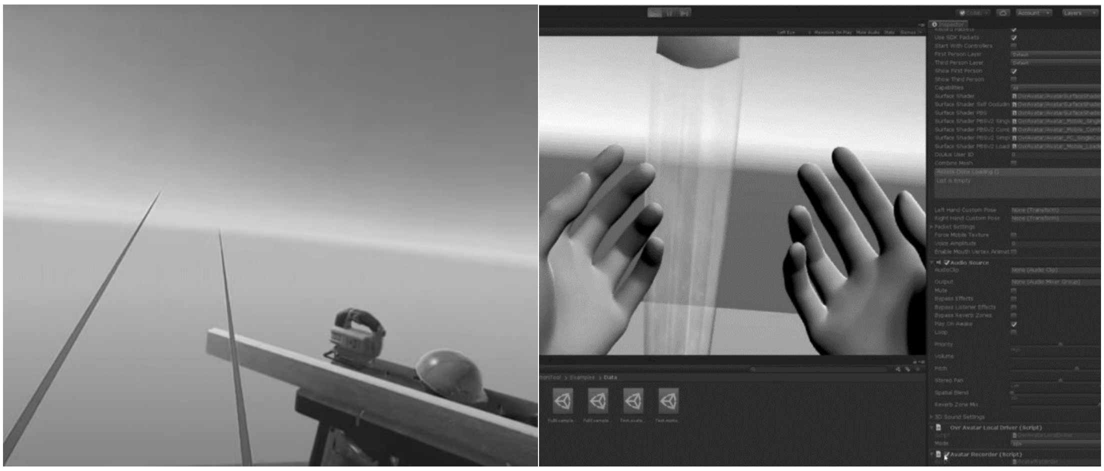


Рис. 4. Изучение работы контроллеров

От простого к сложному

Методы обучения с применением образовательной VR нельзя назвать обычными. Традиционное обучение требует от обучающегося высокой степени личной заинтересованности, принятия личной ответственности, кропотливой работы зачастую в условиях личностной автономии, с обычными источниками информации, нередко требующими дополнительного разъяснения.

В то же время обучение в условиях образовательной VR позволяет моделировать сложную визуально-пространственно-слуховую среду, со множеством стимулов и возможностью погружения в транслируемый с различными воплощениями материал, с возможностью осуществления действий с виртуальными предметами и объектами, содействующими получению сложного опыта. Так, например, в работах В. Селиванова отмечается, что процесс обучения, организованный в адекватной VR, создает эффективную дидактическую среду с широкими возможностями, продуцирующую качественно новые свойства, не содержащиеся в традиционных методах [2].

Как я упоминал ранее ребята начинают свой путь с простого знакомства с VR устройствами. Однако позднее они начинают втягиваться в среду разработки, начинают больше читать и искать альтернативные варианты решение каких-либо поступающих при разработке проблем.

Однако никто не отменял простого алгоритма, при помощи которого обучающиеся не теряют мотивацию вне зависимости от трудности освоения материала или усталости после основной учебы.

Все задачи я подразделяю на блоки. В каждом блоке имеется по три задания, которые обучающиеся могут выполнить.

Выглядит это примерно так:

Рис. 5 Задания в игре WarCraft III

Я всегда сравниваю процесс постановки задач с игрой WarCraft III, и сейчас скажу почему. Представьте себе школьные задачи по алгоритмам, от которого у обычных учеников (не всех) челюсть сводит от количества тем, что им необходимо выучить и разобрать

Сведём это к заданиям – Изучены темы: 0 из 30.

Согласитесь, изучать 30 тем, пыхтеть над каждым параграфом – неимоверная мука для молодого организма, которому не очень-то и хочется учиться. Однако, если мы разобьём эти темы на блоки, а в блоках определимся с тремя заданиями, которые можно и нужно выполнить сейчас, скрыв от обучающегося настоящее количество тем – он будет выполнять эти темы с каждым блоком всё увереннее и увереннее, всё потому – что он видит прогресс и результат своих действий. Этот подход я применяю уже почти год, и с уверенностью могу сказать, что 75% моих учеников всё также заинтересованы в обучении и изучении VR разработки, как прикладной тематике по информационным технологиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляева И.Н., Горбатых В.В. НИУ БелГУ, факультет математики и естественнонаучного образования, кафедра информатики, естественнонаучных дисциплин и методик преподавания, Геймификация, как реалии мотивационного обучения в современное время. Теория и практика. Информационные технологии в современном естественнонаучном образовании [Электронный ресурс] https://www.fond21veka.ru/publication/?download_file=206978 (дата обращения: 13.03.2022).

2. Барабанщиков В.А., Селиванов В.В. Взаимодействие субъекта и виртуальной реальности: психическое развитие и личностная детерминация [Электронный ресурс]: монография / Под ред. В.А. Барабанщикова, В.В. Селиванова. М: Универсум, 2019. 479 с. URL: http://www.psychlib.ru/inc/absid.php?absid=392124 (дата обращения: 13.03.2022).

3. Войскунский А.Е. Психология и интернет. М.: Акрополь, 2010. – 439 с.

4. Ермаков С.С. Современные технологии электронного обучения: анализ влияния методов геймификации на вовлеченность учащихся в образовательный процесс // Современная зарубежная психология. 2020. Том 9. № 3. С. 47—58. DOI:10.17759/jmfp.2020090304

5. Когнитивный контроль и чувство присутствия в виртуальных средах / Б.Б. Величковский [и др.] // Экспериментальная психология. 2016. Том 9. № 1. С. 5—20. DOI:10.17759/exppsy.2016090102

6. Селиванов В.В. Психология виртуальной реальности [Электронный ресурс]: учебное пособие / Под ред. В.В. Селиванова. Смоленск: Издательство СмолГУ, 2015. 152 с. URL: http://www.psychlib.ru/inc/absid.php?absid=392127 (дата обращения: 13.03.2022).

УДК 517.54

ГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ С ЗАДАННЫМ ЯКОБИАНОМ

Граф Сергей Юрьевич
Тверской государственный университет, г. Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

Никитин Иван Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ianikitin20@gmail.com

Ключевые слова: *гармонические функции, супергармонические функции, якобиан.*

Аннотация. В данной заметке формулируется задача о восстановлении гармонической функции по заданному якобиану, рассматривается частный случай поставленной задачи, а также доказывается супергармоничность натурального логарифма якобиана гармонических функций в области, где функция сохраняет ориентацию.

Якобиан гармонических функций и его свойства играют важную роль в комплексном анализе и геометрической теории функций. Например, известно, что *гармоническая в области функция локально однолистна тогда и только тогда, когда якобиан этой функции не обнуляется в данной области* $[1, 2]$. Также якобиан играет заметную роль в теории особенностей гармонических функций. Особенности (катастрофы) в свою очередь влияют на листность функции на всей комплексной плоскости $[3-6]$. Более того, до сих пор остается нерешенной проблема якобиана, поставленная в 1939 г. О.Келлером. $[7]$.

Введём обозначения и напомним термины, с которыми придется иметь дело в рамках данной работы.

Пусть D – непустая односвязная область комплексной плоскости. Дважды непрерывно дифференцируемая комплекснозначная функция $f(z)$, определенная и удовлетворяющая в D уравнению Лапласа $f_{z\bar{z}} \equiv 0$, называется *гармонической*. Известно, что всякая гармоническая функция в односвязной области D представима в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где $h(z), g(z)$ – голоморфные в D функции. *Якобиан* гармонической функции имеет вид: $J_f(z) \coloneqq |h'(z)|^2 - |g'(z)|^2$. Дважды непрерывно дифференцируемая вещественнозначная функция $f(z)$, определенная и удовлетворяющая в D неравенству $f_{z\bar{z}} \leq 0$, является *супергармонической* $[8]$.

Перейдём к постановке задачи.

Пусть известна вещественнозначная функция J_f, определённая в D. Требуется описать класс гармонических функций $f = h + \bar{g}$, якобиан которых совпадает с функцией J_f в D.

Очевидно, что решение задачи не единственно. Именно, если f является решением задачи, то функция $\hat{f} = e^{i\alpha} f + c$ также является её решением. Поэтому далее будем пренебрегать сдвигами и поворотами.

Следует также заметить, что, вообще говоря, функция J_f не является произвольной. В области D, где f сохраняет ориентацию ($J_f > 0$), функция $\ln J_f$ обязана быть супергармонической. Покажем это.

Так как $J_f > 0$, то $|h'| > |g'| \geq 0$, и, следовательно, имеет место равенство

$$\ln J_f = \ln|h'|^2 + \ln(1 - |\omega|^2), \tag{1}$$

где $\omega = \frac{g'}{h'}$ – голоморфная в D функция, $|\omega| < 1$. Продифференцируем левую и правую части равенства (1) по z и по $\bar{z}$. Получим следующее равенство

$$\left(\ln J_f\right)_{z\bar{z}} = (\ln|h'|^2)_{z\bar{z}} + (\ln(1 - |\omega|^2))_{z\bar{z}},$$

в котором первое слагаемое в правой части тождественно равно нулю в силу свойств модуля голоморфной функции. Далее,

$$\left(\ln J_f\right)_{z\bar{z}} = (\ln(1 - |\omega|^2))_{z\bar{z}} = \left(\frac{-\omega'\overline{\omega}}{1 - |\omega|^2}\right)_{\bar{z}} = -\frac{|\omega'|^2}{(1 - |\omega|^2)^2} \leq 0,$$

т.е. для любых $z \in D$ справедливо неравенство $\left(\ln J_f\right)_{z\bar{z}} \leq 0$, что и означает супергармоничность функции $\ln J_f$ в D.

Для решения поставленной выше задачи можно использовать следующий метод.

Прологарифмируем равенство $|h'|^2 = J_f + |g'|^2$, после чего продифференцируем по z и по $\bar{z}$. Получим следующее равенство

$$\left(J_f\right)_{z\bar{z}} + |g''|^2 = \frac{\left|\left(J_f\right)_z + g''\overline{g'}\right|^2}{J_f + |g'|^2}, \tag{2}$$

которое можно рассматривать в качестве дифференциального уравнения относительно неизвестной функции g.

Если функция g является решением уравнения (2), то подставим выражение для функции g в равенство $|h'|^2 = J_f + |g'|^2$. Таким образом, остается лишь найти голоморфную функцию h при условии, что известен её модуль.

Рассмотрим частный случай поставленной задачи, а именно: якобиан обладает тем свойством, что $\left(J_f\right)_{z\bar{z}} \equiv c \neq 0$.

Продифференцируем равенство $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ по z и по $\bar{z}$ и полученное равенство перепишем в следующем виде

$$|h''|^2 = c + |g''|^2. \tag{3}$$

Прологарифмируем обе части последнего равенства и повторно продифференцируем по z и по $\bar{z}$, после чего получим

$$\frac{c \cdot |g'''|^2}{(c + |g''|^2)^2} \equiv 0. \tag{4}$$

Так как $c \neq 0$, то из (4) следует, что $g(z) = \alpha z^2 + \beta z + \gamma$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$. В силу договорённости можно считать, что $\gamma = 0$.

Подставим $g'' = 2\alpha$ в (3). С учётом подстановки из (3) следует, что $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{2}\sqrt{c + 4|\alpha|^2} z^2 + \delta z + \varepsilon$, где $\delta, \varepsilon \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{R}$. Также в силу договорённости можно считать, что $\varepsilon = \theta = 0$.

Подставим в равенство $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ выражения для h' и g' :

$$\left| e^{i\theta}\sqrt{c + 4|\alpha|^2} z + \delta \right|^2 - |2\alpha z + \beta|^2 = J_f. \tag{5}$$

В силу условия $\left(J_f\right)_{z\bar{z}} \equiv c$ существует такая голоморфная в D функция $F(z)$, что $J_f = c|z|^2 + Re\,F(z)$. Найдём вид функции $F(z)$. Для этого распишем обе части равенства (5):

$$(c + 4|\alpha|^2)|z|^2 + |\delta|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\sqrt{c + 4|\alpha|^2}\bar{\delta} z\right) -$$
$$-4|\alpha|^2|z|^2 - |\beta|^2 - 4\,\mathrm{Re}\left(\alpha\bar{\beta} z\right) = c|z|^2 + \mathrm{Re}\,F(z).$$

После приведения подобных в последнем равенстве получим

$$\mathrm{Re}\left(\left(2e^{i\theta}\sqrt{c + 4|\alpha|^2}\bar{\delta} - 4\alpha\bar{\beta}\right) z + |\delta|^2 - |\beta|^2\right) = \mathrm{Re}\,F(z),$$

т.е.

$$F(z) = \left(2e^{i\theta}\sqrt{c + 4|\alpha|^2}\bar{\delta} - 4\alpha\bar{\beta}\right) z + |\delta|^2 - |\beta|^2 + i\nu,$$

где ν можно положить равным нулю.

Таким образом, в рассматриваемом случае якобиан гармонической функции зависит в общей сложности от трёх параметров:

$$c \in \mathbb{R}, \qquad A = 2e^{i\theta}\sqrt{c + 4|\alpha|^2}\bar{\delta} - 4\alpha\bar{\beta} \in \mathbb{C}, \qquad B = |\delta|^2 - |\beta|^2 \in \mathbb{R},$$

а функция f имеет вид

$$f = \frac{\sqrt{c + 4|\alpha|^2}}{2} z^2 + \delta z + \overline{\alpha z^2 + \beta z},$$

где коэффициенты α, β, δ могут быть найдены из системы

$$
\begin{cases} A = 2\sqrt{c + 4|\alpha|^2}\bar{\delta} - 4\alpha\bar{\beta}, \\ B = |\delta|^2 - |\beta|^2, \\ c + 4|\alpha|^2 \geq 0. \end{cases} \tag{6}
$$

Всюду выше мы предполагали, что $c \neq 0$. Однако, случай, когда якобиан является функцией гармонической (т.е. $\left(J_f\right)_{z\bar{z}} \equiv c = 0$), вызывает отдельный интерес. Рассмотри этот случай в качестве примера.

Положим $c = 0$, $A = \alpha = 1$ и $B = 0$. Тогда функция f примет вид

$$
f_0 = 2\,\mathrm{Re}\,z^2 + \delta z + \overline{\beta z}.
$$

Будем искать решения системы (6) среди действительных δ, β:

$$
\begin{cases} \delta - \beta = \dfrac{1}{4}, \\ |\delta|^2 - |\beta|^2 = 0. \end{cases}
$$

Очевидно, что пара $(\delta, \beta) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ является решением последней системы.

Итак, $f_0 = 2\,\mathrm{Re}\,z^2 + \frac{1}{8}z - \frac{1}{8}\bar{z}$ – одна из функций, удовлетворяющих системе. Её якобиан $J_{f_0} = \mathrm{Re}\,z$, а лапласиан якобиана $\left(J_{f_0}\right)_{z\bar{z}} \equiv 0$.

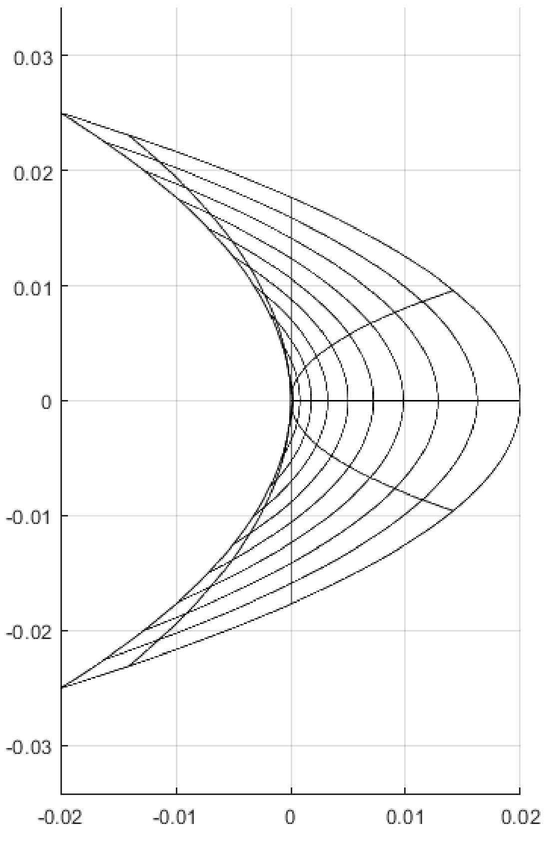


Рис. 1. Образ полярной сетки в круге $|z| \leq 0.1$ при отображении f_0.

На Рис. 1 приведен образ полярной сетки в круге $|z| \leq 0.1$ при отображении f_0. Наблюдается складка, являющаяся образом нулевой линии якобиана – мнимой оси. Функция f_0 является двулистной в $\mathbb{C}$ и однолистной в каждой из полуплоскостей слева и справа от мнимой оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления*: Учебник. В 3-х тт. Т. 1. – 13-е изд., стер. – СПб.: Издательство «Лань», 2019. – 608 с.: ил.

2. Duren, P. L. *Harmonic mappings in the plane* // P. L. Duren. – Cambridge University Press, 2004. – 212 pp

3. Lizzaik A. *A local properties of light harmonic mappings* // Canad. Math. J. 1992. V. 44, N 12. p. 135 – 153.

4. Голубев А.А. *Об особых точках плоских гармонических отображений* // В сборнике: Применение функционального анализа в теории приближений. Сборник научных трудов. Министерство общего и профессионального образования Российской Федерации Тверской государственный университет. Тверь, 1997. С. 47-52.

5. Граф С.Ю., Никитин И.А. *К теореме Гурвица для гармонических функций* [статья] // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25-27 марта 2021 года, г. Тверь). – Тверь: Тверской государственный университет, 2021. – 224 с.

6. Граф С.Ю., Никитин И.А. *Аналоги неравенств С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова для гармонических многочленов* // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. – №2. – Тверь: Издательство Тверского государственного университета, 2021. – 84 с.

7. Кострикин А. И. *Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры: Учебник для вузов. – 3-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.*

8. Хейман У., Кеннеди П. *Субгармонические функции*: монография // под ред. Е. Д. Соломенцева. – Текст: непосредственный. – Москва: издательство «Мир», 1980. – 304 с.

УДК 372.851

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Гусейнов Рустам Гусейнович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: guseynov_rustam29017@mail.ru

Баранова Ольга Евгеньевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Baranova.OE@tversu.ru

Ключевые слова: *перпендикулярность прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью, призма, прямоугольник.*

Аннотация. Некоторые современные школьники сталкиваются с такой проблемой, что они не знают с чего начать решать задачу. Поэтому рассмотрим задачи с подсказками, которые могут уменьшить стресс у ребенка, когда он видит задачу и не понимает, что с ней делать. Такие задачи помогают не только в образовательных целях, но и в психологических. В статье рассмотрим некоторые из них.

Задачи с подсказками на тему: «Перпендикулярность прямой и плоскости»

Задача №1. $ABCD$ – прямоугольник. Отрезок AE перпендикулярен плоскости ABC, $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$. Докажите, что треугольник EDC – прямоугольный, и найдите AE. [1]

Дано: $ABCD$ – прямоугольник,
$AE \perp ABC$, $EB = 15$, $EC = 24$, $ED = 20$.
Докажите, что $\triangle EDC$ – прямоугольный.
Найдите AE.

Указания для доказательства

1. Построить чертеж (см. рис. 1).
2. Обнаружить, что прямая $AB \perp EA$ и $AB \perp AD$.
3. Доказать, что прямая $AB \perp (AED)$.
4. Вспомнить свойство прямоугольника и вывести, что $AB \parallel DC$. Доказать, что прямая DC перпендикулярна плоскости AED.
5. Из доказанного в пункте 4 получить, что $DC \perp ED$.
6. Выяснить, что $\triangle EDC$ – прямоугольный.

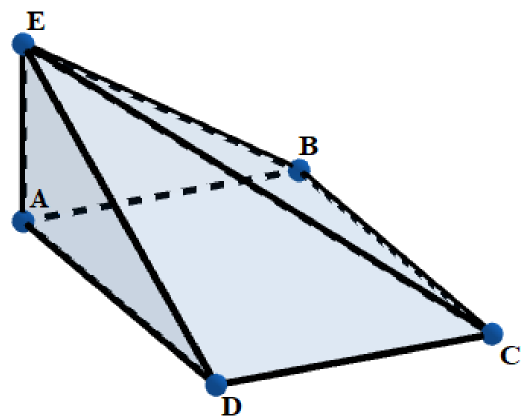


Рис. 1

Указания для решения

Способ №1.

1. Из определения прямоугольника получить, что $BC \perp AB$.
2. Из определения перпендикулярности прямой и плоскости получить, что $BC \perp AE$.
3. Воспользоваться признаком перпендикулярности прямой и плоскости получить, что $BC \perp (AEB)$.
4. Снова воспользоваться определением перпендикулярности прямой и плоскости и получить, что $BC \perp BE$, а затем определить, что $\triangle EBC$ – прямоугольный.
5. По теореме Пифагора из $\triangle EBC$ найти BC.
6. Воспользовавшись свойством прямоугольника получить, что $AD = BC$.
7. Из определения перпендикулярности прямой и плоскости получить, что $EA \perp AD$, а затем обнаружить, что $\triangle EAD$ – прямоугольный.
8. По теореме Пифагора из $\triangle EAD$ найти AE.

Способ №2.

1. Пусть $AD = a$, $AB = b$, $AC = c$, $AE = h$.
2. Составить систему из 3-х уравнений. Написать первое уравнение для $\triangle ABE$, второе уравнение для $\triangle ACE$, третье уравнение для $\triangle ADE$ (для составления уравнений использовать теорему Пифагора).
3. Решить систему относительно h и найти AE.

Задача №2. Дан прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), $E \in BC$, $EM \perp (ABC)$. Докажите, что $AC \perp MB$. [1]

Дано: $\triangle ABC$ – прямоугольный,
$\angle C = 90^\circ$, $E \in BC$, $EM \perp (ABC)$.

Докажите, что $AC \perp MB$.

Указания

1. Сделать чертёж (см. рис. 2).
2. Воспользоваться определением перпендикулярности прямой и плоскости и получить, что $AC \perp ME$.
3. Найдите ещё одну прямую в плоскости BME, которой перпендикулярна прямая AC.
4. Доказать, что $AC \perp (MBE)$.
5. Докажите, что $AC \perp MB$.

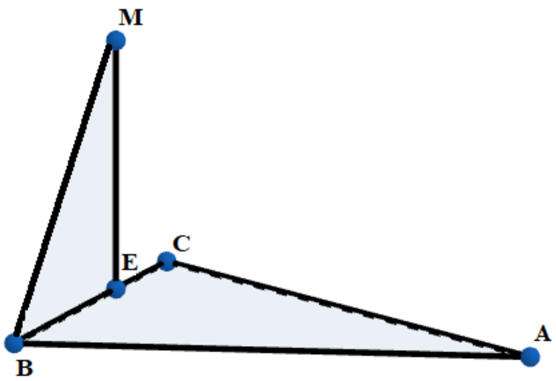


Рис. 2

Задача с подсказками на тему: «Правильная призма»

Задача №3. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ каждая из сторон основания равна $\frac{2\sqrt{3}}{3}$, а боковое ребро $2\sqrt{3}$, M – центр грани CC_1B_1B. Найдите угол между прямой AM и плоскостью основания. [1]

Дано: $ABCA_1B_1C_1$ – правильная треугольная призма, $AB = BC = AC = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $AA_1 = 2\sqrt{3}$, M – центр грани CC_1B_1B.

Найдите угол между прямой AM и (ABC).

Указания

Построение.

1. Построить правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$ и определить центр грани CC_1B_1B через точку M (см. рис. 3).

2. Вспомнить, как определяется угол между прямой и плоскостью.

3. Определить угол между MA и (ABC)

- Выполнить дополнительное построение. Провести прямую MO ($MO \cap AB = O$) параллельно прямой BB_1 (см. рис. 4).
- Рассмотреть прямые MO и BB_1 и определить взаимное расположение прямых MO и BC.

Решение

1. Рассмотреть $\triangle BB_1C$ и найти длину MO.

2. Рассмотреть $\triangle ABC$ и найти длину AO.

3. Через определение тангенса найти угол между AM и (ABC), т.е. $\angle MAO$.

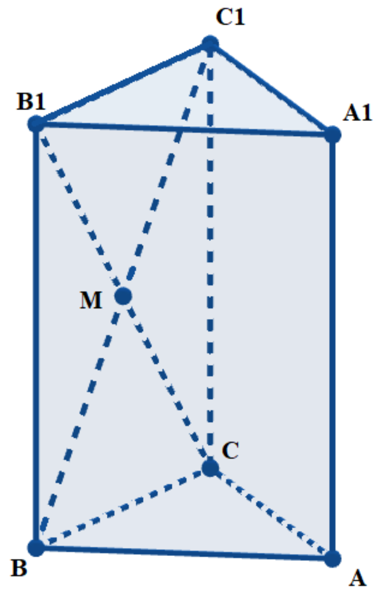


Рис. 3

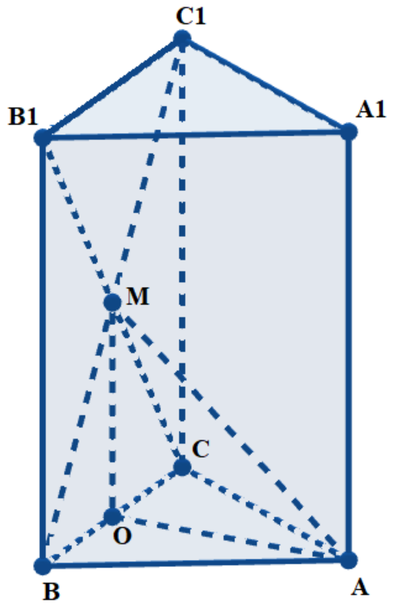


Рис. 4

Задача №4. В правильной четырехугольной призме каждая из сторон основания равна 4 см. Через диагональ основания под углом 45 градусов к плоскости основания проведена плоскость, пересекающая боковое ребро. Найдите площадь сечения. [1]

Дано: $ABCDA_1B_1C_1D_1$ – правильная четырехугольная призма, $AB = BC = CD = AD = 4$ см, $\alpha \cap (ABC) = BD,\ \alpha \cap AA_1 = F$. Угол между плоскостями (BFD) и (BAD) равен 45°.

Найдите $S_{\text{сечения}}$.

Указания

Вспомнить, как находится угол между плоскостями.

Решение

1. Опустить перпендикуляр FO на BD и доказать, что AO перпендикулярна BD (см. рис. 5).
2. Рассмотреть $\triangle\, FAB$ и $\triangle\, FAD$ и определить вид $\triangle\, BFD$.
3. Выяснить, чем ещё является FO в $\triangle\, BFD$ и определить точку O на отрезке BD.
4. Из предыдущего пункта получить, что AO является высотой $\triangle\, BDA$.
5. Доказать, что $\angle FOA$ является искомым.
6. Найти длину отрезка AO.
7. Установить взаимосвязь между отрезком AO, FO и $\angle FOA$.
8. Найти $S_{\text{сечения}}$.

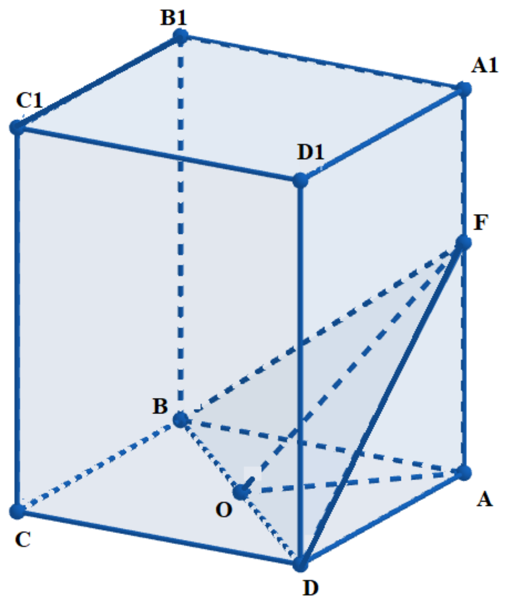


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Г. Зив Дидактические материалы 10 класс. Учебное пособие для общеобразовательных организаций. Базовый и углубленный уровни. 17-е издание. – Москва, «Просвещение». 2018.

УДК 37.018.5

РОЛЬ ЭЛЕКТРОННОГО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСА ДИСЦИПЛИНЫ В ДИСТАНЦИОННОМ ФОРМАТЕ ОБУЧЕНИЯ

Зернова Алина Сергеевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
E-mail: 1251647@bsu.edu.ru

Беляева Ирина Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
E-mail: ibelyaeva@bsu.edu.ru

Ключевые слова: *электронный учебно-методический комплекс дисциплины, дистанционное обучение, электронные образовательные ресурсы, процесс обучения,*

Аннотация. В статье рассматривается понятие электронного учебно-методического комплекса, его роль и значение в формате онлайн обучения. А также в данной работе раскрываются особенности дистанционного режима работы и его интегрированность в учебный процесс.

Дистанционная форма работы уже доказала свою эффективность и практичность. На данный момент, дистанционный формат обучения используется во многих областях: компаниями и организациями в переподготовке кадров и повышения их квалификации, вузами в подготовке студентов по направлениям дополнительного и основного образования, школами для профильного обучения учащихся и др. Обучение на дому, дает возможность сэкономить время на дорогу до образовательного учреждения и обратно, учащиеся имеют возможность самостоятельно выстраивать индивидуальный график занятий, задействуются различные цифровые технологии (онлайн-платформы, интерактивные ресурсы), которые делают процесс обучения разнообразным и интересным, а вся информация находится в открытом доступе. Кроме того, дистанционный режим обучения уменьшает нагрузку на преподавателя, так как существует возможность заранее записать лекцию на видео-носитель и использовать данный материал с несколькими группами учеников. А компьютер легко автоматизируют затратный по времени процесс проверки домашнего задания, сводя просмотр каждого выполненного задания к простому механизму сравнения ответов с готовым шаблоном.

Дистанционное обучение давно уже является частью образовательного процесса. Многие вузы, профессиональные училища, учреждения дополнительного образования активно ведут разработки и попытки внедрения различных электронных ресурсов, курсов, баз, предоставляющих учащимся доступ к необходимой информации и возможность освоить соответствующие дисциплины.

На данный момент существует огромное количество электронных образовательных ресурсов. Однако для организации продуктивного образовательного процесса необходимо сразу несколько составляющих:

– коммуникация между участниками образовательного процесса в режиме реального времени;

– доступ к электронным учебным пособиям и библиотекам для самостоятельного изучения нового материала;

– практикум для закрепления изученного материала (лабораторные и практические задания);

– обратная связь;

– система мониторинга успеваемости обучающихся [5].

Из-за недавних событий, связанных с пандемией COVID-19, большинство образовательных учреждений было вынужденно перейти полностью на дистанционный формат обучения. В короткие сроки им требовалось изменить традиционную модель обучения и подстроить её под новый режим работы в онлайн. Многие вузы приняли решение использовать бесплатные онлайн-платформы и курсы, разработанные ведущими российскими и зарубежными компаниями. Однако практика показала, что бесплатный доступ не предполагал обратной связи с разработчиками курсов, а педагогам, не имевшим достаточной информации и навыков работы с подобными ресурсами, приходилось осваивать курс параллельно со студентами. К тому же материал, предоставленный онлайн платформами, лишь частично схож с обязательной программой вузов и не подлежит корректировке [4].

В отличие от уже готовых оналйн курсов, в которые невозможно внести изменения, электронный учебно-методический комплекс дисциплины (ЭУМКД) составляется самим педагогом и объединяет в себе все необходимые для успешного обучения компоненты. ЭУМКД – это совокупность учебно-методических материалов, способствующих эффективному усвоению обучающимися дисциплины, в том числе и в ходе самостоятельной работы [1].

Как правило, в состав ЭУМКД входят:

1. Теоретический материал (лекции), содержащий полный объем информации, согласно учебному плану.

2. Практический модуль, включающий лабораторные и практические задания, направленные на закрепление и отработку пройденного материала.

3. Тестовая часть, служащая проверкой сформированности компетенций.

4. Ресурс для осуществления обратной связи в случае возникновения затруднений и вопросов (чат или ссылка на видеоконференцию).

5. Система оценки деятельности учащихся (балльно-рейтинговая система, портфолио и т.д.).

6. Инструкции и методические указания к каждому представленному разделу.

7. Дополнительные материалы (аудио, видеофайлы, презентации, схемы) [2].

ЭУМКД имеет четкую структуру и разрабатывается на базе единой платформы (Moodle, iSpring Learn, Teachbase, Memberlux и др.), но это не ограничивает возможности педагога в использовании сторонних ресурсов. Например, приложений для организации оналайн-занятий в режиме реального времени (Skype, Zoom, Facebook Live), онлайн-тренажеров для отработки заданий (LearningApps, Kubbu, Quizlet), сервисов обратной связи (почта mail.ru, google-формы), интерактивных досок для совместного использования (MIRO, Webwhiteboard, Twiddla) и других сервисов или приложений. Эти элементы легко можно интегрировать в ЭУМКД, просто добавив гиперссылку на ресурс.

Дистанционное обучение требует от обучающихся высокого уровня самостоятельности, самоконтроля, навыков критического мышления и организации своей деятельности. Электронный ресурс должен служить базой, из которой учащиеся смогут извлекать знания самостоятельно. Он должен быть простым и интуитивно понятным, содержать актуальную и достоверную информацию и задействовать разнообразные формы работы. ЭУМКД отвечает всем этим требованиям.

Кроме того, ЭУМКД предоставляет возможность дифференциации обучения путем разделения заданий по их сложности и с учетом индивидуальных особенностей учеников. А также не стоит забывать, что работа в домашних условиях понижает уровень мотивации и заинтересованности учеников в образовательном процессе, а ЭУМКД за счет возможности включения в программу интерактивных элементов, наглядности (видео или презентации вместо печатного текста), заданий творческого характера, помогает в формировании познавательной активности и мотивации к изучению дисциплины [3].

ЭУМКД обеспечивает непрерывность и полноту процесса обучения, предоставляя учащимся необходимый для усвоения теоретический материал, организуя его закрепление, контроль и обратную связь с педагогом. А также, применение его в процессе дистанционного обучения развивает навыки самостоятельней работы у учащихся, повышает их уровень мотивации за счет использования различных форм работы и включения информационных технологий, и при этом помогает осуществлять оценку полученных знаний и умений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Положение ПП-3 об электронном учебно-методическом комплексе дисциплины для системы электронного обучения «Пегас» от 28.01.2019 НИУ БелГУ. С. 2.

2. Михеева Т.В. ЭУМКД как одна из современных форм организации учебного процесса вуза// Педагогика, психология, общество: современные тренды: материалы Всерос. науч.-практ. конф. с международным участием (Чебоксары, 24 апр. 2020 г.). 2020. С. 107–110.

3. Татаринцев А. И. Электронный учебно-методический комплекс как компонент информационно-образовательной среды педагогического вуза// Теория и практика образования в современном мире: материалы I Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, февраль 2012 г.). 2012. Т. 2. С. 367–370.

4. Судакова О. Н. Электронный учебно-методического комплекс как средство реализации дистанционного обучения// Молодой ученый. 2019. № 22 (260). С. 459–461.

5. Черкасова И. В. Особенности электронного учебно-методического комплекса дисциплины при дистанционной форме// Теория и практика образования в современном мире: материалы V Междунар. науч. конф. (г. Санкт-Петербург, июль 2014 г.). 2014. С. 231–233.

УДК 521.81

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНТРАЛЬНОГО ПОЛНОГО ЛУННОГО ЗАТМЕНИЯ

Иванов Виктор Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *полное лунное затмение, конус земной тени, продолжительность и фаза центрального полного лунного затмения*.

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель центрального полного лунного затмения. Получены формулы для определения длины конуса земной тени и диаметра его нормального сечения на заданном расстоянии Луны от Земли. Обсуждаются изменения продолжительности центрального полного лунного затмения и его наибольшей фазы в зависимости от положения Луны и Земли на эллиптических орбитах. Показано соответствие результатов моделирования и данных наблюдений.

Тема «Луна и затмения» изучалась в курсе астрономии и астрофизики студентами третьего курса направления подготовки «Математика и компьютерные науки» (профиль «Математическое и компьютерное моделирование»). Многие задания предусматривали математическое моделирование астрономических явлений, среди которых и центральное полное лунное затмение.

Задача. Определите:

1) длину конуса земной тени L в км;

2) диаметр D в км сечения, перпендикулярного тени Земли, на расстоянии Луны b км от центра Земли;

3) продолжительность центрального полного лунного затмения t (центр диска Луны перемещается по диаметру тени Земли) в часах;

4) продолжительность центрального лунного затмения τ в часах;

5) наибольшую фазу центрального полного лунного затмения.

Заданы: радиус Луны r = 1738 км, радиус Солнца R = 696000 км, радиус Земли RE = 6371 км. Расстояния Солнца от Земли a км и Луны от Земли b км варьировались от минимальных до максимальных значений с учетом эллиптичности орбит.

Студентам рекомендовалось:

1. Сделать рисунок, на котором показать L, D, r, R, a, b, RE и другие введенные обозначения.

2. Рассмотреть осевые сечения соответствующих конусов.

3. Использовать подобие прямоугольных треугольников.

4. Решение каждого пункта задачи найти в общем виде. В полученные формулы подставить числовые данные, провести вычисления.

Приведём необходимые для моделирования лунного затмения астрономические сведения. Диаметр Солнца в 109 раз больше земного диаметра. Освещённая Солнцем Земля отбрасывает тень, имеющую форму конуса, в противоположную Солнцу сторону (рис. 1). Конус земной тени образуется внешними касательными к Солнцу и Земле. Вершина его лежит далеко за пределами лунной орбиты. Внутренние касательные к Солнцу и Земле образуют расходящийся конус земной полутени с вершиной, лежащей между Солнцем и Землей [1, 2].

Наличие у Земли атмосферы приводит к тому, что падающая на Луну земная тень никогда не имеет резких границ. Края земной тени размыты. Конус тени имеет эллиптическое поперечное сечение из-за сфероидальной формы Земли. Однако с достаточной степенью точности конус можно считать круговым, принимая Землю за шар среднего радиуса *RE* = 6371 км, что дает максимальную ошибку в 1/600 при определении положения края земной тени [3, с. 141].

Длина тени в зависимости от гелиоцентрического расстояния Земли изменяется примерно от 1359000 км (Земля в перигелии) до 1405000 км (Земля в афелии). Угловой радиус земной тени изменяется от 38′ на наибольшем расстоянии Луны от Земли до 47′ на наименьшем расстоянии. Диаметр земной тени на расстоянии Луны превышает лунный диаметр в 2,6–2,8 раз. Наибольшая фаза центрального полного лунного затмения может изменяться от 1,80 до 1,90.

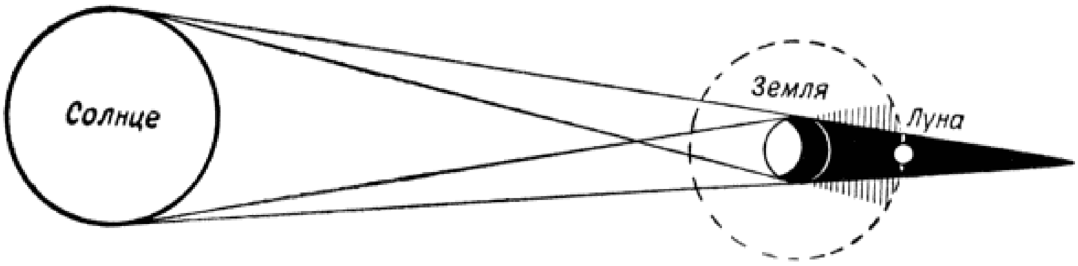


Рис. 1. Схема полного лунного затмения

Невозмущённой лунной орбитой принято называть орбиту с большой полуосью b = 384400 км и эксцентриситетом e = 0,055. Если бы на Луну действовало только притяжение шарообразной Земли, то лунная орбита оставалась бы неизменной. Но на Луну воздействуют многие небесные тела, наиболее значительно – Солнце. С этим связаны периодические отклонения от эллиптической орбиты, по которой Луна должна двигаться под действием только земного тяготения. Эти отклонения принято называть возмущениями, а изменяющуюся орбиту – возмущённой орбитой.

Для невозмущённой лунной орбиты перигейное расстояние составляет 363300 км, а апогейное расстояние – 405500 км. Заметим, что эти расстояния – результат усреднения. Они не сохраняются постоянными при каждом обороте Луны вокруг Земли. В действительности, с учётом возмущений, в перигее Луна может приближаться к Земле на расстояние от 356410 км до 369960 км, а в апогее удаляться от Земли на расстояние в пределах от 404180 км до 406740 км [1, с. 53; 2, с. 147].

Так как Луна обращается вокруг Земли по эллиптической орбите, то скорость движения Луны относительно Земли, называемая геоцентрической скоростью, постоянно изменяется. Для определения среднего значения этой скорости используем значения большой полуоси лунной орбиты b = 384400 км и звездного периода обращения Луны вокруг Земли T = 27,32 суток. Тогда средняя геоцентрическая скорость Луны определяется по формуле [1, с. 57; 2, с. 148]:

$$v = \frac{2\pi b}{T} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 384000}{27{,}32 \cdot 24 \cdot 3600} = 1{,}02(км/с)\ .$$

По мере приближения Луны к Земле геоцентрическая скорость Луны постепенно возрастает и в перигее может достигать 1,08 км/с, а затем, с удалением Луны от Земли, снова уменьшается и в апогее снижается до 0,95 км/с [2, с. 148].

Земля обращается вокруг Солнца по эллиптической орбите с большой полуосью a = 149600000 км и эксцентриситетом e = 0,0167. С достаточной степенью точности для построения математической модели полного лунного затмения примем, что расстояние Земля-Солнце изменяется в пределах от 147100000 км до 152100000 км [1, с. 46].

Так как Земля вокруг Солнца и Луна вокруг Земли обращаются по эллиптическим орбитам, то расстояния Земля-Солнце, Земля-Луна и геоцентрическая скорость Луны непрерывно изменяются. Продолжительность полного лунного затмения не превосходит четырех часов, что значительно меньше периодов обращения Земли вокруг Солнца и Луны вокруг Земли. Поэтому с целью упрощения будем считать, что в течение затмения расстояния Земля-Солнце и Земля-Луна не изменяются. Тогда Земля будет двигаться вокруг Солнца по дуге окружности радиуса a км, Луна вокруг Земли – по дуге окружности радиуса b км с постоянной геоцентрической скоростью.

Рассчитаем максимальную продолжительность центрального лунного затмения. Диаметр земной тени D км, геоцентрическая скорость Луны на расстоянии b км от центра Земли v км/с. Начало центрального затмения – положение 2, окончание – положение 3 (рис. 2). Луна полностью погружается в земную тень на время

$$t = \frac{D - 2 \cdot r}{v \cdot 3600}\ \text{часов.} \qquad (1)$$

Вместе с частными фазами такое затмение будет продолжаться (рис. 2, положения 1 – 4):

$$\tau = \frac{D + 2 \cdot r}{v \cdot 3600}\ \text{часов.} \qquad (2)$$

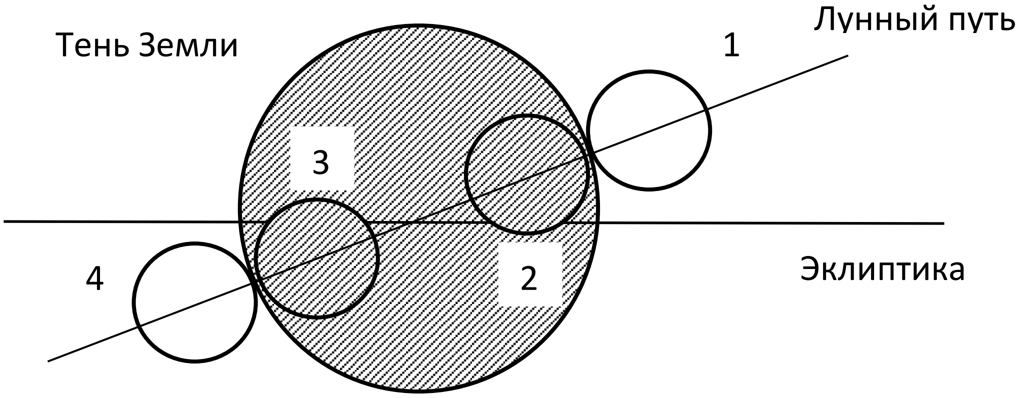


Рис. 2. Центральное полное лунное затмение
(центр диска Луны перемещается по диаметру тени Земли)

Определим длину конуса земной тени L. Из подобия прямоугольных треугольников (рис. 3) имеем:

$$\frac{a+L}{R}=\frac{L}{RE}.$$

Тогда

$$L=\frac{a\cdot RE}{R-RE}.$$

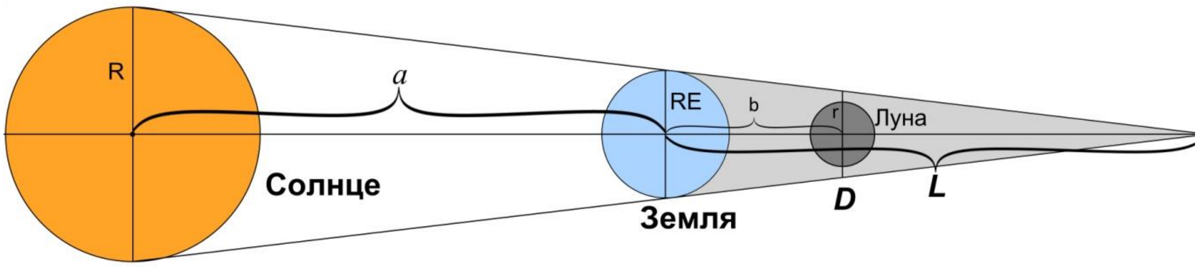


Рис. 3

Найдем диаметр D сечения, перпендикулярного тени Земли, на расстоянии Луны b км от центра Земли. Из подобия прямоугольных треугольников (рис. 3) имеем:

$$\frac{a+L}{R}=\frac{L-b}{0{,}5D}.$$

Тогда

$$D=2R\frac{L-b}{a+L}.$$

Продолжительность центрального полного лунного затмения определим по формуле (1). Найдем продолжительность затмения вместе с частными фазами по формуле (2).

Наибольшую фазу центрального полного лунного затмения вычислим по формуле [1, с. 90]

$$\Phi_m = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2r} + 1\right).$$

Вычисления можно провести в электронных таблицах (рис. 4). Минимальное значение наибольшей фазы Φ_m должно наблюдаться при расположении Земли в перигелии (a_min), а Луны в апогее (b_max). Максимальное значение наибольшей фазы Φ_m должно наблюдаться при нахождении Земли в афелии (a_ max), а Луны в перигее (b_ min). Результаты моделирования совпадают с наблюдательными данными.

Центральное полное лунное затмение

Исходные данные	
Радиус Луны (*r* км)	1738
Радиус Солнца (*R* км)	696000
Радиус Земли (*RE* км)	6371
Расстояние Земля-Солнце (*a* км)	
Минимальное (*a* _min)	147100000
Среднее (*a* _ср)	149600000
Максимальное (*a* _max)	152100000
Расстояние Земля-Луна (*b* км)	
Минимальное (*b* _min)	356410
Среднее (*b* _ср)	384400
Максимальное (*b* _max)	406740

Результаты	*L* км	*D* км	*t* час	*τ* час	*Фm*
a _min-*b* _min	1358954	9400	1,73	3,77	1,85
*a*_min-*b*_max	1358954	8928	1,40	3,18	1,78
a _ср-*b* _ср	1382050	9198	1,55	3,44	1,82
a _max-*b* _min	1405146	9510	1,77	3,80	1,87
a _max-*b* _max	1405146	9054	1,43	3,21	1,80

Рис. 4

Различные способы вычисления обстоятельств лунных затмений изложены в [3, 4, 5, 6, 7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дагаев М.М. Солнечные и лунные затмения. – М., 1978. – 208 с., ил.
2. Иванов В.В. Пособие по астрономии. – Тверь, 2013. – 324 с., ил., цв. вкл.
3. Михайлов А.А. Теория затмений. Изд. 3-е, стереотип. – М., 2022. – 274 с., ил.
4. Дагаев М.М. Предвычисление лунных затмений // Астрономический календарь. Постоянная часть. – М., 1981. – С. 149-168.
5. Даффет-Смит П. Практическая астрономия с калькулятором. – М., 1982. – 176 с., ил.
6. Меёс Ж. Астрономические формулы для калькуляторов. – М., 1988. – 168 с., ил.
7. Монтенбрук О., Пфлегер Т. Астрономия на персональном компьютере (+CD). Библиотека программиста. Четвертое издание. – СПб., 2002. – 320 с., ил.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ К РЕШЕНИЮ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Иванова Полина Константиновна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: pkivanova@edu.tversu.ru

Молькова Ольга Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Olamolkova95@gmail.com

Яхова Юлия Дмитриевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ydyakhova@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *геометрия, алгебра, планиметрия, метод координат, неравенство.*

Аннотация. В работе продемонстрировано решение алгебраических задач средствами геометрии.

Многие школьники считают алгебру и геометрию совершенно разными науками, не связанными между собой. И это очень грустно, ведь есть такие алгебраические задачи, которые удобно решать, используя средства геометрии. На их примере легко увидеть тесную связь этих двух прекрасных наук. В предоставленных ниже задачах будут продемонстрированы некоторые способы решения алгебраических задач с помощью геометрии, которые порой можно применить, чтобы сэкономить время и получить понятное, наглядное решение.

Задача №1. [1] Положительные числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 - ab = c^2$. Докажите, что $(a-c)(b-c) \leq 0$.

Решение. Заметим, что

$$(a-c)(b-c) \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a-c \leq 0, \\ b-c \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a-c \geq 0, \\ b-c \leq 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \leq c, \\ b \geq c, \end{cases} \\ \begin{cases} a \geq c, \\ b \leq c, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \leq c \leq b, \\ b \leq c \leq a. \end{array}\right. \tag{1}$$

Докажем, что при данных условиях выполняется совокупность (1).

Заметим, что

$$a^2 + b^2 - ab = c^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ = c^2. \tag{2}$$

Зададим треугольник ABC по двум сторонам $BC = a,\ AC = b$ и углу $\angle C = 60°$ между ними. По теореме косинусов в треугольнике ABC имеем:

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 60^\circ. \tag{3}$$

Для положительного числа c из (2) и (3) получаем, что $AB = c$.

Пусть $\angle C = 60^\circ = \gamma, \angle A = \alpha, \angle B = \beta$.

По теореме о сумме углов ΔABC имеем $\alpha + \beta + 60^{\circ} = 180^{\circ}$.

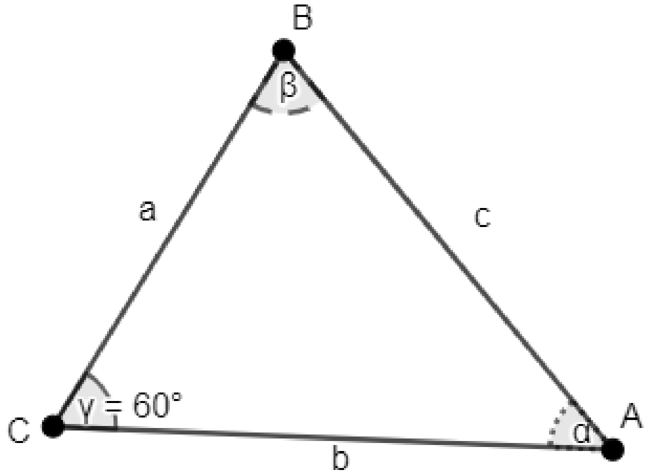


Рис.1

1)Пусть $a = b$, тогда ΔABC – равнобедренный (по определению), откуда следует, что $\alpha = \beta$ (по свойству равнобедренного треугольника). Тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 60^{\circ} = 180^{\circ}, \\ \alpha = \beta, \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 60^{\circ} = \beta.$$

Таким образом, $\angle A = \angle B = \angle C$, а значит $a = b = c$ (по признаку равностороннего треугольника).

2)Пусть $a < b$, тогда $\alpha < \beta$ (по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника). Тогда

$$\begin{cases} \alpha + \beta + 60^{\circ} = 180^{\circ}, \\ \alpha < \beta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 120^{\circ} - \beta, \\ \alpha < \beta, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < 60^{\circ} = \gamma, \\ \alpha < \beta. \end{cases}$$

Покажем, что $\gamma < \beta$. Из написанного выше следует, что

$$-\beta = -120^{\circ} + \alpha < -120^{\circ} + 60^{\circ} = -60^{\circ} = -\gamma,$$

а значит $\beta > \gamma$.

Таким образом, $\alpha < \beta < \gamma$. Тогда $a < b < c$ (по теореме о соотношении между сторонами и углами треугольника).

3) Аналогично пункту 2) можно показать, что если $b < a$, то $b < c < a$. Таким образом, из 1) – 3) получаем, что (1) выполнено.

Задача №2. [2] Положительные числа a, b, c, x, y, z таковы, что

$$x^2 + xy + y^2 = a^2,$$

$$y^2 + yz + z^2 = b^2,$$

$$x^2 + xz + z^2 = c^2.$$

Выразите величину $xy + yz + xz$ через $a, b,$ и c.

Решение. Поставим точку O и выпустим из неё три луча, углы между которыми равны 120°. На этих лучах отметим точки A, B и C, а затем соединим их. Получились треугольники AOC, AOB и COB, в которых $\angle \mathrm{AOC} = 120^\circ$, $\angle \mathrm{AOB} = 120^\circ$, $\angle \mathrm{COB} = 120^\circ$ (по построению).

Введём обозначения: $AC = a$, $AB = b$, $CB = c$, $AO = x$, $BO = y$, $CO = z$ (рис.2).

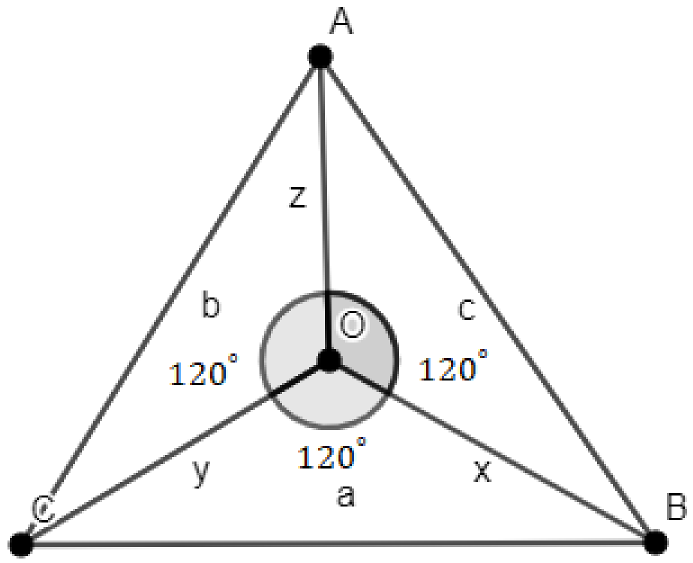


Рис. 2

По теореме косинусов в треугольниках COB, AOC и AOB соответственно имеем

$$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 120^\circ \Leftrightarrow x^2 + xy + y^2 = a^2,$$

$$b^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cos 120^\circ \Leftrightarrow y^2 + yz + z^2 = b^2,$$

$$c^2 = x^2 + z^2 - 2xz\cos 120^\circ \Leftrightarrow x^2 + xz + z^2 = c^2.$$

Площадь треугольника ΔABC можно найти по формуле Герона:

$$S_{\Delta \mathrm{ABC}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ где } p = \frac{a+b+c}{2}. \tag{4}$$

С другой стороны,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOC} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta AOB}. \tag{5}$$

Площади треугольников ΔAOC, ΔBOC, ΔAOB найдём по формуле $S_\Delta = \frac{1}{2}mn \cdot \sin\alpha$, где m, n – его стороны, а α – угол между m и n.

$$S_{\Delta AOC} = \frac{1}{2}yz\sin 120^\circ = \frac{1}{2}yz\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}yz, \tag{6}$$

$$S_{\Delta BOC} = \frac{\sqrt{3}}{4}yx, \tag{7}$$

$$S_{\Delta AOB} = \frac{\sqrt{3}}{4}xz. \tag{8}$$

Тогда из (5) – (8) имеем

$$S_{\Delta ABC} = \frac{\sqrt{3}}{4}yz + \frac{\sqrt{3}}{4}yx + \frac{\sqrt{3}}{4}xz = \frac{\sqrt{3}}{4}(xy + yz + xz) \qquad (9)$$

Таким образом, из (4) и (9) получаем ответ

$$xy + yz + xz = 4\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\sqrt{3}}, \text{где } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Задача №3. [2] Докажите равенство

$$\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Введём декартову прямоугольную систему координат xAy так, что $A(0;0)$, $B(0;2)$, $C(3;2)$, $D(3;0)$, $E(1;2)$, $F(3;1)$ (рис. 3).

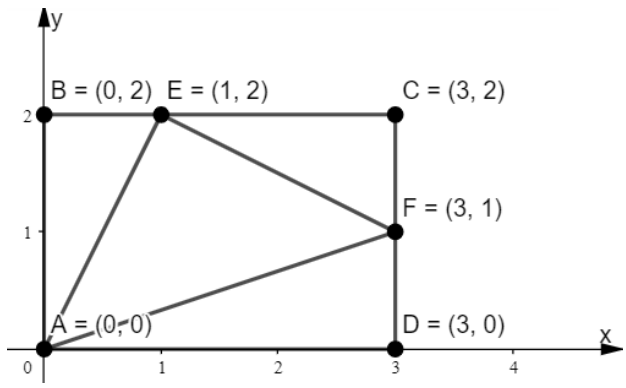


Рис. 3

$$BE = \sqrt{(1-0)^2 + (2-2)^2} = 1,\ BA = \sqrt{(0-0)^2 + (2-0)^2} = 2.$$

$$\overrightarrow{BA} = \{0;-2\}, \overrightarrow{BE} = \{1;0\}.$$

Заметим, что $BA \perp BE$, так как $\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BE}\right) = 0$.

В прямоугольном треугольнике ABE имеем

$$\operatorname{tg} \angle BAE = \frac{BE}{BA} = \frac{1}{2}.$$

Так как $\angle BAE$ – угол треугольника, то $0 < \angle BAE < \frac{\pi}{2}$, а тогда

$$\angle BAE = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}.$$

Вычислим длины отрезков FD и AD, используя формулу расстояния между двумя точками.

$$FD = \sqrt{(3-3)^2 + (1-0)^2} = 1,\ AD = \sqrt{(3-0)^2 + (0-0)^2} = 3.$$

$$\overrightarrow{DF} = \{0;1\}, \overrightarrow{DA} = \{-3;0\}.$$

Заметим, что $DF \perp DA$, так как $\left(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DA}\right) = 0$.

В прямоугольном треугольнике FAD находим

$$\operatorname{tg}\angle FAD = \frac{FD}{AD} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\angle FAD$ – угол треугольника, то $0 < \angle FAD < \frac{\pi}{2}$, а тогда $\angle FAD = \operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

Вычислим EF, AE и EF.

$$EF = \sqrt{(1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{5},$$

$$AE = \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5},$$

$$EF = \sqrt{(0-3)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{10}.$$

В треугольнике EAF по теореме косинусов получаем

$$EF^2 = AE^2 + AF^2 - 2 \cdot AE \cdot AF \cdot \cos\angle EAF \Leftrightarrow \cos\angle EAF = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Так как $\angle EAF$ – угол треугольника, то $0 < \angle EAF < \frac{\pi}{2}$, а тогда $\angle EAF = \operatorname{arctg} 1$. Таким образом,

$$\angle BAD = \angle EAF + \angle BAE + \angle FAD = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Задача №4. Для $x \geq 0$ доказать неравенство $\operatorname{arctg} x \leq x$.

Решение. 1) Пусть $x = 0$, тогда $\operatorname{arctg} 0 = 0$, это равенство верно в силу определения арктангенса.

2) Пусть $x > 0$. Введём прямоугольную декартову систему координат xOy, построим единичную окружность с центром в начале координат, построим ось тангенсов.

Пусть $A(1;0), B(1;x)$, точка C – точка пересечения отрезка AB с окружностью. Тогда $\angle AOB = \operatorname{arctg} x$ (рис. 4).

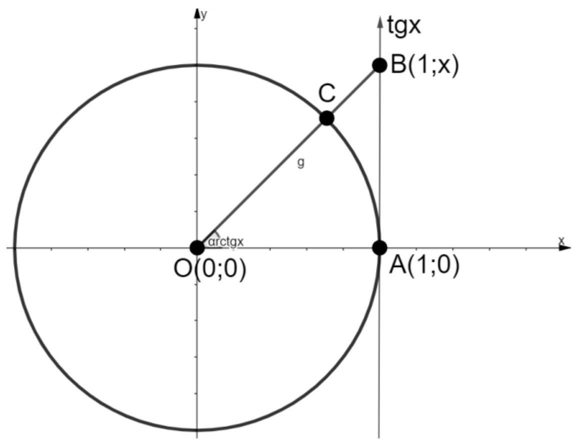


Рис. 4

Площадь сектора равна

$$S_{\text{сект.}AOC} = \frac{\pi 1^2}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg} x = \frac{\operatorname{arctg} x}{2}.$$

Вычислим длину отрезка BA по формуле расстояния между двумя точками.

$$BA = \sqrt{(1-1)^2 + (x-0)^2} = x.$$

Тогда площадь прямоугольного треугольника AOB равна

$$S_{\Delta AOB} = \frac{x \cdot 1}{2} = \frac{x}{2}.$$

Ясно, что $S_{\text{сект.}AOC} < S_{\Delta AOB}$, а тогда

$$\frac{\operatorname{arctg} x}{2} < \frac{x}{2} \Leftrightarrow \operatorname{arctg} x < x.$$

Задача №5. [3] Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель автомобиля заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что он поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет велосипедист в пункт А, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.

Решение. Введём прямоугольную декартову систему координат tAs, где ось At – ось времени, ось As – ось расстояния.

Заметим, что так как скорости постоянные, то график зависимости $s = s(t)$ пройденного расстояния s за время t – прямая.

Пусть $AB = S$.

Аккуратно по условию задачи построим график функции $s = s(t)$ для автомобиля, автобуса и велосипеда (рис. 5).

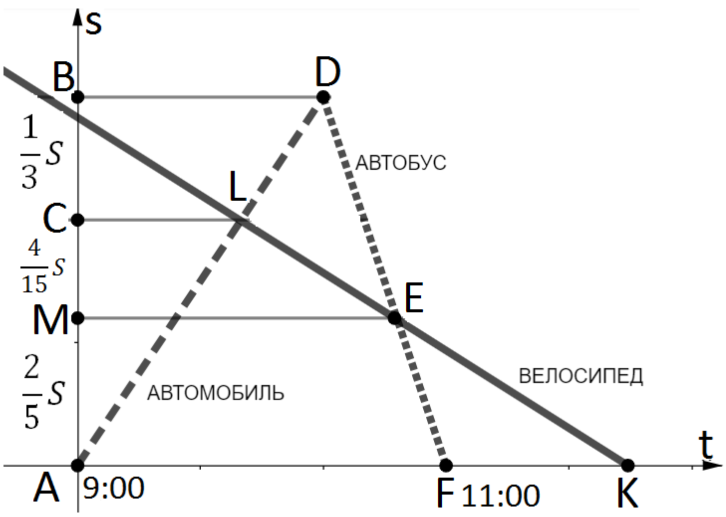


Рис. 5

Из условия следует, что $AC = \frac{2}{3}S$, $AM = \frac{2}{5}S$, откуда получаем, что $MC = \frac{4}{15}S$, $CB = \frac{1}{3}S$, $BM = \frac{3}{5}S$. Кроме того, заметим, что $AF = 2$.
По построению получим $CL \| BD$, $ME \| BD$. Тогда по теореме Фалеса имеем

$$\frac{AL}{LD} = \frac{AC}{CB} = 2,\ \frac{DE}{EF} = \frac{BM}{MA} = \frac{3}{2}. \tag{10}$$

Применим теорему Менелая

$$\frac{AL}{LD} \cdot \frac{DE}{EF} \cdot \frac{FK}{KA} = 1. \tag{11}$$

Из (10) и (11) получаем, что

$$\frac{FK}{KA} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{FK}{AF+FK} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{FK}{2+FK} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow FK = 1.$$

Тогда велосипедист приедет в пункт А в 12:00.

Ответ: 12:00.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Московские математические олимпиады 1993–2005 г. / Р. М. Федоров [и др.], под ред. В. М. Тихомирова. – М.: МЦНМО, 2006. – 456 с.

2. Алфутова Н. Б. Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. –М.: МЦНМО, 2002. – 264 с.

3. Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова. Дополнительное вступительное испытание по математике. 2016 г. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://alexlarin.net/dvi.html (последнее обращение 11.03.2022 г.).

УДК 378.1:65.014

ОСОБЕННОСТИ УПРАВЛЕНИЯ КОЛЛЕКТИВОМ КАФЕДРЫ КАК МАЛОЙ ГРУППОЙ

Игнатьев Геннадий Альбертович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ignatev.GA@tversu.ru

Куженькин Сергей Николаевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
e-mail: kuzhenkin@mail.ru

Ключевые слова: *коллектив, кафедра, малая группа, заведующий кафедрой, разрешение конфликтов, управление персоналом кафедры.*

Аннотация. В статье рассматриваются особенности управления коллективом кафедры как малой группой. Приводятся признаки трудового коллектива, его сходства с малой группой и отличия от неё. Описывается роль заведующего кафедрой в разрешении конфликтов в коллективе кафедры.

В организации любой работник включен в систему взаимоотношений внутри коллектива, обладает разными статусами, выполняет разные роли в структуре социально-трудовых отношений.

В структуре социально-трудовых отношений член трудового коллектива может иметь статус «работодатель» или «наемный работник»; в структуре управленческих отношений - «руководитель», «подчиненный» и т.п. На кафедре эти роли могут дополняться ролями «преподавателя», «учёного» и т.д.

Социальную подсистему кафедры, как и любой организации, можно представить, как совокупность связей и отношений между участниками производственного взаимодействия, занимающими различные позиции (и обладающими соответственно разными статусами) непосредственно в системе разделения и кооперации труда – структурах технико-технологических и организационно-экономических, информационных, коммуникативных и других отношений, в структурах формальной и неформальной организации и др.

Кафедра вуза является по своей сути коллективом, а именно трудовым коллективом.

По мнению В.Г. Зарубина, коллектив – это социальная группа людей, которая объединена единым видом общественной деятельности, общностью интересов, установок и норм поведения и воплощающих отношения сотрудничества взаимной ответственности и помощи друг другу [4, с.89].

Понятие «трудовой коллектив» включает следующие признаки трудового коллектива:

1) организованная общность людей,

2) объединение для осуществления конкретного вида общественно полезного труда,

3) совместное использование средств производства для осуществления определённого вида деятельности,

4) наличие отношений сотрудничества, взаимопомощи и взаимной ответственности,

5) наличие единых экономических и иных интересов,

6) наличие общих (объединяющих) ценностных ориентаций, установок и норм поведения.

Можно выделить и другие аналогичные признаки, такие как устойчивость группы, целенаправленная управляемость процесса функционирования и т.д.

Для управления персоналом кафедры важное значение имеет самоуправление, авторитет и лидерство в малой группе. Это связано с тем, что научно-педагогический персонал является работниками интеллектуального труда, который имеет особенности мотивации. Труд творческих и интеллектуальных профессий, к которым относится преподавание в высшей школе, трудно контролировать и оценивать в процессе работы, поэтому самоконтроль выходит на первый план. Сотрудники должны добровольно выбирать идентификацию себя с группой, чему способствует совпадение формального и неформального лидера.

Всё это присуще кафедре вуза, которая с одной стороны является трудовым коллективом, с другой – малой группой.

Многие учёные при изучении социологии трудовых коллективов рассматривают их как малую группу.

Отличие команды от малой группы:

1) на стратегическом уровне – единые цели, общее информационное поле;

2) на тактическом уровне – распределение ответственности в команде и функциональных позиций членов в зависимости от ситуаций;

3) на динамическом уровне – самоуправляемость;

4) на результативном уровне – синергический эффект (результат усилий членов команды больше суммы этих потенциальных результатов, которые они могли бы получить, работая отдельно друг от друга) [4, с.89].

Важным фактором для успешного функционирования кафедры как малой группы является социально-психологический климат.

Конфликтные ситуации, которые порождаются организационными и эмоциональными факторами, можно устранить, используя корректировку роли работника (изменение формы работы), повышение квалификации, умение распознавать и предупреждать возникающие проблемы, перестановку работников с одной роли на другую в зависимости от их способностей справляться с конфликтными ситуациями и др.

Причиной многих конфликтов является материальная основа: организация труда, структурные особенности коллектива, распределение ресурсов. Корректировка порядка обеспечения членов коллектива необходимыми ресурсами помогает разрешить конфликт. Также уладить конфликт позволяет открытое обсуждение.

Значительную роль в социальных процессах на кафедре играют групповые нормы, основой которых является совместное стремление к выполнению целей и задач, сочетание наказания и поощрения для выполнения данных норм.

Ключевую роль в ликвидации конфликтов трудового коллектива кафедры играет заведующий кафедрой. Руководитель обязан вмешаться в конфликт, не оставаться в стороне простым наблюдателем. При этом он четко должен знать и разграничивать свои юридические и моральные права.

Для успешного разрешения конфликта заведующий кафедрой может предпринять следующие действия:

- признать наличие конфликта, объективно оценить ситуацию. Данные действия приблизят к разрешению конфликта;
- выявить повод и причину конфликта, отличать их в случае, если реальная причина конфликта более глубокая, чем может показаться;
- классифицировать конфликт в зависимости от его вида, стадии, целей сторон конфликта;
- определить мотивы участия в конфликте для каждого оппонента;
- проанализировать возможные варианты решения проблемы, использовать нестандартный подход, учитывать индивидуальные особенности участников конфликта.

Залогом успешного руководства персоналом кафедры вуза как малой группой для руководителя является организация неформальных встреч, проведение индивидуальных бесед и заинтересованность личной жизнью подчиненных. Неформальные встречи являются методом профилактики конфликтов, возникающих на вузовских кафедрах [3, с. 24].

Индивидуальный стиль руководства кафедрой предполагает использование различных методов руководства, в том числе административных, экономических и социально-психологических. Административные и экономические методы управления обычно используются при управлении всем вузом в целом. Руководитель кафедры чаще всего имеет возможность применять социально-психологические методы управления. Персонал кафедры, как трудовой коллектив, во многом имеет сходство с малой группой. Знание принципов руководства малой группой может помочь при управлении персоналом кафедры, в частности при управлении конфликтами.

Можно сделать вывод, что социальные отношения на кафедре во многом зависят от статуса (роли) участников социальных отношений. Социальные отношения в трудовых коллективах во многом определяются социальными отношениями в малой группе с учётом особенностей трудового процесса.

При управлении персоналом кафедр используются различные инструменты. Значительное влияние на мотивацию оказывает социально-психологический климат в коллективе кафедры. Рост роли личности работника в управлении персоналом, учёт его потребностей повышает внимание теоретиков и практиков управления персоналом к социальным процессам в коллективе.

Кафедра по своей сути является малой группой, процессы взаимодействия в которой во многом определяются стилем руководства, индивидуальным подходом к работникам, пониманием работниками своей роли в коллективе. При руководстве кафедрой как малой группой на первый план выходят социальные процессы внутри коллектива, роль руководителя в разрешении конфликтов, создание психологического климата, в котором комфортно работать представителям интеллектуального труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Передерий В.А. Новые подходы к оценке качеств и компетенций заведующего кафедрой современного вуза (результаты эмпирического исследования) / Передерий В.А. // Теория и практика общественного развития. 2018. № 3 (121). С. 15–18.

2. Резник С.Д. Кафедра российского вуза: вызовы времени / Резник С.Д., Сазыкина О.А. // Социологические исследования. 2016. №8. С. 133–137.

3. Резник С.Д. О стиле руководства и работе с персоналом заведующего университетской кафедрой / Резник С.Д., Сазыкина О.А. // Управленец. 2017. № 1 (65). С. 20–28.

4. Социология управления: учебник и практикум для вузов / Зарубин В. Г. [и др.]; отв. редактор Зарубин В. Г., Семенов В. А. М.: Издательство Юрайт. 2020. – 292 с.

УДК 004.75

NFT КАК СРЕДСТВО ОБРАЩЕНИЯ С БЛОКЧЕЙНОМ

Кокорин Даниил Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: xt1zer@yandex.ru

Ключевые слова: *блокчейн, токен, цифровой рынок.*

Аннотация. В докладе рассматривается понятие уникального токена NFT, история его распространения, примеры использования и внедрения в некоммерческой творческой и бизнес среде.

Технология блокчейн появилась несколько лет назад и сразу же открыла новые перспективы для обмена данными. Сегодня её широко обсуждают не только в мире финансов. Динамика развития криптовалют не даёт покоя, и вместе с этим набирают обороты всё новые методы обращения с цифровым рынком. NFT не стал исключением.

NFT (аббревиатура от английского «non-fungible token») – это невзаимозаменяемые токены, которые представляют собой титулы собственности на различные цифровые объекты: тексты, изображения, аудиозаписи, цифровые произведения искусства, игровые предметы или персонажи, доменные имена, финансовые инструменты, клубные карты и т. д.

Если криптовалюты условно взаимозаменяемы – например, один биткоин в кошельке одного пользователя равен и тождествен одному биткоину в кошельке другого пользователя (если не брать в счет отслеживание происхождения через инструменты блокчейн-аналитики), – то один NFT-токен, представляющий картину, не равен одному NFT-токену другого пользователя, поскольку это могут быть разные картины разных художников с разной стоимостью.

NFT представляет собой единицу данных, хранимую в своего рода бухгалтерской книжке, называемой в данном контексте «блокчейн», которую можно продать или обменять на цифровом рынке (и в частном случае, когда токен ассоциируется с лицензией на использование в конкретных целях или другие ограниченные возможности). Процесс обмена NFT представляет собой неформальную передачу права владения над объектом (причём незакреплённую законодательно).

Как уже должно быть ясным, по существу, NFT не задаёт авторское право и, тем более, не передаёт под интеллектуальную собственность изначальный цифровой объект субъекту, обладающему токеном. Обладатель может продать его, но необязательно при этом передать привилегии авторского права другой стороне, при всём этом владелец своей оригинальной работы вправе создать новые NFT.

История развития

Первый известный NFT под названием Quantum был создан Кевином МакКой и Анилом Дэш в мае 2014 г., состоящего из видеофайла. Он был зарегистрирован на блокчейне Namecoin и был продан за $4 Дэшу во время презентации технологии в Новом музее современного искусства в г. Нью-Йорк на конференции Seven on Seven. Авторы назвали творение «монетизированной графикой». Тогда и появилось представление о невзаимозаменяемых и подлежащих обмену видах блокчейна, и на тот момент один такой блок был связан с изначальным видеофайлом.

В октябре 2015 года был запущен первый полноценный NFT-проект Etheria, который был продемонстрирован вживую на DEVCON 1, первой конференции разработчиков Ethereum в Лондоне, Великобритания, всего через три месяца после запуска самого блокчейна Ethereum. Большинство из 457 покупаемых и продаваемых шестиугольных плиток Etheria не продавались более 5 лет до 13 марта 2021 года, когда возобновление интереса к NFT спровоцировало ажиотаж покупателей. В течение 24 часов все плитки текущей и предыдущей версий, каждая из которых жестко закодированы в 1 ETH (0,43 цента на момент запуска), были проданы на общую сумму 1,4 миллиона долларов.

В ноябре 2016 года был запущен первый NFT-проект, который хранит изображения непосредственно в блокчейне, PixelMap, и был заново открыт в августе 2021 года, продав первые 3000 плиток за 3,3 миллиона долларов.

В 2017 году блокчейн Ethereum начал набирать популярность по сравнению с платформами токенов, основанными на биткойнах, в основном из-за того, что создание и хранение токенов было встроено в его блокчейн; это устранило необходимость в сторонних платформах, таких как Counterparty. Кроме того, компания ввела термин «невзаимозаменяемый токен». Также в 2017 году американская студия Larva Labs выпустила CryptoPunks, проект по торговле уникальными мультяшными персонажами на блокчейне Ethereum.

Рынок NFT пережил быстрый рост в течение 2020 года, его стоимость утроилась до 250 миллионов долларов. За первые три месяца 2021 года на NFT было потрачено более 200 миллионов долларов.

Что можно делать с NFT?

Если вы *владеете* NFT:

- Вы можете с легкостью доказать свое владение.
  - Доказательство правообладания NFT очень схоже с доказательством правообладания ETH.
  - К примеру, вы покупаете NFT, и право собственности на уникальный токен передается на ваш кошелек через ваш общедоступный адрес.
  - Токен доказывает, что копия вашего цифрового файла оригинальна.

- ○Ваш частный ключ является подтверждением правообладания оригиналом.
- ○Публичный ключ создателя контента служит сертификатом аутентичности конкретно данного цифрового артефакта.
  - ▪Публичный ключ создателя — это, по сути, постоянная составляющая истории токена. Открытый ключ создателя может продемонстрировать, что токен, который вы держите, был создан определенным лицом, что способствует повышению его рыночной стоимости (по сравнению с подделкой).
- ○Еще один способ доказать, что вы являетесь владельцем NFT, — это подписать транзакции, чтобы доказать, что вы владеете закрытым ключом этого адреса.
  - ▪Как упоминалось выше, ваш закрытый ключ является подтверждением права собственности на оригинал. Это говорит нам о том, что закрытые ключи, стоящие за этим адресом, владеют NFT.
  - ▪Подписанная транзакция может использоваться как доказательство того, что вы владеете и своими закрытыми ключами, не раскрывая их никому, и токеном NFT!

- •Никто не может манипулировать этим каким-либо образом.
- •Вы можете продать его, в некоторых случаях эта перепродажа оригинала принесет создателю гонорар.
- •Или вы можете держать его вечно, спокойно зная о том, что ваш актив защищен вашим кошельком на Ethereum.

А если вы *создадите* NFT:

- •Вы легко сможете доказать, что являетесь создателем.
- •Вы определяете дефицит.
- •Вы можете получать гонорары за каждую продажу.
- •Вы можете продать его на любом рынке NFT. Вы не привязаны к какой-либо платформе, и вам не нужно, чтобы кто-то выступал посредником.

Применение

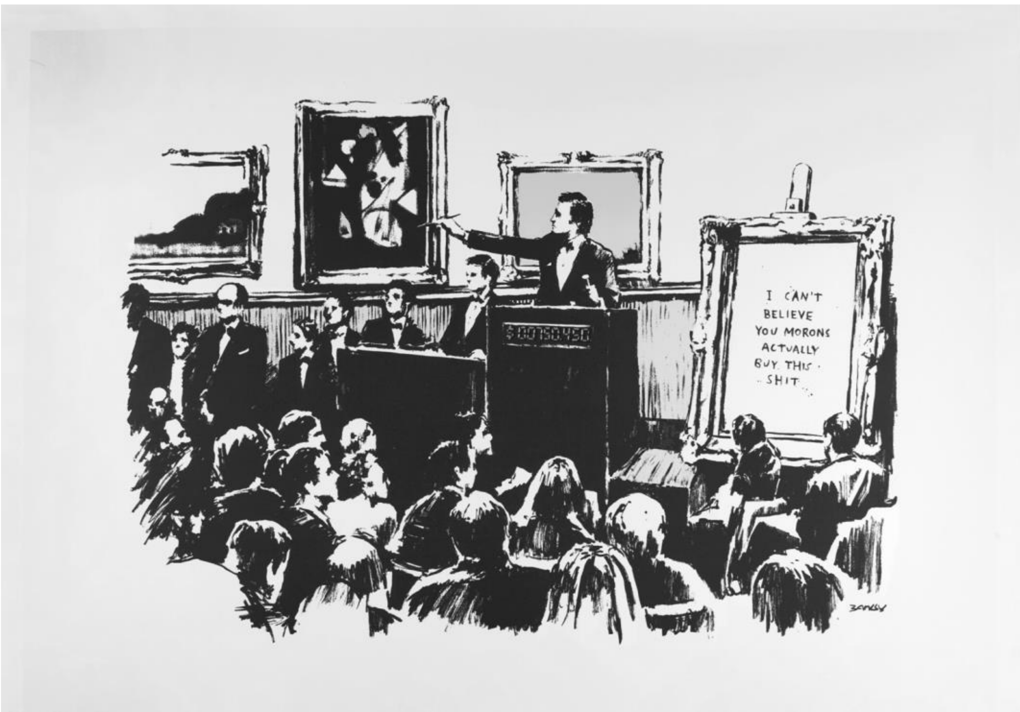
Невзаимозаменяемые токены используются на нескольких платформах для подтверждения факта владения цифровыми активами и права их использования. Чаще всего речь идёт о цифровых предметах, таких как экземпляры произведений компьютерного искусства, коллекционные цифровые предметы, онлайн-игры.

Технология невзаимозаменяемых токенов не подразумевает проверки авторских прав при создании токена, поэтому участились случай, когда авторы рисунков обнаруживают, что их работы использовались посторонними лицами для выпуска токенов без их ведома и разрешения.

Площадки для торговли невзаимозаменяемыми токенами заявляют о борьбе с воровством цифровых активов, но не могут решить проблему полностью. Онлайн-галерея DeviantArt оповещает пользователей, если их изображения используются в каком-либо невзаимозаменяемом токене.

Цифровое искусство является распространенным случаем использования NFT. Полностью цифровое искусство (только в форме цифрового файла без иного физического носителя) стало одним из первых вариантов использования уникальных токенов. В феврале 2021 года работа американского цифрового художника Майка Винкельмана (известного под псевдонимом Beeple) «Каждый день. Первые 5000 дней» стала первым произведением цифрового искусства, выставленным на аукционе Кристис. Несколькими днями ранее GIF-анимация Nyan Cat была продана на интернет-аукционе за 590 тыс. долларов США.

В цифровой файл, связанный с уникальным токеном, была конвертирована работа художника Бэнкси «Morons (White)», которую блокчейн-компания Injective Protocol купила у галереи Taglialatella Gallery в Нью-Йорке за 95000 долларов США, а потом сожгла, организовав трансляцию. Это первый известный случай превращения физически существовавшего произведения искусства в виртуальный актив, заявил представитель Injective Protocol Мирза Уддин. Созданный уникальный токен планируют продать на аукционе за криптовалюту.



Banksy «Morons»

NFT могут использоваться для представления внутри*игровых* активов, таких как цифровые земельные участки, которые, по мнению некоторых комментаторов, контролируются «пользователем», а не разработчиком игры, позволяя торговать активами на сторонних торговых площадках без разрешения разработчика игры.

CryptoKitties была ранней успешной онлайн-игрой на блокчейне, в которой игроки усыновляли и обменивали виртуальных кошек. Монетизация NFT в рамках игры позволила привлечь $12,5 млн инвестиций, при этом некоторые котики продавались более чем за $100 000 каждый. После успеха CryptoKitties была добавлена в стандарт ERC-721, который был создан в январе 2018 года (и окончательно утвержден в июне). Аналогичная онлайн-игра на основе NFT, Axie Infinity, была запущена в марте 2018 года.

В октябре 2021 года компания-разработчик Valve запретила приложения, использующие технологию блокчейн или NFT для обмена ценностями или игровыми артефактами, на своей платформе Steam.

В декабре 2021 года Ubisoft анонсировала Ubisoft Quartz, «инициативу NFT, которая позволяет людям покупать искусственно дефицитные цифровые предметы с помощью криптовалюты». Объявление вызвало значительную критику, с коэффициентом неприятия 96 % по отношению к видеоролику объявления на YouTube, который с тех пор был удален с канала. Некоторые разработчики Ubisoft также выразили свою обеспокоенность по поводу этого объявления. В декабре 2021 студия GSC Game World сначала объявила о планах добавить в игру S.T.A.L.K.E.R. 2: Heart of Chernobyl NFT, а затем, после критики от пользователей, отказалась от этой идеи.

В ежегодном отчете Game Developers Conference за 2022 год говорится, что 70 процентов опрошенных разработчиков заявили, что их студии не заинтересованы в интеграции NFT или криптовалюты в свои игры.

Другие применения

В 2019 году Nike запатентовала систему под названием CryptoKicks, которая будет использовать NFT для проверки подлинности физических кроссовок и предоставления виртуальной версии обуви покупателю.

В начале 2020 года разработчик CryptoKitties, компания Dapper Labs, выпустила бета-версию NBA TopShot, проекта по продаже токенизированных коллекционных предметов из лучших моментов НБА, проект был построен на основе блокчейна Flow. Позже в том же году проект был обнародован, и по состоянию на 28 февраля 2021 года общий объем продаж составил более 230 миллионов долларов.

В ноябре 2021 года режиссер Квентин Тарантино выпустил семь NFT, основанных на неснятых сценах «Криминального чтива». Впоследствии компания Miramax подала иск, заявив, что их права на фильм были нарушены.

Создание NFT

Создать уникальный токен и связать с ним медиафайл можно самостоятельно и бесплатно на сервисе opensea.io. Для этого потребуется адрес в Ethereum. Если его нет, для генерации можно воспользоваться множеством сервисов криптовалютных кошельков, одним из вариантов которых является MetaMask в форме расширения для популярных браузеров или мобильного приложения, не требующий регистрации и передачи каких-либо персональных данных.

Передать уникальный токен на другой Ethereum-адрес, вне зависимости, принадлежит он тому же человеку или другому, возможно только по процедурам обработки смарт-контрактов, что подразумевает уплату системе (сети узлов Ethereum) комиссии.

Сейчас технология NFT хоть и сталкивается с большим числом трудностей по заслуге доверия и общественного признания, не стоит забывать, что она только недавно обрела внимание и пережила прорыв в практическом применении. Блокчейн становится всё более популярным, и потому грамотное использование NFT, в частности в маркетинге, без сомнения, может привлечь большее число потенциальных клиентов, повысить доходы от продвигаемых брендов, увеличить их узнаваемость, продемонстрировать его современность, экологичность, простоту и доступность, а также заботу компании об окружающей среде и об интересах своих клиентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шлемин А. NFT. Технология, которая изменит мир. М.: Ridero, 2021.

2. How to NFT / Coin Gecko, Benjamin Hor, Win Win Khor, Shaun Paul Lee, Dillon Yap, Yi Hong Chin. 2022.

3. Kevin S. Mar NFT For Beginners: The Ultimate Guide You Need to Understand NFT. Learn How to Create and Sell Non-Fungible Tokens, Make Profit with Crypto Art, and Discover Metaverse Secrets. 2022.

4. Невзаимозаменяемые токены (NFT) // ethereum.org URL: https://ethereum.org/ru/nft/ (дата обращения: 12.03.2022).

5. ForkLog // Что такое NFT? URL: https://forklog.com/chto-takoe-nft/ (дата обращения: 12.03.2022).

УДК 37.013

ПРЕПОДАВАНИЕ ИНФОРМАТИКИ В СОВРЕМЕННОЙ ШКОЛЕ – ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ШКОЛЬНОЙ ИНФОРМАТИКИ

Кочерова Елена Сергеевна
МОУ «ООШ №11» города Ржева Тверской области, г. Ржев
E-mail: kocherovael@mail.ru

Ключевые слова: *информатика, информационное общество.*

Аннотация. В работе рассмотрены актуальные проблемы преподавания информатики в современной школе и раскрыты перспективы их решения.

Информатика – сравнительно молодая наука с еще не вполне сформировавшимся кругом интересов. За прошедшие с момента ее появления десятилетия (с конца 1940-х гг.) практики обработки информации развивались стремительно, и специалисты по информатике не всегда успевали упорядочивать новые знания.

В послевоенное время приоритетом информатики являлось создание автоматических машин как для целей обороны, так и для повышения эффективности производства. Бурное развитие компьютеров в 1950-1970-е гг. привело к тому, что повышенное внимание стало уделяться алгоритмам, бинарной логике, развитию языков программирования, структурам данных. Появление персональных компьютеров, а затем и сетей потребовало от информатики формирования корпуса знаний и навыков, связанных с использованием такой техники.

С каждым годом возрастает значимость непрерывного обучения школьников информатике и информационным технологиям, предполагающим освоение учащимися средств и методов информатики и ИКТ в процессе изучения информатики, а также использования педагогических технологий на базе средств ИКТ при изучении других предметов и во внеклассной деятельности на протяжении всего периода их обучения в школе.

Школьный курс информатики и ИКТ вышел на качественно новый этап своего развития. Изменился взгляд на то, что понималось под компьютерной грамотностью. Изучение информатики, в начале ее изучения, представлялось как умение программировать. Сейчас границы школьного курса расширились.

Учителю необходимо непрерывно самосовершенствоваться, нужна личная целеустремленность и постоянное желание узнавать о том, что происходит в мире информационных технологий и в педагогической сфере.

Изучение информатики в школе способствует освоению обучающимися современных информационно-коммуникационных технологий. Применяя знания на уроках информатики, используют их при подготовке к другим предметам, например, при подготовке сообщений на уроках биологии, физики, истории и других предметах готовят презентации и сообщения в электронном виде, создавая компьютерные рисунки.

На уроках информатики развиваются творческие способности школьников. Различные компьютерные программы и редакторы способны увлечь и развить творческий потенциал школьника. Постоянно совершенствуя свои знания в области информационных технологий, техническая подкованность раскрывает совсем замкнутых учеников и дает им способность применять свои знания, решая различные задачи по программированию.

Задача учителя заключается в том, чтобы помочь закрытым ребятам настроиться на позитивное мышление, как к информации, так и к товарищам в классе. Они могут раскрыться сильнее, если развивать их интерес к работе на компьютере.

Дальнейшее совершенствование стандарта и обязательного минимума в связи с усилением общеобразовательной значимости предмета за счет выделения и вынесения на первый план при обучении общих принципов закономерностей, касающихся информации и информационных процессов.

Современная информатика состоит из теоретической (теория информации, алгоритмов, кибернетика – управление информационными системами, математическое и информационное моделирование, искусственный интеллект), прикладной (средства информатизации, информатизационные технологии). С другой точки зрения информатика состоит из 4 блоков:

- теоретическая информатика,
- средства информатизации,
- информатизационные технологии,
- социальная информатика.

В середине XX века появилась и получила развитие новая научная дисциплина – кибернетика. В 60-70-е годы XX века информатика выделилась из кибернетики как самостоятельная научная дисциплина. Предметом информатики является собственно *информация,* способы ее представления, передачи и обработки, т. е. информационные процессы и технологии. В современном виде информатика оформилась с массовым появлением и развитием электронно-вычислительных машин (ЭВМ).

Современное информационное общество характеризуется, в частности, постоянным притоком несистематизированной информации, что ведет к росту «информационного хаоса», который существенным образом размывает границы научного знания. Этой тенденции должно быть противопоставлено целенаправленное изучение системной методологии, которая является основой любого научного знания. В этом заключается один из стратегических моментов всего обучения информатике в общеобразовательной школе, поскольку только на основе четкого понимания и структурирования окружающей человека информации можно ожидать от него осмысленных и социально значимых действий.

2004 год в преподавании информатики в школе характеризуется тем, что предмет получает новое название – «Информатика и информационно-коммуникационные технологии» или сокращенно «Информатика и ИКТ»; определены сроки его изучения: 3–4, 8–9 и 10–11 классы. Как отмечает Н.В.Софронова, опыт освоения компьютерной техники и внедрения информатики за рубежом во многом схож с отечественным, хотя есть и ряд специфических особенностей.

Возникновение зарубежной школьной информатики связано с получением компьютерной техники в школы и ведет свой отсчет с конца 70-х – начала 80-х гг. прошлого века. Во многих странах этот процесс начинался под лозунгом «Достанем побольше техники» (А. Борк), когда технические аспекты вытесняли педагогические на второй план.

С 2010 года был принят новый базисный учебный план для школ Российской Федерации, согласно которому преподавание информатики было рекомендовано с 7-го класса. С этого года предмет сменил свое название с «Информатика и ИКТ» на «Информатика». Под этим названием он стоит в базисном учебном плане. С этого же времени усиливаются региональные различия в организации преподавания школьной информатики. В школах многих регионов информатика так и осталась в старших классах. Отмечается, что на современном этапе развития информатики необходимы разработка нового трехуровневого содержания предмета; разработка трехуровневого комплекта учебных пособий; создание практикумов по информатике, реализующих межпредметные связи.

Трехуровневое обучение информатике представлено как:

• начальная ступень (II–IV кл.);

• основная ступень – вводный и базовый курсы (V–VI и VII–IX кл.);

• профильный курс (X–XI кл.).

Развитие интернета, электронных библиотек и книг, цифровых аудио-видео-фото средств, мобильных телефонов, планшетов, карманных компьютеров и коммуникаторов, социальных сетей, блогов, создают для современного школьника представление, что приблизительно 20 лет назад мы находились в абсолютном информационном вакууме, в котором кроме запретов больше ничего не существовало.

Основные проблемы преподавания информатики заключаются в том, что школьная информатика – самая молодая из всех школьных дисциплин и, пожалуй, самая проблемная. В школах не хватает компьютеров, слабая материально-техническая база, нет квалифицированного кадрового обеспечения. Взаимосвязь информатики носит метапредметный характер. Развитие информационного общества заставляет учителя постоянно совершенствовать свои знания, проходить обучение. Ученики должны на практике уметь работать и пользоваться техникой.

На уроках информатики ученики должны не только знать и уметь основные приемы работы с техникой, но и практически применять знания, умения и навыки для модернизации собственного обучения, а также оптимизации учебной нагрузки. Персональный компьютер используется как объект изучения: формируются базовые знания и умения работы с персональным компьютером (устройства, операционная система, программное обеспечение, методы поиска информации). В то же время компьютер является средством обучения и инструментом для решения поставленных задач. В силу различия материального и культурного уровня семей, школьники имеют разную возможность в использовании компьютера для выполнения домашних заданий, для удовлетворения своих интересов, и это тоже надо учитывать при организации учебного процесса.

В школах количество компьютерной техники недостаточно, вследствие чего необходима организация совместной работы малых групп (2-3 учащихся на один компьютер)

В целом на уроки информатики школьники любых классов идут с удовольствием, и связано это с тем, что компьютер сам по себе является стимулом к изучению предмета. Но в то же время, проникновение компьютеров во многие сферы человеческой деятельности со временем притупляют этот интерес.

В начальной школе курс информатики интегрирован в другие предметы, что снижает сам процесс образования школьниками предмета информатики.

Изучение информатики направлено на формирование у подрастающего поколения нового целостного миропонимания и информационного мировоззрения, понимания компьютера как современного средства обработки информации. Существуют разные мнения по поводу возраста, с которого следует начинать обучение детей работе на компьютере.

Основной целью изучения предмета «Информатика и ИКТ» является формирование у обучающихся основ ИКТ - компетентности, многие компоненты которой входят в структуру универсальных учебных действий. Это и задаёт основные ценностные ориентиры содержания данного курса. С точки зрения достижения метапредметных результатов обучения, а также продолжения образования на более высоких ступенях (в том числе, обучения предмету «Информатика и ИКТ» в среднем и старшем звене), наиболее ценными являются следующие компетенции, отражённые в содержании курса:

- *Основы логической и алгоритмической компетентности,*
- *Основы информационной грамотности*
- *Основы ИКТ-квалификации*
- *Основы коммуникационной компетентности.*

В рамках данного учебного предмета наиболее активно формируются стороны коммуникационной компетентности, связанные с приёмом и передачей информации. Ученики овладевают системой информационных понятий, использованием языка для приёма и передачи информации.

Интеграция информатики с другими учебными предметами организационно облегчается тем, что есть возможность совместить изучение тем, таких как текстовые редакторы, создание презентаций, использование Интернет-технологий с темами других предметов и организовать интегрированные уроки. На таких уроках учащиеся совершенствуют навыки работы с информацией (сбор информации из разных источников, в том числе привлечение Интернет-ресурсов; отбор и структурирование материала, представление информации разными способами). Работа над дизайном воспитывает эстетический вкус, повышает общекультурный уровень учащихся, стимулирует творчество.

Для детей с повышенным познавательным интересом предлагаются задания повышенного уровня, олимпиадные задания, отводится время для решения задач, алгоритмов, написания программ, создания творческих работ. Эти дети принимают участие в конкурсах.

При работе с социально и педагогически запущенными детьми делается упор на прикладную информатику. Таких детей необходимо заинтересовать. Поэтому больше времени отводится для практической работы, для работы за компьютером (на решение задач отводится минимум времени). Практикую индивидуальную работу по карточкам, больше творческой работы. В качестве повышения познавательного интереса использую интерактивную доску, а также разные методы и приёмы, применяю игровые моменты.

В качестве коррекционной работы с учащимися необходимо использовать задания, ориентированные на развитие памяти, внимания, мышления, воображения (повторение, работа по образцу, вставить пропущенное и т. д.)

Знания, которые сегодняшний школьник получает на уроках информатики, помогут быстро адаптироваться в современном информационном обществе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Босова Л.Л. Подготовка младших школьников в области информатики и ИКТ: опыт, современное состояние и перспективы. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2017. — 271 с.

2. Босова Л.Л. Преподавание информатики в 5-7 классах. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2020. — 342 с.

3. Босова Л.Л. Тенденции развития школьного курса информатики и ИКТ (http://saratov.ito.edu.ru/2011/section/173/93160/).

4. Бешенков С.А., Ракитина Е.А., Матвеева Н.В., Милохина Л.В. Непрерывный курс информатики. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2015. — 216 с.

УДК 004:378

ОПЫТ ОРГАНИЗАЦИИ ПРОЕКТНОГО ОБУЧЕНИЯ КАК СПОСОБА ФОРМИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ И ИНФОРМАЦИОННОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ

Крылова Елена Михайловна
МБОУ «Технический лицей при СГУГиТ», г. Новосибирск
E-mail: redikarceva@ssga.ru

Шевчук Елена Владимировна
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск
E-mail: evshevch@mail.ru

Шпак Андрей Владимирович
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск,
E-mail: andrey.v.shpak@gmail.com

Ключевые слова: *проектное обучение, математическая компетентность, информационная компетентность, подготовка кадров для цифровой экономики.*

Аннотация. В статье представлен опыт организации проектного обучения, ориентированного на осуществление коммуникации между учащимися разного возраста, в рамках краткосрочного курса внеурочной деятельности «Основы организации статистических исследований как инструмента познания массовых общественных явлений».

Основная цель проектного обучения – обеспечение для обучающихся условий, располагающих (мотивирующих) их к самостоятельному приобретению знаний, умений, навыков и компетенций в процессе решения практических задач или проблем, требующих интеграции знаний из различных предметов или дисциплин.

Проведенный авторами анализ опыта применения проектного обучения в образовательных организациях [1-2] позволил выделить основные типы проектов и их характеристики, которые можно использовать в образовательных организациях как среднего, так и высшего образования (таблица 1).

Организационное сопровождение проектной деятельности в организации образования включает в себя ряд мероприятий: определение типов проектов, моделей команды и модели проекта, определение потенциальных партнеров (в вузах и сузах - из числа работодателей, баз практик), разработка и экспертиза паспортов проектов, согласование технологии реализации междисциплинарных проектов, определение потенциальных руководителей проектов, реализация мероприятий по введению дисциплин / разделов дисциплин / внеурочных курсов, касающихся проектных тематик, в учебные планы и / или рабочие программы, учебно-методическую документацию, формирование учебно-методических материалов для проектно-ориентированного обучения, информационное сопровождение.

Таблица 1 – Характеристика и типы проектов, рекомендуемых к использованию в образовательной деятельности

Типы проектов	Результат	Рекомендуемая модель команды	Модель проекта
Монодисциплинарные с низким уровнем самостоятельности, ориентированные на приобретение знаний, умений, навыков, компетенций по дисциплине и/или изготовление какого-либо продукта в рамках дисциплины	участие в конкурсе, отчет, презентация	Индивидуальные и групповые (как правило, одновозрастные)	Краткосрочная
Междисциплинарные с достаточным уровнем самостоятельности, ориентированные на приобретение и использование междисциплинарных знаний, умений, навыков, компетенций для изготовления какого-либо продукта	участие в конкурсе, отчет, презентация, публикация	Индивидуальные и групповые (как правило, одновозрастные)	кратко- и среднесрочная
Исследовательские	участие в конкурсе, публикация, реферат, выпускная квалификационная работа, диссертация	Индивидуальные и групповые, разновозрастные	средне- и долгосрочная
Прикладные	IT-проект, инженерный продукт или технология, проектное решение, бизнес-план, бизнес-кейс, стартап, публикация, реферат, акт внедрения, патент, авторское свидетельство	Преимущественно групповые, разновозрастные	средне и долгосрочная

Организацию проектной деятельности школьников, по мнению авторов, оптимально осуществлять в рамках внеурочной деятельности.

Примером результативного опыта организации проектного обучения, ориентированного на осуществление коммуникации между учащимися разного возраста, с последующим неоднократным успешным участием во Всероссийском школьном конкурсе по статистике «Тренд» (проводится в соответствии с постановлением Правительства Российской Федерации от 17 ноября 2015 г. № 1239 «Об утверждении Правил выявления детей, проявивших выдающиеся способности, сопровождения и мониторинга их дальнейшего развития») [3] явилось внедрение краткосрочного курса внеурочной деятельности «Основы организации статистических исследований как инструмента познания массовых общественных явлений».

Результативность проектного обучения подтверждалась призовыми местами различных команд в течение первых же двух лет внедрения курса на региональном уровне и призовым местом (диплом 1 степени) на всероссийском уровне [4].

Краткосрочный курс «Основы организации статистических исследований как инструмента познания массовых общественных явлений» реализовывался в рамках общеинтеллектуального, общекультурного, социального, духовно-нравственного направлений для учащихся 7-11 классов. Материал курса рассчитан на интеграцию знаний, умений и навыков обучающихся, которые были получены ими в процессе изучения базовых курсов информатики и математики, а также обществознания, географии, истории, иностранного языка. Назначение курса - овладение эффективным инструментарием познания массовых общественных явлений, обработка и интерпретация экспериментальных данных, повышение общей культуры, становление мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики.

Цель курса – формирование новых знаний в области статистики, формирование компетенций, направленных на выработку навыков индивидуальной и групповой исследовательской деятельности.

Задачами курса являлись:

•мотивация учащихся к приобретению знаний, познавательной творческой деятельности, развитию внимания, логического мышления, способности к эффективной работе в группе единомышленников;

•знакомство с историей российской и мировой статистики, с официальными сайтами Федеральной службы государственной статистики РФ; с сайтами других стран;

•развитие аналитических способностей;

•приобретение навыков организации и проведения статистического исследования, сбора и обработки данных, самостоятельного поиска статистической информации в интернете и в других источниках, анализа данных;

•приобретение навыков презентации результатов исследования;

•приобретение навыков оформления результатов исследования в виде научной публикации или проекта.

Результатом освоения курса явилась исследовательская работа по теме задания конкурса «Тренд» (2019-2020 уч.г.) «Проведите статистическое исследование на тему «Какое малое предприятие можно открыть в Вашем районе/населенном пункте», а также сопроводительный видеоролик, размещенный в архиве заданий и работ всероссийского конкурса «Тренд» [3].

Команда лицеистов из пяти человек 7, 8, 10 и 11 класса:

- первый этап конкурса – выполнила исследовательскую работу (в виде пояснительной записки в соответствии с установленными требованиями), в процессе выполнения этапа лицеисты успешно применили математические и информационные компетенции, а также знания, полученные на таких дисциплинах, как обществознание, география, история, а также приобрели и использовали необходимые знания по статистике;
- второй этап конкурса – создала видеоролик, в процессе создания члены команды исполняли функции сценаристов операторов, режиссеров, актеров и др., успешно применили информационные, коммуникативные компетенции, а также знания, полученные на таких дисциплинах, как литература, русский язык, приобрели новые компетенции, связанные с процессом разработки всех этапов минивидеофильма;
- третий этап конкурса – приняла участие в олимпиаде по знаниям основ статистики.

Стоит отметить, что по результатам первых двух этапов команда была абсолютным лидером, по результатам третьего этапа команда получила диплом 1 степени.

В заключение хотелось бы отметить, что использование элементов проектного обучения – это уже не инновация, а необходимость, продиктованная мегатрендами общества и образования, и внедрение проектного обучения необходимо осуществлять, начиная со школьной скамьи, выбирая методы, средства и тематики, мотивирующие детей к созданию командного проекта.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. STRATEGY TO FORM STUDENTS POSITIVE MOTIVATION TO EDUCATIONAL AND PROJECT PROFESSIONAL ACTIVITIES Vitkovskaya I., Solovyeva T., Ovchinnikova A.Zh.: SOCIETY. INTEGRATION. EDUCATION. Proceedings of the International Scientific Conference . 2021. С. 766-776.

2. МЕДИАСОПРОВОЖДЕНИЕ ПРОЕКТНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ В КОНТЕКСТЕ ПРОДВИЖЕНИЯ ИННОВАЦИОННОГО ИМИДЖА ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ОРГАНИЗАЦИИ. Перевозова О.В., Берсенева Е.В.: Инновационное развитие профессионального образования. 2021. № 2 (30). С. 95-103.

3. ПОЛОЖЕНИЕ о всероссийском школьном конкурсе по статистике «Тренд» [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://statkonkurs.ru/documents/Polozhenie-o-VShK-Trend (дата обращения 11.03.2022)

4. Победители и призеры Всероссийского школьного конкурса по статистике "Тренд" [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://statkonkurs.ru/about/Pobediteli-i-prizyory-Konkursa (дата обращения 11.03.2022)

УДК 37.013

ПРИМЕНЕНИЕ ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В ШКОЛЕ

Кузнецова Марина Александровна
МОУ «СОШ №5» г. Ржева Тверской области, г. Ржев
E-mail: marina_kuzneczova_1979@mail.ru

Стрижова Юлия Александровна
МОУ «СОШ №5» г. Ржева Тверской области, г. Ржев
E-mail: strizhova32009@yandex.ru

Ключевые слова: *цифровые образовательные ресурсы, интерактивная образовательная онлайн-платорма, 3D-моделирование.*

Аннотация. В работе рассматриваются цифровые образовательные ресурсы, используемые на уроках математики, а также для подготовки обучающихся к ОГЭ, рассмотрено программное обеспечение для создания 3Д-проектов на уроках математики.

В настоящее время многие учителя все чаще стали использовать на уроках цифровые технологии. Особенно возросла эта потребность в последние годы и стала неотъемлемой частью работы учителя на уроке в связи со сложной эпидемиологической ситуацией стране. Значит, перед учителем математики возникают новые проблемы, ему приходится осваивать новую технику и создавать новые методики преподавания, основанные на использовании современной информационной среды обучения. Для того, чтобы использовать и применять эти технологии важно понимать, где следует вставить их в часть урока, так, чтобы это была не напрасная трата времени, а качественное дополнение к уроку. Так же особую важность имеет и наличие качественного оборудования и программного обеспечения.

Цифровые образовательные ресурсы – это представленные в цифровой форме фотографии, видеофрагменты, статические и динамические модели, объекты виртуальной реальности и интерактивного моделирования, звукозаписи, символьные объекты и деловая графика, текстовые документы и иные учебные материалы, необходимые для организации учебного процесса. Чтобы применять ЦОР хотя бы на элементарном уровне необходимо, владеть умением работать в программах Microsoft Word и Power Point. При подготовке к урокам нужно продумывать, для отработки какой темы больше подходят ЦОРы, на каком этапе урока более выгодно раскроют материал урока.

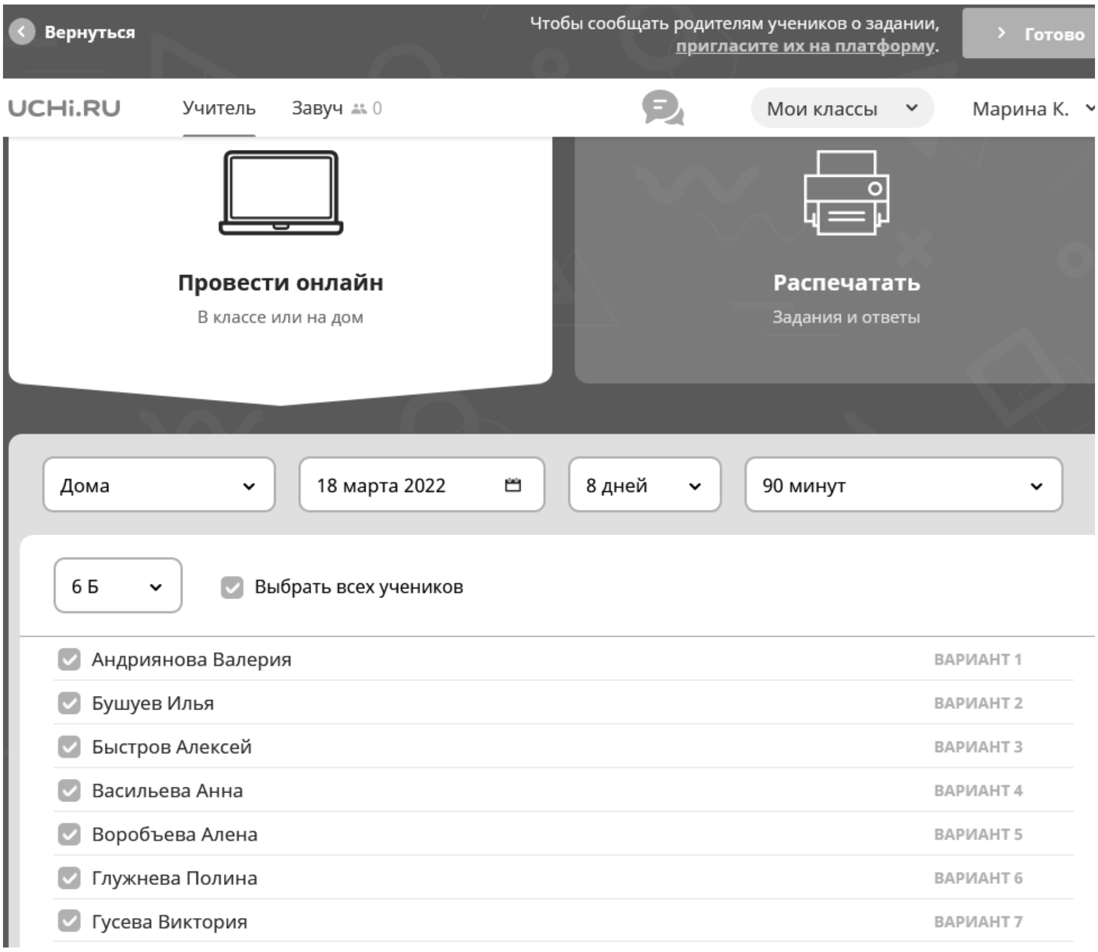
Самое распространенное, что мы используем на уроках это конечно же презентация, которая представляет собой мультимедийный конспект, содержащий краткий текст, основные формулы, чертежи, рисунки, видеофрагменты, анимации. Программа Power Point позволяет строить графики и диаграммы, готовить слайды, а также организовывать показы слайдов. Таким образом, наглядность и привлечение внимания на уроках математике, которые многие ребята считают скучными, будут казаться более интересными.

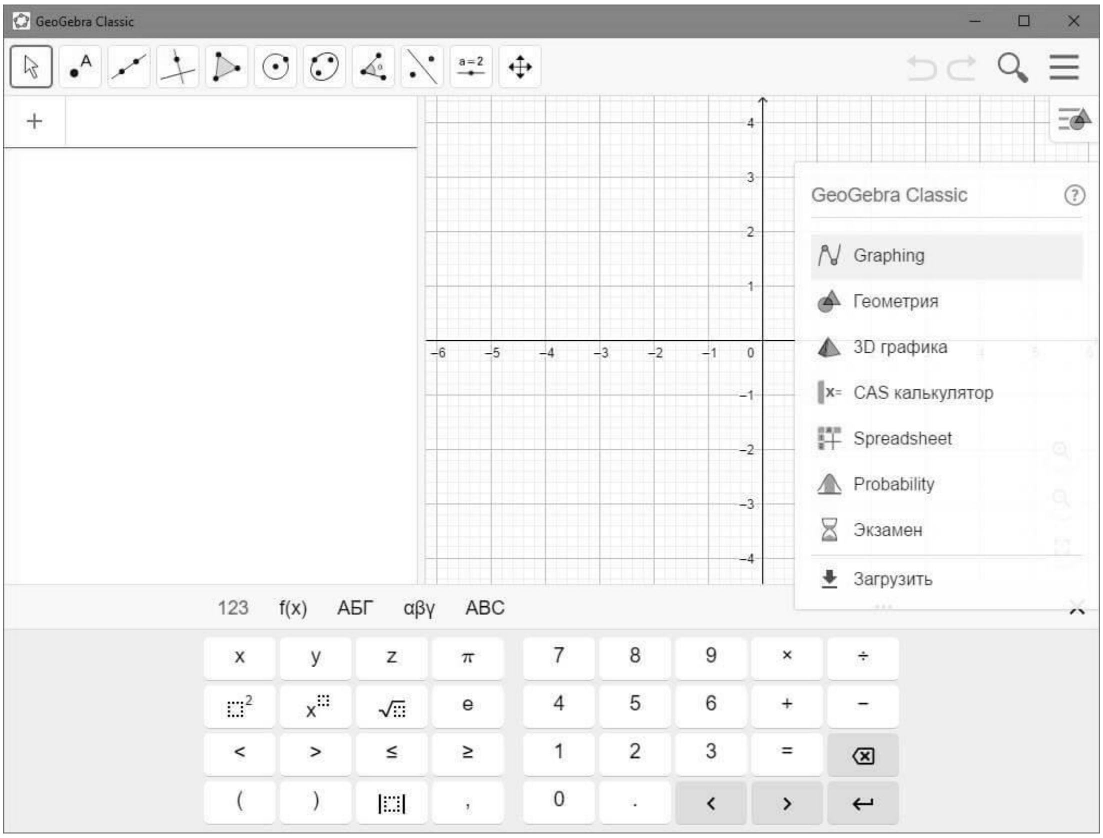
Увеличение умственной нагрузки на уроках математики заставляет нас, учителей, задумываться над тем, как поддержать интерес к изучаемому материалу у учащихся. Возникновение интереса к математике у значительного числа учащихся зависит в большей степени от методики её преподавания, от того, насколько умело будет построена учебная работа. Необходимо позаботиться о том, чтобы на уроках каждый ученик работал активно и увлечённо. Поэтому на уроках мы пытаемся придумать более новые и интересные подходы в изучении и отработке материала.

Сейчас ребята применяют и используют возможности цифровых технологий в большом объеме: это и различные тренажеры, электронные книги и учебники, репетиторы, поиск информации в интернете, дидактические материалы в среде Word. Обучающие достаточно хорошо разбираются в технике и им интересно свое непосредственное участие в образовательном процессе.

В своей работе мы используем такую интерактивную образовательную онлайн- платорму как: УЧИ.РУ (https://uchi.ru/). Мы зарегистрировали все классы со всеми ребятами. На данный момент нашим обучающимся открыт бесплатный доступ ко всем материалам платформы, хотя раньше это все было платным (можно было выполнять только определенное количество карточек в день). Обучающиеся с большим увлечением выполняют бесплатные олимпиады по предмету. Проходят мониторинги, которые нам, учителям, очень удобно отслеживать и изучать уже готовый анализ и оценивание работы. Как учителя, мы периодически раздаем ребятам карточки свои или те, которые предлагает система. Эти задания даем в качестве домашней работы, где ограничиваем время выполнения и сдачи работы. Система все проверит и оценит. Очень удобно в этой системе работать при подготовке к ВПР. Можно выбирать подходящий для вас режим: распечатать нужное количество вариантов (по количеству детей в классе), провести онлайн, если в школе это позволяет техника, а также задать выполнение работы как домашнее задание с ограничением по времени. Все задания оформлены ярко и красочно, что заставляет детей с большим удовольствием выполнять работу.

Если обобщить, то можно выделить, что чаще всего нами используются: мультимедийные уроки (это проверка знаний на уроке и дома с помощью теста или опроса, самостоятельные работы, математические диктанты, контрольные и самостоятельные работы, онлайн тесты, объяснение новой темы, особенно если это - геометрия); подготовка к ОГЭ, ЕГЭ (на таких платформах, как УЧИ.РУ, Решу ОГЭ, ВПР).


Вернуться
Чтобы сообщать родителям учеников о задании, пригласите их на платформу.
Готово
UCHi.RU
Учитель
Завуч 0
Мои классы
Марина К.
Провести онлайн
В классе или на дом
Распечатать
Задания и ответы
Дома
18 марта 2022
8 дней
90 минут
6 Б
Выбрать всех учеников
Андриянова Валерия
ВАРИАНТ 1
Бушуев Илья
ВАРИАНТ 2
Быстров Алексей
ВАРИАНТ 3
Васильева Анна
ВАРИАНТ 4
Воробъева Алена
ВАРИАНТ 5
Глужнева Полина
ВАРИАНТ 6
Гусева Виктория
ВАРИАНТ 7


GeoGebra Classic
GeoGebra Classic
Graphing
Геометрия
3D графика
CAS калькулятор
Spreadsheet
Probability
Экзамен
Загрузить
123
f(x)
АБГ
αβγ
ABC

При работе с цифровыми образовательными ресурсами необходимо учитывать возрастные особенности учащихся и, конечно же, не забывать про санитарные нормы и правила, ограничивающие времяпровождение обучающегося перед экраном или монитором.

Еще одна программа, которую мы используем на уроке – это «Живая геометрия», для это необходимо, чтобы урок проходил в кабинете информатике, или на партах у обучающихся были планшеты или ноутбуки.

Эта программа позволяет строить современный компьютерный чертеж, который выглядит как традиционный, однако, представляет собой качественно совершенно новое явление. Чертёж, построенный с помощью программы, можно тиражировать, деформировать, перемещать и видоизменять. Элементы чертежа легко измерить компьютерными средствами, а результаты этих измерений допускают дальнейшую компьютерную обработку. Возможны также многократные обмены чертежами с учителем, хранение нескольких вариантов одного и того же чертежа и т. п. Есть возможность измерять длины отрезов, величины углов и многое другое; выполнять действия над величинами. Если нет возможности при изучении некоторых геометрических тем посетить кабинет, оснащенный компьютерами, то можно с этой программой работать и с одним устройством. То есть демонстрация через проектор образца, эталона задания, которое нужно выполнить обучающимся в своих тетрадях. Эту программу ребята могут установить и у себя дома, тогда круг решаемых и предлагаемых задач может быть увеличен. Познакомить учеников можно с работой в этой программе или на уроках информатики или после всех занятий, это не займет много времени. Конечно, разумное использование этой программы, применение ее на конкретных темах дает большое преимущество по сравнению с традиционным объяснением материала и отработки полученных знаний. Факты, открытые учащимися самостоятельно, усваиваются ими лучше, чем преподнесенные учителем в готовом виде. Меняется отношение учащихся и к геометрическому объекту, созданному своими трудами, по отношению к тому, как если бы его просто дали в готовом виде или определили. Ведь обучающемуся пришлось затратить немало сил на создание своего чертежа. Мы применяем данную программу в большей степени на геометрии:

1) По готовым чертежам, разработанным учителем.
2) Самостоятельное моделирование учащимися геометрических объектов.

Еще одним направлением цифровых технологий является 3D-моделирование. Использование на уроках данной технологии способствует развитию интеллектуальных умений в области моделирования, позволяет развивать творческие способности учащихся, формировать пространственное мышление и воображение, которое будет помогать в дальнейшем изучении таких предметов как математика, геометрия, черчение, технология. 3D –моделирование – один из наиболее действенных и современных способов для этого.

3D-моделирование в перспективе является эффективным инструментом школьного обучения, в котором используются межпредметные связи информатики и математики, физики, биологии, экономики и ряда других наук.

Включение 3D - моделирования в ход учебного процесса направлено на достижение следующих целей:

- формирование представлений о базовых методах геометрического моделирования, их достоинствах и недостатках, областях применения, а также способах создания и представления геометрической информации на ПК;
- выработка умения построения трехмерных моделей;
- повышение познавательной активности и мотивации обучающихся;
- развитие творческого мышления;
- повышение уровня мотивации обучающихся;
- формирование навыков применения знаний и умений в самостоятельной проектной или исследовательской деятельности;
- формирование навыков использования систем 3D – моделирования при выполнении индивидуальных и коллективных проектов, в учебной деятельности.

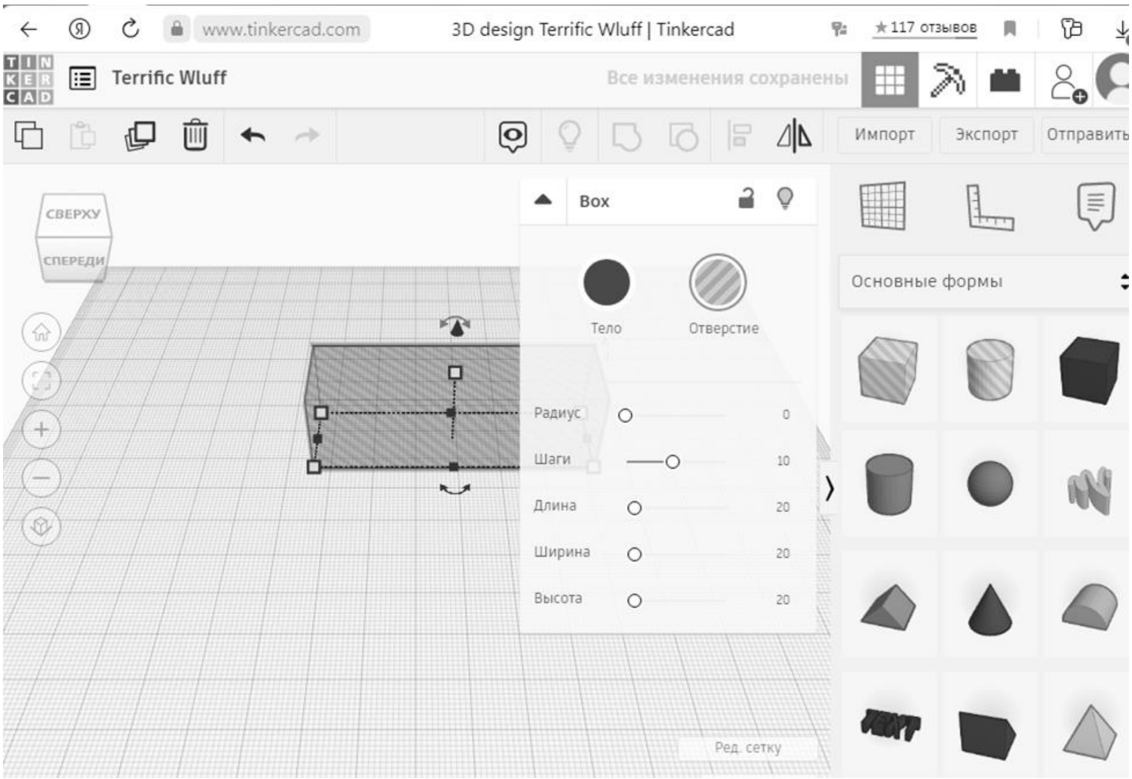
На интегрированных уроках математики и информатики нами используется кроссплатформенное программное обеспечение Tinkercad (Тинкеркад) для создания и редактирования 3 D-проектов. Находится оно по адресу www.tinkercad.com. Сервис работает бесплатно и позволяет создавать огромное количество простых 3D объектов и электронных схем из большого числа заготовок, созданных как разработчиками программы, так и ее пользователями. Разработчик позиционирует данную платформу как решение начального уровня для детей, преподавателей и любителей-проектировщиков, то есть рядовых пользователей.

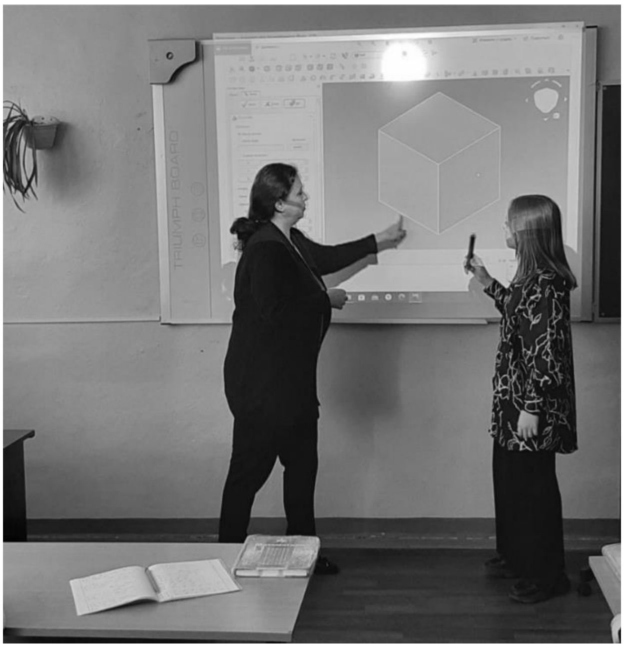
Для работы с приложением необходимо зарегистрироваться, создать учетную запись. Есть три вида учётных записей:

1. для преподавателей;
2. для учащихся;
3. персональный аккаунт.

После создания учетной записи преподавателя и настройки классной комнаты присоединяющиеся учащиеся добавляются в безопасном режиме.

Учитель становится модератором учетных записей своих учащихся, имеет возможность просматривать проекты и отслеживать другую деятельность, а также публиковать материалы учащихся.





По завершению регистрации откроется рабочая зона программы. Мастер-помощник предложит ознакомительный тур по ключевым инструментам сервиса.

Для доступа ко всем проектам следует нажать на логотип Tinkercad в верхнем левом углу рабочей зоны. При первом запуске здесь находятся примеры и отдельные модули для начала работы. В верхней части интерфейса можно увидеть значок галереи, где расположены проекты других пользователей, выход в Блог и ссылка на мастера-помощника.

Сервис позволяет создавать абсолютно новые 3Д-модули без привлечения сторонних баз. Для этого необходимо кликнуть на голубой кнопке «Создать новый проект». Приложение в автоматическом порядке даёт ему имя с оглядкой на дату и личные данные пользователя. Для переименования достаточно нажать пару раз на заголовок и ввести свой.

Приложение Tinkercad предлагает множество вариантов вёрстки 3Д-проектов. Можно создавать модели полностью с нуля, либо редактировать уже имеющиеся образцы. Обучающиеся с огромным интересом работают на данной платформе, создавая свои проекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дж. Ли, Б. Уэр. Трёхмерная графика и анимация. Москва: Вильямс, 2020. 640 с.

2. Живая геометрия // сайт И.С. Храповицкого: – Режим доступа: http:// janka-x.livejournal/com/ (дата обращения 20.02.2018). Живая геометрия. Учебно-методическое пособие/под ред. Г.Б. Шабат. Москва: Институт новых технологий образования, 2001. 239 с.

3. Иванов С. Г. Исследовательские и проектные задания по планиметрии с использованием среды «Живая математика» / С. Г. Иванов, В.И. Рыжик. Москва: Просвещение, 2013. 144 с.

4. Иванова Е. О. Теория обучения в информационном обществе. Москва: Просвещение, 2011. 190 с.

5. Полат Е.С. Современные педагогические и информационные технологии в системе образования: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / Е.С. Полат, М.Ю. Бухаркина. Москва: Академия, 2007. 250 с.

6. Старцева Н. А. Информационные технологии на уроках математики». Москва: Просвещение, 2019. 256 с.

УДК 37:004

ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЙ: ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ, РИСКИ, ПРОБЛЕМЫ

Кучина Елена Анатольевна
Тверской государственный университет, МБОУ СОШ № 17, г. Тверь
E-mail: elena_coochina@mail.ru

Ключевые слова: *цифровая трансформация образования, цифровая образовательная среда.*

Аннотация. В работе проводится анализ современного состояния и перспектив развития цифровой образовательной среды.

Современное законодательство определяет государственную политику в сфере информационного развития общества[2], стратегию развития электронной промышленности[3], расставляет приоритеты развития всех сфер государства[4], в том числе, формулирует стратегическое направление в области цифровой трансформации образования[5].

Проникновение в различные сферы деятельности человека цифровых технологий, с одной стороны, дает возможности для интенсивного развития экономики страны, с другой стороны, диктует требования рынку труда, связанные с подготовкой квалифицированных специалистов, имеющих высокий уровень математической грамотности, серьезную естественно-научную и гуманитарную подготовку, цифровую грамотность, прочные знания, умения и способности в области технологий (проектное мышление; цифровая грамотность; алгоритмическое мышление; направленное или критическое мышление и др.), владеющих «компетенциями XXI века».

В 2017 году на Петербургском международном экономическом форуме В. В. Путин указал запрос государства в отношении образования: «намерены кратно увеличить выпуск специалистов в сфере цифровой экономики, а, по сути, нам предстоит решить более широкую задачу, задачу национального уровня — добиться всеобщей цифровой грамотности. Для этого следует серьёзно усовершенствовать систему образования на всех уровнях: от школы до высших учебных заведений. И конечно, развернуть программы обучения для людей самых разных возрастов». В этой связи

---

[2] Указ Президента Российской Федерации от 9 мая 2017 г. N 203 "О Стратегии развития информационного общества в Российской Федерации на 2017 - 2030 годы"

[3] Стратегия развития электронной промышленности Российской Федерации на период до 2030 года, утвержденная распоряжением Правительства Российской Федерации от 17 января 2020 г. N 20-р

4 Федеральный закон "О стратегическом планировании в Российской Федерации"

[5] Распоряжение Правительства РФ от 2 декабря 2021 г. № 3427-р Об утверждении стратегического направления в области цифровой трансформации образования, относящейся к сфере деятельности Министерства просвещения РФ

цифровая трансформация отрасли образования является неотъемлемой частью развития цифрового общества и цифровой экономики страны. Система образования становится драйвером трансформации традиционного общества в цифровое [2].

На протяжении последних десятилетий мы наблюдаем поэтапный переход от компьютеризации и информатизации школ к цифровой трансформации образования. С 90-х годов XX в. стал широко использоваться термин «информационные и коммуникационные технологии», в школах появилась возможность использовать в учебном процессе рабочее место учителя, оборудованное компьютером, интерактивной доской или проектором с экраном; чуть позже расширили возможности учебного процесса новые технические средства: документ-камеры, планшеты, мобильные лаборатории и др. Вслед за техническими средствами в школу вошли цифровые ресурсы, позволяющие интегрировать в единое пространство учащихся, учителей и родителей школы, применять их в учебном процессе, обеспечивать информационно-методическую поддержку учебно-воспитательного процесса. Цифровые возможности облегчили жизнь учителя, заменив, например, бумажный журнал электронным.

Период дистанционного обучения во время пандемии и карантинов обогатил образование новыми технологиями, началось активное развитие электронных образовательных ресурсов и платформ.

Вместе с тем это время выявило *затруднения, проблемы и недостатки в управлении:*

1) *организацией учебно-воспитательного процесса:*
   - «цифровой разрыв» (digital divide), возникающий из-за неравенства в доступе к цифровым технологиям [5], техническую неготовность образовательных учреждений и потребителей образовательных услуг к внедрению дистанционных форм обучения;
   - «кадровый голод»;
   - отсутствие опыта применения дистанционных технологий у педагогов;
   - отсутствие единой безопасной цифровой среды для обучения;
2) *качеством образования и результатами:*
   - снижение качества образования;
   - «примитивизация компетенций» [6];
   - отсутствие качественного разноуровневого контента;
   - слабый контроль за качеством электронных ресурсов;
   - отсутствие воспитательной функции образования и возможности реализации воспитательной программы;
3) *процессами:*
   - сложности в дистанционном управлении образовательной организацией;

➢трудности в дистанционном обучении работников использованию цифровых ресурсов и технических средств;

➢отсутствие нормативно-правовой основы реализации программ с применением дистанционных технологий и электронного обучения.

С 1.03.2022 года вступили в законную силу изменения в Федеральный закон от 29.12.2012 N 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации", закрепившие понятия «дистанционные технологии» обучения и «электронное обучение» и возможность их использования для реализации образовательных программ разного уровня. Условием использования данных технологий является создание условий для функционирования электронной информационно-образовательной среды.

В настоящий момент цифровая трансформация общего образования является насущной необходимостью. Электронная информационно-образовательная среда образовательной организации позволит соединить в едином цифровом пространстве всех участников образовательных отношений, создаст условия для эффективной коммуникации, организационно-прогностической деятельности образовательной организации и всей системы образования в целом. Единое цифровое пространство станет инструментом управления качеством образовательного процесса и работой педагогического коллектива для достижения каждым учащимся планируемых личностных, предметных и метапредметных результатов.

Создание единого цифрового образовательного пространства (ЦОС – цифровой образовательной среды) российской системы общего образования позволит решить следующие задачи:

1) повысить эффективность процессов функционирования организаций, осуществляющих образовательную деятельность;

2) предоставить равный доступ к качественному верифицированному цифровому образовательному контенту и цифровым образовательным сервисам на всей территории Российской Федерации всем категориям обучающихся;

3) формировать набор сервисов с возможностью получить образовательные сервисы посредством единой точки доступа к цифровым образовательным сервисам, направленным на повышение уровня цифровой культуры;

4) стандартизировать взаимодействие создаваемых и существующих информационных систем Министерства просвещения Российской Федерации, региональных систем и переход на использование единых классификаторов, реестров, справочников и форматов взаимодействия [4].

На сегодняшний день Цифровая образовательная среда (ЦОС) «Моя школа» реализована на базе российского программного обеспечения с использованием технологий: искусственного интеллекта, больших данных, системы распределенного реестра, облачных технологий. ЦОС включает следующие сервисы: отечественную систему видео-конференц-связи «Сферум», электронную библиотеку верифицированных учебных материалов в помощь учителю, проверенные экспертами и соответствующие школьным стандартам (образовательного контента), облачное хранилище и возможность редактировать офисные документы. Возможности системы в перспективе не будет ограничены данными сервисами. Важной особенностью ЦОС является ее интеграция с инфраструктурой федеральной государственной информационной системы "Единый портал государственных и муниципальных услуг (функций)".

Апробация работы ЦОС осуществляется на пилотных площадках регионов с последующей трансляцией опыта в остальные регионы. Внедрение ЦОС проходит поэтапно (инициация, понимание, начало внедрения, рутинное использование, совершенствование и распространение) на разных уровнях образования (школьный, муниципальный, региональный, федеральный).

Первоочередными задачами для создания ЦОС является обеспечение государственных и муниципальных образовательных организаций:

1) высокоскоростным доступом к информационно-телекоммуникационной сети «Интернет» со скоростью не менее 100 Мб/с для городской местности и не менее 50 Мб/с для сельской местности;

2) оснащение образовательных организаций компьютерным, мультимедийным, презентационным оборудованием и программным обеспечением в соответствии со стандартом, разработанным Минпросвещения России совместно с Минкомсвязью России;

3) создание и (или) модернизация структурированных кабельных систем, локальных вычислительных сетей, систем контроля и управления доступом, а также видеонаблюдения на объектах образовательных организаций, позволяющего в постоянном режиме осуществлять мониторинг организации образовательного процесса в образовательных организациях;

4) оснащение иным оборудованием, обеспечивающим бесперебойность функционирования, размещения оборудования информационно-телекоммуникационной инфраструктуры в образовательных организациях [3].

Функционирование ЦОС потребует цифровой грамотности всех участников образовательного процесса. В связи с этим, одним из важных этапов обеспечения деятельности ЦОС является выстраивание системы непрерывного повышения квалификации педагогов, разработки моделей технической поддержки на разных уровнях.

Стабильность функционирования ЦОС зависит от последовательности выполнения всех требований цифровой трансформации на разных уровнях системы общего образования.

Внедрение ЦОС позволит получить всем школам страны цифровые средства, ресурсы, позволяющие повысить качество образования, способствовать всестороннему развитию личности ребенка, даст новые ресурсы для реализации традиционных, новых образовательных практик и реализации разных форм обучения, предусмотренных Федеральным законом от 29.12.2012 N 273-ФЗ "Об образовании в Российской Федерации", позволит эффективнее использовать цифровую инфраструктуру школы, повысит цифровую грамотность всех участников образовательного процесса, даст возможность педагогическому коллективу освободиться от лишней отчетности, добиться прозрачности результатов учебно-воспитательной деятельности, повысит эффективность управления процессами и ресурсами школы.

Цифровая трансформация образования начинается с отдельно взятой школы и во многом зависит от готовности руководителя к современным вызовам. Для школы, где профилируется техническое, естественно-научное, социально-экономическое образование, цифровая трансформация дает новые возможности и ресурсы для стратегического развития образовательной организации: формирование среды для индивидуального развития и непрерывного профессионального самоопределения ученика; формирование среды для развития и профессионального роста учителя и информационно-методического потенциала учителя; формирование системы оценки качества образования и стандартизации знаний; развитие системы управления образовательными ресурсами; обеспечение комплексной безопасности учебно-воспитательного процесса.

Для изучения мнения старшеклассников и взрослых (родителей и директоров школ города Твери) был проведен опрос, связанный с цифровой трансформацией образования. Респондентам задавались следующие вопросы:

Таблица 1. Сможет ли искусственный интеллект заменить учителя?

Варианты ответов	Директора	Родители	Учащиеся 11 классов
Нет, потому что общение с учителем не только передача информации	90	94,3	70,9
Да, если ИИ будет способен к эмпатии	5	5,7	21,8
Однозначно, да	5	0	7,3

Таблица 2. На сколько цифровизация должна проникнуть в школу, по Вашему мнению,?

Варианты ответов	Директора	Родители	Учащиеся 11 классов
Экономия времени, %	90	71,4	61,8
Дистанционное обучение, %	75	25,7	43,6
Школа без учителя, %	5	0	5,5
Новая форма взаимодействия с родителями, %	70	51,4	27,3
Цифровые учебные технологии, %	65	71,4	74,5
Другие ответы			
Оперативное решение вопросов, %	5		
Оплата в столовой банковской картой			1,8
Смещение фокусов в обучение, заучивание		2,9	

Таблица 3. Какая форма взаимодействия для получения знаний для Вас наиболее приемлема?

Варианты ответов	Учащиеся 11 классов
Обучение на уроках в школе	69,1
Дистанционное обучение с помощью учителя	36,4
Самостоятельное обучение с использованием интернет-ресурсов	61,8
Только с родителями или репетиторами	18,2

Очевидно, для обучающихся школы цифровая образовательная среда не является чуждой. Старшеклассники готовы обучаться, используя цифровые ресурсы, сервисы и технологии. Для обучающихся, так же, как и для взрослых цифровая образовательная среда – это средство для повышения качества и эффективности учебного процесса. Однако, роль личности учителя в современном образовании остается ведущей, это говорит о необходимости подготовки учителя новой формации, педагога, умело соединяющих современные педагогические технологии с использованием цифровых ресурсов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Паспорт национального проекта «Образование» (утв. президиумом Совета при Президенте РФ по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол от 24.12.2018 N 16) [Электронный ресурс]. URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_319308/ (дата обращения: 23.03.2022)

2. Кучина Е. А. Пропедевтика профессионального самоопределения в общеобразовательных школах с углубленным изучением предмета // Вестник Твер. гос. ун-та. 2021. № 2. С. 193–199.

3. Распоряжение Минпросвещения России от 18.05.2020 N Р-44 «Об утверждении методических рекомендаций для внедрения в основные общеобразовательные программы современных цифровых технологий» [Электронный ресурс]. – https://legalacts.ru/doc/rasporjazhenie-minprosveshchenija-rossii-ot-18052020-n-r-44-ob-utverzhdenii/ (дата обращения: 23.03.2022)

4. Распоряжение Правительства РФ от 2 декабря 2021 г. № 3427-р «Об утверждении стратегического направления в области цифровой трансформации образования, относящейся к сфере деятельности Министерства просвещения РФ» [Электронный ресурс]. – http://publication.pravo.gov.ru/Document/View/0001202112070025 (дата обращения: 23.03.2022)

5. Трудности и перспективы цифровой трансформации образования Под редакцией А.Ю. Уварова, И.Д. Фрумина [Электронный ресурс]. – URL: https://ioe.hse.ru/data/2019/07/01/1492988034/Cifra_text.pdf (дата обращения: 23.03.2022)

6. Е. В. Устюжанина, С. Г. Евсюков Цифровизация образовательной среды: возможности и угрозы [Электронный ресурс]. – https://doi.org/10.21686/2413-2829-2018-1-3-12 (дата обращения: 23.03.2022)

УДК 378.147.88

ИНТЕРНЕТ-ОЛИМПИАДА – ЭЛЕМЕНТ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ НА ИНЖЕНЕРНО-СТРОИТЕЛЬНОМ ФАКУЛЬТЕТЕ

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова*: интернет-олимпиада, аналитическая геометрия, умения, знания, владения.*

Аннотация. В статье приведена подборка задач по аналитической геометрии для подготовки студентов к интернет-олимпиаде, показаны примеры их использования на различных этапах обучения, указаны возможные точки роста.

Преемственность в содержании математического образования, формах и методах обучения математики в школе и вузе – необходимое условие математической подготовки современных специалистов. Старшеклассники, планирующие поступление в вузы, принимают активное участие в различных конкурсах и олимпиадах. Став студентами, многие из них сохраняют заинтересованность в подобных мероприятиях. Одним из них является Международная интернет-олимпиада. Первый тур олимпиады по математике всегда проводится в on-line режиме. Интернет-олимпиада служит примером перехода в цифровой формат ряда форм образовательного процесса, которые позволяют не ограничить число участников, повышают инфокоммуникационную культуру студентов и помогают им раскрыть себя, получить независимую оценку своих знаний, умений и навыков.

В работе [1] было рассмотрено включение олимпиадных задач раздела «Линейная алгебра» в процесс обучения в техническом вузе. В данной статье анализируется возможность использования задач раздела «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» на различных этапах обучения. Данный модуль служит фундаментом для последующего изучения не только других математических модулей, но и таких смежных дисциплин, как например, физика, теоретическая механика [2,3]. Он способствует развитию критического и креативного мышления. Ещё Галилео Галилей писал, что «Не должны ли мы признать, что геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и дает нам возможность правильно мыслить и рассуждать?» [4].

Задачи для подготовки к Открытым международным студенческим интернет-олимпиадам раздела «Векторная алгебра и аналитическая геометрия» можно использовать на различных ступенях образовательного процесса. Из раздела геометрия в первом туре Открытой Международной студенческой Интернет-олимпиады по дисциплине «Математика» включены задачи разного уровня сложности: базового и повышенного.

Задача базового уровня проверяет воспроизведение математических фактов и методов, выполнение вычислений. Приведем примеры самых простых задач базового уровня, которые можно предложить студентам на практических занятиях по данной теме [5].

1. Пусть вектор $(1;2;m)$ является линейной комбинацией векторов $(0;1;1)$ и $(1;1;2)$. Тогда значение m равно…

2. Вектор $\vec{x}$ компланарен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, удовлетворяет условиям:
$\vec{a}\cdot\vec{x}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{x}=0,$ где $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ и $\angle(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{2\pi}{3}$. Найдите вектор $\vec{x}$.

3. Модули трех векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ равны 3. Модуль вектора $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ равен $3\sqrt{2}$. Известно, что вектор $\vec{a}\perp\vec{b}$ и $\vec{b}\perp\vec{c}$. Найдите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{c}$.

Для решения подобных задач необходимо проявить знание определения и свойств скалярного произведения векторов; свойств компланарных векторов; определения линейной комбинации векторов; равенства векторов; умения составлять простейшие математические модели; решать простейшие системы линейных уравнений. Успешное выполнение предложенных заданий демонстрируют способность студентов решать задачи, используя математические знания и методы, умение анализировать свой метод решения.

Задача повышенного уровня сложности проверяет умение устанавливать связи и проводить интеграцию материала из разных разделов математики, необходимых для решения поставленной проблемы. Выполнение второго задания говорит о способности интерпретировать полученные результаты с учётом поставленной задачи.

Закрепление теоретических знаний, умений и навыков, полученных студентами на лекциях и практических занятиях, происходит при самостоятельной работе студентов, которая планируется и методически готовится преподавателями. Она позволяет углубить и расширить теоретические знания, развить творческую активность студентов и их способность к саморазвитию. Многие задачи подбираются так, чтобы при решении одновременно использовались несколько разделов курса математики, и студенты могли продемонстрировать понимание взаимосвязей различных тем.

Для самостоятельного решения можно предложить, например, такие задачи [5].

1. Точки A_1, A_2, …, A_{2022} разбивают окружность диаметром 1 на 2022 равные дуги. Пусть B произвольная точка этой окружности, а вектор $\vec{S}$ равен $\vec{S}=\overrightarrow{BA_1}+\overrightarrow{BA_2}+\ldots+\overrightarrow{BA}_{202}$. Найдите длину вектора $\vec{S}$.

2. Даны вершины треугольника $M_1(2;0;2)$, $M_2(2;2;0)$ и $M_3(2;2;2)$. Найдите сумму координат точки пересечения плоскости $z=4$ с прямой, проходящей через начало координат и центр окружности, описанной около треугольника $M_1M_2M_3$.

3. Пусть вектор $\vec{a}$ равен: $\vec{a}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\vec{a}_n$, где $\vec{a}_0 = \vec{i}$ ($\vec{i}$ – орт оси Ox), $|\vec{a}_n|=\dfrac{1}{2^n}$ и вектор $\vec{a}_n$ составляет угол $\dfrac{\pi n}{3}$ с положительным направлением оси Ox. Тогда значение $2013\cdot\left|\vec{a}\right|^2$ равно …

4. Пусть $x,\ y$ – такие действительные числа, что $x^2+y^2=7x+8y$. Наибольшее возможное значение x^2+y^2 равно …

5. Точка M, делящая отрезок, соединяющий точки $A(1;1)$ и $B(2;4)$, в отношении $\dfrac{AM}{MB}=\dfrac{3}{2}$, принадлежит прямой $2x+y=k$. Найдите k.

6. Известно, что касательные к параболе $y=ax^2$ в точках $A,\ B$ и C пересекаются в трех точках $D,\ E$ и F. Найдите отношение $\dfrac{S_{ABC}}{S_{DEF}}$, где S_{ABC} и S_{DEF} – площади треугольников ABC и DEF соответственно.

7. Пусть точки F_1 и F_2 – фокуса эллипса $4x^2+9y^2=36$, а точка M взята на эллипсе так, что $MF_1:MF_2=2:1$. Найдите площадь треугольника MF_1F_2.

8. Пусть $y=k_1x-1,\ y=k_2x-4,\ y=k_3x+b_3$ – уравнения трех касательных к параболе $y=x^2$. Найдите наибольшее возможное значение b_3, если $k_3=k_1+k_2$.

9. На координатной плоскости даны точки $A(2;-3)$ и $B(4;0)$. Пусть p_0 – наименьшее возможное значение параметра p $(p>-5)$, при котором ближайшая к графику функции $y=\sqrt{x^3}+p$ точка прямой AB лежит на отрезке AB. Тогда 24 p_0 равно…

Решение каждой задачи содержит свою маленькую хитрость. Для решения задач два и семь надо догадаться и доказать, что треугольник прямоугольный. Во второй этот факт вытекает из ортогональности векторов $\overrightarrow{M_1M_3}$ и $\overrightarrow{M_2M_3}$, а в седьмой – к этому приводит нетривиальное использование геометрического определения эллипса. Третья задача интересна тем, что решение использует переход к комплексным числам и требует знание формулы Муавра, а четвертая – к векторам. Сложность шестой задачи состоит не только в составлении математической модели с большим числом неизвестных, но и проявление умений работать с такими моделями, сочетая знания различных тем. Последние две задачи показывают тесную связь аналитической геометрии и математического анализа. Они проверяют умение не только анализировать исходные данные, видеть взаимосвязь различных понятий, но и способность применять математический инструментарий для решения задач. Обсуждение решений таких задач на занятии приводит к более глубокому, неформальному усвоению предмета, учит использованию нестандартных подходов к решению, умению решать комплексные задачи.

Подобные задачи можно использовать и в процессе проведения экзамена. В первом семестре рассматриваются очень разноплановые темы, поэтому экзаменационный билет должен содержать задачи, прочитав которую студентам сначала необходимо понять из какой она области математики, какие знания необходимы для построения математической модели. Следовательно, вариации, представленных выше задач для самостоятельного решения можно использовать при создании фонда оценочных средств по математике.

Студентам могут быть интересны задачи, где прослеживаются взаимосвязи не только различных разделов математики, но и межпредметные связи. Они с удовольствием решают их, и тем самым проявляют, как показывает практика, больший интерес к предмету. Примерами таких задач могут служить следующие:

1. На плоскости Oxy прямая $L_1\colon 2x+y+5=0$ движется по направлению вектора $\overrightarrow{S_1}=(4:-2)$ с постоянной скоростью $V_1=1$, а прямая $L_2\colon 2x+4y-3=0$ движется по направлению вектора $\overrightarrow{S_2}=(1:-2)$ с постоянной скоростью $V_2=4$. V_3 – величина скорости движения точки пересечения прямых. Найдите значение выражения $\sqrt{\frac{5}{13}}\cdot V_3+4$.

2. Два парохода идут по морю с постоянными скоростями по фиксированным прямолинейным направлениям. В 9 часов расстояние между ними было 20 км, в 9 ч 35 мин – 15 км, в 9 ч 55 мин – 13км. Найдите минимально возможное расстояние между ними.

Чтобы удержать интерес студентов к предмету на дополнительных занятиях по подготовке к олимпиаде можно предложить задачи практического содержания. Укажем две наиболее интересных задачи раздела аналитическая геометрия.

1. Корпус судна в середине имеет ширину 24 м и высоту 18 м. В поперечном разрезе он имеет форму параболы. Внутри корпуса, для его укрепления, в точках A, B, C, D установлены балки. Балки AB и

CD параллельны плоскости палубы, а угол между балками AC и CB, и между балками AD и BD равен 90^0. Найдите расстояние между балками AB и CD.

2. Парк развлечений освещают две осветительные установки высотой 12 и 15м, расположенные на расстоянии 96 м друг от друга. Устройство этих установок таково, что лучшая освещенность достигается в точках, отстоящих в два раза дальше от источника света, установленного на более высокой установке. L– длина дорожки в парке, которую проложили через все такие точки (поверхность парка горизонтальная). Найдите значение выражения $\frac{1}{\pi}L$.

При решении данных задач студентам необходимо оптимально выбрать систему координат, что позволит значительно упростить составление математической модели; продемонстрировать знание условий ортогональности векторов, формул для нахождения расстояния между точками (параллельными прямыми), уравнения кривых второго порядка; проявить умение рационально проводить преобразования. Такие задачи целесообразно включать в экзаменационный билет для проверки индикатора владение.

Область профессиональной деятельности выпускников инженерно-строительного факультета по профилю «Городское строительство и хозяйство (ГСХ)», как отмечено в ФГОС ВО, утвержденным Минобрнауки России, включает проектирование, инженерное обеспечение и оборудование городских территорий, техническую и экологическую безопасность в жилищно-коммунальной сфере, а программа обучения ориентирована на практико-ориентированные прикладные виды профессиональной деятельности. Выпускники, освоившие данную программу, должны быть готовы решать такие профессиональные задачи как организация контроля качества возведения объектов жилищно-коммунального хозяйства, участие в работах по доводке и освоению технологических процессов возведения, эксплуатации, обслуживанию и проектированию этих объектов, проверки их технического состояния.

Последние две задачи можно использовать как элемент проектной деятельности студентов профиля ГСХ, предложив им развить проекты на их основе. Например, кривые второго порядка в архитектурных формах, или проектирование модели судна на детской площадке. Применение цифровых технологий при проектировании позволит сделать размеры судна удобными и безопасными для детей, а значит, на примере таких задачах возникает реальное моделирование.

В заключении отметим, что рассмотренные выше задачи помогают контролировать уровень полученных знаний и приобретенных умений, проводить мониторинг сформированных компетенций, работу над ошибками (любое обучение невозможно без ошибок) и двигаться вперед, определяя в каждом конкретном случае точки дальнейшего роста. Участие в подготовке к олимпиаде является хорошим дополнением в освоении курса математики в сторону углубленного изучения предмета. В этом году работе в этом направлении помогали, разработанные организаторами тренажеры для подготовки студентов к олимпиаде. Студенты еще до проведения олимпиады могли неоднократно попробовать свои силы, сравнить свое решение с решением, предложенным авторами задачи, а в случае несовпадения проанализировать на оптимальность, научиться новым методам, пополнить свои знания и отточить умения, развить творческое и критическое мышление, креативность.

Участие в олимпиаде способствует формированию успешного выпускника – профессионально мобильного специалиста, владеющего навыками решения задач любого уровня сложности в профессиональной сфере, готового к реализации нестандартных подходов при поиске решения, обладающего умением анализировать методы решения различных задач и делать выбор наиболее оптимального, способного быстро пополнять полученные знания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Миловидов А.Е., Шестакова М.А. Об опыте интернет – олимпиад в техническом вузе // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25 – 27 марта 2021 года, г. Тверь), с.123 – 127.

2. Белова Г.П., Шестакова М.А. Интернет-олимпиада – элемент развития межпредметных связей // Актуальные проблемы качества образования в высшей школе, ч.1. Сб.: материалы докладов заочной научно-практ. Конф. Тверь: ТвГТУ, 2017, с.111 – 115.

3. Ершова Е.М. Межпредметные связи в аналитической геометрии // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25 – 27 марта 2021 года, г. Тверь), с.68 – 72.

4. Галилео Галилей. Избранные произведения в двух томах// М.: Наука, 1964. Т. 2. С. 221.

4. Колчев А.А., Наводнов В.Г. и др. Открытая Международная студенческая Интернет-олимпиада по математике: учебное пособие // Йошкар-Ола: ООО ИПФ «Стринг», 2020. 220с.

УДК 372.851.4

ТРЕУГОЛЬНИК МИНИМАЛЬНОГО ПЕРИМЕТРА, ВПИСАННЫЙ В ДРУГОЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова: *треугольник, периметр, координаты.*

Аннотация. В статье рассмотрена задача о треугольнике минимального периметра, вписанном в другой треугольник; найден периметр данного треугольника.

В работе рассмотрена задача о треугольнике минимального периметра, который вписан в другой треугольник. Некоторые исследователи считают, что данную задачу впервые поставил и решил итальянский математик Фаньяно в XVIII веке, другие приписывают её авторство немецкому математику Карлу Герману Амандусу Шварцу (1843–1921).

Основной результат данной задачи сформулирован в виде теоремы:

Теорема 1. *В любой остроугольный треугольник можно вписать только один треугольник с минимальным периметром, причем его вершинами являются основания высот исходного треугольника.*

Для доказательства данной теоремы рассмотрим ряд вспомогательных сведений. Прежде всего вспомним закон отражения света, который утверждает, что, если выпустить луч света из точки A, отразить его от зеркальной плоскости g, то угол падения будет равен углу отражения.

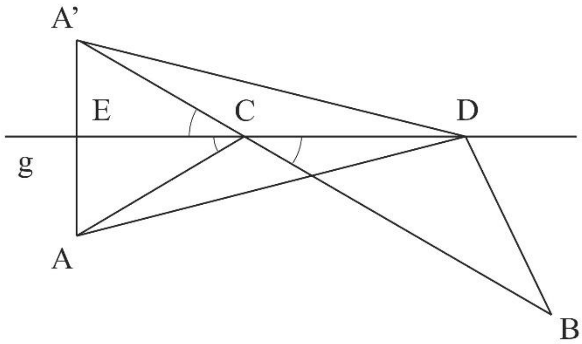


Рис. 1

Используя этот факт, легко доказать следующую теорему (доказательство проиллюстрировано на рис.1):

Теорема 2. *Путь, по которому следует луч, отражаясь от прямой g является наикратчайшим.*

Отметим на сторонах треугольника ABC точки G, E, F – основания высот, опущенных из вершин треугольника на противоположные стороны (рис.2).

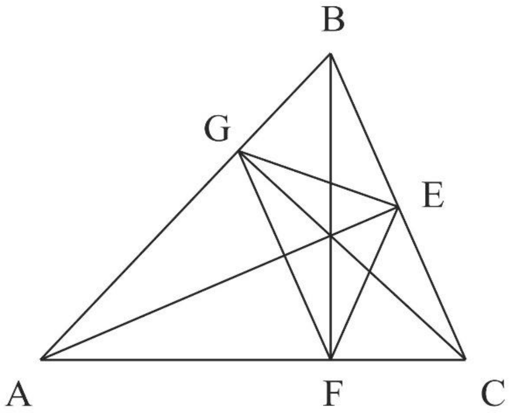


Рис. 2

Теорема 3. *Угол AFG равен углу CFE.*

Доказательство (теорема 3). При доказательстве теоремы 3 используются следующие факты: *угол, опирающийся на диаметр равен 90 градусам; теорема о вписанных углах (углы, опирающиеся на одну дугу, равны); теорема о высотах треугольника (высоты треугольника пересекаются в одной точке).*

Пусть высоты треугольника ABC пересекаются в точке H. Построим окружности с диаметрами AH и CH (рис.3).

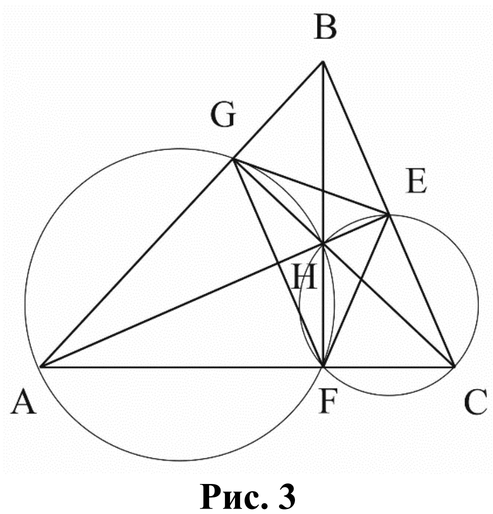


Рис. 3

Треугольники AGH, AFH и CEH, CFH прямоугольные, следовательно, точки G и F лежат на окружности с диаметром AH, а точки E и F – на окружности с диаметром CH. Угол AFG и угол AHG опираются на дугу AG и, значит, равны. Аналогично, доказывается, что углы CFE и CHE равны. Угол CHE равен вертикальному углу AHG, поэтому угол AFG равен углу CFE, ч.т.д.

Доказательство (теорема 1). Пусть дан треугольник ABC, точки G, E, F – основания высот, опущенных из вершин треугольника на противоположные стороны. Проделаем с треугольником ABC следующие операции: отразим треугольник ABC от стороны BC; полученный треугольник $A'BC$ отразим от стороны $A'C$; новый треугольник отразим от стороны $A'B'$. Процесс будем продолжать до тех пор, пока не получим треугольник $A''B''C''$.

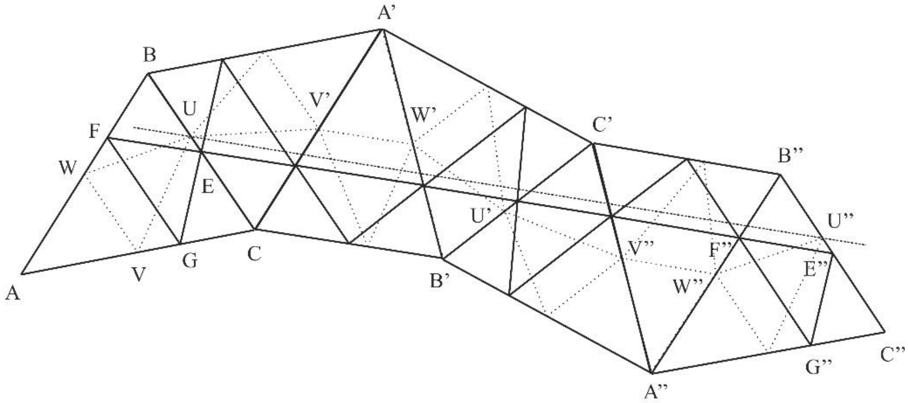


Рис. 4

Покажем, что треугольник $A''B''C''$ может быть получен из треугольника ABC путём параллельного переноса. Рассмотрим, что происходит с треугольником ABC в результате двух отражений. Можно было бы не отражать треугольник два раза, а повернуть исходный треугольник вокруг неподвижной вершины C по часовой стрелке на угол $2z$ (x, y, z – углы, противолежащие соответственно вершинам треугольника ABC). Треугольник $A''B'C'$ из треугольника $A''B'C$ может быть получен поворотом вокруг неподвижной вершины B' по часовой стрелке на угол $2y$. Из положения $A''B'C$ треугольник $A''B''C''$ получается поворотом вокруг вершины A'' на угол $2x$. Таким образом, чтобы получить треугольник $A''B''C''$ нужно повернуть треугольник ABC на угол $2x + 2y + 2z$. Сумма углов треугольника равна $x + y + z = 180^{\circ}$, поэтому $2x + 2y + 2z = 360^{\circ}$, что соответствует полному повороту. Следовательно, треугольник $A''B''C''$ получается из ABC путём параллельного переноса. Это означает, что BC и $B''C''$ параллельны.

Рассмотрим, что при этом происходит с треугольником GFE. На основании теоремы 3 в треугольнике $A'BC$ отрезок, соответствующий GE, будет продолжением FE. В дальнейших отражениях одна из сторон треугольника будет продолжением какой-то предыдущей. Следовательно, EE'' – отрезок, состоящий из шести отрезков, два из которых равны FG, два – GE, два – EF. Поэтому длина отрезка EE'' равна удвоенному периметру треугольника GFE.

Введём в рассмотрение ещё один вписанный треугольник UVW, отличный от треугольника GFE. Длина ломаной линии $UV'W'U'V''W''U''$ будет равна удвоенному периметру треугольника UVW.

В четырёхугольнике $EUU''E''$ стороны EU и $U''E''$ равны по построению и параллельны по доказанному, следовательно, $EUU''E''$ – параллелограмм, поэтому $UU''=EE''$. С другой стороны, длина отрезка UU'' короче длины любой ломаной $UV'W'U'V''W''U''$, ч.т.д.

Тот факт, что треугольник является остроугольным является существенным при доказательстве теоремы 1, предполагается, что треугольник находится внутри исходного треугольника.

Если исходный треугольник является прямоугольным, то очевидно, что треугольник вырождается в отрезок, который является высотой, опущенной из прямого угла на гипотенузу.

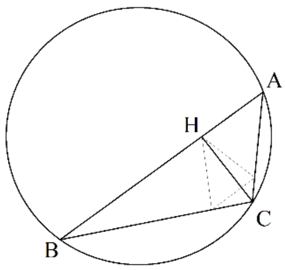


Рис. 5

В случае тупоугольного треугольника (рис.5) периметр любого треугольника, вписанного в ABC будет больше удвоенной длины высоты CH, опущенной на сторону противоположную тупому углу. Заметим, что всегда можно вписать треугольник, периметр которого сколь угодно близок к $2CH$.

Рассмотрим произвольный остроугольный треугольник. Без ограничения общности выберем систему координат таким образом, чтобы одна из вершин треугольника совпала с центром системы координат, и ось абсцисс содержала в себе одну из его сторон. В силу того, что треугольник остроугольный можно считать, что он целиком находится в первой четверти (рис.6). Обозначим его вершины точками $O(0,0), A(\tilde{x},0), B(\tilde{z},\ \tilde{y})$.

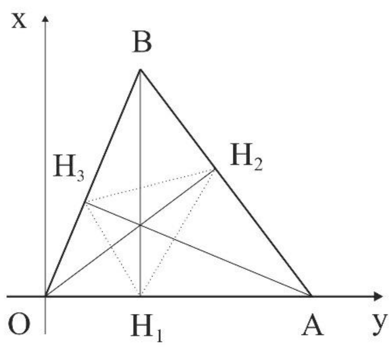


Рис. 6

По построению, справедливо следующее соотношение $\tilde{x} > \tilde{z}$.

Пусть AH_3, OH_2, BH_1 – высоты треугольника OAB. Выразим координаты точек H_1, H_2, H_3 через координаты вершин треугольника. Точка $H_1(\tilde{z},\ \ 0)$. Прямая OB может быть задана уравнением $y = \tilde{y}x/\tilde{z}$, её угловой коэффициент будет равен $\tilde{y}/\tilde{z}$. Прямая AH_3 перпендикулярна OB, следовательно её угловой коэффициент равен $-\tilde{z}/\tilde{y}$. Эта прямая проходит через точку $A(\tilde{x}, 0)$. Используя полученные результаты, получим уравнение прямой AH_3 в виде

$$\tilde{z}(x - \tilde{x}) + \tilde{y}y = 0.$$

Точка H_3 – точка пересечения OB и AH_3, поэтому её координаты должны удовлетворять системе двух уравнений.

$$\begin{cases} \tilde{z}(x - \tilde{x}) + \tilde{y}y = 0, \\ y = \dfrac{\tilde{y}}{\tilde{z}}x. \end{cases}$$

Подставляя соотношение из второго уравнения в первое, получим линейное уравнение первой степени, откуда находим x. Затем из второго уравнения находим y.

$$H_3\left(\frac{\tilde{x}\tilde{z}^2}{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}, \frac{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}\right).$$

Аналогичные рассуждения позволяют найти координаты точки H_2. Уравнение прямой AB может быть записано в виде

$$(\tilde{z} - \tilde{x})x + y\tilde{y} = 0.$$

Уравнение прямой OH_2

$$y = -\frac{\tilde{z} - \tilde{x}}{\tilde{y}}x.$$

$$H_2\left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{x})^2}, \frac{\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - \tilde{z})}{\tilde{y}^2 + (\tilde{z} - \tilde{x})^2}\right).$$

По координатам концов находим длины отрезков, а затем периметр

$$H_2H_3 = \sqrt{\left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}^2}{\tilde{y}^2 + (\tilde{x} - \tilde{z})^2} - \frac{\tilde{x}\tilde{z}^2}{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}\right)^2 + \left(\frac{\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - \tilde{z})}{\tilde{y}^2 + (\tilde{x} - \tilde{z})^2} - \frac{\tilde{x}\tilde{y}\tilde{z}}{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{\tilde{x}|\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{x}\tilde{z}|}{(\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2)(\tilde{y}^2 + (\tilde{x} - \tilde{z})^2)}\sqrt{(\tilde{y}^2 + \tilde{z}\tilde{x} - \tilde{z}^2)^2 + \tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{z})^2} =$$

$$= \frac{\tilde{x}|\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2 - \tilde{x}\tilde{z}|}{\sqrt{\tilde{y}^2 + \tilde{z}^2}\sqrt{\tilde{y}^2 + (\tilde{x} - \tilde{z})^2}}.$$

$$H_1H_2 = \frac{\tilde{x}-\tilde{z}}{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}\sqrt{(\tilde{y}^2+\tilde{z}^2)(\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2)} = (\tilde{x}-\tilde{z})\sqrt{\frac{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}}.$$

$$H_1H_3 = \frac{\tilde{z}}{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}\sqrt{(\tilde{y}^2+\tilde{z}^2)(\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2)} \ = \ \tilde{z}\sqrt{\frac{y^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}}.$$

$$P = z\sqrt{\frac{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}} + (\tilde{x}-\tilde{z})\sqrt{\frac{\tilde{y}^2+z^z}{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}} + \frac{\tilde{x}|\tilde{y}^2+\tilde{z}^2-\tilde{x}\tilde{z}|}{\sqrt{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}\sqrt{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}}$$

$$= \frac{\tilde{x}\big((\tilde{z}\tilde{x}+\tilde{y}^2-\tilde{z}^2)+|\tilde{y}^2+\tilde{z}^2-\tilde{x}\tilde{z}|\big)}{\sqrt{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}\sqrt{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}} = \frac{2\tilde{x}\tilde{y}^2}{\sqrt{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}\sqrt{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}}.$$

Во введённых обозначениях

$$OB = \sqrt{\tilde{y}^2+\tilde{z}^2}, AB = \sqrt{\tilde{y}^2+(\tilde{x}-\tilde{z})^2}, 2S = \tilde{x}\tilde{y}, \tilde{y} = \frac{2S}{\tilde{x}}, \text{где } OA = \tilde{x}.$$

$$P = \frac{8S^2}{OA * OB * \ AB},$$

S – площадь треугольника OAB.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Протасов В.Ю.* Максимумы и минимумы в геометрии // М.: МЦНМО. – 56 с.

2. *Радемахер Г. Теплиц О.* Числа и фигуры. Опыты математического мышления // Москва: Гос. изд-во физико-математической лит., 1962. – 265 с.

3. *Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М.* Избранные задачи и теоремы элементарной математики**.** 2: Геометрия (Планиметрия) // Москва: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1952. – 380 с.

УДК 51-7

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МУЛЬТИФРАКТАЛЬНОЙ ДИНАМИКИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗУЧЕНИЮ ДИНАМИКИ ПАНДЕМИЙ

Михеев Сергей Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Mikheev.SA@tversu.ru

Цветков Виктор Павлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.VP@tversu.ru

Цветков Илья Викторович,
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.iv@tversu.ru

Ключевые слова: *фракталы, фрактальная размерность, математическая модель, мультифрактальная динамика, пандемия, COVID-19.*

Аннотация. В работе для описания динамики пандемий предлагается использовать математическую модель мультифрактальной динамики, альтернативную другим моделям. Она основана только на фрактальных свойствах пандемий и позволяет описать их динамику без всевозможных допущений и предположений о структуре процесса заболевания. Данная модель применяется к описанию динамики COVID-19 пандемии со 165 по 355 день от начала пандемии. Рассчитанные параметры модели точно определяют параметры тренда и большого скачка ежедневных заболеваний на этом временном интервале.

В настоящее время одной из важнейших задач математического моделирования является построение и использование для описания пандемий таких математических моделей, которые адекватно отражают их природу и динамику. На актуальность данного исследования указывает пандемия COVID-19.

В основе количественного описания пандемий лежит функция $v(t)$, определяющая зависимость числа ежедневных заболеваний в мире, связанных с конкретными пандемиями. Она строится на основе использования соответствующих статистических данных.

Во многих работах [1 – 4] эволюция функции $v(t)$ определяется решениями дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Построенная на основании данных [5] для пандемии COVID-19 функция $v(t)$ определяет сложную мультифрактальную кривую. Как показывают вычисления фрактальных размерностей D различных участков $v(t)$ за интересующий нас промежуток времени эти значения лежат в интервале: 1,0708 – 1,4118. Отсюда следует не дифференцируемость кривой $v(t)$. В связи с этим возникает вопрос о применимости для описания динамики пандемий дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений.

Существенным затруднением в описании эволюции функции $v(t)$ являются ее скачки. Так 10 декабря 2020 года наблюдался большой скачок ежедневных случаев заболевания COVID-19 в мире [5]. В этот день мировое число ежедневных заболеваний COVID-19 возросло в 2,4 раза в сравнении с предыдущими моментами времени. Далее это число упало за один день до предыдущих значений.

В рамках подходов работ [1 – 4] описание таких скачков не представляется возможным.

В данной работе нами предлагается для описания динамики пандемий использовать математическую модель мультифрактальной динамики (МФД) [6], альтернативную вышеуказанным подходам [1-4] и свободную от их недостатков. Она основана только на фрактальных свойствах кривой $v(t)$ и позволяет описать динамику пандемии без всевозможных допущений и предположений о структуре процесса заболевания.

Преимущество фрактальных подходов связано с тем обстоятельством, что социальные и природные системы обладают фрактальными свойствами [7]. Так использование фрактальных свойств термодинамических систем в работе [8] позволило успешно разрешить парадокс Гиббса.

Мультифрактальная динамика с кусочно-линейным трендом

Кратко изложим основы мультифрактальной динамики. Пусть $v(t)$ мультифрактальная кривая, описывающая динамику интересующего нас параметра и имеющая на интервалах времени T_i $(i = 1,2,3 \dots N)$ определенное значение фрактальной размерности D_i. Тогда, если скорость X_i линейного тренда $\bar{v}_i(t)$, аппроксимирующего эту функцию на интервале T_i с нужной нам степенью точности, зависит только от D_i, то данный вид динамики мы будем называть мультифрактальной.

Динамику мультифрактального процесса на интервале T_i можно разделить на две составляющие, используя понятие кусочно-линейного тренда:

$$v_i(t) = \bar{v}_i(t) + \tilde{v}_i(t), \quad (1)$$

где $\bar{v}_i(t)$ – линейный тренд процесса, который во времени меняется гладко; $\tilde{v}_i(t)$ - быстрые осцилляции относительно тренда. Предполагается, что $|\bar{v}_i(t)| \gg |\tilde{v}_i(t)|$ и кривая $v_i(t)$ является мультифрактальной. Линия тренда $\bar{v}_i(t)$ имеет фрактальную размерность равную единице, а $\tilde{v}_i(t)$ - фрактальную размерность D_i.

В математической модели МФД функция $X(D)$ определяется уравнением [6]:

$$A(D) \cdot X(D) + B_0 X^3 \cdot (D) = \eta. \quad (2)$$

Параметры МФД B_0 и η на интересующем нас интервале времени считаются постоянными. Динамика $\bar{v}(t)$ в данной модели определяется аналитической зависимостью коэффициента A от фрактальной размерности

D. Значения D удовлетворяют условию $1 < D < 2$. Разобьем этот интервал на два $1 < D < D_0$ и $D_0 < D < 2$.

Параметр η в (2) описывает эффективное влияние основных факторов на распространение пандемии. Причем в (2) считается, что $|X(D)| << 1$, что соответствует достаточно медленному (квазиравновесному) характеру динамики данного процесса.

Параметры B_0 и η в течение времени наблюдения процесса постоянны, а динамика процесса определяется аналитической зависимостью коэффициента A от фрактальной размерности D. Нами будет использована следующее аналитическое представление $X(D)$ [6]:

$$A(D) = \begin{matrix} (D_0 - D)^{-1} \text{ при } D < D_0; \\ (D_0 - D_k)^{-1}(D_0 - D)^{-1}(D - D_k) \text{ при } D > D_0 \end{matrix} \qquad (3)$$

В (2) D_0 и D_k - параметры модели МФД, удовлетворяющие условию: $1 < D_0 < D_k < 2$. В точке D_0 функции в (3) гладко сшиваются.

Параметры МФД D_0, D_k, η находятся из условия минимума уклонения вычисленных значений X от данных опыта на различных участках кривой $v(t)$.

Нас будут интересовать только вещественные решения уравнения (2). Их может быть для кубичных уравнений или одно, или три.

Приведем (2) к более удобному для исследования виду.

Сделаем замену $X = \sqrt[3]{\frac{\eta}{B_0}} \cdot \xi$. Тогда (2) имеет вид:

$$\xi^2 - \frac{1}{\xi} = \lambda \quad \lambda = -A(D) \cdot B_0^{-\frac{1}{3}} \cdot \eta^{-\frac{2}{3}}. \qquad (4)$$

Зависимость решений уравнения (4) от параметра λ, представлена на рис. 1.

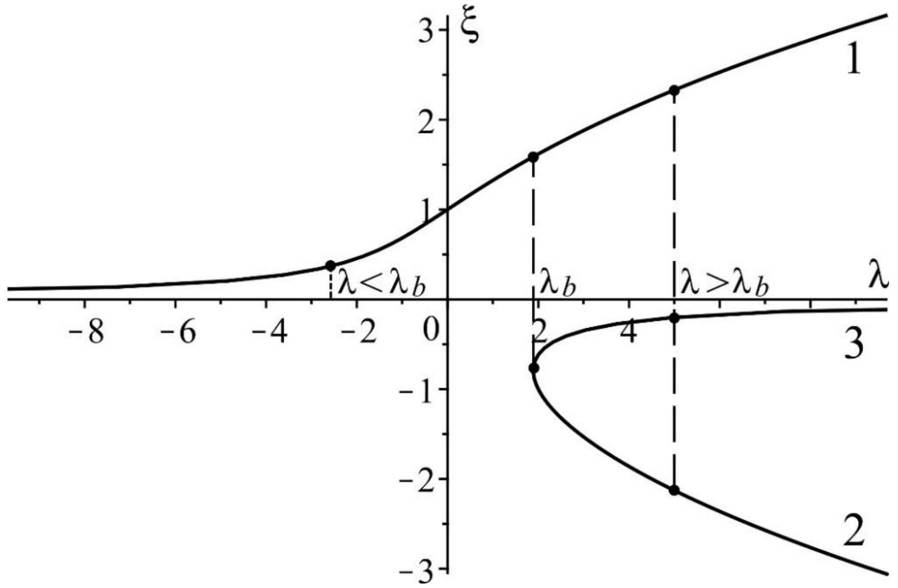


Рис. 1. График функции ξ (λ)

Из рис. 1 и формулы (4) следует, что точкой бифуркации является точка $\lambda_b = \lambda(L_b) = \sqrt[3]{\frac{2}{4}}$. При значениях $\lambda < \lambda_b$ уравнение (4) определяет одну функцию $\xi_1(\lambda)$, а при значениях $\lambda > \lambda_b$, три функции $\xi_{1,2,3}(\lambda)$.

Из (4) вытекает, что функции $\xi_{1,2,3}(\lambda)$ имеют асимптотики:

$$
\begin{gathered}
\xi_1(\lambda) = \sqrt{\lambda}\,(\lambda \gg 1, \lambda > 0), \xi_1(\lambda) = -\tfrac{1}{\lambda}(-\lambda \gg 1, \lambda < 0) \\
\xi_2(\lambda) = -\sqrt{\lambda}\,(\lambda \gg 1, \lambda > 0), \xi_3(\lambda) = -\tfrac{1}{\lambda}(\lambda \gg 1, \lambda > 0).
\end{gathered} \tag{5}
$$

Функции $\xi_{1,2,3}(\lambda)$ определяют стационарные состояния динамической системы. В случае $\lambda \geq \lambda_b$ их одновременно будет три. Возникает возможность скачков между этими состояниями при воздействии на динамическую систему нестационарных факторов при потере устойчивости состояния, описываемого функцией $\xi_2(\lambda)$ и реализуемого до скачка. Согласно статистике [5] скачки *v(t)* наблюдаются в динамике COVID-19 пандемии.

Динамика COVID-19 пандемии в модели мультифрактальной динамики в области большого скачка функции $v(t)$

Описанные в предыдущем разделе методы мультифрактальной динамики с кусочно-линейным трендом будем использовать для описания эволюции $\bar{v}(t)$ со 165 по 355 день от начала пандемии. Согласно статистическим данным большой скачек $v(t)$ наблюдался на 323 день. На основе статистических данных [5] построим график функции $v(t)$ на интересующим нас интервале времени. Будем использовать масштаб $v(t)$ в миллионах человек в день, а для t - в днях. Он приводится на рис. 2.

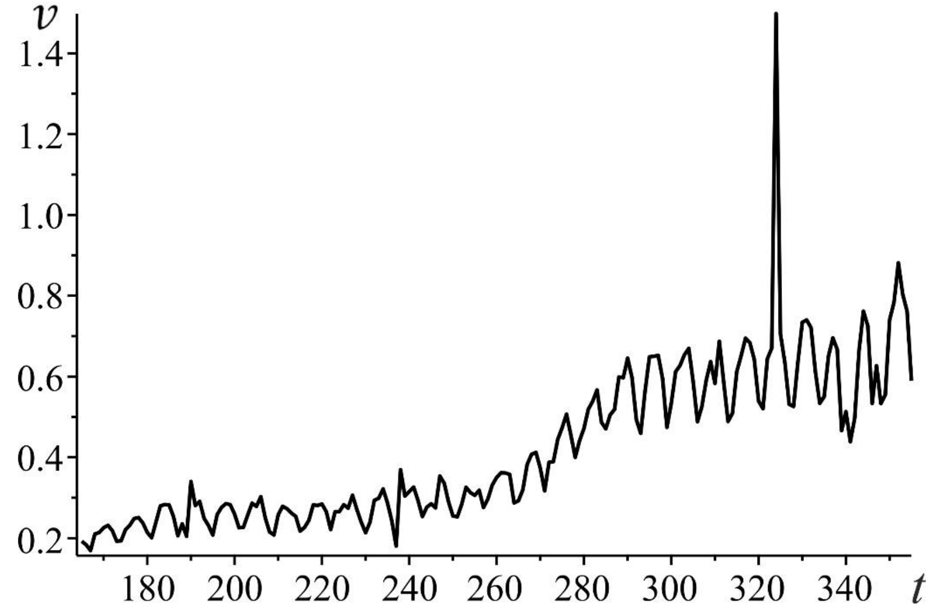


Рис. 2. График функции $v(t)$

Разобьём временной интервал 165≤ t ≤355 на три интервала: T_1 = [165 – 255], T_2 = [255 – 285], T_3 = [285 – 355] и построим на них три кусочно-линейных тренда $\bar{v}_1(t), \bar{v}_2(t), \bar{v}_3(t)$. Для вышеуказанных интервалов значения параметра X в модели МФД соответственно равны: $X_1 = 0{,}9144 \cdot 10^{-3}$, $X_2 = 0{,}7704 \cdot 10^{-2}$, $X_3 = 0{,}7161 \cdot 10^{-2}$. В области скачка кусочно-линейный тренд $\bar{v}_3(t)$ совпадает с функцией $v(t)$. Графики функций $v(t)$ и $\bar{v}(t)$ представлены на рис. 3.

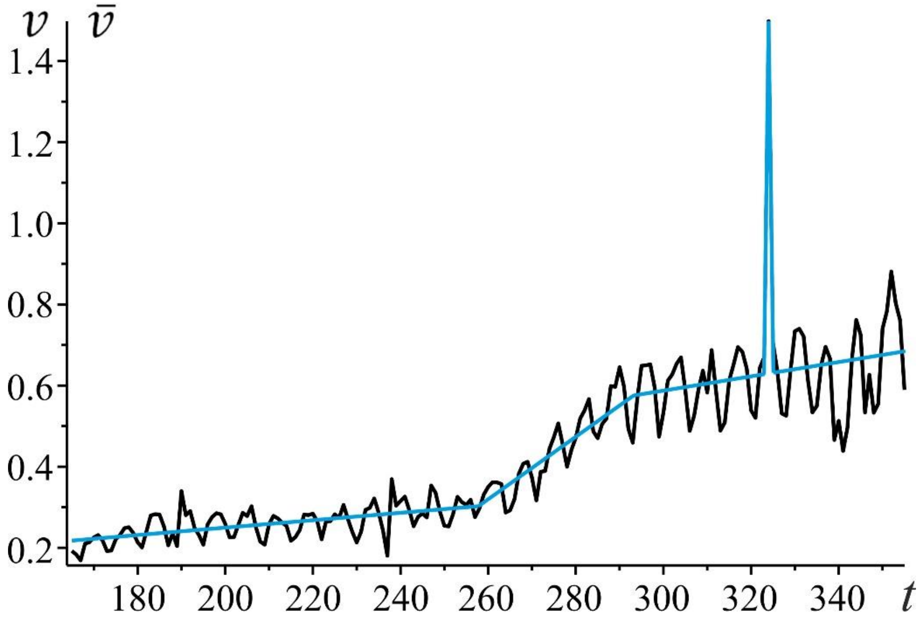


Рис. 3. Графики функций $v(t)$ и $\bar{v}(t)$

Для одиночных скачков $v(t)$ значение X в области скачка X_p можно оценить по формуле:

$$X_p = \frac{v_p - v_0}{\tau_p/2}, \tag{7}$$

где v_p – значение $v(t)$ в максимуме скачка, v_0 – значение $v(t)$ перед скачком, τ_p – длительность скачка. В случае большого скачка $v(t)$ находим $X_p = 0{,}8281$.

Из (5) при $\lambda_3 >> 1$ получаем соотношения:

$$\frac{X_p}{X_3} = \frac{\xi_2(\lambda_3)}{\xi_3(\lambda_3)} = \lambda_3^{3/2}, \lambda_3 = \left(\frac{X_p}{X_3}\right)^{2/3} = 60{,}4491. \tag{8}$$

С помощью составленных и реализованных нами в системе Maple программ мы показали, что кривые $\tilde{v}_{1,2,3}(t)$, близки к фракталам с точностью не ниже 1%.

Значения фрактальных размерностей D для трех рассматриваемых интервалов T_1, T_2, T_3 соответственно равны: $D_1 = 1{,}4119$, $D_2 = 1{,}1873$, $D_3 = 1{,}2135$.

Из неравенств:

$$D_2 < D_3 < D_1 \text{ и } X_1 < X_3 < X_2 \tag{9}$$

и формулы (3) следует соотношение:

$$D_2 < D_3 < D_0 < D_k < D_1. \tag{10}$$

Тогда имеет место следующая система уравнений МФД для определения ее параметров D_0, D_k, η, B_0:

$$\begin{gathered} X_2 = (D_0 - D_2)\eta,\ X_1 = (D_0 - D_k)(D_0 - D_2)(D_1 - D_k)^{-1}\eta, \\ X_3 = (D_0 - D_3)\eta,\ B_0 = -\eta X_3^{-2} X_p^{-2}. \end{gathered} \tag{11}$$

Аналитические решения системы уравнений (11) имеют вид:

$$\begin{gathered} D_0 = \frac{X_2 D_3 - X_3 D_2}{X_2 - X_3};\ \eta = \frac{X_2}{D_0 - D_2}; D_k = \frac{(D_0 - D_1) D_0 \eta - X_1 D_2}{(D_0 - D_1)\eta - X_1}; \\ B_0 = -\eta X_p^{-2} X_3^{-1}; \lambda_3 = \left(\frac{X_p}{X_3}\right)^{2/3}; \lambda_2 = \lambda_3 \frac{X_3}{X_2};\ \lambda_1 = \lambda_3 \frac{X_3}{X_1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Из (12) получаем значения параметров МФД:

$$\begin{gathered} D_0 = 1{,}2214,\ D_k = 1{,}2253,\ \eta = 22{,}43,\ B_0 = 185{,}6646, \\ \lambda_1 = 116{,}4671,\ \lambda_2 = 13{,}8227,\ \lambda_3 = 60{,}4489. \end{gathered} \tag{13}$$

Из (13) вытекает, что условие большого скачка на третьем временном интервале T_3 выполняется: $\lambda_3/\lambda_b = 31{,}9856 \gg 1$.

Математическая модель МФД, как следует из (11), точно определяет параметры тренда и большого скачка функции $v(t)$, описывающие динамику пандемии COVID-19 со 165 по 355 день от начала пандемии.

Уменьшение D от начала к концу рассматриваемого временного интервала и наличие на нем большого скачка $v(t)$ указывает на стабилизацию процесса пандемии COVID-19 к концу третьего временного интервала T_3. Возникла возможность смены знака для параметра X_4 на четвертом временном интервале T_4 = [355 – 491]. Этот эффект действительно наблюдался согласно данным статистики [5]. В начале этого интервала параметр X_4 стал равным $-0{,}9772 \cdot 10^{-2}$.

Заключение

В данной работе нами предлагается для описания динамики пандемий использовать математическую модель мультифрактальной динамики [6], альтернативную подходам [1-4] и свободную от их недостатков. Она основана только на фрактальных свойствах кривой $v(t)$ и позволяет описать динамику пандемии без всевозможных допущений и предположений о структуре процесса заболевания.

Показана мультифрактальная структура функции $v(t)$. Рассчитаны параметры модели МФД, при которых эта модель точно описывает параметры кусочно-линейного тренда и большого скачка функции $v(t)$. Приводятся аргументы, указывающие на смену знака параметра X_4 для четвертого временного интервала T_4 функции $v(t)$ процесса пандемии COVID-19.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Vinitsky S.I., Gusev A.A., Derbov V.L., Krassovitskiy P.M., Pen'kov F.M., and Chuluunbaatar G.* Reduced SIR Model of COVID-19 Pandemic // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2021. Vol. 61. No. 3. pp. 376–387.
2. *Uhlig S., Nichani K., Uhlig C., and Simon K.* Modeling projections for COVID-19 pandemic by combining epidemiological, statistical, and neural network approaches // Preprint from medRxiv. 2020.
3. *Ciufolini I. and Paolozzi A.* A mathematical prediction of the time evolution of the COVID-19 pandemic in some countries of the European union using Monte Carlo simulations // Eur. Phys. J. Plus. 2020. doi: https://doi.org/10.1101/2020.04.10.20061051.
4. *Köhler-Rieper F., Rohl C. H. F., and De Micheli E.* A novel deterministic forecast model for COVID-19 epidemic based on a single ordinary integro-differential equation // Preprint from medRxiv. May 5, 2020.
5. COVID-19 World Statistics. URL: https://covid.observer (дата обращения 24.05.2021).
6. *Kudinov A.N., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V.* Catastrophes in the multi-fractal dynamics of social-economic systems // Russian Journal of Mathematical Physics. 2011. V. 18. No. 2. pp. 149-155. URL: https://link.springer.com/content/pdf/10.1134/S1061920811020038.pdf
7. Benoit B. Mandelbrot, The Fractal Geometry of Nature, Freeman, San Francisco, 1982. 615 p.
8. V. P. Maslov Solution of the Gibbs Paradox Using the Notion of Entropy as a Function of the Fractal Dimension// Russ. J. Math. Phys. 17(3), 288–306 (2010)

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЭКСПОНЕНТОЙ ЦЕНТРА БОЛЬШЕ ДВУХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ, КАК ОБЪЕДИНЕНИЕ ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ II

Некрасов Константин Геннадьевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: constantin.nekrassov@yandex.ru

Ключевые слова: *конечная группа, симметричная пара, симметричное подмножество.*

Аннотация. *Пару* (a,b) *элементов конечной группы G будем называть симметричной, если выполняется хотя бы одно из соотношений:* $ab = ba$ *или* $a^2 = b^2$. *Подмножество M группы G будем называть симметричным, если для любых* $a \in M$, $b \in M$ *пара* (a,b) *симметрична. Неабелевы группы, являющиеся одним симметричным множеством, классифицированы в* [1]. *В этой статье дается полное описание некоммутативных групп, показатель центра которых строго больше двух, представимых как объединение двух симметричных подмножеств.*

Введение

Рассмотрение 2-элементных подмножеств $M = \{a,b\}$ конечной группы, в которых число различных элементов множества M^2 меньше 4, восходит к Григорию Абелевичу Фрейману, в течение многих лет работавшему профессором Тверского (Калининского) государственного университета. В работе [1] Г. А. Фрейман классифицировал, в частности, конечные группы, в которых любое 2-элементное подмножество $M = \{a,b\}$ удовлетворяет условию $|M^2| < 4$. Для краткости мы называем такие 2-элементные подмножества симметричными парами. Этот термин уже использовался ранее автором в статьях [2] и [3], в которых изучались группы с ограничениями на отношение числа несимметричных пар к числу всех пар. В данной заметке рассматривается следующее ослабление условия Г. А. Фреймана: предположим, что группу можно представить в виде объединения двух подмножеств, для каждого из которых имеется симметричность любого 2-элементного подмножества. Оказывается, что и в этом случае возможно классифицировать группы с точностью до изоморфизма, что и будет сделано ниже для тех групп, показатель центра которых строго больше двух.

1. Группы, экспонента которых отлична от 4

Предложение 1. *Пусть* G *– конечная группа,* $N(G) = 2$ *и* $exp(G) \neq 4$. *Тогда в* G *имеется абелева подгруппа* A *индекса* 2, *причем квадраты всех элементов в* $G \setminus A$ *равны между собой.*

Доказательство. 1. Пусть $G = M_1 \cup M_2$ – разложение группы G в объединение симметричных множеств. Обозначим через a элемент группы G, порядок которого отличен от 1, 2 и 4, и будем считать, что $a \in M_1$.

Очевидно, что $a^2 \in Z(\langle M_1\rangle)$. Так как $N(\langle M_1\rangle) \leqslant 2$ и $p(Z(\langle M_1\rangle)) > 2$, то в силу [5, предложение 2] заключаем, что $\langle M_1\rangle$ – коммутативная группа.

Если бы нашелся элемент $b \in M_2$, порядок которого также отличен от 1, 2 и 4, то аналогично получили бы, что $\langle M_2\rangle$ – тоже коммутативная группа. Однако хотя бы одна из групп $\langle M_1\rangle$ или $\langle M_2\rangle$ совпадает с G, в то время как G неабелева в силу условия $N(G) = 2$. Итак, порядок любого элемента из M_2 равен 1, 2 или 4.

2. Обозначим через A максимальную абелеву подгруппу группы G, содержащую подгруппу $\langle M_1\rangle$ и выберем $x \in G \setminus A$; очевидно, что $x \in M_2$. Пусть y – элемент подгруппы A, не коммутирующий с x. Так как $xy \notin A$, то $xy \notin M_1$; другими словами, имеем $xy \in M_2$. Но тогда выполняется соотношение $(xy)^2 = x^2$.

Зафиксируем элемент $y_0 \in A \setminus C_G(x)$. Если $\bar{y} \in C_A(x)$, то $\bar{y}y_0 \in A \setminus C_A(x)$ и снова имеем $(x\bar{y}y_0)^2 = x^2$. Так как $\bar{y} \in C_G(x) \cap C_G(y_0)$, то $(x\bar{y}y_0)^2 = (xy_0)^2\bar{y}^2 = x^2\bar{y}^2$. Итак, $x^2\bar{y}^2 = x^2$, откуда имеем $\bar{y}^2 = e$. Следовательно, $(x\bar{y})^2 = x^2\bar{y}^2 = x^2$. Таким образом, в смежном классе xA все элементы имеют одинаковые квадраты.

3. Покажем, что $\langle A,x\rangle = G$. От противного, пусть это не так и $h \in G \setminus \langle A,x\rangle$. Тогда рассуждения пункта 2 справедливы для элемента h. Поэтому в смежном классе hA все элементы имеют одинаковые квадраты. С другой стороны, как мы уже имели $xA \subseteq M_2$, так теперь имеем $hA \subseteq M_2$. Поэтому если $x^2 \neq h^2$, то элемент x коммутирует со всеми элементами смежного класса hA (в том числе и с h), а, следовательно, коммутирует со всеми элементами подгруппы A; однако это противоречит выбору подгруппы A. Итак, мы имеем $h^2 = x^2$.

Далее, так как $hx \in G \setminus \langle A,x\rangle$, то имеем $(hx)^2 = x^2$, что равносильно $h^{-1}x = xh$; кроме того, и для всех $u \in A$ выполняются соотношения $(hu)^2 = h^2$, что равносильно $hu = u^{-1}h$ и $(xhu)^2 = x^2$. Поэтому имеем

$$x^2 = xhuxhu = xhxu^{-1}hu = xhxhuu = (xh)^2u^2 = x^2u^2,$$

откуда следует, что $u^2 = e$ для любого $u \in A$. Последнее противоречит условию $exp(G) \neq 4$.

2. Способы разбиения 2-групп G с $\Phi(G) \cong C_2$

Предложение 2. *Пусть G – 2-группа, $\Phi(G) \cong C_2$, причем G не изоморфна группам вида $Q \times C_2 \times \ldots \times C_2$. Тогда если $G = M_1 \cup M_2$ – произвольное разбиение на симметричные подмножества, $L_1 = M_1 \setminus Z(G)$ и $L_2 = M_2 \setminus Z(G)$, то любые два элемента из L_i, $i \in \{1,2\}$, имеют одинаковые квадраты.*

Доказательство. 1. Рассмотрим случай $exp(Z(G)) = 4$. Обозначим через b центральный элемент порядка 4 и $t = b^2$. Очевидно, что $\sqrt{t}(G) = b\sqrt{e}(G)$ и для любого $a \in G$ выполнено $\sqrt{t}(C_G(a)) = b\sqrt{e}(C_G(a))$.

Пусть M_1 – то из двух подмножеств, в котором имеется нецентральная инволюция x. Тогда $|C_G(x)| = ½|G|$, и в множестве $\sqrt{t}(G) \setminus C_G(x)$ содержится ровно $¼|G|$ элементов, каждый из которых образует с x несимметричную пару, и поэтому принадлежит M_2.

Если в M_2 имеется нецентральная инволюция y, то $\sqrt{t}(G) \setminus C_G(y) \subseteq M_1$. Множества $\sqrt{t}(G) \setminus C_G(x) \subseteq M_2$ и $\sqrt{t}(G) \setminus C_G(y) \subseteq M_1$, будучи в различных подмножествах разбиения $G = M_1 \cup M_2$, имеют пустое пересечение; поскольку каждое из них содержит $¼|G|$ элементов, их объединение обязано совпадать с $\sqrt{t}(G)$. Однако, этому объединению не принадлежит центральный элемент b порядка 4. Полученное противоречие показывает, что в M_2 нет нецентральных инволюций, а следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что $\sqrt{e}(G) \subseteq M_1$.

Теперь, если в M_1 имеется элемент $y \in \sqrt{t}(G)$, то $\sqrt{e}(G) \subseteq C_G(y)$, а так как $\sqrt{e}(G) = ½|G|$, то $y \in Z(G)$. Таким образом, $M_1 \setminus Z(G) \subseteq \sqrt{e}(G)$. Для завершения рассмотрения случая, когда $exp(Z(G)) = 4$, достаточно заметить, что $b(M_1 \setminus Z(G)) = \sqrt{t}(G) \setminus Z(G) \subseteq M_2$, и поэтому любая инволюция из M_2 является центральной в G.

2. Рассмотрим теперь случай $exp(Z(G)) = 2$. Пусть b – элемент порядка 4 и $t = b^2$. Так как $exp(Z(G)) = 2$, то $b \notin Z(G)$, и поэтому $|C_G(b)| = ½|G|$.

Если подгруппа $C_G(b)$ абелева, то индекс центра группы G равен 4 и тогда G – одна из групп вида $Q \times C_2 \times \ldots \times C_2$ или $D_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$. По условию, G не имеет вид $Q \times C_2 \times \ldots \times C_2$. Поэтому $G \cong D_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$. Разложим G по $Z(G)$: $G = Z(G) \cup bZ(G) \cup yZ(G) \cup byZ(G)$, где y – некоторая нецентральная инволюция. Заметим, что централизатором любого элемента порядка 4 является подгруппа $Z(G) \cup bZ(G)$. Поэтому $bZ(G)$ и объединение $yZ(G) \cup byZ(G)$ должны содержаться в различных симметричных подмножествах.

Пусть $H = C_G(b)$ – неабелева. Разбиение группы $G = M_1 \cup M_2$ на симметрические подмножества индицирует разбиение $H = (M_1 \cap H) \cup (M_2 \cap H)$, а последнее, в силу первого пункта доказательства, удовлетворяет условиям настоящего утверждения. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $(M_1 \cap H) \setminus Z(H)$ состоит из инволюций и $(M_2 \cap H) \setminus Z(H)$ состоит из элементов, квадрат которых равен t.

Покажем теперь, что $\sqrt{e} \cap (G \setminus H) \subset M_1$. От противного, пусть x – инволюция из $G \setminus H$, не принадлежащая M_1. Тогда $x \in M_2$. Выберем $i \in (M_2 \cap H) \setminus Z(H)$. Тогда $i^2 = t$, а так как пара (x,i) симметрична, то $xi = ix$; кроме того, имеют место соотношения: $ib = bi$, $xb = tbx$. Легко видеть, что пара (x,xbi) несимметрична. Поэтому $xbi \in M_1$. В то же время элемент bi, будучи инволюцией из $H \setminus Z(H)$, также принадлежит M_1. Однако, пара

(bi,xbi) несимметрична, что противоречит симметричности M_1. Итак, мы показали, что $\sqrt{e} \cap (G \setminus H) \subset M_1$. Следовательно, $\sqrt{e}(G) \setminus Z(H) \subset M_1$.

Заметим, что

$$|\sqrt{e}(G) \setminus Z(H)| \geqslant \tfrac{3}{8}|G| - \tfrac{1}{2}|Z(H)| \geqslant \tfrac{3}{8}|G| - \tfrac{1}{8}|Z(H)| = \tfrac{5}{16}|G|,$$

так что в M_1 имеются по крайней мере $\tfrac{5}{16}|G|$ инволюций. Поэтому если в M_1 имеется элемент α порядка 4, то он вынужденно коммутирует как с этими инволюциями, так и с произведениями этих инволюций на α, в силу чего имеем $|C_G(\alpha)| \geqslant \tfrac{5}{8}|G|$, т.е. $\alpha \in Z(G)$, что противоречит условию $exp(Z(G)) = 2$. Таким образом, все элементы порядка 4 принадлежат M_2.

С другой стороны, если инволюция $\beta \in Z(H)$ принадлежит M_2, то β коммутирует с элементами порядка 4 из $G \setminus H$, и поэтому $\beta \in Z(G)$.

3. Группы G с условием $\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$

Замечание 3. В [4] показано, что если G – конечная группа и $\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$, то $\Phi(G) \subseteq Z(G)$. В этой части мы будем пользоваться этим фактом без специальных оговорок.

Предложение 4. *Пусть G – конечная группа, $N(G) = 2$ и $\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$. Если $\sqrt{e} \nsubseteq Z(G)$, то в G имеется абелева подгруппа A индекса 2, причем $G \setminus A$ состоит только из инволюций.*

Доказательство. Отметим, что если пара (x,y) симметрична и $\alpha \in \Phi(G) \setminus \{e\}$, то пара ($\alpha x$,$y$) также симметрична. Это означает, что в симметричное множество, содержащее элемент x, можно включать также все элементы вида αx, где $\alpha \in \Phi(G) \setminus \{e\}$. Поэтому в дальнейшем будем полагать, что симметричные множества M_1 и M_2, на которые разбита группа G, являются некоторым объединением смежных классов по подгруппе $\Phi(G)$. Следовательно, можно говорить о том, $G / \langle\alpha\rangle = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2$, где $\bar{M}_i$ – образ множества M_i при естественном гомоморфизме в соответствующую факторгруппу.

Пусть $x \in \sqrt{e} \setminus Z(G)$ и пусть M_1 – такое симметричное множество, что $x \in M_1$. Тогда для хотя бы для двух из трех инволюций $\alpha \in \Phi(G) \setminus \{e\}$ элемент $x\langle\alpha\rangle$ факторгруппы $G / \langle\alpha\rangle$ не принадлежит её центру, и поэтому $G / \langle\alpha\rangle \ncong Q \times C_2 \times ... \times C_2$. Будем считать этими инволюциями c и t, т.е. $G / \langle c\rangle \ncong Q \times C_2 \times ... \times C_2$ и $G / \langle t\rangle \ncong Q \times C_2 \times ... \times C_2$. Тогда в силу предложения 2, применяемого к $G / \langle c\rangle$, можем считать, что $\bar{M}_1 \subseteq \sqrt{e\langle c\rangle}$, откуда получаем $M_1 \subseteq \sqrt{e} \cup \sqrt{c}$ и $\sqrt{t} \cup \sqrt{ct} \subseteq M_2$. С другой стороны, в силу того же предложения 2, применяемого к $G / \langle t\rangle$, получаем, что $\bar{M}_1 \subseteq \sqrt{e\langle t\rangle}$, откуда следует, что $M_1 \subseteq \sqrt{e} \cup \sqrt{t}$. Таким образом, $M_1 \subseteq (\sqrt{e} \cup \sqrt{c}) \cap (\sqrt{e} \cup \sqrt{t}) = \sqrt{e}$, и поэтому $\sqrt{c} \cup \sqrt{t} \cup \sqrt{ct} \subseteq M_2$.

Покажем теперь, что $\langle M_2\rangle$ абелева, для чего достаточно проверить, что для любых $y_1 \in M_2$ и $y_2 \in M_2$ выполняется $y_1y_2 = y_2y_1$. Если $y_1^2 \neq y_2^2$, то это выполняется в силу симметричности пары (y_1,y_2). Пусть $y_1^2 = y_2^2$. Так как

$\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$ и $\sqrt{c} \cup \sqrt{t} \cup \sqrt{ct} \subseteq M_2$, то найдется такой $b \in M_2$, что $c \neq b^2 \neq y_1^2 = y_2^2$. Это означает, что обе пары (b,y_1) и (b,y_2) перестановочны. Рассмотрим теперь пару (by_1,y_2). Имеем $(by_1)^2 = b^2y_1^2 \neq e$, ибо $b^2 \notin \langle y_1^2 \rangle$. Следовательно, $by_1 \in M_2$. Кроме того, $(by_1)^2 = b^2y_1^2 \neq y_1^2$, ибо $b^2 \neq e$. Это означает, что $(by_1)y_2 = y_2(by_1)$. Учитывая, что $by_2 = y_2b$, получаем $y_1y_2 = y_2y_1$. Итак, $\langle M_2 \rangle$ абелева подгруппа группы G, вне которой все элементы являются инволюциями.

Предложение 5. *Пусть G – конечная группа, центр которой имеет показатель 2, удовлетворяет условиям $N(G) = 2$ и $\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$. Тогда*

– *либо в G имеется абелева подгруппа A индекса 2, причем квадраты всех элементов в $G \setminus A$ равны между собой;*
– *либо $G \cong Q \times Q \times C_2 \times ... \times C_2$.*

Доказательство. В связи с предложением 4 в дальнейшем полагаем, что $\sqrt{e} \subseteq Z(G)$. Обозначим $\Phi(G) = \{e, c, t, ct\}$.

Рассмотрим случай, при котором из трех факторгрупп $G/\langle c \rangle$, $G/\langle t \rangle$ и $G/\langle ct \rangle$ две не изоморфны $Q \times C_2 \times ... \times C_2$. В самом деле, факторгруппы $G/\langle c \rangle$ и $G/\langle t \rangle$ не изоморфны $Q \times C_2 \times ... \times C_2$. Тогда в силу предложения 2 разбиение факторгруппы $G/\langle c \rangle$ на симметричные множества L_1 и L_2 возможно только как на множества элементов, имеющих одинаковые квадраты. Это означает, что единственное разбиение группы G на симметричные множества следующее: $G = \sqrt{c} \cup (\sqrt{t} \cup \sqrt{ct})$. Аналогичные рассуждения, примененные к факторгруппе $G / \langle t \rangle$, приводят к другому разбиению группы G на симметричные множества: $G = \sqrt{t} \cup (\sqrt{c} \cup \sqrt{ct})$. В силу единственности эти два разбиения должны совпадать, что возможно лишь при $ct = \varnothing$. Рассмотрим теперь факторгруппу $G/\langle ct \rangle$, подгруппа Фраттини которой также порядка 2; поэтому в ней доля элементов, квадрат которых равен единице, не меньше ¼ (см. [5, замечание 3]). Другими словами, $|\sqrt{e}| + |\sqrt{ct}| \geqslant ¼|G|$. Учитывая, что $|\sqrt{ct}| = 0$, получаем $|\sqrt{e}| \geqslant ¼|G|$, а вспоминая, что $\sqrt{e} \subseteq Z(G)$, заключаем, что $|Z(G)| \geqslant ¼|G|$. Так как G неабелева, то имеем $|Z(G)| = ¼|G| = |\sqrt{e}|$. Разложим G по $Z(G)$: $G = Z(G) \cup \alpha Z(G) \cup \beta Z(G) \cup \alpha\beta Z(G)$, где $\alpha^2 = c$ и $\beta^2 = t$. Без ограничения общности можно считать, что $(\alpha\beta)^2 = c$. Тогда подмножество $A = Z(G) \cup \beta Z(G)$, очевидно, является подгруппой группы G индекса 2, причем все элементы из $G \setminus A$ имеют одинаковые квадраты.

Рассмотрим теперь случай, при котором обе факторгруппы $G/\langle c \rangle$, $G/\langle t \rangle$ и изоморфны $Q \times C_2 \times ... \times C_2$. Положим $H_1 = \sqrt{e} \cup \sqrt{c}$ и $H_2 = \sqrt{e} \cup \sqrt{t}$. Тогда образ H_1 при естественном гомоморфизме группы G в $G/\langle c \rangle$, очевидно, совпадает с ее центром. Это означает, во-первых, что H_1 является подгруппой в G индекса 4, а, во-вторых, что $[H_1,G] = G/\langle c \rangle$. Аналогично, образ H_2 при естественном гомоморфизме группы G в $G/\langle t \rangle$ также совпадает с ее центром. Это означает, во-первых, что H_2 является подгруппой в G

индекса 4, а, во-вторых, что $[H_2,G] = \langle t\rangle$. Более того, $[H_1,H_2] = \langle c\rangle \cap \langle t\rangle = \langle e\rangle$. Другими словами, $\langle H_1,H_2\rangle = H_1 * H_2$. Далее, если $\langle H_1,H_2\rangle \neq G$, то $G \setminus \langle H_1,H_2\rangle \subseteq \langle ct\rangle$, откуда сразу следует, что $\langle H_1,H_2\rangle$ – абелева подгруппа группы G индекса 2.

Остается считать, что $\langle H_1,H_2\rangle = G$. Отметим, что если τ центральная в G инволюция, не принадлежащая $\Phi(G) = \{e, c, t, ct\}$, то существует такое порождающее множество $s_1,\dots,s_k,\tau$ группы G, что $\langle s_1,\dots,s_k\rangle = T \neq G$. Тогда подгруппы T и $\langle\tau\rangle$ обе нормальны в G, $\langle T,\tau\rangle = G$ и $T \cap \langle\tau\rangle = \langle e\rangle$. Следовательно, $G = T \times \langle\tau\rangle$. Повторяя эту процедуру, можно представить группу G в виде $G = G_0 \times C_2 \times \dots \times C_2$, где $Z(G_0) = \Phi(G) = \{e, c, t, ct\}$. Так как $t \notin \Phi(H_1)$, то существует такая подгруппа $F_1 < H_1$, что $H_1 = F_1 \times \langle t\rangle$. Аналогично, существует такая подгруппа $F_2 < H_2$, что $H_2 = F_2 \times \langle c\rangle$. Следовательно, $G_0 = \langle F_1,F_2\rangle$, $F_1 \cap F_2 = \langle e\rangle$, причем F_i нормальны в G_0 в силу того, что $G = H_1 * H_2$. Таким образом, мы показали, что $G_0 = F_1 \times F_2$.

Остается отметить, что подгруппы F_1 и F_2 изоморфны группе кватернионов, ибо все их инволюции центральны в них.

4. Группы G с условием $|\Phi(G)| > 4$

Лемма 6. *Пусть G – конечная 2-группа, $expZ(G) = 2$ и $G = M_1 \cup M_2$, где M_i – симметричные множества, причем $|M_1| > |M_2|$. Тогда во множестве M_1 существует не более одного отличного от единичного элемента α, удовлетворяющего условию $\sqrt{\alpha}(M_1) \neq \varnothing$.*

Доказательство. Если все элементы из M_1 имеют одинаковые квадраты, то утверждение леммы справедливо. Поэтому можно полагать, что в M_1 имеется такой элемент x, что $x^2 \neq e$. Обозначим $t = x^2$.

Предположим, что $|\sqrt{t}(M_1)| \leqslant ¼|G|$. Тогда $|M_1\backslash\sqrt{t}| > ¼|G|$. Учитывая, что для произвольного $y \in \sqrt{t}(M_1)$ выполняется $M_1\backslash\sqrt{t} \subseteq C_G(y)$, мы имеем $|C_G(y)| > ¼|G|$. Так как $y \notin Z(G)$ и G – 2-группа, мы заключаем, что $|C_G(y)| = ½|G|$, причем $|C_G(y)| = \langle M_1\backslash\sqrt{t}\rangle$. Таким образом, все элементы множества $\sqrt{t}(M_1)$ имеют один и тот же централизатор $\langle M_1\backslash\sqrt{t}\rangle$, т.е. для любых $y_1 \in \langle M_1\backslash\sqrt{t}\rangle$, $y_2 \in \langle M_1\backslash\sqrt{t}\rangle$ выполняется $C_G(y_1) = C_G(y_2)$, откуда следует, что $y_1y_2 = y_2y_1$. Последнее означает, что любой элемент из $\sqrt{t}(M_1)$ коммутирует со всеми элементами множества M_1, и поэтому содержится в $Z(G)$. Однако это противоречит условию $expZ(G) \leqslant 2$.

Итак, мы имеем $|\sqrt{t}(M_1)| > ¼|G|$. Допустим теперь, что в M_1 существует такой элемент u, что $u^2 \neq e$ и $u^2 \neq t$. Тогда $\sqrt{t}(M_1) \subseteq C_G(u)$ и $u\sqrt{t}(M_1) \subseteq C_G(u)$. Если $\beta \in u\sqrt{t}(M_1)$, то $\beta^2 = u^2t \neq t$, откуда имеем $\sqrt{t}(M_1) \cap u\sqrt{t}(M_1) = \varnothing$. Следовательно, $|C_G(u)| \geqslant |\sqrt{t}(M_1)| + |u\sqrt{t}(M_1)| > ¼|G| + ¼|G| = ½|G|$, и поэтому $u \in Z(G)$, что противоречит условию $expZ(G) \leqslant 2$.

Предложение 7. *Пусть G – конечная группа, $expZ(G) = 2$, $N(G) = 2$ и $|\Phi(G)| > 4$. Тогда в G имеется абелева подгруппа A индекса 2, причем квадраты всех элементов в $G \setminus A$ равны между собой.*

Доказательство. Пусть $G = M_1 \cup M_2$ – разбиение группы G на симметричные подмножества. Если $|M_1| = |M_2|$, то переместим единичный элемент из одного подмножества в другое. Итак, можно полагать, что $|M_1| > |M_2|$. В силу леммы 6, в M_1 существует не более одного элемента $t \neq e$, удовлетворяющего условию $\sqrt{t}(M_1) \neq \varnothing$.

Покажем, что $\langle M_2\rangle$ есть абелева подгруппа. Пусть $\alpha \in M_2$, $\beta \in M_2$, причем $\alpha^2 = \beta^2$. Так как $|\Phi(G)| > 4$, то $\Phi(G) \neq \langle\alpha^2,t\rangle$, и поэтому существует такой $b \in G$, что $b^2 \notin \langle\alpha^2,t\rangle$. Ясно, что $b \in M_2$, и поэтому пара (α,b) симметрична. Более того, в силу выбора b, имеем, что $b^2 \neq \alpha^2$, и поэтому получаем $\alpha b = b\alpha$. При этом имеем $(\alpha b)^2 = \alpha^2 b^2 \notin \langle\alpha^2,t\rangle$, откуда следует, что $\alpha b \in M_2$. Но тогда пара $(\alpha b,\beta)$ обязана быть симметричной, в то время как квадраты её элементов различны. Это означает, что $\alpha b\beta = \beta\alpha b$, а учитывая соотношение $\alpha b = b\alpha$, получаем, что $\alpha\beta = \beta\alpha$. Итак, $\langle M_2\rangle$ – абелева подгруппа.

Обозначим $H = \langle M_2,Z(G)\rangle$ и покажем, что $[G : H] = 2$. В самом деле, в противном случае, $[G : H] \geqslant 4$, откуда следует неравенство $M_1 \geqslant ¾|G|$, а, следовательно, $|\sqrt{e}| + |\sqrt{t}| \geqslant ¾|G|$. Последнее означает, что в факторгруппе $G/\langle t\rangle$ доля решений уравнения $x^2 = e$ не меньше ¾, что возможно только в двух случаях: либо $G/\langle t\rangle$ есть группа показателя 2, либо $G/\langle t\rangle \cong D_4 \times C_2 \times ... \times C_2$. Однако оба этих варианта означают, что $|\Phi(G/\langle t\rangle)| \leqslant 2$, что влечет неравенство $|\Phi(G)| \leqslant 4$, а это противоречит условию $|\Phi(G)| > 4$. Итак, $[G : H] = 2$.

Теперь покажем, что в $G \setminus H$ квадраты всех элементов равны между собой. От противного, пусть в $G \setminus H$ имеются элементы a и b с различными квадратами. Так как $G \setminus H \subseteq M_1 \subseteq \sqrt{e} \cup \sqrt{t}$, будем полагать, что $a^2 = e$ и $b^2 = t$. Если $|\sqrt{e}(G \setminus H)| \geqslant ¼|G|$, то элемент b коммутирует по крайней мере с $¼|G| + 1$ элементом из $G \setminus H$ (имея в виду $\sqrt{e}(G \setminus H) \cup \{b\}$), а кроме того, элемент b коммутирует с $¼|G| + 1$ элементом из H (имея в виду $b(\sqrt{e}(G \setminus H) \cup \{b\}) \subseteq H$), откуда следует, что $b \in Z(G)$. Если $|\sqrt{t}(G \setminus H)| \geqslant ¼|G|$, то элемент a коммутирует по крайней мере с $¼|G| + 1$ элементом из $G \setminus H$ (имея в виду $\sqrt{t}(G \setminus H) \cup \{a\}$), а кроме того, элемент a коммутирует с $¼|G| + 1$ элементом из H (имея в виду $a(\sqrt{e}(G \setminus H) \cup \{b\}) \subseteq H$), откуда следует, что $a \in Z(G)$. Оба варианта противоречат определению H как подгруппы, содержащей $Z(G)$.

Итоговый результат

Теорема. *Конечную некоммутативную группу G можно представить в виде объединения не более, чем двух симметричных подмножеств тогда и только тогда, G удовлетворяет хотя бы одному из условий:*

(1) *в G имеется абелева подгруппа A индекса 2, причем квадраты всех элементов в $G \setminus A$ равны между собой;*

(2) *G является 2-группой, подгруппа Фраттини которой имеет порядок 2;*

(3) $G \cong Q \times C_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$;

(4) $G \cong Q \times Q \times C_2 \times \ldots \times C_2$.

Доказательство. Очевидно, что для всех перечисленных в условии групп выполняется условие $N(G) \leqslant 2$. Пусть G – группа с условием $N(G) = 2$, которая не удовлетворяет (1). В силу предложения 1, имеем $exp(G) = 4$. В частности, G является 2-группой. Будем считать, что группа G не удовлетворяет (3). Тогда в силу [5, предложение 4], имеем $expZ(G) = 2$. Если $\Phi(G) \cong C_2 \times C_2$, то в силу предложения 5, и с учетом того, что G не удовлетворяет (1), получаем, что G удовлетворяет (4). Если же $|\Phi(G)| > 4$, то в силу предложения 7 снова приходим к тому, что G – группа вида (1).

Замечание 12. Поскольку в постановке задачи указано условие $N(G) = 2$, а в теореме стоит условие $N(G) \leqslant 2$, следует сказать отдельно о классификации неабелевых групп с условием $N(G) = 1$, которая получена Г. А. Фрейманом [1]. Именно, для неабелевой группы G условие $N(G) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $G \cong Q \times C_2 \times \ldots \times C_2$.

Заключение

К настоящему моменту имеются существенные продвижения в различных аспектах постановки Г. А. Фреймана (см., например, [6]). В плане той постановки, которая рассматривалась в настоящей статье, можно предложить изучить группы, которые можно представить в виде объединения трех симметричных множеств.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Freiman G. A. On two- and three-element subsets of groups. Aequationes math., 22, №2, 1981, 140–152.

2. Некрасов К. Г. О связи строения конечной группы с долей её несимметричных двухэлементных подмножеств. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1982. С. 130–135.

3. Некрасов К. Г. О связи строения конечной группы с долей её несимметричных двухэлементных подмножеств II. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1983. С. 59–70.

4. Некрасов К. Г., Беркович Я. Г. Необходимое и достаточное условие цикличности подгруппы Фраттини конечной p-группы. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Ярославль. 1985. С. 35–37.

5. Некрасов К. Г. Конечные группы с экспонентой центра больше двух, которые можно представить как объединение двух симметричных подмножеств. Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы II Всероссийской научно-практической конференции. Тверь, 25–27 марта 2021 года. ТвГУ, Тверь, 2001. С. 143–146.

6. Ya. G. Berkovich, G. A. Freiman and Cheryl E. Praeger Small squaring and cubing properties for finite groups Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 44, 1991, P. 429–450.

УДК 378.14

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ОБУЧЕНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ

Нигматулин Равиль Михайлович
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
e-mail: ravil@cspu.ru

Ключевые слова: *теория вероятностей, вычислительный эксперимент, подготовка учителей математики, компьютерное моделирование.*

Аннотация. В работе обсуждаются методические и содержательные особенности использования вычислительных экспериментов в процессе подготовки будущих учителей математики по дисциплине «Теория вероятностей и математическая статистика». Обосновывается необходимость активного использования наглядных вычислительных компьютерных экспериментов в изучении этой дисциплины для эффективной подготовки будущего учителя математики в контексте обновлений федеральных государственных образовательных стандартах основного общего образования.

В обновленных федеральных государственных образовательных стандартах основного общего образования (приказ Минпросвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287) впервые в рамках предмета «Математика» выделяется отдельный учебный курс «Вероятность и статистика». В соответствии с примерной рабочей программой (одобрена решением Федерального УМО по общему образованию, протокол 3/21 от 27.09.2021 г.) на базовом уровне основного общего образования в образовательных организациях этот учебный курс изучается в 7-9 классах по 1 учебному часу в неделю в течение каждого года обучения (всего 102 учебных часа).

Такие изменения в школьном математическом образовании естественно потребуют соответствующих корректировок в учебных планах педагогических вузов, и, соответственно, изменений в предметной и методической подготовке будущих учителей математики, которые должны будут обладать необходимыми компетенциями и знаниями для эффективной реализации самостоятельного учебного курса «Вероятность и статистика». Выделим некоторые проблемы и противоречия, разрешение которых, на наш взгляд, позволит подготовить современного профессионального компетентного учителя математики, готового продуктивно реализовывать учебный курс «Вероятность и статистика».

Большая значимость вероятности и статистики в современном цифровом мире объясняется широкими практическими приложениями, их ролью в образовании в целом, а также расширяющимся спектром профессий, для овладения которыми требуется хорошая начальная подготовка в области вероятности и статистики. Однако накопленный опыт в обучении теории вероятностей и статистики не является систематизированным, не имеет под собой единых методологических подходов [7]. На сегодняшний день нет отдельного апробированного универсального учебного пособия «Вероятность и статистика», рекомендованного (входящего в федеральный перечень учебников) для использования в образовательных организациях.

Кроме того, подготовка будущих учителей математики в педагогических вузах по теории вероятностей и статистике носит в большей степени академический характер, ощущается недостаток практической составляющей, использования описательной и наглядной статистики, вычислительных экспериментов и моделирования, наглядно демонстрирующих теоретико-вероятностные закономерности [2, 3, 5].

Один из возможных эффективных путей наполнения преподавания курса теории вероятностей и математической статистики практической составляющей и наглядностью заключается в активном использовании информационно-коммуникационных и цифровых технологий для проведения наглядных вычислительных компьютерных экспериментов, демонстрирующих различные теоретико-вероятностные закономерности и иллюстрирующих статистический подход к вычислению вероятностей [6].

Опыт использования информационно-коммуникационных и цифровых технологий в преподавании теории вероятностей и статистики в школе и вузе широко представлен в работах. Для проведения экспериментов предлагается использовать языки программирования для разработки небольших программ, генерирующих случайные числа и вычисляющих различные характеристики случайных величин [5]; электронные таблицы (например, Microsoft Excel), в которых встроены функции для работы со случайными числами; системы динамической геометрии для визуализации решений, например, задач на геометрическую вероятность (например, GeoGebra) [2, 4, 6].

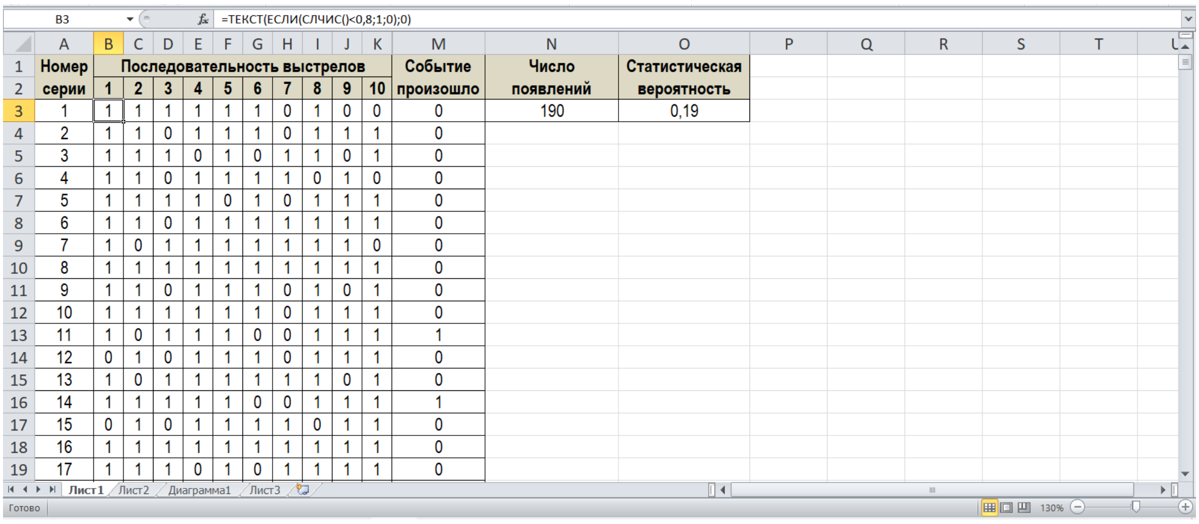
Для подготовки будущего учителя математики с учетом современных условий профессиональной деятельности именно последние два варианта (электронные таблицы, например, Microsoft Excel и системы динамической геометрии, например, GeoGebra), на наш взгляд, являются наиболее удобными, эффективными. В Южно-Уральском государственном гуманитарно-педагогический университете для бакалавров направления «Педагогическое образования» (профили «математика», «информатика») в учебном процессе разрабатывается и используется система индивидуальных заданий для проведения вычислительных экспериментов, позволяющих студентам использовать информационно-коммуникационные и цифровые технологии в проверке и демонстрации теоретико-вероятностных закономерностей на основе статистического подхода к определению вероятности.

Приведем примеры некоторых разработанных заданий и продемонстрируем результаты их выполнения студентами.

Задача 1. Стрелок 10 раз стреляет по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,8. Проведите в Microsoft Excel вычислительный эксперимент и, используя статистический подход к вычислению вероятности, приближенно найдите вероятность события: после 2 попаданий подряд идут 2 промаха подряд.

Студентам предлагается, с одной стороны, задание по изученной теме (в этом примере – по формуле (схеме) Бернулл). Но, с другой стороны, вопрос в задаче понятный по формулировке, но сложный для непосредственного теоретического решения.

Одна из трудностей, которую нужно было преодолеть студентам в проведении вычислительного эксперимента, заключалась в получении последовательности, иллюстрирующей попадания (обозначались единицами) и промахи (обозначались единицами) при 10 выстрелах, такой, что вероятность появления единицы равна 0,8. Студенты использовали геометрический подход для встроенной функции СЛЧИС() (она выводит в ячейке равномерно распределенное случайное вещественное число, которое большее или равно 0 и меньше 1). В итоге для получения серии выстрелов с указанной вероятностью попадания 0,8, использовалась формула: =ЕСЛИ(СЛЧИС()<0,8;1;0). Пример листа с вычислениями в Microsoft Excel представлен на рис. 1.



Номер серии	Последовательность выстрелов										Событие произошло	Число появлений	Статистическая вероятность
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10			
1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	190	0,19
2	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0		
3	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0		
4	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	0		
5	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0		
6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0		
7	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0		
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		
9	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0		
10	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0		
11	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1		
12	0	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0		
13	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	0		
14	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1		
15	0	1	0	1	1	1	1	0	1	1	0		
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0		
17	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0		

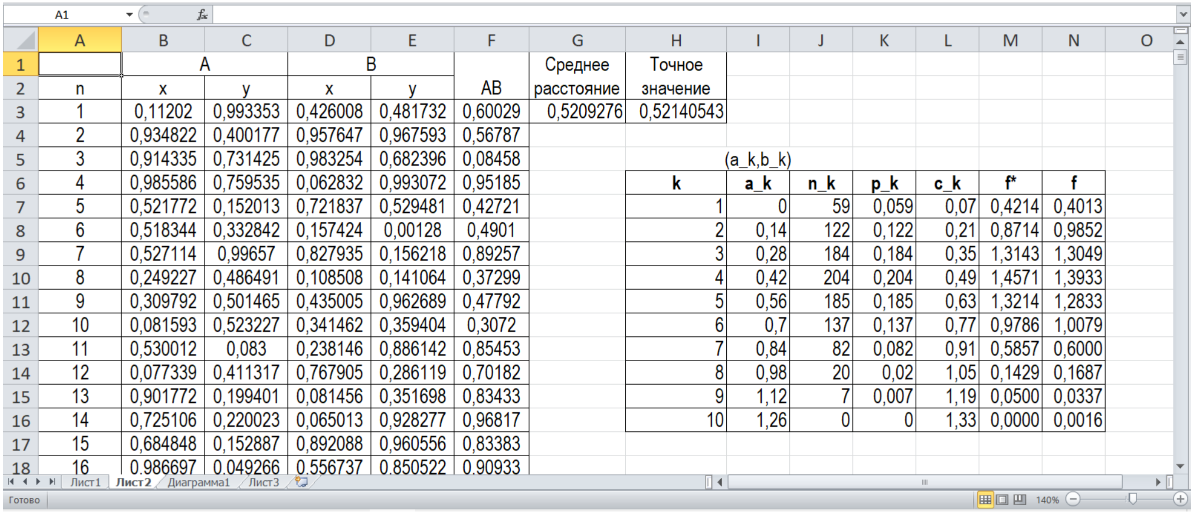
Рис. 1. Вычислительный эксперимент в Excel для решения задачи 1

Задача 2. В квадрате со стороной 1 случайно и независимо выбирают две точки A и B. Какие значения может принимать длина отрезка AB? Какое значение является средней длиной отрезка AB в этом эксперименте? Проведите в Microsoft Excel вычислительный эксперимент и, используя статистический подход, найдите приближенное значение средней длины отрезка AB. Получите какое-либо графическое представление экспериментальных данных, дающее информацию о вероятности значений длины отрезка AB.

Формулировка задачи не содержит явные названия величин, которые требуется найти. Студенту необходимо интерпретировать условие задачи, определить какие величины требуется найти.

В этой задаче рассматривается непрерывная случайная величина X – длина отрезка AB. Ее возможные значения находят из геометрических соображений – это отрезок $[0,\ \sqrt{2}]$. Среднее значение длины отрезка AB – это математическое ожидание случайной величины X, а графическое представление экспериментальных данных, дающее информацию о вероятности значений – эмпирическая плотность вероятности.

Эта задача является тестовым примером для студентов, так как позволяет им проверить качество результатов выполненного вычислительного эксперимента, сравнивая их с известными точными значениями и графиками (см. рис. 2, рис. 3).



	A	B	C	D	E	F	G	H
1		A		B			Среднее	Точное
2	n	x	y	x	y	AB	расстояние	значение
3	1	0,11202	0,993353	0,426008	0,481732	0,60029	0,5209276	0,52140543
4	2	0,934822	0,400177	0,957647	0,967593	0,56787		
5	3	0,914335	0,731425	0,983254	0,682396	0,08458		
6	4	0,985586	0,759535	0,062832	0,993072	0,95185		
7	5	0,521772	0,152013	0,721837	0,529481	0,42721		
8	6	0,518344	0,332842	0,157424	0,00128	0,4901		
9	7	0,527114	0,99657	0,827935	0,156218	0,89257		
10	8	0,249227	0,486491	0,108508	0,141064	0,37299		
11	9	0,309792	0,501465	0,435005	0,962689	0,47792		
12	10	0,081593	0,523227	0,341462	0,359404	0,3072		
13	11	0,530012	0,083	0,238146	0,886142	0,85453		
14	12	0,077339	0,411317	0,767905	0,286119	0,70182		
15	13	0,901772	0,199401	0,081456	0,351698	0,83433		
16	14	0,725106	0,220023	0,065013	0,928277	0,96817		
17	15	0,684848	0,152887	0,892088	0,960556	0,83383		
18	16	0,986697	0,049266	0,556737	0,850522	0,90933		

(a_k,b_k)

k	a_k	n_k	p_k	c_k	f*	f
1	0	59	0,059	0,07	0,4214	0,4013
2	0,14	122	0,122	0,21	0,8714	0,9852
3	0,28	184	0,184	0,35	1,3143	1,3049
4	0,42	204	0,204	0,49	1,4571	1,3933
5	0,56	185	0,185	0,63	1,3214	1,2833
6	0,7	137	0,137	0,77	0,9786	1,0079
7	0,84	82	0,082	0,91	0,5857	0,6000
8	0,98	20	0,02	1,05	0,1429	0,1687
9	1,12	7	0,007	1,19	0,0500	0,0337
10	1,26	0	0	1,33	0,0000	0,0016

Рис. 2. Вычислительный эксперимент в Excel для решения задачи 2

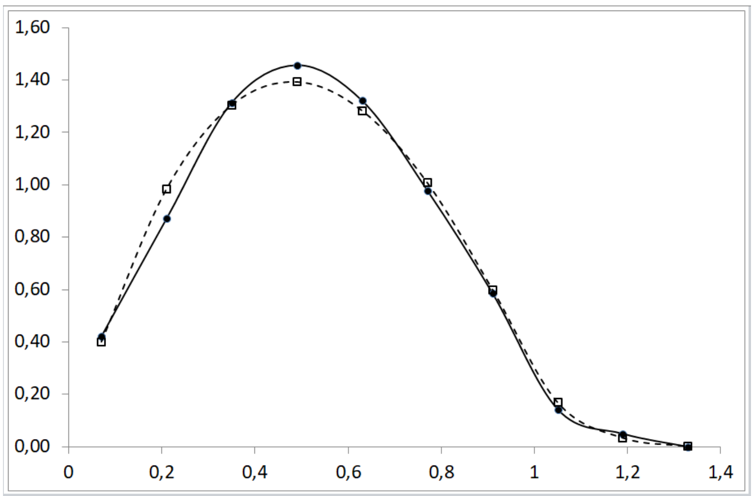


Рис. 3. График эмпирической плотности вероятности (сплошная линия) и теоретической в решении задачи 2

Задача 2 известна в зарубежных источниках как Square Line Picking [1]. Точное значение математического ожидания случайной величины X равно $M[X] = \frac{1}{15}\left(2 + \sqrt{2} + 5\ln\left(1 + \sqrt{2}\right)\right)$, а плотность вероятности – функция:

$$f(x) = \begin{cases} 2x(x^2 - 4x + \pi), & \text{если } 0 \le x < 1 \\ 2x\left(4\sqrt{x^2 - 1} - x^2 - 2 + \pi - 4\,\mathrm{arctg}\sqrt{x^2 - 1}\right), & \text{если } 1 \le x \le \sqrt{2} \end{cases}.$$

Задача 3. В квадрате $ABCD$ со стороной 1 случайно и независимо выбирают две точки P и Q соответственно на сторонах BC и CD. Какие значения может принимать площадь треугольника APQ? Какое значение является средней площадью треугольника APQ в этом эксперименте? Проведите в Microsoft Excel вычислительный эксперимент и, используя статистический подход, найдите приближенное значение средней площади треугольника APQ. Получите какое-либо графическое представление экспериментальных данных, дающее информацию о вероятности значений площади треугольника APQ.

Как и в задаче 2, здесь студенту самостоятельно необходимо интерпретировать условие задачи, определить какие величины требуется найти. В этой задаче рассматривается непрерывная случайная величина X – площадь треугольника APQ. Ее возможные значения находят из геометрических соображений – это отрезок $[0; 0.5]$. Среднее значение площади треугольника APQ – это математическое ожидание случайной величины X, а графическое представление экспериментальных данных, дающее информацию о вероятности значений – эмпирическая плотность вероятности.

На примере наглядных и простых по формулировке задач 2 и 3 студенты получают новые для них виды плотности вероятности непрерывной случайной величины, не представленные в учебнике.

На рис. 4 представлен листа с вычислительным экспериментом в Microsoft Excel для решения задачи 3, а на рис. 5 – график эмпирической плотности вероятности.

	P		Q		Площадь
n	x	y	x	y	APQ
1	1	0,9987	0,5024	1	0,249131
2	1	0,7960	0,1045	1	0,458424
3	1	0,1514	0,8076	1	0,438882
4	1	0,2847	0,2424	1	0,465489
5	1	0,9781	0,6145	1	0,199451
6	1	0,5878	0,7835	1	0,269733
7	1	0,0141	0,7326	1	0,494824
8	1	0,3135	0,4560	1	0,428529
9	1	0,6490	0,7658	1	0,251505
10	1	0,8639	0,5681	1	0,254636
11	1	0,8804	0,9801	1	0,068549
12	1	0,9796	0,9894	1	0,015394
13	1	0,9527	0,1058	1	0,449623
14	1	0,1851	0,6369	1	0,441067
15	1	0,8730	0,8830	1	0,114547
16	1	0,9858	0,9077	1	0,052606

(a_k,b_k)

k	a_k	n_k	p_k	c_k	f*
1	0	3	0,003	0,025	0,0600
2	0,05	15	0,015	0,075	0,3000
3	0,1	32	0,032	0,125	0,6400
4	0,15	51	0,051	0,175	1,0200
5	0,2	65	0,065	0,225	1,3000
6	0,25	80	0,08	0,275	1,6000
7	0,3	110	0,11	0,325	2,2000
8	0,35	139	0,139	0,375	2,7800
9	0,4	188	0,188	0,425	3,7600
10	0,45	317	0,317	0,475	6,3400
11				0,5	0

Рис. 4. Вычислительный эксперимент в Excel для решения задачи 3.

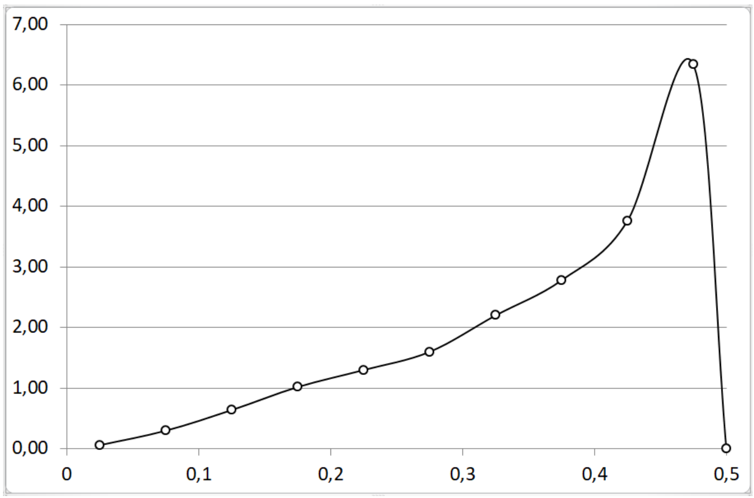


Рис. 5. График эмпирической плотности вероятности в решении задачи 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Square Line Picking - from Wolfram MathWorld [Электронный ресурс]. URL: https://mathworld.wolfram.com/SquareLinePicking.html (дата обращения 10.03.2022).

2. Войтенко Т.Ю., Фирер А.В. Цифровая визуализация геометрических вероятностей в Geogebra // Педагогическая информатика. 2021. № 2. С. 121-127.

3. Муханов С.А., Муханова А.А. Использование сервиса Wolfram Alpha при моделировании вероятностных экспериментов // Современное педагогическое образование. 2019. № 2. С. 67-69.

4. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 216-220.

5. Сомова М.Н., Беличенко О.М. Компьютерное моделирование в обучении теории вероятностей // Актуальные проблемы преподавания математики в техническом вузе. 2019. № 7. С. 299-303.

6. Шумакова Е.О., Севостьянова С.А., Вагина М.Ю. Особенности применения динамических графических приложений в процессе математической и методической подготовки бакалавров педагогического образования // Информация и образование: границы коммуникаций INFO'20. Сборник научных трудов № 12 (20). Горно-Алтайск, 2020. С. 78-81.

7. Щербатых С.В., Лыкова К.Г., Полякова А.Ю. Развитие вероятностного стиля мышления в условиях цифровизации математического образования // Стандарты и мониторинг в образовании. 2019. №. 6. С. 36-43.

УДК 51(091)

ВЛАДИМИР НИКОЛАЕВИЧ НИКОЛЬСКИЙ

Попова Ольга Владимировна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: polgavlad@yandex.ru

***Ключевые слова**: Подвижники просвещения, династия Никольских.*

***Аннотация:** В статье говорится о талантливом математике, педагоге, организаторе науки профессоре В.Н.Никольском.*

4 марта 2023 года исполнится 100 лет со дня рождения профессора Никольского Владимира Николаевича (4.03.1923г.-5.12.1984г.) талантливого математика, педагога, организатора науки. В.Н. Никольский много сделал для развития института и университета.

В.Н. Никольский

В.Н. Никольский родился в семье Николая Дмитриевича Никольского (1873-1952), педагога, подвижника просвещения, вся жизнь которого была посвящена развитию российской системы образования, возможности и доступности обучения для всех желающих. Николай Дмитриевич – основатель и первый директор Тверского учительского института, предшественника Тверского педагогического института – Калининского государственного педагогического института (КГПИ) – Калининского (ныне Тверского) государственного университета.

В 1944 году В.Н. Никольский с отличием окончил физико-математический факультет КГПИ, в 1947 году аспирантуру при кафедре математического анализа КГПИ. Его научным руководителем был профессор МГУ им. Ломоносова А.И. Маркушевич, по совместительству заведовавший кафедрой КГПИ. В 1948 г. В.Н.Никольский защитил в

Московском университете кандидатскую диссертацию "Наилучшее приближение и базис в пространстве Фреше". Официальными оппонентами выступили профессора МГУ Н.К. Бари и Л.А. Люстерник. В 1950 г. Владимир Николаевич был утвержден в ученом звании доцента по кафедре математического анализа.

Научные труды В.Н. Никольского были посвящены исследованию проблем переноса основных теорем классической теории наилучшего приближения на общие линейные нормированные пространства. Он одним из первых нашел необходимый и достаточный признак элемента наилучшего приближения, выраженный в терминах двойственности линейных нормированных пространств и обобщающий известный критерий А.Н. Колмогорова. Далее им было получено распространение обобщенного критерия Колмогорова на тот случай, когда аппроксимирующие элементы принадлежат наперед заданному выпуклому множеству. Переход к общим линейным нормированным пространствам позволил В.Н. Никольскому поставить ряд новых задач в теории чебышевской аппроксимации, таких, как проблема изучения операторных свойств полиномов наилучшего приближения и проблема характеризации класса пространств, в которых любая последовательность вложенных подпространств и любая монотонная последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю, определяют некоторый элемент, находящийся от каждого из подпространств на расстоянии, равном соответствующему члену числовой последовательности (обобщение известной задачи С.Н. Бернштейна). Никольскому принадлежат первые результаты на пути к их решению. Эти его исследования получили развитие и обобщение в работах зарубежных математиков Ч. Бессага и А. Пелчинского, В. Истратеску, Д. Рейтерфорда, И. Зингера, Р. Джеймса, затем - в трудах А.Л. Гаркави и учеников В.Н. Никольского - А.М. Фломина, И.С. Тюремских, В.И. Андреева, В.В. Локоть, В.Г. Банина, Н.В. Днепровской, Л.А. Марковой, А.И. Гусева. В частности, Фломин и Андреев показали, что результаты Владимира Николаевича можно распространить даже на ненормируемые локально выпуклые линейные топологические пространства, а Днепровская обнаружила, что основные факты теории наилучшего приближения могут быть перенесены на нестандартные пространства с использованием неархимедовых числовых полей.

Обзор некоторых исследований В.Н. Никольского и его учеников можно найти в монографии И. Зингера "О наилучшем приближении в векторных нормированных пространствах элементами векторных пространств" (оригинал издан на румынском языке в Бухаресте, опубликовано также английское издание). Другим источником может служить обзорная статья А.Л. Гаркави "Теория наилучшего приближения в линейных нормированных пространствах", опубликованная в ежегоднике

ВИНИТИ "Итоги науки" (М., 1969). В.Н. Никольский был участником 3-го и 4-го Всесоюзных математических съездов, 1-й и 2-й Всесоюзных конференций по конструктивной теории функций, Международных конференций по теории приближения функций (Калуга, 1975 и 1983 г.), где выступал с сообщениями. Был организатором межвузовской конференции "Применения функционального анализа в теории приближений", состоявшейся в Калининском пединституте в 1970 г.; отчет о ней опубликован в "Успехах математических наук", т. 25, вып. 6.

За период с 1966 по 1981 г. В.Н. Никольским подготовлено через аспирантуру 9 кандидатов наук. Его ученики работают во многих высших учебных заведениях. С 1967 по 1971. г. он был председателем Совета по присуждению ученой степени кандидата наук при Калининском пединституте, а с 1971 по 1975 г. - председателем специализированного Совета по присуждению ученой степени кандидата наук по математическим наукам при Калининском госуниверситете.

С 1949 г. в течение 34 лет В.Н. Никольский преподавал фундаментальные математические дисциплины в КГПИ-КГУ: курсы математического анализа, теории функций действительного и комплексного переменного, функционального анализа, современной алгебры, руководил курсовыми и дипломными работами. Им были разработаны и многократно прочитаны специальные курсы по теории приближения функций. Для студентов спецгрупп такие спецкурсы читались им на английском языке. Концентрированный опыт преподавания математики будущим учителям нашел отражение в ряде учебных пособий. Наиболее известен составленный в соавторстве с профессорами П.П. Коровкиным и Н.А. Давыдовым "Сборник задач по математическому анализу" для пединститутов (М.: Просвещение, 1964), который неоднократно переиздавался как в Советском Союзе, так и за рубежом. По поручению Министерства просвещения СССР В.Н. Никольским была составлена программа курса "Математический анализ" для пединститутов (спец."Математика"), утвержденная затем министерством и тиражированная издательством "Просвещение" в 1970 г. В период с 1966 по 1970 г. Владимир Николаевич был организатором работ по экспериментальному учебному плану на математическом факультете КГПИ, проводившихся под общим руководством Министерства просвещения РСФСР. В рамках этих работ он составил программу экспериментального курса "Основания математики", который был затем прочитан студентам-математикам и издан пединститутом четырьмя выпусками в 1967–1969 гг. общим объемом 420 стр. Как отмечалось на Всесоюзном совещании заведующих математическими кафедрами пединститутов в 1970 г., опыт работы Калининского пединститута оказал влияние на формирование нового учебного плана для всех пединститутов страны.

С 1961 по 1971 г. В.Н. Никольский состоял членом Учебной комиссии по математике Министерства просвещения РСФСР, а с 1968 по 1975 г.- членом Научно-методического совета Министерства просвещения СССР и членом президиума этого совета. В этом качестве он был участником ряда методических совещаний регионального и всесоюзного характера, выполнял многочисленные поручения ГУВУЗа и УУЗа, имевшие целью повышение качества математической подготовки в пединститутах.

В течение 15 лет (1960–1975) В.Н. Никольский заведовал кафедрой математического анализа КГПИ-КГУ. Одновременно с 1964 по 1976 г. был проректором по научной работе. В этот период заметно усилилась научная деятельность кафедр, в том числе - по хоздоговорам, был создан Вычислительный центр, увеличился объем издательской деятельности. Пединститут получил право приема к защите кандидатских диссертаций по ряду специальностей. Все эти факторы способствовали положительному решению вопроса о преобразовании КГПИ в классический университет.

В 1976–1983 гг. В.Н. Никольский был деканом математического факультета КГУ. При нем факультет получил новые импульсы развития. Формировался научно-педагогический коллектив, совершенствовался учебно-воспитательный процесс, развивались научные исследования. Он активно участвовал в издательской деятельности факультета и, прежде всего, старейшей кафедры математического анализа. Был инициатором создания и многолетним ответственным редактором межвузовского тематического сборника научных трудов "Применение функционального анализа в теории приближений" (с 1973 по 1981 г. – 11 выпусков). Этот сборник ежегодно издается и в настоящее время. В.Н. Никольский был научным редактором учебных пособий профессора Б.З. Вулиха "Введение в теорию конусов в нормированных пространствах" (Калинин, 1978) и ряда других учебных пособий, сборников научных трудов.

За успешную научно-педагогическую и общественную работу В.Н. Никольский был награжден знаком "Отличник народного просвещения", медалью "За доблестный труд. В ознаменование 100-летия со дня рождения В.И.Ленина" и Почетной грамотой Президиума Верховного Совета РСФСР, другими почетными грамотами и благодарностями.

Скончался Владимир Николаевич Никольский 5 декабря 1984 года в г.Твери.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тверской государственный университет: Исторический очерк / ТвГУ; под ред. А.Н.Кудинова. – 2-е изд., пер. и доп. – Тверь: ОГУП «Тверское областное книжно-журнальное издательство», 2001. – 192 с., ил.

2. История ТвГУ в документах / под ред. С.Н. Смирнова, О.К. Ермишкиной. – Тверь: Лилия Принт, 2006. – 264 с., ил.

УДК 004.92

ВЕКТОРНАЯ ГРАФИКА В ASYMPTOTE

Поташов Иван Михайлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *векторная графика, TeX, LaTeX, Asymptote.*

Аннотация. В статье описываются базовые приёмы работы с языком описания векторной графики Asymptote, а также интеграции создаваемой графики в LaTeX.

Общие сведения. Asymptote – это язык описания векторной графики, предназначенный для создания технических рисунков. Первая версия языка вышла в 2004 году. Изначально разработчики планировали использовать этот язык как средство, которое бы стало стандартом представления иллюстраций в LaTeX. Однако Asymptote может создавать графические изображения независимо от системы TeX.

Asymptote – это C++-подобный язык, созданный под влиянием MetaPost. Asymptote можно использовать во многих операционных системах. Существует несколько способов создания изображений при помощи Asymptote. Во-первых, графику можно создавать автономно. Для этого нужно установить компилятор с официального сайта (https://asymptote.sourceforge.io/), а также текстовый редактор и PostScript. В этом случае код Asymptote записывается в текстовых файлах с расширением .asy, а компилятор преобразует их в графический файл формата PDF, PostScript, SVG или 3D PRC. Во-вторых, код asymptote можно вставлять непосредственно в LaTeX-файлы. Для этого нужно помимо указанных в предыдущем пункте программ установить LaTeX, а также программу для просмотра PDF. Для интеграции кода asymptote нужно подключить одноимённый пакет, при этом вставка графики может осуществляться следующим образом:

```
\begin{figure}
 \begin{asy}
  КОД ASYMPTOTE
 \end{asy}
 \caption{…}
\end{figure}
```

Наконец, LaTeX-документы с кодом asymptote можно создавать в онлайн-среде Overleaf (https://www.overleaf.com/). Это способ требует только наличия браузера, и вставка графики осуществляется так же, как и в предыдущем случае.

Ниже рассмотрим некоторые приёмы работы с языком.

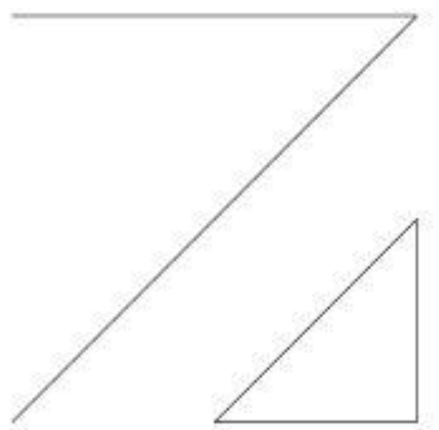
1. Ломаные. Несколько слов о размерностях. Рассмотрим одну из основных команд для рисования фигур – команду *draw*. При помощи данной команды можно рисовать отрезки, кривые, окружности и ряд других фигур. Построение ломаной из отрезков можно задать при помощи команды

draw((X1,Y1)--(X2,Y2)--…--(Xn,Yn)),

где *(X1,Y1), (X2,Y2),… (Xn,Yn)* – координаты вершин ломаной. Для построения замкнутых кривых используется несколько иной формат команды:

draw((X1,Y1)--(X2,Y2)--…--(Xn,Yn)--cycle).

Ниже продемонстрирован пример использования этих команд:

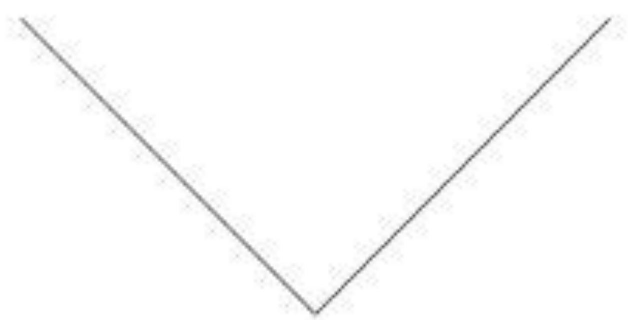


draw((0,0)--(144,144)--(0,144));
draw((72,0)--(144,0)--(144,72)--cycle);

Рис. 1. Программирование рисования линий. Первая команда задаёт незамкнутую линию, а при помощи второй рисуется треугольник

По умолчанию единицей измерения в системе координат является большой пункт (bp), составляющий 1/72 дюйма. Но такая единица измерения не всегда удобна для использования. Для выбора новой единицы измерения используется команда *unitsize,* позволяющая определить единицу измерения как для обеих координатных осей, так и для каждой оси по отдельности. В дальнейших примерах мы неоднократно будем использовать эту команду.

Существует ещё один способ рисования ломаных и других фигур – при помощи команды *path*, определяющую пути:



unitsize(x=2cm,y=1cm);
//Задаём размерность на осях
path g=(0,3)--(1.5,0)--(3,3);
//Определяем путь g как ломаную
draw(g);
//Рисуем путь

Рис 2. Использование команд *unitsyze* и *path*

2. **Изменение стиля линий.** В предыдущих примерах все линии были сплошными, имели чёрный цвет. Но часто возникает необходимость изменить штриховку, толщину, цвет линии или дополнить стрелками. Ниже мы рассмотрим несколько примеров работы со стилем линий.

Начнём со штриховки. Все типы штриховки в Asymtote продемонстрированы на рис. 3.

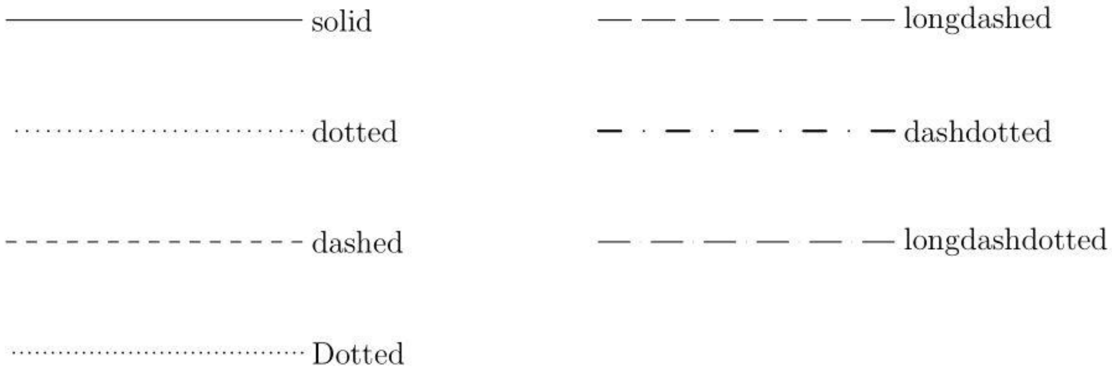


Рис. 3. Стили штриховок в Asymptote

Стиль штриховки в качестве второго параметра в команде *draw*. Например, для получения пунктирной линии необходимо использовать команды вида *draw((0,0)--(0,1), dashed)* или *draw(g, dashed);*

Для изменения толщины линий мы можем указать её значение в качестве второго параметра команды: *draw((0,0)--(0,1), 2bp)* или *draw(g, 2bp);* В этих примерах толщина рисуемой линии становится равной двум пунктам.

Цвет линии также можно указать в качестве параметра после указания пути. Например, чтобы для создания красной линии мы можем использовать команды вида *draw((0,0)--(0,1), red)* или *draw(g, red)*.

В Asymptote достаточно большой список предопределённых цветов, содержащий несколько десятков наименований, однако пользователь может определить цвета самостоятельно. Подробно о цветах можно узнать в официальном руководстве [1].

Если требуется изменить сразу несколько характеристик линии, то указанные параметры необходимо соединить знаком «+». Например, если пользователю необходимо изобразить на чертеже точечную линию синего с шириной два пункта, то мы в этом случае можем воспользоваться командой *draw((0,0)--(0,1),dotted+2bp+blue)*.

Для рисовки стрелок и палочек на концах линий нужно дополнительно указать значения параметров *arrow* и *bar* соответственно. Например, для того, чтобы нарисовать линию с палочкой в начале и со стрелкой на конце, то можно для этой цели можно использовать код *draw((0,0)--(0,1),bar=BeginBar,arrow=EndArrow)*. Все значения указанных параметров и соответствующие изображения показаны на рис. 4.

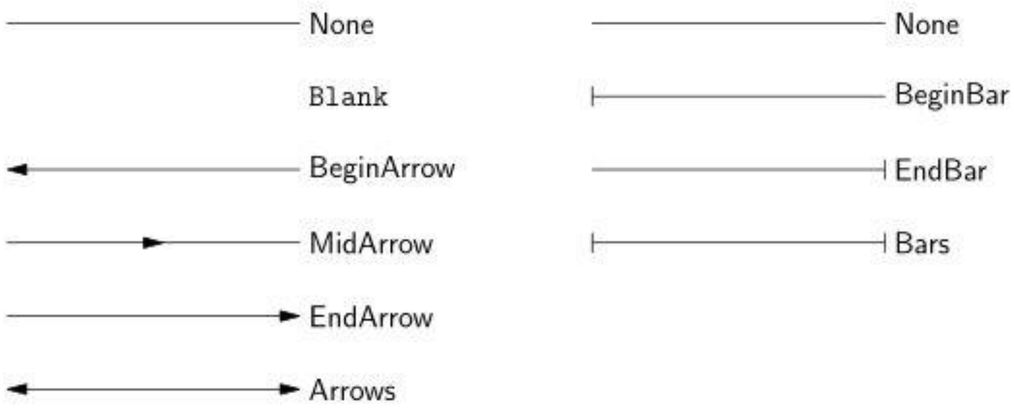


Рис. 4. Стрелки (параметр *arrow*) и палочки (параметр *bar*) на концах линий. Рисование линий здесь осуществляется слева направо

3. Точки. При помощи команды *draw* можно рисовать отдельные точки [2]. Например, для того, чтобы изобразить точку на рисунке, мы можем использовать один из следующих вариантов указанных в коде к рис. 5:

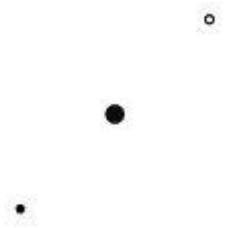
unitsize(1cm);// Определяем единицу измерения.
pair A=(2,0);// Задаём точку A.
draw((0,0),8bp+gray);// Рисуем точку (0,0) серого цвета размером 8bp.
draw((1,0),6bp+red);// Рисуем точку (1,0) красного цвета размером 6bp.
draw(A,linewidth(4bp));// Рисуем точку A размером 4bp.

Рис. 5. Изображение точек при помощи команды *draw*

Обратим внимание на вторую строку данного фрагмента кода. Здесь команда *pair A=(2,0)* задаёт имя точки, к которому в дальнейшем можно обращаться в других командах.

Для рисования точек в Asymptote также существует специальная команда *dot*. Эта команда имеет следующий формат: *dot((X,Y),[параметры]),* где *X* и *Y* – координаты точки (вместо координат можно также указать имя, как в предыдущем примере), а *[параметры]* – опции, определяющие диаметр и цвет точки.

Варианты использования команды *dot* представлены на рис. 6.



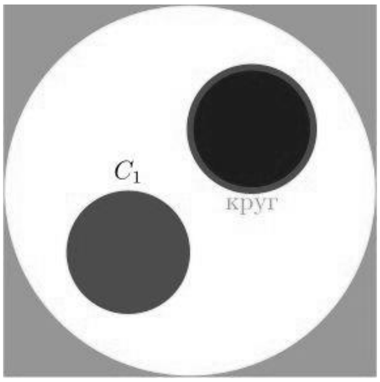
unitsize(1cm);
pair A=(2,2);// Задаём точку A.
dot((0,0));// Рисуем точку (0,0) с параметрами по умолчанию.
dot((1,1),6bp+darkgray);// Рисуем точку (1,1) красного цвета диаметром 3bp.
dot(A,filltype=Draw());// Рисуем точку A в виде окружности.

Рис. 6. Примеры использования команды *dot*

4. **Окружности.** В Asymptote имеется предопределённый путь *unitcircle*, задающий окружность единичного радиуса с центром в начале координат [1,2]. Также в этом языке имеется ряд преобразований для фигур, в том числе сдвиг и масштабирование. Используя эти преобразования, мы можем нарисовать окружность с любым центром и любым радиусом. Однако для начинающего пользователя такой подход построения окружностей будет не очень удобен. Альтернативным способом рисования окружностей является использование подключаемых модулей, например, *graph* или *geometry* [3]. В модуле *graph* окружность определяется в более привычном формате, а именно в виде *Circle((X,Y),r)*, где *(X,Y)* – центр окружности, а *r* – её радиус. Далее мы рассмотрим пример использования этой команды.

5. **Заливка фигур.** Для рисования фигур с заливкой используются команды *fill, filldraw* и *filloutside*. Команда *fill* позволяет рисовать фигуры без рамок, и имеет формат *fill(g,fillpen)*, где *g* – это контур заливаемой фигуры, *fillpen* – формат заливки. Для фигур с рамкой используется команда *filldraw* в формате *filldraw(g,fillpen,drawpen).* Здесь параметр *drawpen* задаёт стиль рамки, а два других параметра имеют тот же смысл, что и в предыдущей команде. Для заливки внешних областей используется команда *filloutside,* имеющая такой же формат, что и команда *fill*. Примеры использования этих команд показаны в комментарии к рис. 7.

6. **Вставка текст.** Для вставки надписей используется команда *label,* имеющая формат: *label("текст",(X,Y),[направление],[дополнительные параметры]).* Здесь параметр *"текст"* – это вставляемая надпись, указывается в двойных кавычках и может содержать как обычный текст, так и код LaTeX; *(X,Y)* – точка, к которой привязан вставляемый текст. Следующие два параметра являются опциональными: *[направление]* – указывает, в какой стороне от точки привязки будет размещаться текст, имеет восемь предопределённых значений, соответствующих сторонам света (*N, NE, E, SE, S, SW, W, NW*); *[дополнительные параметры]* – позволяют определить размер и шрифта.




```
texpreamble("\usepackage[T2A]{fontenc}
\usepackage[utf8]{inputenc}
\usepackage{mathtext}\usepackage[russian]{b
abel}");
//Эта команда позволяет вставлять текст
на русском языке
import graph;/ /Подключаем модуль
unitsize(1cm);
path c1=Circle((-1,-1),1);
path c2=Circle((1,1),1);
path c3=Circle((0,0),3);// Задаём пути -
окружности
fill(c1,red);// рисуем красный круг
filldraw(c2,fillpen=blue,drawpen=red+3bp);
//рисуем круг с красной синего цвета с
красной границей
filloutside(c3,green);//область вне большого
круга будет окрашена зёлёным.
label("$C_1$",(-1,0),N);//вставляем текст в
LaTeX-формате
label("круг",(1,0),S,green+12pt);
// А это обычный текст, шрифт имеет
зелёный цвет и размер 12 пунктов
```

Рис. 7. Рисование окружностей и использование команд заливки. Вставка текста

Заключение. Мы рассмотрели базовые языка Asymptote для создания простейших чертежей, однако возможности выходят за рамки описанных примеров. В частности, не описаны подключаемые библиотеки, элементы программирования. Заинтересованный читатель может узнать подробности из официального руководства [1] и литературы о данном языке [2,3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hammerlindl A., Bowman J., Prince T. Asymptote: the Vector Graphics Language [Электронный ресурс] // 2022. 196. с. URL: https://asymptote.sourceforge.io/asymptote.pdf (Дата обращения 08.03.2022).

2. Крячков Ю.Г. Asymptote для начинающих [Электронный ресурс] // 2015. 131 с. URL:http://mif.vspu.ru/books/ASYfb.pdf (дата обращения 08.03.2022).

3. Ивальди Ф. Евклидова геометрия на языке векторной графики ASYMPTOTE [Электронный ресурс] // Пер. с англ. Ю.Г. Крячкова. Волгоград, 2015. 88 с. URL: http://mif.vspu.ru/books/geometry_new_ru.pdf (дата обращения 08.03.2022).

УДК 514.822

КЛАССИФИКАЦИЯ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ГЕОНОВ

Поташов Иван Михайлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *математическое моделирование, общая теория относительности, топологические геоны, круговые орбиты.*

Аннотация. В работе приводится расширенная классификация топологических геонов сферически симметричного пространства-времени – гравитирующих конфигураций в общей теории относительности с нетривиальной топологией. В частности, в работе анализируется тип топологического геона, ранее не представленный в литературе и имеющий свойства, отличные от геонов других типов.

Введение. Топологический геон – это ориентируемое асимптотически плоское пространство-время с топологией $\mathbb{R}\times\mathbb{R}P^3\setminus\{p\}$ [1], где «пространственный множитель» – это проколотое проективное пространство, и удалённая точка обычно ассоциируется с асимптотической бесконечностью. Это трёхмерное многообразие ориентируемо и может быть получено из $\mathbb{R}^3$ при помощи удаления открытого шара и отождествления противоположных точек на граничной сфере. В теории относительности Эйнштейна геоны могут существовать только при наличии экзотической материи, для которой нарушается нулевое энергетическое условие. Например, самодействующее фантомное скалярное поле сейчас является полезным математическим инструментов в космологии, в частности при моделировании тёмной материи и тёмной энергии.

В работе мы будем рассматривать сферически симметричные топологические геоны с фантомным скалярным полем без горизонта событий. Такой геон удобно рассматривать как сферически проходимую симметричную кротовую нору с зеркальной симметрией относительно её горловины, факторизованную по группе $\mathbf{Z}_2$ [2, 3]. Формально, такая кротовая нора и топологический геон являются равносильными решениями уравнений Эйнштейна—Клейна—Гордона, но имеют разные топологии и интерпретации. Кротовые норы мы рассматриваем как изначальные глобальные структуры, соединяющие две большие области Вселенной, а топологические геоны – частицеподобные структуры, которые могли возникнуть в ранней Вселенной, и в настоящее время их размер может варьироваться от планковской длины до галактических масштабов [4]. Поэтому геоны относят к потенциально наблюдаемым объектам [5].

Гипотетически топологические геоны наряду со сверхмассивными чёрными дырами и кротовыми норами могут располагаться в центрах галактик. В связи с этим возникает вопрос о поиске наблюдательных критериев, позволяющих отличить топологические геоны от других типов гравитирующих конфигураций [6]. В этой статье мы рассмотрим топологические геоны различных типов и особенности орбитального движения массивных частиц в пространстве-времени геонов.

Основные уравнения и типы геонов. Математически, самогравитирующее фантомное скалярное поле можно описать действием (в геометрических единицах)

$$\Sigma = \frac{1}{8\pi}\left(-\frac{S}{2} - \langle d\phi, d\phi\rangle - 2V(\phi)\right)\sqrt{|g|}\,d^4x, \qquad (1)$$

где S – скалярная кривизна ϕ – скалярное поле, $V(\phi)$ – потенциал самодействия, а кинетический член отрицателен. Для описания и исследования топологических геонов удобно использовать метрику сферически симметричного пространства-времени в виде

$$ds^2 = Adt^2 - \frac{dr^2}{A} - C^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right), \qquad (2)$$

где A, C, ϕ – функции радиальной координаты r, определённые на всей числовой оси. В ортонормированном базисе, связанным с метрикой (2), для действия (1) получаем систему независимых уравнений Эйнштейна—Клейна—Гордона:

$$2A\frac{C''}{C} + A\frac{C'^2}{C^2} + A'\frac{C'}{C} - \frac{1}{C^2} = A\phi'^2 - 2V, \qquad (3)$$

$$A'\frac{C'}{C} + A\frac{C'^2}{C^2} - \frac{1}{C^2} = -A\phi'^2 - 2V, \qquad (4)$$

$$A\phi'' + \phi'\left(A' + 2A\frac{C'}{C}\right) + \frac{dV}{d\phi} = 0, \qquad (5)$$

где штрих обозначает производную по r.

Решение системы уравнений (3) – (5) можно найти, используя метод обратной задачи [7, 8]. В квадратурных формулах решение системы можно записать в виде [9]:

$$\phi' = \sqrt{C''/C} \quad A = 2C^2\int_r^\infty \frac{r}{C^4}dr, \quad \tilde{V}(r) = \frac{1}{2C^2}\left(1 - 3C'^2A - CC''A + 2r\frac{C'}{C}\right), \quad (6)$$

В квадратурных формулах (6) функция $C(r)$ – чётная, положительная, имеет неотрицательную вторую производную и асимптотику $C = r + 3m + o(1)$ при $r \to \infty$, где параметр m – масса Шварцшильда [10].

Существует несколько типов геонов с качественным отличием поведения функции $A(r)$ вблизи поверхности геона (или горловины кротовой норы). Чтобы рассмотреть эти различия, рассмотрим несколько иллюстративных примеров и обозначим их номерами I, II и III:

$$(I)\, C=\left(r^4+2r^2+a^4\right)^{1/4}, \quad (II)\, C=\left(r^2+4\right)^{1/2}+3,$$

$$(III)\, C=\left(r^6+r^4+\frac{r^2}{16}+\frac{1}{64}\right). \quad (7)$$

Геоны I и III имеют нулевую массу Швацшильда, но геон II имеет массу $m=1$. Графики соответствующих функций $C(r)$ и $A(r)$ изображены на рис. 1 и рис. 2.

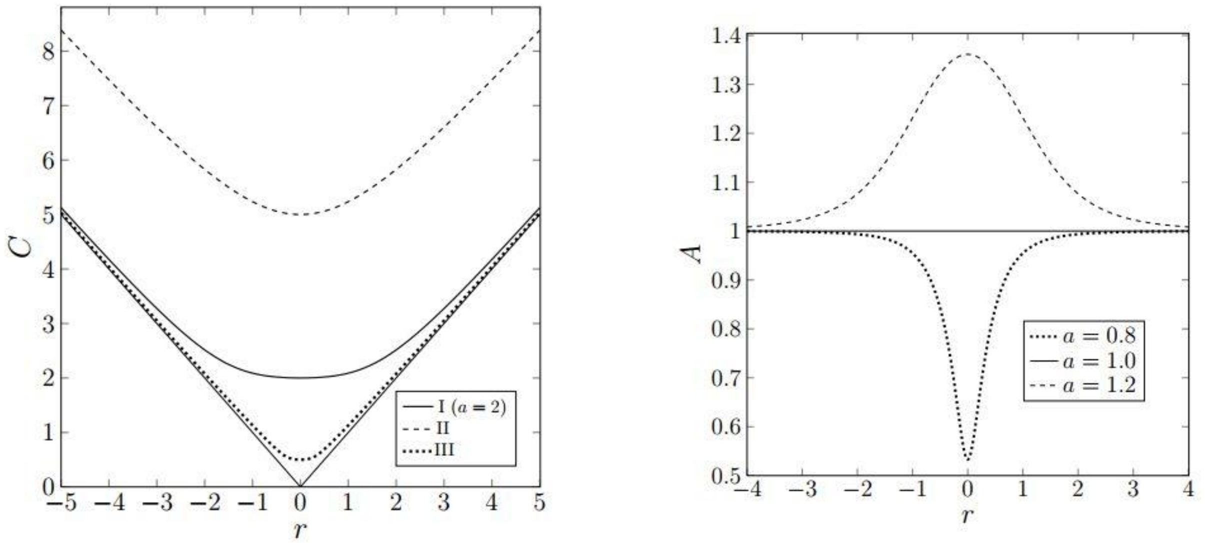


Рис. 1. Слева: графики функций $C(r)$ для геонов I, II и III из (7). Справа: графики $A(r)$ для геона I. Случай $a=1$ соответствует решению Эллиса [11]. Иллюстрация взята из [10]

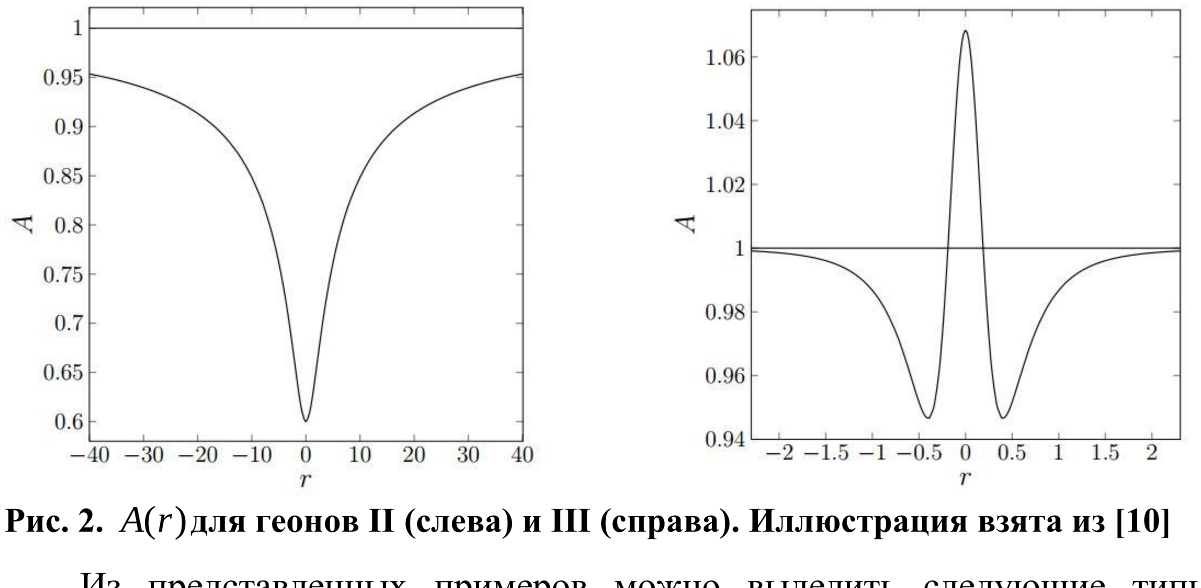


Рис. 2. $A(r)$ для геонов II (слева) и III (справа). Иллюстрация взята из [10]

Из представленных примеров можно выделить следующие типы поведения функции $A(r)$: для геонов I и II типа функция $A(r)$ имеет единственный максимум или минимум в точке $r=0$ (на топологической особенности геона или горловине соответствующей кротовой норы), геон III типа имеет единственный максимум в точке $r=0$ и хотя бы один минимум в точке $r=r^*>0$.

Для анализа движения массивных частиц наибольший интерес представляют минимумы функции $A(r)$, поскольку движение массивных частиц описывается уравнениями движения и эффективным потенциалом

$$\frac{dt}{ds}=\frac{E}{A},\quad \frac{d\varphi}{ds}=\frac{J}{C^2},\quad \left(\frac{dr}{ds}\right)^2=E^2-V_{eff},\quad V_{eff}=A\left(1+\frac{J^2}{C^2}\right),\qquad (8)$$

где E – удельная энергия, а J – удельный момент частицы. Наличие минимума $A(r)$ гарантирует существование устойчивых круговых орбит, в том числе и орбиты для покоящихся частиц с $J=0$. Анализ уравнений и эффективного потенциала (8) показывает, что у геонов I при $a\geq 1$ круговые орбиты будут отсутствовать, поскольку их эффективный потенциал ни будет иметь минимума и будет наблюдаться гравитационное отталкивание, что не находит физического подтверждения. Для геонов I при $0<a<1$ и геонов III существуют круговые орбиты в ограниченной области, и в областях, соответствующим точкам минимума, будут наблюдаться сферические слои частиц. Для геонов II $V_{eff}=1-2m/r+o\left(r^{-1}\right)$ и круговые орбиты будут существовать для любого неотрицательного значения J. Более подробное описание орбит данных геонов приводится в [10].

Геон с нетривиальной асимптотикой. Существования круговых орбит для любого значения момента возможно не только для безмассовых геонов. Рассмотрим в качестве примера ещё модель геона, качественно отличающуюся от рассмотренных выше моделей. В качестве функции $C(r)$ рассмотрим

$$(IV)\qquad C=\begin{cases} -r+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{-r}}, & r<-2;\\ \dfrac{r^4+24r^2+912}{256}, & -2\leq r\leq -2;\\ r+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r}}, & r>2.\end{cases}\qquad (9)$$

Легко проверить, что функция удовлетворяет всем условиям, перечисленным выше, и будет определять безмассовый геон. Графики функции (9) и соответствующей функции $A(r)$ изображены на рис 3.

На рис. 2 и на рис. 3 видно что функций $A(r)$ геонов III и IV качественно схожи, так как имеют максимум в точке $r=0$ и минимум вне топологической особенности. Однако асимптотическое поведение функций $A(r)$ для данных геонов при $r\to\infty$ будет отличаться. Для безмассовых геонов I и III имеем $A = 1 - a/r^4 + o\left(r^{-4}\right)$ и $V_{eff} = 1 + J^2/C^2 + o\left(r^{-2}\right)$, то есть эффективный потенциал будет являться убывающей на бесконечности функцией, и удалённые круговые орбиты для этих случаях невозможны. Для геона IV $A = 1 - 4\sqrt{2}/7 \cdot r^{-3/2} + o\left(r^{-3/2}\right)$ и $V_{eff} \sim A$ при $r \to \infty$, то есть при достаточно больших значениях r эффективный потенциал будет возрастать. Можно показать, что эффективный потенциал геона IV имеет хотя бы один минимум при любом значении J, а это означает, что у данного геона имеются удалённые круговые орбиты, что свойственно массивным геонам (типа II) и чёрным дырам.

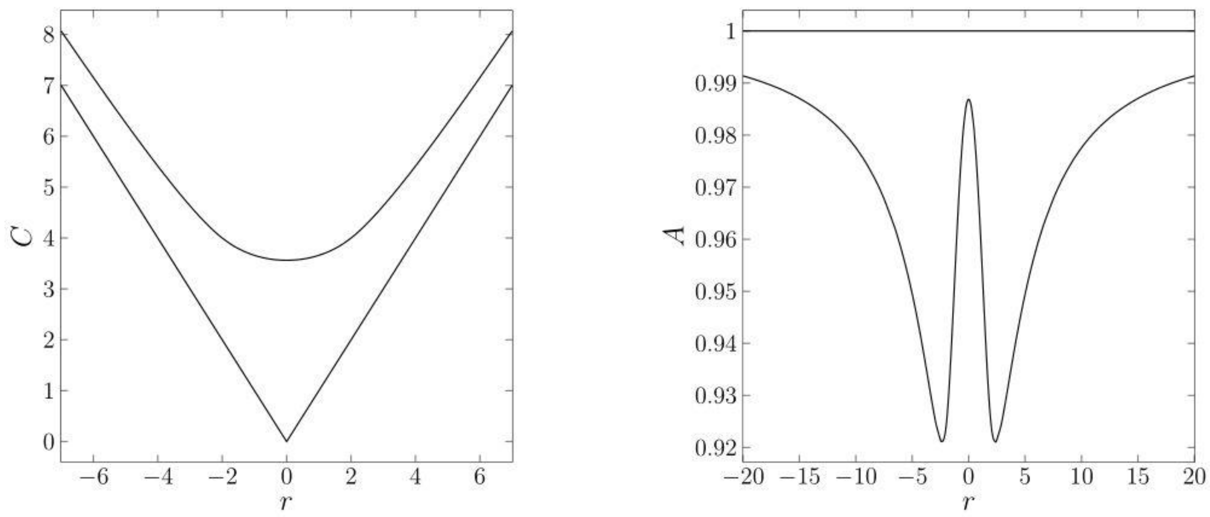


Рис. 3. Слева: график функции $C(r)$ (9). Справа: график функции $A(r)$ геона (IV)

Этот пример можно обобщить, рассмотрев функции, удовлетворяющие указанным выше условиям и имеющие асимптотику $C(r) = r + ar^{-\alpha} + o\left(r^{-\alpha}\right)$ $r \to \infty$, где $a > 0,\ 0 < \alpha < 1.$ Для данного решения имеем:

$$A(r) = 1 + 2a\left(\frac{\alpha - 1}{\alpha + 3}\right) r^{-1-\alpha} + o\left(r^{-1-\alpha}\right), \quad r \to \infty.$$

Поскольку коэффициент второго слагаемого является отрицательным при $0 < \alpha < 1$, то в этом случае эффективный потенциал будет иметь асимптотику, схожую с асимтотикой $A(r)$, и иметь хотя бы один минимум при любом неотрицательном значении J. Таким образом, теоретически возможно существование целого класса геонов с нетривиальной асимптотикой метрической функции $A(r)$.

Заключение. В статье представлена классификация топологических геонов, включающая три ранее описанных типа [10], а также тип геона, ранее не описанный в литературе. Отличительной особенностью всех рассмотренных геонов является наличие последней устойчивой круговой орбиты с нулевым моментом частицы, то есть частицы на данной орбите будут покоиться. Такая орбита может располагаться как на топологической особенности геона, так и вне её. У массивных геонов, как и у чёрных дыр, существуют удалённые круговые орбиты. У безмассовых геонов, возможно существование моделей как без удалённых круговых орбит, так и с наличием удалённых круговых орбит, причём в последнем случае можно явно класс таких моделей, имеющих нетривиальную асимптотику.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sorkin R.D. Introduction to topological geons // Proceedings of the NATO Advanced Study Institute. 1985 Erice, Italy. (In P. G. Bergmann and V. de Sabbata, eds. Topological Properties and Global Structure of Space-Time. New York: Plenum, 1986. p. 249--270.)

2. Bronnikov K.A., Korolyov P.A. On wormholes with long throats and the stability problem // Gravitation and Cosmology. 2017. Vol. 23, P. 273. URL: https://doi.org/10.1134/S0202289317030021.

3. Bronnikov K.A., Sushkov S.V. Trapped ghosts: a new class of wormholes // Classical and Quantum Gravity. 2010. Vol. 27, p. 095022. URL: https://arxiv.org/abs/1001.3511.

4. Dowker H.F., Sorkin R.D. A Spin-Statistics Theorem for Certain Topological Geons // Classical and Quantum Gravity. 1998. Vol. 15, p. 1153. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9609064.

5. Кардашев Н. С. "Радиоастрон" — радиотелескоп много больше Земли. Научная программа // Успехи физических наук. 2009. №179, с. 1191–1202.

6. Li Z., Bambi C. Distinguishing black holes and wormholes with orbiting hot spots. Physical Review D. 2014. Vol. 90, p. 024071.

7. Bechmann O. Lechtenfeld O. 1995 Exact Black-Hole Solution With Self-Interacting Scalar Field // Classical and Quantum Gravity. 1995. Vol. 12, p. 1473. URL: https://arxiv.org/abs/gr-qc/9502011.

8. Bronnikov K.A., Shikin G.N. Spherically symmetric scalar vacuum: no-go theorems, black holes and solitons // Gravitation and Cosmology. 2002. Vol.8, p.107. https://arxiv.org/abs/gr-qc/0109027.

9. Solovyev D.A., Tsirulev A.N. General properties and exact models of static self-gravitating scalar field configurations // Classical and Quantum Gravity. 2012. Vol. 29. № 5. P. 055013.

10. Kratovitch, P.V. [and others] Topological geons with self-gravitating phantom scalar field // Journal of Physics: Conference Series, Vol. 934, Issue 1, 20 December 2017, art. no. 012047.

11. Ellis H.G. Ether flow through a drainhole: A particle model in general relativity // Journal of Mathematical Physics. 1973. Vol. 14. p. 104—118. Errata: Journal of Mathematical Physics. 1974. Vol. 15 p. 520.

УДК 004.053

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СРЕДСТВ ВИРТУАЛИЗАЦИИ В ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТАХ

Прохорцев Всеволод Игоревич
Московский физико-технический институт, г. Москва
E-mail: Seva.tver@mail.ru

Шаповалова Инна Анатольевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Shapovalova.IA@tversu.ru

Ключевые слова: *информационные технологии, виртуализация, обучение, лабораторная работа.*

Аннотация. В работе рассматривается использование средств виртуализации для повышения эффективности образовательного процесса лабораторных работ, проводимых в компьютерных классах, и снижения нагрузки на преподавательский и технический состав учебного учреждения.

Введение

Одной из важнейших составляющих обучения специалистов в сфере информационных технологий является формирование практических навыков. Только совокупность сильной теоретической базы и хороших практических навыков может подготовить к профессиональной деятельности высококвалифицированного специалиста.

Как правило, одним из основных инструментов получения практических навыков являются лабораторные работы, которые выполняются в компьютерных классах. У таких лабораторных работ, при всех их преимуществах, есть определенный набор недостатков. Как правило, перед выполнением работы требуется подготовить компьютерный класс, установить необходимое программное обеспечение и создать заготовку для лабораторной работы. Вероятно, для одного компьютера это не создаст большой проблемы и займет немного времени, однако если нужно подготовить целый компьютерный класс на группу, то подготовительная работа может занять даже несколько часов.

С другой стороны, у студентов, как правило, сильно ограничены права доступа к операционной системе в компьютерных классах. В то же время для изучения многих технологий требуются права администратора или суперпользователя. Например, для внесения изменений в сетевые настройки требуется именно такие права, а сетевые технологии – одна из основ современных компьютеров.

Третий момент заключается в том, что бюджет многих образовательных организаций довольно ограничен и нет возможности использовать сложные и дорогие корпоративные системы. Необходимо постараться максимально эффективно использовать вычислительные ресурсы, которые доступны или можно получить.

Основные технологии современных систем высокой плотности

Одной из самых важных технологий в компьютерных системах, на данный момент, является технология виртуализации [1]. Эта технология позволяет абстрагироваться от аппаратной платформы, изолировать несколько программных сред друг от друга и повысить утилизацию вычислительных мощностей. В случае работы с виртуальной машиной используется имитация аппаратной платформы для гостевой операционной системы. Применяя виртуализацию, мы можем на одном компьютере запустить несколько операционных систем со своими задачами. Стоит отметить, что в современной корпоративной среде именно эта технология лежит в основе самых современных гиперконвергентных платформ и программно-определяемых сред [2]. По сути, это идея максимальной унификации серверного оборудования, в которой система хранения данных, сетевая система, вычислительная система и тому подобное определяются программным образом на основе виртуализации нужных функций.

Виртуализация, безусловно, имеет дополнительные накладные расходы. Для операционных систем на базе ядра linux можно использовать один из специфичных методов виртуализации – контейнеризацию [3]. В этом случае операционная система создает несколько пространств пользователя вместо имитации аппаратной платформы, что позволяет значительно снизить накладные расходы.

Применение корпоративных технологий в образовании

В некоторых статьях [4] уже отмечалось, что можно использовать виртуализацию для подготовки лабораторных работ и обеспечения обучающихся необходимыми правами. У такого похода есть несколько сложностей, которые были решены определенными способами. Однако, эти способы может быть сложно поддерживать в будущем. Так же есть сложность с персональными компьютерами в компьютерном классе, требования к ним не снижаются, а наоборот возрастают. Повышаются требования к вычислительным мощностям, поскольку каждому компьютеру понадобятся ресурсы на исполнение двух операционных систем и на саму виртуализацию.

В качестве основы могут использоваться самые разные гипервизоры, которые стоит подбирать на основе доступных ресурсов и используемого программного обеспечения в образовательном учреждении. При этом хорошие варианты есть для всех основных платформ. В актуальных версиях операционной системы Windows есть встроенное решение Hyper-V. На основе Debian есть специализированный для виртуализации дистрибутив – Proxmox VE. Для большого спектра различных платформ существуют такие гипервизоры, как VirtualBox, поддерживаемый Oracle, и Xen, поддерживаемый Linux Foundation.

Так же надо учитывать, что сети в образовательных учреждениях могут соответствовать стандарту Fast Ethernet и обеспечивать только 100 Мб/с пропускной способности. Не сложно посчитать, что даже в теории копирование образа виртуальной машины размеров в 10 гигабайт займет примерно 13,5 минут, что довольно долго. При этом данный образ надо скопировать на все компьютеры в классе. В случае более быстрой сети, которая обеспечивает 1 Гб/с, это получится сделать быстрее, но тоже может потребовать значительного времени. Так же, обновление сети со 100 Мб/с до 1 Гб/с в размерах целого учреждения может потребовать значительных расходов.

Основная идея предлагаемого подхода заключается в том, чтобы использовать один высокопроизводительный компьютер в качестве сервера виртуализации, а не разносить эту функцию на компьютеры в классе. Это позволит централизованно хранить образы для лабораторных работ, оперативно разворачивать необходимые виртуальные машины, иметь централизованное управление и контроль.

Расчет необходимых вычислительных мощностей для сервера виртуализации

Предположим, что у нас максимальная скорость передачи данных в локальной сети 100 Мбит/с. Требования к компьютерам в компьютерном классе – минимальные. По сути, на них ложится задача терминала для доступа к виртуальной машине. Если нам достаточно обеспечить сессию SSH, то нагрузка на сеть пренебрежимо мала. При необходимости предоставить графический интерфейс нагрузка на сеть будет порядка 5 Мб/с на клиента, значит, разрешенные 100 Мб/с могут обеспечить функционирование класса с загруженностью до 16-18 человек.

Следующий момент – время развертывания. Как правило, на компьютерах для таких задач используется массив из 4-8 дисков, которые собраны в зеркальные пары, а после этого – в массив, так называемый RAID10. Такой массив из 4 дисков обеспечит сохранность данных и возможность продолжать работу после выхода из строя одного из дисков. Для обычного жесткого диска скорость линейной записи/чтения составляет порядка 170 МБ/с. Опуская технические подробности, отметим, что для такого массива скорость записи будет равна 340 МБ/с. Это позволит нам развернуть 10 виртуальных машин из образа размером 10 гигабайт примерно за 5 минут. Увеличение дисков до 8 позволит уже развернуть 20 виртуальных машин за 5 минут или 10 за 2.5 минуты.

Однако для центрального узла требуется довольно много вычислительных ресурсов. Если за основу мы возьмем Ubuntu в варианте с графическим интерфейсом, то у этого дистрибутива следующие минимальные системные требования: 2х ядерный процессор с тактовой частотой 2 МГц, 4 ГБ оперативной памяти (в тоже время допускается использовать 2 ГБ для виртуальных сред), 25гб (9гб минимум) жесткого диска. Надо учитывать, что современные процессоры имеет более высокую тактовую частоту, порядка 3-4 МГц и большую производительность на такт, поэтому для 10 виртуальных машин будет достаточно 10 поточного процессора. Добавим 2 потока на гипервизор, получится, что нам требуется 6 ядерный и 12 поточный процессор с тактовой частотой 3-4 МГц. На данный момент – это процессоры среднего потребительского сегмента [5]. Так же нам потребуется по 2-4 ГБ оперативной памяти для каждой виртуальной машины, таким образом, на 10 виртуальных машин потребуется 20-40 ГБ, добавим необходимые 4-8 ГБ для гипервизора и получим, что в хорошем случае необходимо около 48 ГБ оперативной памяти. Это больше того, что обычно ставят в персональный компьютер, но не является большим объемом. Современные процессоры среднего сегмента поддерживают до 128 ГБ оперативной памяти [5].

Таким образом, вопреки мнению, что для центрального компьютера требуются внушительные ресурсы, действительность показывает, что это не совсем так. В такой роли можно использовать довольно средний по современным меркам компьютер.

Безусловно, более правильным вариантом было бы создание или использование кластера учебного учреждения. Это решило бы проблемы с информационной безопасностью, поскольку доступ к оборудованию был бы ограничен физически, и проблемы с высокой доступностью, поскольку правильно настроенный серверный кластер обеспечивает резервирование и высокую доступность. Однако, далеко не во всех учреждениях есть возможность обеспечить такие технические средства.

Преимущества такого метода:

- значительное ускорение подготовки класса к работе – достаточно установить единственный образ виртуальной машины с уже подготовленной лабораторной работой, развертывание займет всего несколько минут;
- довольно просто решается проблема с ограниченными правами доступа у обучающихся. Внутри своей виртуальной машины им можно выдать права суперпользователя. Обучающиеся смогут выполнять лабораторную работу без риска испортить оборудование.
- Если обучающийся по какой-то причине испортил операционную, а исправление займет слишком много времени или не представляется возможным, то в течение пары минут можно удалить виртуальную машину в таком состоянии и создать новую из заготовленного образа.
- После завершения времени занятия обучающиеся, которые не успели закончить работу, могут сохранить состояние, скопировать виртуальную машину, запустить дома и доделать работу.
- Снижение расходов на поддержание компьютерных классов – вместо большого набора производительных компьютеров достаточно иметь компьютеры с минимальной производительностью, например неттопы или даже тонкие клиенты, которые значительно дешевле. Так

же компьютеры можно обновлять реже, поскольку каких-то значительных требований к производительности для них нет.

К недостаткам можно отнести:

- необходимость освоение преподавателями определенных навыков работы с гипервизором, виртуальными машинами и образами виртуальных машин;
- необходимость объяснения обучающимся, как они могут получить, подключиться и использовать свою виртуальную машину.
- Наличие единственного узла отказа – компьютера с гипервизором – решается использованием систем с высокой доступностью, что так же увеличивает расходы.
- Естественно, более высокие требования к компьютеру с гипервизором и необходимость высокой доступности приводит к высокой цене такой машины.

Заключение

В заключении хочется отметить, что такая методика позволит более эффективно использовать время специалистов, задействованных в образовательном процессе. Позволит студентам более эффективно выполнять лабораторные работы. Упростит обслуживание и настройку компьютерных классов и снизит расходы на них.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Технологии виртуализации,» [В Интернете]. Available: https://intuit.ru/studies/courses/3508/750/lecture/27408.

2. «What Is Hyperconverged Infrastructure?,» [В Интернете]. Available: https://www.vmware.com/products/hyper-converged-infrastructure.html.

3. «Основы современной контейнеризации,» [В Интернете]. Available: https://www.securitylab.ru/analytics/506905.php.

4. Д. Г. Ермаков, А. В. Присяжный и О. Е. Хорев, «Использование виртуализации в учебном процессе для повышения качества обучения,» в стойчивое развитие российских регионов: экономическая политика в условиях внешних и внутренних шоков : сборник материалов XII международной научно-практической конференции, г. Екатеринбург, 17-18 апреля 2015 г. — Екатеринбург : [УрФУ], 2015. — С. 792-801., 2015.

5. «Процессор Intel® Core™ i5-11400,» [В Интернете]. Available: https://www.intel.ru/content/www/ru/ru/products/sku/212270/intel-core-i511400-processor-12m-cache-up-to-4-40-ghz/specifications.html.

УДК 004

ЗАНЯТИЯ ПО ИНФОРМАТИКЕ В РАМКАХ ВНЕУРОЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Рассолова Эльвира Дмитриевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет, г. Белгород
E-mail: 1106046@bsu.edu.ru

Ключевые слова: *информатика, информационное общество, IT-профессии, внеурочная деятельность, обучение.*

Аннотация. В данной работе рассматривается роль и актуальность IT-профессий в современном мире. Статья раскрывает содержание понятия «внеурочная деятельность». Раскрывается актуальность значимости изучения предмета «информатики» в школьном образовании. Актуализируется необходимость во внеурочной деятельности для учащихся.

В современном мире, в период компьютеризации и новых технологий, становятся популярными и востребованными профессии направления IT, такие как: программист, бизнес аналитик и аналитик данных, тестировщик и другие…

Специалисты данной области работают во всех сферах нашей жизни и помогают им развиваться, от онлайн покупок и онлайн записи на прием, до онлайн платформ и курсов обучения такие как, Яндекс. Практикум и Coursera. Также по данным Росстата уровень заработной платы значительно выше, чем в других профессиях. Это подтверждает и HeadHunter — крупнейшая российская компания интернет-рекрутмента (рис. 1).

Работа в IT, причисляется к необходимым профессиям в информационное время, считается, что «самые востребованные специальности – педагоги, медики, IT-специалисты, профессии, связанные с космической отраслью» – отмечает Малков П. В. [11], руководитель Федеральной службы государственной статистики.

Такие перспективы привлекают все большее количество людей в данную сферу, особенно учащихся, которые только задумываются о своем будущем, которым предстоит сделать выбор в профессии.

Современное образование предоставляет возможность в изучении основ информатики в начальной школе и углубленном изучении информатики в старших классах. Так, в школах все больше открываются кружки по интересам, дополнительные занятия по конструированию и программированию, организуют внеурочные занятия.

В рамках реализации ФГОС внеурочную деятельность следует понимать как, «образовательную деятельность, осуществляемую в формах, отличных от классно-урочной, и направленную на достижение планируемых результатов освоения основной образовательной программы» [12].

Зарплатный рейтинг отраслей
(уровни «Ведущий специалист» + «Специалист»), динамика, вся Россия

Отрасль	I полугодие 2021	Динамика, г/г
Информационные технологии, системная интеграция, интернет	108 260	[illegible]
Строительство, недвижимость, эксплуатация, проектирование	88 874	2%
Продукты питания	72 771	2%
Медицина, фармацевтика, аптеки	65 483	1%
Услуги для бизнеса	65 175	1%
Электроника, приборостроение, бытовая техника, компьютеры и оргтехника	72 154	5
Химическое производство, удобрения	60 993	-1%
Товары народного потребления (непищевые)	72 184	6
Металлургия, металлообработка	56 325	4%
Перевозки, логистика, склад, ВЭД	58 232	0%

Источник: hh.ru газета.ru

Рис. 1. Зарплатный рейтинг в России

По мнению Ш.А. Амонашвили, «внеурочная деятельность - составная часть учебно-воспитательного процесса школы, одна из форм организации свободного времени учащихся. Направления, формы и методы внеурочной (внеклассной) работы практически совпадают с направлениями, формами и методами дополнительного образования детей» [1].

Так внеурочные занятия по информатике предусматривают работу с более сложными алгоритмами и способами решения задач, заинтересованные учащиеся подробнее изучают дополнительный материал, разбирают темы и пробуют себя на практике. Ученики могут изучать языки программирования, заниматься разработкой сайтов, компьютерной графикой и подготовкой к олимпиадам и экзаменам, пробуют себя в компьютерном моделировании, в проектировании баз данных, обработки данных, информационной безопасности, изучении искусственного интеллекта. Такой вид занятий дает возможность в более профессиональном и углубленном изучении материалов, на который в рамках уроков по информатике остается недостаточно времени.

Такие занятия проходят в группе учащихся, которые активно вовлечены в процесс и с интересом учувствуют в ходе работы. С одной стороны их деятельность на занятиях направлена на содержательную часть, а с другой стороны созданы условия для неформального общения детей в классе, в их объединении по интересам. Такая обстановка располагает для установки межличностных, доверительных взаимоотношений как между учащимися, так и между педагогом и классом. В таких группах у учащихся формируются навыки коммуникации, нахождения в социуме и навыки работы в команде, организации и сотрудничества. Занятия помогают развить пространственное воображение, логическое и аналитическое мышление.

Изучение такой науки, как информатика, помогает учащимся планировать, делить большие задачи на подзадачи и последовательно справляться с ними, развивается умение находить нестандартные способы решения сложных задач, гибкость мышления. Такие навыки помогут быстрее адаптироваться в современном, быстро меняющимся и активно развивающемся мире цифровых технологий.

Активное участие на внеурочных занятиях дает возможность учащимся использовать полученные знания, умения и навыки, достижения для поступления в престижные вузы страны, стать востребованным, конкурентоспособным специалистом и построить карьеру в IT-сфере.

Таким образом, внеурочная деятельность по информатике в современной школе актуальна, ведь выполняет одну из основных задач обучения в школе, помогает учащимся в самоопределении, установке своих интересов, выявлении склонностей к определенным наукам и осознанному выбору профессии. Также при более детальном рассмотрении разделов в информатике, учащиеся смогут углубить свои знания и умения, расширить представления о возможностях компьютерных технологий, что поможет им в практическом применении в жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Амонашвили Ш.А., Личностно-гуманная основа педагогического процесса. - М., “Университет”, 1990 г.

2. Богомолова Е.В. Теория и методика обучения и воспитания информатике [Электронный ресурс]

3. Бочкин А.И. Методика преподавания информатики. – Минск: Высшая школа, 1998. – 431 с.

4. Григорьев В.Д., Степанов П.В. Внеурочная деятельность школьников: методический конструктор. – М.: Просвещение, 2011. – 223 с.

5. Давлетов З.Х. Основы современной информатики: Учебное пособие. – СПб.: Лань КПТ, 2016. – 256 с.

6. Лапчик М.П. Методика преподавания информатики. – М.: Академия, 2001. – 624 с.

7. Малев В.В. Общая методика преподавания информатики. – Воронеж: ВГПУ, 2005. – 271 с.

8. Малев В.В., Малева А.А. Внеклассная работа по информатике: Учебно-методическое пособие для студентов физико-математического факультета. – Воронеж: ВГПУ, 2003. – 152 с.

9. Софронова Н.В. Теория и методика обучения информатике. – М.: Высшая школа, 2004. – 223 с.

10. Сулейманов Р.Р. Внеклассная работа по информатике в школе / Р.Р. Сулейманов // Педагогическая информатика. – 2002. – №4. – с. 13-20.

11. Федеральная служба государственной статистики [Электронный ресурс] URL:https://rosstat.gov.ru/folder/313/document/9090 (дата обращения: 03.03.2022).

12. Об организации внеурочной деятельности при введении Федерального государственного образовательного стандарта общего образования [Электронный ресурс] URL:https://docs.cntd.ru/document/902321606 (дата обращения: 03.03.2022).

УДК 372.851

ВЕРТИКАЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЧАСТНИКОВ ПЕДАГОГИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА

Романюк Виктория Дмитриевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: vika.romanyuk.0303@mail.ru

Чечерина Екатерина Юрьевна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: checherina.katya2002@mail.ru

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский государственный университет имени Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Ключевые слова: *вертикальная педагогика, вертикальные методы, учение через обучение, математическое образование.*

Аннотация. Работа посвящена использованию метода вертикальной педагогики при обучении математике в школе. В качестве примера приводится краткий план-конспект зачетного урока в 6-м классе по теме «Сложение и вычитание целых чисел». Зачетный урок в форме математической эстафеты был подготовлен и проведен студентами 2-го курса и учащимися 9-го класса.

Каждый педагог во время своей непосредственной работы с учащимися задумывается, как можно улучшить качество обучения, как заинтересовать обучающихся и приучить их к самостоятельности? Одним из решений может служить применение метода, обозначенного Р.Г. Хазанкиным в конце 1970-х годов как «вертикальная педагогика».

Данная тематика обсуждается в работах многих современных авторов. Методы вертикальной педагогики рассматриваются как один из способов формирования системного мышления у обучающихся посредством анализа и рефлексии [1]. Организация обучения по «вертикальной методике» дает возможность каждому студенту опробовать на себе разные социальные роли: руководителя, лидера или же подчиненного, что способствует формированию профессиональной компетенции [2]. При исследовании эффективности педагогической технологии Р.Г. Хазанкина и применения данной технологии при обучении математики было показано, что данная технология способствует развитию логического мышления у обучающихся и, благодаря этому, успешному усвоению знаний [3]. Однако исследователи отмечают, для подобного изменения образовательного процесса требуется много ресурсов и времени.

Суть метода вертикальной педагогики состоит в том, что в процессе научения и обучения ведущую роль имеет не только педагог, но и ученики, которые могут так же участвовать в проведении урока или лекции. Этот метод позволяет более углубленно изучить материал и повторить его.

Данный метод используется преимущественно (и изначально) на уроках математики и математических наук.

В вертикальной педагогике есть несколько принципов, которых следует придерживаться.

В первом принципе описывается создание так называемой «вертикали» образования, когда ученики более старших классов преподают материал и помогают в процессе обучения учеников на класс или классы ниже.

Второй принцип вертикальной педагогики изменяет традиционную структуру урока, в которой урок делится на некоторое количество частей, у каждой из которых свое предназначение. В вертикальной же педагогике каждой из этих частей отводится отдельное занятие, которое можно посвятить, например, проведению лекции. В вертикальной педагогике учитель и учащийся работают сообща в особой системе, которая состоит из нескольких видов уроков.

- Первый тип уроков – это уроки-лекции, во время которых материал изучается отдельно на специальном занятии, творческая работа и практика проводится отдельно.
- Второй тип уроков – это уроки решения ключевых задач по теме, во время которых закрепляется материал, выданный на уроке лекции, и выполняется некоторое количество заданий.
- Третий тип уроков – это уроки консультации, на которых учителю задаются вопросы, и он поясняет какие-либо непонятные моменты.
- Четвертый тип уроков – это зачетные уроки, на которых проводится контроль усвоенного материала, так же, в зависимости каких-либо затруднений у ученика, ему оказывается индивидуальная помощь, для того чтобы вопросов больше не возникало.

Третий принцип вертикальной педагогики – это организация творческой работы для более полного усвоения материала.

Наиболее близким к «вертикальной педагогике» в зарубежной литературе является термин “Learning through teaching (LTT)” – «учение через обучение» (нем. Lernen durch Lehren). Это методика обучения, разработанная и впервые применённая на уроках французского языка профессором Жан-Полем Мартаном. Данная педагогическая концепция с успехом применяется и при изучении математики. Например, студентам-учителям была предоставлена возможность изучить линейную симметрию путем преподавания данной темы ученикам восьмого класса. Несмотря на трудности, с которыми студенты столкнулись во время этого эксперимента, они выразили положительное отношение к среде LTT [4].

Главное в методе вертикальной педагогики – «преемственность», где старший ученик оказывает помощь при изучении нового материала, подбирает теоретический материал и практические задачи, младший же ученик ищет варианты решения данной задачи с консультированием и помощью старшего ученика. Это является ценной практикой, как для старшего, так и для младшего ученика.

Нами была предпринята попытка использования данного метода при проведении зачетного урока по теме «Сложение и вычитание целых чисел» в 6-м классе. Урок был проведен в форме математической эстафеты. В организации и проведении занятия участвовали ученики 9-го класса и студенты 2-го курса, обучающиеся по направлению «Педагогическое образование» (направленность – Математика и информатика).

За две недели до проведения занятия учащимся 9-го класса было дано задание:

1) Прочитать учебник «Математика 6 класс» [5, стр.52-61].
2) Составить карточку с примерами, аналогичными примерам в учебнике. В карточке придумать и решить 20 примеров (5 примеров-аналоги №253-256, 4 примера-№259-263, 1 пример-№272, 5 примеров-№286-290, 4 примера-№291, 1 пример-№294).

Примерно за неделю до зачетного урока в 6-м классе, девятиклассники решали придуманные ими задания, обменявшись карточками с соседом по парте, и проверяли решения друг у друга.

Студенты-будущие учителя математики в это время готовили план-конспект будущего урока, распределяли роли (методика обучения математики студентами 2 курса еще не изучалась).

План-конспект урока

Деятельность учителя	*Деятельность обучающихся*
Студенты 2-го курса. Приветствие. Краткое повторение темы «Сложение и вычитание целых чисел». *1-ый студент.* Для того, чтобы сложить два числа одинаковых знаков, надо сложить их модули и поставить перед суммой знак слагаемых. $(+a)+(+b)=+(a+b)$ $(-a)+(-b)=-(a+b)$ Для того, чтобы сложить два числа разных знаков, надо из большего модуля вычесть меньший и перед разностью поставить знак слагаемого с большим модулем. $(-a)+b=-(a-b), a>b$ $(-a)+b=+(b-a), b>a$ *2-ой студент.* Примеры: $(+3)+(+2)=+(3+2)=5$	*Ученики 6-го класса.* Включаются в деловой ритм урока. Повторяют пройденный материал. *Ученики 9-го класса.* Повторяют пройденный материал, готовятся к проведению эстафеты.

$(-3)+(-2)=-(3+2)=-5$ $(+3)+(-2)=+(3-2)=1$ $(-3)+(+2)=-(3-2)=-1$ *3-ий студент (одновременно со 2-м студентом).* Изображает на координатной прямой решение примеров. *4-ый и 5-ый студенты.* Разыгрывают сценки, иллюстрирующие рассмотренные примеры. «У Саши 3 рубля, у Маши 2 рубля. За сколько рублей они смогут купить конфеты?» «Саша попросила в долг у Маши 3 рубля, а потом еще 2 рубля. Сколько всего рублей должна вернуть Саша подруге?» «У Саши было 3 рубля. Она дала в долг Маше 2 рубля. Сколько денег осталось у Саши?» «Саша хочет купить конфету за 3 рубля. Она попросила в долг у Маши. Но у Маши только 2 рубля. Сколько денег не хватает Саше, чтобы купить конфету?» *5-ый студент.* Примеры $(+13)+(+28)=+(13+28)=41$ $(-13)+(-28)=-(13+28)=-41$ $(+13)+(-28)=-(28-13)=-15$ $(-13)+(+28)=+(28-13)=15$	
Студенты 2-го курса. Координационная часть. Объяснение правил математической эстафеты. Раздача маршрутных листов. Распределение по командам. К каждой команде 6-го класса прикрепляется студент 2-го курса для координирования. *Ученики 9-го класса.* Ставят названия эстафетных станций: 1 станция «Сложение двузначных чисел» 2 станция «Сложение трехзначных чисел» 3 станция «Вычитание двузначных чисел» 4 станция «Вычитание трехзначных чисел» 5 станция «Законы сложения»	*Ученики 6-го класса.* Распределяются по командам по два человека, получают маршрутные листы.
Студенты 2-го курса. Практическая часть. Согласно маршрутному листу, проходят	*Ученики 6-го класса.* Работают в команде над поставленной задачей.

соответствующие этапу станции, координируют учеников 6-го класса. *Ученики 9-го класса. Практическая часть.* Объясняют практическое задание ученикам 6-го класса, дают для решения 2 примера. Если примеры решаются верно, в маршрутный лист вклеивают звездочки.	Переходят по станциям согласно маршрутному листу.
Студенты 2-го курса. Контроль усвоения, обсуждение допущенных ошибок.	*Ученики 6-го класса.* Выражают вслух свои затруднения и обсуждают правильность решения примеров.
Рефлексия, проведения итогов урока.	*Ученики 6-го и 9-го классов.* Оценивают себя и свою работу на уроке.

Такая форма проведения занятия понравилась всем участникам. Ученики 6-го класса с интересом слушали своих старших товарищей, старались получить как можно больше звезд в свои маршрутные листы, с гордостью забрали их с собой, чтобы показать дома родителям. «Я был в команде с Егором и мы получили все звезды, кроме одной. Было очень здорово! Я понял, как складывать отрицательные числа!» - написал в отзыве один из ребят.

Для 9-го класса урок был также очень полезен, так как при работе с отрицательными числами, они сами часто допускают ошибки. Повторив материал и объяснив младшим школьникам правила работы с отрицательными числами, они стали увереннее в себе, научились самоконтролю. Один из комментариев девятиклассников: «Помогать ребятам младше было достаточно забавно и весело, и, несомненно, было полезно повторить нужную информацию ещё раз. Было бы здорово повторить такой вид уроков!»

Студенты 2-го курса попробовали себя в роли учителей, погрузились в атмосферу настоящего урока, почувствовали, как сложно держать дисциплину на уроке, как хорошо нужно владеть материалом, чтобы объяснять его другим.

Таким образом, с помощью методов вертикальной педагогики можно не только разнообразить подачу учебного материала, но и закрепить пройденный материал. У старших обучающихся развивается требовательность и чувство справедливости. У младших школьников, благодаря данному методу, усиливается мотивация, повышается качество обучения, воспитывается уважение к старшим. Технологии вертикальной педагогики способствуют развитию самостоятельности у учеников разного возраста.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердникова А.Н., Мазур М.И. Возможности развития системного мышления ученика на уроках математики. / А.Н.Бердникова, М.И.Мазур – Текст: непосредственный // UNIVERSUM: Психология и образование. – 2015. – №8 (18). – С. 1. // URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23863779 (дата обращения 09.03.2022)

2. Сенчук Е.Г. Модель формирования социальной компетенции обучающихся профессиональных образовательных организаций / Е.Г.Сенчук. – Текст: непосредственный // Современные исследования социальных проблем. – 2018. – Том 9, № 2-2. – С. 224-231. // URL: https://cyberleninka.ru/article/n/model-formirovaniya-sotsialnoy-kompetentsii-obuchayuschihsya-professionalnyh-obrazovatelnyh-organizatsiy/viewer (дата обращения 09.03.2022)

3. Гизамова Г.З. Нестандартные формы и методы обучения на уроках математики с применением метода Р.Г. Хазанкина /Г.З. Гизамова. – Текст: непосредственный // Молодой ученый. – 2019. – №18 (256). – С. 29-31. // URL: https://moluch.ru/archive/256/58567 (дата обращения 09.03.2022)

4. Leikin R., Berman A., Zaslavsky, O. Learning through teaching: The case of symmetry. Math Ed Res J 12, 18–36 (2000). https://doi.org/10.1007/BF03217072.

5. Математика. 6 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / [С.М. Никольский, М.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В. Шевкин]. – 14-е изд. – М.: Просвещение, 2015. – 256 с.

УДК 378.14

О ГОТОВНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЕКТНОЙ РАБОТЫ СО ШКОЛЬНИКАМИ В УСЛОВИЯХ ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБРАЗОВАНИЯ

Севостьянова Светлана Анатольевна
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
E-mail: sevostyanovasa@cspu.ru

Мартынова Елена Владимировна
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
E-mail: martynova@cspu.ru

Ключевые слова: *цифровая образовательная среда, проектная деятельность*

Аннотация. Цифровые технологии в современном мире активно внедряются в различные сферы жизни общества, в том числе в образование. Цифровая среда меняет технологии познавательной деятельности, восприятие картины мира, методики преподавания и способы коммуникации между учителями и учениками. В работе рассматриваются возможности использования цифровой образовательной среды для подготовки будущих учителей математики к реализации проектной работы со школьниками в период прохождения проектно-исследовательской практики в образовательном учреждении.

Современный уровень развития экономики, внедрение инноваций во все сферы деятельности человека, формирование непрерывного образования, потребность общества в реализации дистанционных форм обучения обуславливают актуальность цифровизации образования.

Общеобразовательные организации, участвующие в реализации национального проекта «Образование», проводят работу по развитию своей образовательной среды: обновляют материально-техническую базу; используют различные информационные ресурсы в образовательном процессе; внедряют современные цифровые технологии в сферу управления, в планирование занятий и составление расписаний, использование электронных журналов и дневников; развивают цифровую коммуникационную среду для взаимодействия при проведении занятий или работы в проектных группах. Таким образом, основным инструментом развития информационно-образовательной среды образовательной организации становится цифровая образовательная среда.

Среди компонентов цифровой образовательной среды образовательной организации можно выделить особо значимые:

- электронные коллекции продуктов познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности обучающихся;
- средства организации коммуникации участников учебного процесса;

- платформы для организации электронного обучения и использования дистанционных образовательных технологий;
- набор сервисов, позволяющих проектировать и организовать индивидуальную и групповую деятельность учащихся (цифровые лаборатории, интерактивные образовательные ресурсы);
- инструменты для электронного учета и мониторинга уровня успеваемости обучающихся.

В соответствии с требованиями ФГОС общего образования наиболее эффективными в образовательной среде оказываются те технологии, которые направлены на коммуникативное, социальное и личностное развитие школьника. Поэтому работа в цифровой образовательной среде откроет новые возможности для реализации проектной деятельности в школе.

Выстраивая учебный процесс, с использованием потенциала информационной образовательной среды, учитель может повысить интерес учащихся к изучаемым предметам за счет наглядности, интерактивной формы представления учебного материала, возможности моделировать и исследовать сложные процессы, проводить эксперименты. Это способствует повышению мотивации самостоятельного обучения, развитию учебной инициативы и способностей учащихся, стимулирует их к выполнению учебных и исследовательских проектов. [1]

Подготовка будущих учителей к организации проектной деятельности школьников – длительный процесс, затрагивающий разные сферы деятельности. Одним из эффективных способов формирования готовности к руководству проектной деятельностью обучающихся является погружение студентов в профессиональную среду.

В работе [4] нами была разработана модель проектно-ориентированной системы практик, которая реализуется при подготовке студента-будущего учителя математики, формирующей готовность студента к проектной деятельности.

В статьях [2, 3] был подробно описан процесс формирования проектных умений студентов в ходе выполнения учебных проектов в профильных дисциплинах, а также методических проектов в период производственной педагогической практики в школе (4-5 курс).

ФГОС 3++ содержит большое количество учебных практик. Опыт по реализации учебной практики (проектно-исследовательской) мы представим в этой статье. Особенностью этой практики является ее рассредоточенность (занятия проходят 4 часа в неделю) и прохождение практики растягивается на семестр.

Разрабатывая рабочую программу практики, мы особое внимание уделяем месту ее проведения: это могут быть как учебные аудитории вуза, так и в качестве площадки для прохождения практики могут быть выбраны базовые школы. На нашем факультете мы выбрали второй вариант, запланировав раннее погружение студентов в профессиональную среду, в которой формирование проектных умений студентов будет проходить под руководством руководителя практики от университета, а также к этому процессу подключится учитель-наставник.

Студенты разбиваются на группы и прикрепляются к базовым школам города. На установочной конференции в школе они распределяются по классам. Посещая уроки в этих классах, они наблюдают за работой учителя математики, фиксируют деятельность учителя и учеников на уроке, накапливают приемы для организации учебного процесса. В закрепленных классах студенты проводят дополнительные занятия с учениками, проверяют тетради и готовят для этого класса внеклассное мероприятие по предмету.

В ходе прохождения практики студенты должны познакомиться с организацией проектной деятельности учителя по работе с индивидуальным проектом ученика. К началу практики обучающиеся 7 классов уже выбрали темы проектов, наполнили их содержанием. Представим темы проектов, над которыми работали обучающиеся: «Люди, изменившие мир» (социальный проект), «Математические основы настольных игр» (исследовательский), «Теория вероятностей в жизни» (информационно-познавательный) и др. Студенты выступают в роли консультантов на стадии завершения работы над проектом и помогают в подготовке проекта к защите. Деятельность студента заключается в установлении связи с учеником, корректировании действий ученика по работе над проектом, осуществлении контроля над соблюдением сроков выполнения этапов работы. При выполнении этой работы студенты сталкиваются с основными проблемами при руководстве проектной деятельностью учеников. Например, ученики затрудняются самостоятельно сформулировать цели, задачи проекта, затрудняются в выборе продукта. Кроме этого, студент при работе с темами видит какая тема более удачная для выполнения проекта, какая тема достаточно узкая.

Отдельным этапом в работе над проектом является подготовка разработанных материалов к защите. Студенты заранее знакомятся с критериями оценивания индивидуального проекта, оказывают помощь ученикам в подготовке презентации и составлении доклада на защиту. Заключительным этапом работы над индивидуальным проектом ученика является участие студентов в оценке проекта в качестве эксперта учебной деятельности. Экспертная деятельность студента является инновационной в профессиональной подготовке будущего учителя математики.

Выполняя задание, студент видит не только трудности учеников, но и сталкивается с собственными проблемами при руководстве проектной деятельностью. Тем самым, создается мотивация для получения профессиональных знаний в вузе, заинтересованность в поиске путей преодоления затруднений, с которыми столкнулся на практике.

Второй задачей практики является формирование проектных умений студентов при выполнении группового краткосрочного проекта «Неделя математики в школе». Студенты должны пройти все этапы работы над проектом: организационный, выполнение проекта, защита проекта, оценивание.

Для оперативного обмена материалами, открытого обсуждения и возможности текущего контроля руководителем практики деятельности студентов на внутреннем портале университета был создан сайт с доступом по персональному логину для каждого студента. Все разработанные студентами материалы выкладывались для обсуждения в соответствующие папки на сайте. Преподаватель выполнял функции консультанта и модератора, посредством наблюдения и фиксации осуществлял текущий контроль деятельности каждого студента: наличие материалов, соблюдение сроков их выполнения и размещения, активность студентов в обсуждении, качество и функциональность разработанных материалов.

Для контроля за формированием проектных умений студентов в ходе учебной практики был создан электронный журнал, направленный на организацию мониторинга сформированности проектных умений студентов на каждом этапе и в ходе реализации проекта в целом. В журнале проектные умения детализированы по блокам: целевой, содержательный, операционный и диагностико-коррекционный (в соответствии с этапами выполнения проекта). Наблюдая за работой студентов, преподаватель может корректировать процесс формирования проектных умений.

При формировании проектных умений студентов большая роль отводится проведению этапа рефлексии собственной деятельности. Очень важно, чтобы студенты заранее увидели трудности, с которыми сталкивается учитель при организации проектной деятельности учеников при выполнении ими индивидуальных проектов. Кроме того, студенты должны проанализировать собственные затруднения, проблемы, которые возникли при выполнении группового проекта (оценить умения работы в команде).

Опыт по формированию проектных умений в цифровом образовательном пространстве продемонстрировал студентам возможности цифровой среды для планирования совместной деятельности при работе над проектами, для проведения процедур оценки качества формируемых умений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам // Современные наукоемкие технологии. 2018. № 10. С. 216-220.

2. Севостьянова С.А., Мартынова Е.В. Практико-ориентированные методические проекты как средство формирования проектных умений будущих учителей математики // Современные технологии в науке и образовании - СТНО-2021. Сборник трудов IV Международного научно-технического форума: в 10 т. Рязань, 2021. С. 85-88.

3. Мониторинг формирования проектных умений будущих педагогов в период педагогической практики / Е.А. Суховиенко, С.А. Севостьянова, Р.М. Нигматулин, Е.В. Мартынова // Современные проблемы науки и образования. 2020. № 6. С. 75.

4. Sukhovienko E.A., Sevostyanova S.A., Martynova E.V. Model of projects-based internship system for future mathematics teachers // Journal of Physics: Conference Series. Krasnoyarsk Science and Technology City Hall. Krasnoyarsk, Russian Federation, 2020. С. 12050.

УДК 004.94

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

Серова Дарья Александровна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: dashaserova180120@mail.ru

Ключевые слова: *модель, математическое моделирование, неопределённости*

Аннотация. В работе рассматривается математическое моделирование в условиях неопределенности.

Развитие современных технологий во всех сферах деятельности человека и разработка соответствующих моделей приводят к необходимости учета максимально возможного количества информации об исследуемом объекте. При этом вопросы моделирования сложных процессов и явлений чаще всего формулируются и обсуждаются на профессиональном языке (искусственном или подмножестве естественного), отражающем специфику области исследования. Следствием этого является использование в процессе моделирования качественных элементов: описаний, понятий и отношений с неопределенными или нечеткими границами, высказываний с многозначной шкалой истинности и т. д.

В тех случаях, когда информация существенно неопределенная, задание строгих границ «волевым» порядком или искусственное введение однозначности означает не что иное, как огрубление исходных данных, и может приводить к получению пусть четкого, но неверного результата. Исследование и учет однозначности (определенности) или неоднозначности (неопределенности) всех параметров и отношений, описывающих исследуемое явление, представляет собой необходимый и важнейший элемент математического моделирования.

Известные закономерности, описывающие процессы и явления объективного мира, можно условно разделить на две группы: однозначно определённые (детерминированные) и находящиеся в условиях неопределённости**.**

К первой группе относят те закономерности, которые по заданным с определенной точностью характеристикам воздействий позволяют установить вполне определенный отклик исследуемого объекта. Например, материальное тело падает с некоторой высоты. При заданной точности определения начальных условий и действующих на тело внешних сил можно однозначно, с определенной точностью установить его скорость при соприкосновении с Землей, время полета и т. д. С математической точки зрения эти закономерности описываются на основе аксиом традиционной математикой с использованием вполне определенных величин.

Вторая группа закономерностей описывает случайные события. Например, при бросании игрального кубика нельзя заранее однозначно сказать, какая цифра выпадет. Если попытаться учесть природу этих закономерностей как явлений, находящихся в условиях неопределенности, то надо иметь в виду, что описание этой неопределенности может быть разным в зависимости от количества и качества имеющейся информации.

ПРИЧИНЫ ПОЯВЛЕНИЯ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ИХ ВИДЫ

При решении задач математического моделирования уже на стадии концептуальной постановки необходимо задуматься над тем, насколько однозначно определены параметры, в терминах которых осуществляется математическое описание объекта моделирования. На этом этапе необходимо определить для каждого параметра, можно ли считать его однозначно определенным или ему присуща некоторая неопределенность. Причем неопределенными могут быть не только параметры, но и связи между ними. К наиболее значимым причинам появления неопределенности можно отнести следующие:

- показатели системы практически всегда зависят от большого количества различных факторов, причем часть из них может быть даже неизвестна исследователю;
- при построении модели обычно ограничиваются отбором наиболее существенных (по мнению субъекта или в силу объективных обстоятельств) переменных, что, конечно, приводит к огрублению модели;
- математические погрешности, возникающие при линеаризации модели или использовании разложения в ряд при ограничении на число членов ряда; ошибки измерений и погрешности при проведении эксперимента и т. п.

В общем случае все причины возникновения неопределенности можно разбить на две основные группы: субъективные и объективные. Субъективные причины обусловлены некоторыми частными, нерегулярно повторяющимися явлениями, поэтому их достаточно сложно учесть при решении прикладных задач. Объективные причины чаще всего связаны с физическими особенностями исследуемого явления.

В зависимости от полноты описания неопределенность можно разбить на три основные группы: неизвестность, недостоверность и неоднозначность. Рассмотрим группы описания неопределенности более подробно (рис.1).

Рис. 1

- Неизвестность – это начальная стадия описания неопределенности, при которой информация полностью отсутствует.
- Недостоверность – это вторая стадия описания неопределенности, которая для различных стадий сбора информации может классифицироваться как неполнота, недостаточность, неопределённость и неадекватность.
  - Неполнота характеризуется тем, что собрана не вся возможная информация;
  - Недостаточность – собрана не вся необходимая информация.
  - Неопределённость – для некоторых элементов определены не их точные описания, а лишь множества, которым эти описания принадлежат;
  - Неадекватность – ряд элементов исследуемого объекта описан по аналогии с уже имеющимися описаниями подобных элементов, т. е. имеет место так называемое «замещающее» описание, которое не всегда удовлетворяет целям исследования.

Дальнейший анализ неопределенности, учет новых факторов, определяющих исследуемое явление, может привести либо к устранению неопределенности, либо к неоднозначности.

Неоднозначность — это конечная (по полноте возможного описания) степень неопределенности, когда вся возможная информация собрана, но полностью необходимое описание не получилось. Причины возникновения неоднозначности могут быть лингвистические и физические (рис.2).

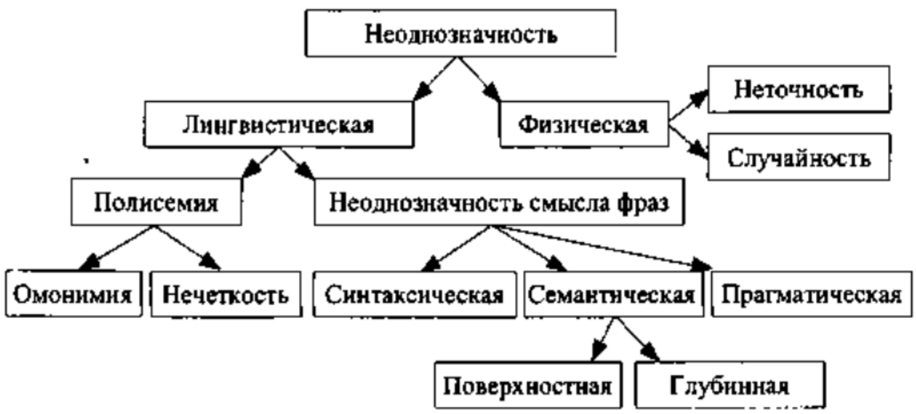


Рис. 2

Физическая неопределенность связана либо с наличием нескольких возможностей, каждая из которых случайным образом может стать реальностью, либо с неточностью вычислений или измерений. Таким образом, физическая неопределенность связана или с физической сущностью исследуемого явления, или с его измеряемыми проявлениями.

Лингвистическая неопределенность связана с использованием некоторого естественного языка. Она порождается, с одной стороны, множественностью значений слов (понятий и отношений) – полисемией, а с другой – неоднозначностью смысла фраз.

Можно выделить два вида полисемии: омонимию и нечеткость.

Омонимия характеризуется тем, что одним и тем же словом можно характеризовать различные физические объекты. Например: коса – это вид побережья, инструмент или прическа. Если же объекты описания сходны, по сути, но описывают некоторое множество понятий, то ситуацию относят к нечеткости

Математически неопределенность может быть описана стохастически, статистически, с позиций теории нечетких множеств, а также интервально (рис.3). Отмеченные формы описания перечислены по возрастанию степени неопределенности.

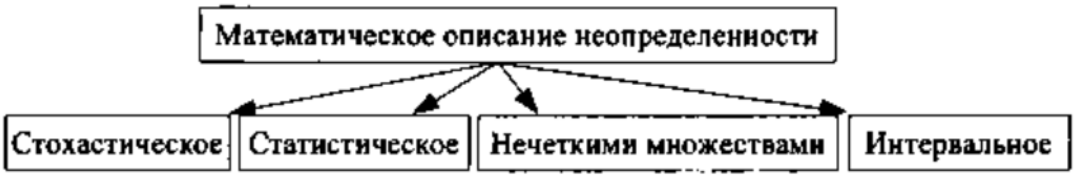


Рис. 3

Статистическое описание является, по существу, частным случаем стохастического описания. Эту форму описания применяют, когда заданы только выборочные оценки каких-либо характеристик случайной величины или наборы значений некоторых случайных параметров. Статистическим описанием занимается математическая статистика.

При описании с позиций нечетких множеств неопределенный параметр задается некоторым множеством возможных его значений, характеризующихся той или иной степенью принадлежности объекту, описываемому этим нечетким множеством. Функция принадлежности может принимать значения от 1 до 0 (полная непринадлежность). Интерпретацией функции принадлежности является субъективная мера того, насколько полно элемент (параметр) соответствует понятию, смысл которого описывается нечетким множеством. Этим описанием занимается теория нечетких множеств

Интервальное описание можно использовать, когда неопределенные параметры заданы только диапазонами возможных значений (верхней и нижней границами), причем параметр может принимать любое значение внутри интервала и ему нельзя приписать никакой вероятностной меры. Интервальное описание является предметом исследования интервальной математики

МОДЕЛИРОВАНИЕ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ, ОПИСЫВАЕМОЙ С ПОЗИЦИЙ ТЕОРИИ НЕЧЕТКИХ МНОЖЕСТВ

В случае стохастической неопределённости параметры системы, имеющие случайный характер, задаются вероятностными распределениями. При описании с позиций нечёткой логики и нечётких множеств неопределённый параметр определяется некоторым множеством возможных его значений, характеризующихся той или иной степенью принадлежности объекту, описываемому нечётким множеством.

Теория нечётких множеств появилась в 1965 году с выходом статьи Лотфи Заде «Fuzzy Sets». Понятие нечёткого множества — попытка математической формализации нечёткой информации с целью её использования при построении математических моделей сложных систем. В основе этого понятия лежит представление о том, что элементы некоторого множества обладают каким-то общим свойством в разной степени, и, следовательно, принадлежат этому множеству в различной степени. Ключевая идея, изложенная в статье Заде, расширяет классическое понятие множества, допуская, что функция принадлежности $\mu_A(x)$ некоторого элемента x множеству может принимать любые значения из интервала [0; 1], а не только 0 или 1. Само множество в этом случае представляется в виде совокупности пар

$$A = \{(x, \mu A\tilde{}\ (x))|x \in X\ \},$$

где уже упомянутая функция принадлежности $\mu_A(x)$ характеризует степень, с которой элемент x можно отнести к нечётком множеству A. При помощи нечётких множеств можно выразить неточные понятия вроде «низкий дом», «пожилой человек», «много денег», однако это требует задания чёткого множества X, которое обычно называется областью рассуждений, либо универсальным множеством.

Для конечных нечётких множеств применяется следующий символьный способ записи нечётких множеств. Если X – чёткое множество с конечным числом элементов, т.е. $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$, то нечёткое множество $A \subseteq X$ записывается в виде суммы дробей, в числителе которых стоит степень принадлежности элемента множеству, а в знаменателе – его значение, т. е.

$$A = \sum_{i=1}^{N} \frac{\mu_A(x)}{x_i} \qquad (1)$$

В формуле (1) дробь не несёт в себе семантики деления, а всего лишь является другой формой записи пары $(x_i,\ \mu_A(x_i))$. Аналогично, для бесконечного множества X нечёткое подмножество $A \subseteq X$ записывается в форме

$$A = \int_X \frac{\mu_A(x)}{x_i} dx.$$

Ещё одним вариантом представления нечётких множеств является т. н. горизонтальная форма, т. е. их выражение в виде совокупности чётких подмножеств множества X, каждое из которых называется α–сечением.

α–сечением (срезом, разрезом) нечёткого множества A называется чёткое множество A_α, определяемое следующим образом

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) > \alpha\},$$

где $\chi\,(A_\alpha)$ — характеристическая функция, определяемая выражением (2):

$$\chi\,(A_\alpha) = \begin{cases} 1, \ \mu_A(x) \geq \alpha, \\ 0, \mu_A(x) < \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Для α-сечений нечёткого множества справедлива теорема о декомпозиции, которая позволяет не только выполнять разложение нечёткого множеств на совокупность чётких, но и синтезировать исходное нечёткое множество и совокупности чётких α-интервалов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Н. Ашихмин, М. Б. Гитман, И. Э. Келлер. Введение в математическое моделирование. Издательство "Логос", 2016, – 440 с.

2. Блюмин С. Л., Шуйкова И. А., Сараев П. В., Черпаков И. В. Нечёткая логика: алгебраические основы и приложения. Липецк: Липецкий эколого-гуманитарный институт, 2002. – 111 с.

УДК 004.032.26, 004. 056

РАСПОЗНАВАНИЕ СПАМА С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ

Смирнова Екатерина Артуровна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: katerina.smirnova98@yandex.ru

Цирулева Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *спам, защита от спама, нейронная сеть, многослойный персептрон, сверточная нейронная сеть, обучающая выборка, ошибки первого и второго рода.*

Аннотация. В работе для распознавания спама использованы два вида искусственных нейронных сетей: многослойный персептрон и сверточная нейронная сеть. Осуществлен анализ вычислительных экспериментов.

Интернет является неотъемлемой частью жизни современного общества. Он используется не только в качестве средства связи, но затрагивает практически все сферы деятельности человека, что снимает ограничения для доступа к информации, услугам, дистанционному трудоустройству и образованию.

Спам – это массовые рассылки, которые в лучшем случае отправляются с целью промоутинга и рекламирования какого-либо продукта. В худшем случае спам-письма рассылаются мошенниками с целью получения персональной информации получателя обманным путем. Все виды спама приводят к нарушению доступности и конфиденциальности. Наиболее актуальным становится противодействие таким видам спама как фишинг. Для повышения эффективности противостоянию спам-рассылкам всё чаще в технологии защиты внедряются нейронные сети. Это помогает автоматизировать процесс защиты информации, что очень важно для такого ресурсоемкого процесса как обеспечение информационной безопасности.

По данным Лаборатории Касперского, в начале 2021 года процент спама продолжал снижаться и составил в среднем 45,67% от всех электронных писем, что на 2,11% меньше, чем в конце 2020 года (47,78%). Наибольший процент спама был зафиксирован в январе (46,12%). Это на 0,71% меньше, чем самый низкий показатель 2020 года (46,83%).

В российском сегменте интернета средний процент спама тоже оказался ниже, чем в конце 2020 года: 48,56% вместо 50,25%. Но в отличие от общемировой картины, в рунете январский процент спама был на 1,30% выше, чем декабрьский (49,76% против 48,46%).

В статье [1] для распознавания спама были использованы классические математические методы. Целью данной работы является сравнительный анализ эффективности использования двух различных типов нейронных сетей для распознавания спама: многослойного персептрона и сверточной нейронной сети.

Персептрон или перцептрон – это простейший вид нейронных сетей, состоящих из нескольких полносвязных слоёв нейронов. Данная сеть используется в качестве классификатора объектов и обучается с учителем.

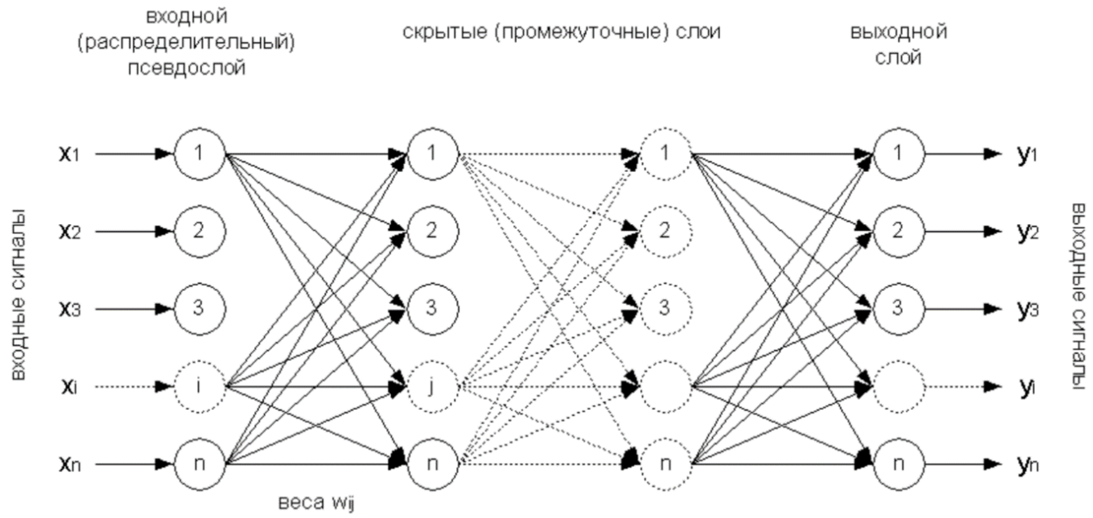


Рис. 2. Структура многослойного персептрона

Модель вычислений многослойного персептрона можно описать математически:

$$NET_{jl} = \sum_i w_{ijl}x_{ijl}\,, OUT_{jl} = F\big(NET_{jl} - \theta_{jl}\big), x_{ij(l+1)} = OUT_{jl},$$

где i – номер входа, j – номер нейрона в слое, l – номер слоя. Получим, что x_{ijl} – i-й сигнал j-го нейрона в слое l, w_{ijl} – весовой коэффициент i-го входа нейрона номер j слоя l, F – нелинейная функция, называемая функцией активации, NET_{jl} – сигнал NET нейрона номер j слоя l, OUT_{jl} – сигнал OUT нейрона номер j слоя l. Каждый нейрон в текущем слое вычисляет нелинейную функцию от линейной комбинации сигналов, поданных на вход с предыдущего слоя. Многослойная нейронная сеть может формировать на выходе произвольную многомерную функцию при соответствующем выборе количества слоев, диапазона изменения сигналов и параметров нейронов [2]. Математически модель многослойного персептрона можно описать следующим образом:

$$f(x) = F\big(\sum_{i_N} w_{i_N j_N N} \cdots \sum_{i_2} w_{i_2 j_2 2}\, F\big(\sum_{i_1} w_{i_1 j_1 1} x_{i_1 j_1 1} - \theta_{j_1 1}\big) - \theta_{j_2 2} \cdots - \theta_{j_N N}\big).$$

За счет поочерёдного расчета линейных комбинаций и нелинейных преобразований достигается аппроксимация произвольной многомерной функции при соответствующем выборе параметров сети.

Сверточные ИНС являются более продвинутой моделью нейронных сетей. Внутри себя они содержат описанный ранее персептрон, а также слои конволюции и субдискретизации. Их называют одним из самых удачных инструментов для работы с компьютерным зрением, однако особенность их устройства позволяет заниматься и классификацией текста [3], что и было проделано в работе. На рис. 2 видно, что двумерная СНС обрабатывает изображение, «двигаясь» в двух плоскостях – то есть по горизонтали и по вертикали.

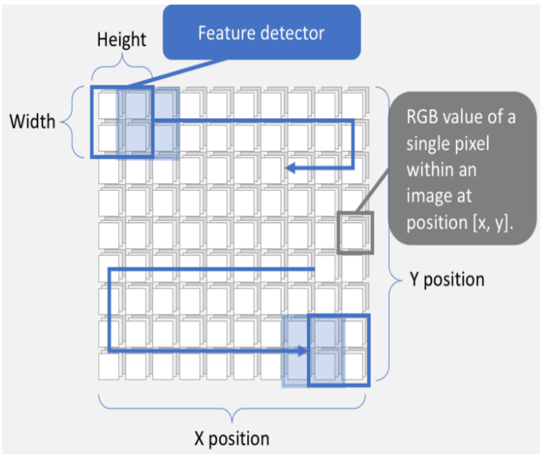


Рис. 2. Схема обработки изображения с помощью сверточной нейронной сети

А при обработке текста с помощью одномерной СНС обработка происходит в одной плоскости (рис. 3).

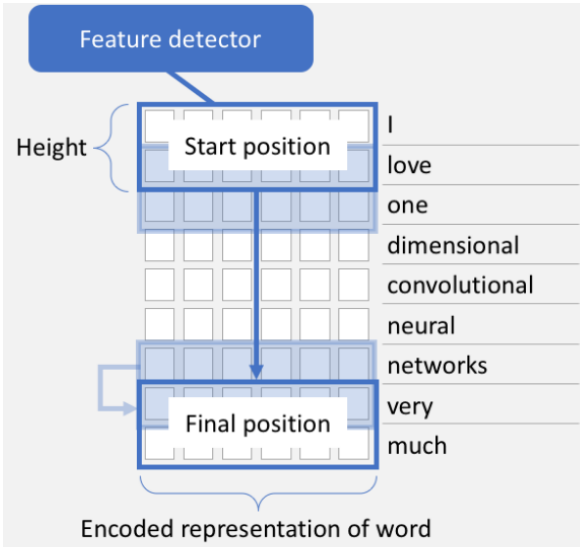


Рис. 33. Схема обработки текста с помощью сверточной нейронной сети

Свертка – это операция, выполняемая над двумя функциями или сигналами. Результатом свертки является третий сигнал. В контексте сверточных сетей первый сигнал – входные данные, а второй – параметры сети, которые выполняют роль ядра свертки – матрицы определенной ширины и высоты. Формула одномерной свертки для дискретного случая:

$$ConvOut_i = \sum_{k=1}^{K} InputSignal_{i-\frac{K}{2}+k} * Kernel_k, \forall i = 0,1,\dots,L,$$

где L – длина результирующего вектора, K – длина ядра.

В архитектуре СНС заложены три типа слоёв: сверточный слой, субдискретизирующий слой (таких пар «сверточный-субдискретизирующий» может быть несколько) и выходной слой (чаще всего полносвязный).

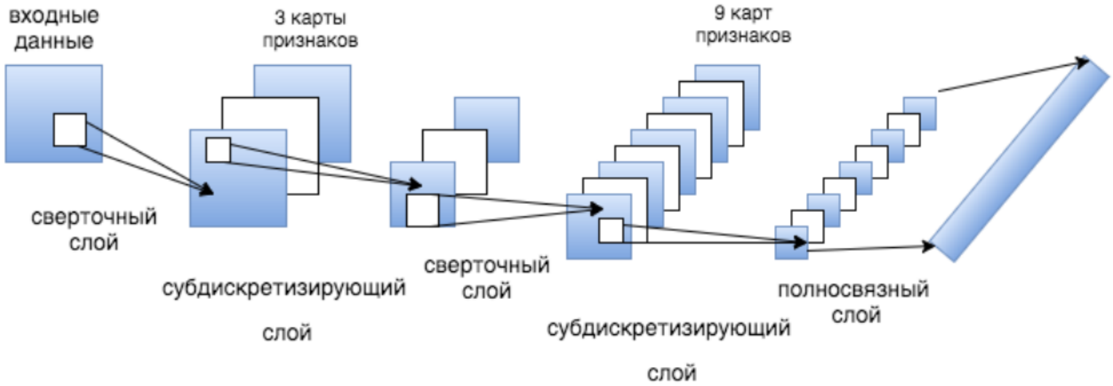


Рис. 4. Схематичное изображение архитектуры сверточной нейронной сети

Именно чередование слоёв субдискретизации и свертки является особенностью и главным принципом работы сверточных нейронных сетей. С их помощью можно обрабатывать иерархии признаков – сначала обрабатывать одну карту признаков, затем на её основе строить другую карту и так далее. В итоге мы получим некоторую «результирующую» карту, которая будет преобразована в вектор. Наконец, вектор будет передан на вход обычной полносвязной сети, которая занимается классификацией. Очевидно, что в сверточных сетях полносвязный слой будет классифицировать не сами исходные данные, а важные признаки, которыми обладают исходные данные. Таким образом, в сверточной нейронной сети сверточный и субдискретизирующий слои занимаются выделением важных признаков во входных данных, а полносвязный слой классифицирует их.

Программная реализация рассмотренных методов разрабатывалась на языке программирования Python с использованием классов и методов пакетов NumPy, Pandas, TensorFlow, Keras. Часть из них реализует обработку входных данных, другие позволяют эффективно строить и использовать модели искусственных нейронных сетей. Все они являются де-факто стандартами в области работы с данными и ИНС, имеют обширную документацию и разрабатываются как open-source проекты, в которые вносят вклад как различные программисты со всего мира, так и работники компаний-мастодонтов, таких как Google.

В качестве выборки для обучения был взят набор из 5572 сообщений, каждое из которых классифицируется как спам (spam) или не спам (ham) [4]. Исходная выборка была разбита на два файла со схожей структурой, при этом файл-выборка для обучения содержит 4498 строк, а файл-выборка для тестирования содержит 1074 строк.

Фрагмент данных из файла-выборки для обучения:

```
label                                  email
  ham  Go until jurong point, crazy.. Available only ...
  ham                    Ok lar... Joking wif u oni...
 spam  Free entry in 2 a wkly comp to win FA Cup fina...
  ham  U dun say so early hor... U c already then say...
  ham  Nah I don't think he goes to usf, he lives aro...
  ...                                    ...
  ham  Man this bus is so so so slow. I think you're ...
  ham  Hope this text meets you smiling. If not then ...
  ham  In case you wake up wondering where I am, I fo...
  ham                                     Ok
 spam  Latest Nokia Mobile or iPOD MP3 Player +Ã¥Â£40...
```

Франмент данных из файла-выборки для тестирования:

```
label                                  email
 spam  SMS SERVICES. for your inclusive text credits,...
  ham                          Nvm take ur time.
  ham                        So wat's da decision?
  ham                      Wot is u up 2 then bitch?
  ham                       Stupid.its not possible
  ...                                    ...
 spam  This is the 2nd time we have tried 2 contact u...
  ham             Will Ì_ b going to esplanade fr home?
  ham  Pity, * was in mood for that. So...any other s...
  ham  The guy did some bitching but I acted like i'd...
  ham                     Rofl. Its true to its name
```

Хотя многослойный персептрон прост в архитектуре и может справляться с распознаванием спама, вероятность ошибки при классификации сообщений на «спам» / «не спам» достаточно высока в силу его «неспециализированности». Сверточная нейронная сеть обладает сложной архитектурой и является специализированной для задач, связанных с классификацией. Следовательно, результаты будут значительно лучше (см. таблицу 1).

Таблица 1. Процент ошибок первого и второго рода в результатах обучения моделей

Модель	Процент ошибок первого рода	Процент ошибок второго рода
Многослойный персептрон	9,3%	7,8%
Сверточная нейронная сеть	0,04%	0,1%

Как уже было сказано, тестовая выборка состоит из 1054 сообщений. Результат процесса обучения показал, что персептрон неидеально справился со своей задачей: доля верных ответов персептрона на тестовых данных 80.2607 %. Точно также корректность результатов обучения доказывает тестирование одномерной сверточной сети: доля верных ответов сверточной сети на тестовых данных 99.162 %. В таблице 2 представлен процент ошибок первого и второго рода в результатах тестирования обеих моделей.

Таблица 2 Процент ошибок первого и второго рода в результатах тестирования моделей

Модель	Процент ошибок первого рода	Процент ошибок второго рода
Многослойный персептрон	13%	8%
Сверточная нейронная сеть	0,2%	1%

Ручные тестовые примеры также выдают похожий результат. В качестве предложений для примера возьмем 4 варианта:

- "CONGRATULATIONS You won £1500! call 08714714011 to take it ABS OLUTELY FREE or click on the link www.spam.com do not waste your tim e u lucky",
- "XXX To use free cash, click the link in the next txt message or click here>> http://wap. XXX.com?n=QJKGIGHJJGCBL",
- "Hey, Alex, how are you? We haven't been talking for a long time, please, se nd me a message",
- "Hi, there is a homework for tomorrow"

Персептрон правильно классифицировал 3 из 4 предложений – он посчитал, что первое предложение не является спамом, т. е. точность предсказания равна 75%. В то же время CNN правильно классифицировала все предложения.

Результаты проведенных экспериментов демонстрируют большую эффективность сверточной нейронной сети в решении задачи классификации объектов (на примере классификации сообщений на «спам» и «не спам») по сравнению с многослойным персептроном.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамонова М.А., Цирулёва В.М. Исследование математических методов защиты от спама /Математические методы управления. Тверь: Изд-во ТвГУ, 2019. С. 76-91.

2. Многослойный персептрон [Электронный ресурс]. Режим доступа: http://apsheronsk.bozo.ru/Neural/Lec2.htm (Дата обращения: 15.03.2022);

3. Воробьев Е. В., Пучков Е. В. Классификация текстов с помощью сверточных нейронных сетей / Молодой исследователь Дона. 2017. №6 (9). https://cyberleninka.ru/article/n/klassifikatsiya-tekstov-s-pomoschyu-svertochnyh-neyronnyh-setey (Дата обращения: 15.03.2022).

4. Tiago A. Almeida. SMS Spam Collection Data Set // Department of Computer Science Federal University of Sao Carlos (UFSCar), Sorocaba, Sao Paulo – Brazil. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://archive.ics.uci.edu/ml/datasets/SMS+Spam+Collection (дата обращения: 15.03.2022).

УДК 373.51

КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ ЗАДАНИЯ 14 (НЕРАВЕНСТВО) ИЗ ЕГЭ-2022 ПО МАТЕМАТИКЕ

Спасская Татьяна Александровна
Академическая гимназия ТвГУ, г. Тверь
E-mail: spasskaya_tanya@mail.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *неравенство, область допустимых значений неравенства, метод интервалов, обобщённый метод интервалов.*

Аннотация. В статье рассматриваются основные ошибки в работах выпускников при решении неравенств из второй части ЕГЭ по математике, даются рекомендации по подготовке к решению и оформлению таких задач.

Вторая часть контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена 2022 по математике включает в себя семь заданий повышенного уровня сложности: уравнение, неравенство, две геометрические задачи, экономическую задачу или задание на оптимизацию, задачу с параметром и задание с целыми числами.

В среднем около 30% учеников получают полные 2 балла за решение уравнения № 12. Хуже решают неравенство № 14, примерно 12% школьников получают полный балл.

Причины таких низких результатов различны. Учащиеся не справляются с преобразованиями из-за отсутствия элементарных навыков алгебраических преобразований, в том числе раскрытия скобок, незнания свойств степеней и логарифмов. Школьники не умеют решать рациональные неравенства методом интервалов, допускают ошибки на этапе выполнения обратной замены переменного в неравенствах, имеют весьма слабое представление об обобщённом методе интервалов [1].

Покажем на примерах заданий из ЕГЭ прошлых лет, какие ошибки в решении неравенств приведут к потере лишь одного балла (из двух), а какие – к потере двух баллов.

Пример 1 (ЕГЭ – 2021[6]). Решите неравенство

$$\frac{5^x}{5^x-4}+\frac{5^x+5}{5^x-5}+\frac{22}{25^x-9\cdot 5^x+20}\leq 0.$$

Решение. Сделаем замену переменного $5^x=t$, $t>0$, получим

$$\frac{t}{t-4}+\frac{t+5}{t-5}+\frac{22}{t^2-9\cdot t+20}\leq 0;\ \frac{2(t-1)^2}{(t-4)(t-5)}\leq 0.$$

Последнее неравенство решаем методом интервалов.

Учитывая, что $t=1$ – корень чётной кратности, а $t=4$ и $t=5$ – корни нечётной кратности, находим: $t=1$ или $4<t<5$.

[6] https://alexlarin.net/ege/2021/15_2021.html

Выполняем обратную замену переменного. Имеем

$$5^x = 1 \text{ или } 4 < 5^x < 5,$$

откуда $x = 0$ или $\log_5 4 < x < 1$.

Ответ: 0; $(\log_5 4; 1)$.

Согласно критериям оценивания данной задачи, потеря точки 0 (обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением точки 0) оценивается в 1 балл.

Таким образом, если школьник приходит к ответу $x \in (\log_5 4; 1)$, то у него есть шанс получить за своё решение 1 балл.

Корень $x = 0$ теряется, если при исследовании рационального неравенства $\frac{2(t-1)^2}{(t-4)(t-5)} \leq 0$ не учитывается, что неравенство является нестрогим и при $t = 1$ (корень чётной кратности) неравенство принимает вид $0 \leq 0$, что верно.

Ошибка может быть технической или по невнимательности. Часто школьники, отмечая на прямой решения неравенства, не видят отдельно отстоящей точки. При этом сама точка может быть выделена (закрашена) на рисунке, но не записана в ответ.

С другой стороны, включение в ответ точек $\log_5 4$ или 1 (концов интервала $(\log_5 4; 1)$) повлечёт потерю всех баллов, так как и $\log_5 4$ и 1 не принадлежат области допустимых значений неравенства.

Рассмотрим ещё одно неравенство.

Пример 2 (ЕГЭ – 2019[7]). Решите неравенство

$$\log_3(9-9x) > \log_3(x^2-3x+2) + \log_3(x+4).$$

Решение. Рассмотрим ограничения, связанные с наличием логарифмов (ОДЗ неравенства):

$$\begin{cases} 9-9x > 0, \\ x^2-3x+2 > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1-x > 0, \\ (2-x)(1-x) > 0, \\ x+4 > 0; \end{cases} \Rightarrow -4 < x < 1.$$

При таком условии неравенство можно записать в виде

$$2 + \log_3(1-x) > \log_3(2-x) + \log_3(1-x) + \log_3(x+4);$$

$$2 > \log_3(2-x) + \log_3(x+4);$$

$$\log_3 9 > \log_3(8-2x-x^2).$$

Учитывая монотонность (возрастание) функции $y = \log_3 x$, получим

$$9 > 8-2x-x^2; \quad (x+1)^2 > 0; \quad x \neq -1.$$

Учитывая ограничение $-4 < x < 1$, записываем

Ответ: $(-4; -1)$; $(-1; 1)$.

---

7 https://alexlarin.net/ege/2021/15_2021.html

Согласно критериям, ответ, отличающийся от верного включением точки –1, оценивается в 1 балл.

В данном случае ошибка может быть связана с неверным утверждением «Квадрат числа всегда больше нуля», которое нередко приходится слышать от школьников.

Включение в ответ точек -4 или 1 (концов интервалов $(-4; -1)$ и $(-1; 1)$) повлечёт потерю всех баллов, так как эти точки не принадлежат области допустимых значений неравенства.

Итак, в приведённых выше примерах показано, что потеря корня или включение в ответ постороннего корня, не связанного с областью допустимых значений неравенства, приводят к потере одного балла.

Очень часто ошибки при решении логарифмических неравенств связаны с неверным переходом от логарифма произведения к сумме логарифмов.

Из школьной программы школьники неплохо усваивают формулу

$$\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b,$$

однако, с одним «но». В данном случае выполняются условия $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $c \neq 1$.

Если же изначально дан логарифм $\log_c(ab)$, то на a и b накладывается условие $ab > 0$. Это означает, что возможен вариант, когда одновременно $a < 0$ и $b < 0$. Тогда выражение $\log_c a + \log_c b$ не будет иметь смысла.

В этом случае необходимо говорить о другом варианте указанного свойства логарифма:

$$\log_c(ab) = \log_c|a| + \log_c|b|, \text{ где } ab > 0,\ c > 0,\ c \neq 1.$$

В нашем примере мы могли бы рассуждать следующим образом.

$$\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3\big((x-1)(x-2)\big) = \log_3|x-1| + \log_3|x-2|.$$

Далее, учитывая ОДЗ $(-4 < x < 1)$, раскрываем модули под знаком логарифма. Получим

$$\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2 - x) + \log_3(x + 4).$$

Аналогичная история с другими формулами. Запишем некоторые из таких формул.

$$\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|, \text{ где } a \in \mathbf{R};$$

$$\log_c(ab) = \log_c|a| + \log_c|b|, \text{ где } ab > 0,\ c > 0,\ c \neq 1;$$

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c|a| - \log_c|b|, \text{ где } ab > 0,\ c > 0,\ c \neq 1;$$

$$\log_c(a^{2n}) = 2n \log_c|a|, \text{ где } a \neq 0,\ c > 0,\ c \neq 1;$$

$$\log_{c^{2n}}(a) = \frac{1}{2n} \log_{|c|} a, \text{ где } a > 0,\ c \neq 0,\ c \neq \pm 1.$$

Пример 3 (ЕГЭ – 2019[8]). Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\big((4-x)(x^2+29)\big) \le \log_{\frac{1}{3}}(x^2-10x+24) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x).$$

Решение. Данное неравенство определено при условии

$$\begin{cases}(4-x)(x^2+29) > 0,\\ x^2-10x+24 > 0,\\ 7-x > 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4-x > 0,\\ (x-4)(x-6) > 0,\\ 7-x > 0\end{cases} \Rightarrow x < 4.$$

При выполнении этого условия можно переписать неравенство в виде

$$\log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}(x^2+29) \le \log_{\frac{1}{3}}(4-x) + \log_{\frac{1}{3}}(6-x) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x);$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+29) \le \log_{\frac{1}{3}}(6-x) + \log_{\frac{1}{3}}(7-x);$$

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+29) \le \log_{\frac{1}{3}}\big((6-x)(7-x)\big).$$

Так как основание логарифма меньше единицы (функция $y = \log_{\frac{1}{3}}x$ – убывает), то

$$x^2+29 \le (6-x)(7-x);\ x^2+29 \le x^2-13x+42; 13x \ge 13,$$

откуда $x \ge 1$.

Учитывая условие $x < 4$, получаем $1 \le x < 4$.

Ответ: $[1; 4)$.

Как и в первом примере, невключение в ответ одной точки, в данном случае левого конца промежутка, ведёт к потере лишь одного балла: по критерию, обоснованно полученный ответ, отличающийся от верного исключением точки 1, оценивается в 1 балл.

Пример 4. Решите неравенство

$$(4^x - 2^{x+3})^2 + 28(4^x - 2^{x+3}) + 192 \ge 0.$$

Решение. Пусть $4^x - 2^{x+3} = t$, тогда получаем квадратное неравенство

$$t^2 + 28t + 192 \ge 0;\quad t \le -16 \text{ или } t \ge -12.$$

Выполним обратную замену переменного. Получаем совокупность

$$\left[\begin{array}{l}4^x - 2^{x+3} \le -16,\\ 4^x - 2^{x+3} \ge -12\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4^x - 8\cdot 2^x + 16 \le 0,\\ 4^x - 8\cdot 2^x + 12 \ge 0\end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c}(2^x-4)^2 \le 0,\\ (2^x-2)(2^x-6) \ge 0\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2^x = 4,\\ 2^x \le 2,\\ 2^x \ge 6.\end{array}\right.$$

Учитывая монотонность функции $y = 2^x$, приходим к выводу

$$x = 2; x \le 1; x \ge \log_2 6.$$

Ответ: $(-\infty; 1]; 2;\ [\log_2 6; +\infty)$.

[8] https://alexlarin.net/ege/2021/15_2021.html

Согласно критериям, ответ, отличающийся от верного исключением концов промежутков или точки 2, оценивается в 1 балл.

Далее рассмотрим задание, предлагавшееся в 2021 голу в Тверском регионе и вызвавшее активное обсуждение как со стороны школьников, учителей математики, так и со стороны экспертов комиссии ЕГЭ по математике.

Сначала рассмотрим решение, которое мы считаем наиболее корректным.

Пример 5 (ЕГЭ–2021). Решите неравенство

$$16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 \geq 0.$$

Решение 1. Пусть $4^{\frac{1}{x}-1} = t, t > 0$ (можно также отметить, что $t \neq \frac{1}{4}$), тогда неравенство примет вид

$$t^2 - t - 2 \geq 0;\ \ t \leq -1 \text{ или } t \geq 2.$$

Поскольку $t > 0$, то получаем неравенство $t \geq 2$. В этом неравенстве делаем обратную замену

$$4^{\frac{1}{x}-1} \geq 2;\ 4^{\frac{1}{x}-1} \geq 4^{\frac{1}{2}}.$$

Учитывая монотонность (возрастание) функции $y = 4^x$, имеем

$$\frac{1}{x} - 1 \geq \frac{1}{2};\ \ \frac{1}{x} - \frac{3}{2} \geq 0;\ \ \frac{2-3x}{2x} \geq 0;\ \ \frac{x-\frac{2}{3}}{x} \leq 0.$$

Решая последнее неравенство методом интервалов, получаем $0 < x \leq \frac{2}{3}$.

Ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right]$.

Типичная ошибка в решении: ученик, выполнив замену переменного, получает квадратное неравенство и, не решив данного неравенства до конца, делает обратную замену (и/или отбор корней) на этапе нахождения корней вспомогательного квадратного уравнения. Кроме того, многие школьники так и не научились корректно решать рациональные неравенства методом интервалов. Также, вероятно, имеются очень приблизительные представления об обобщённом методе интервалов и грамотном оформлении решения этим методом.

Приведём схему решения данного неравенства обобщённым методом интервалов [1]. Сразу же оговоримся, что авторы не рекомендуют использовать на ЕГЭ данный способ решения, поскольку он не получает достаточного обоснования в школьном курсе математики. Как следствие, решения школьников, в которых используется обобщённым методом интервалов, изобилуют неточностями и ошибками. Кроме того, почти всегда в задачах ЕГЭ можно предложить более изящное и грамотное решение.

Решение 2.

1. Найдём корни уравнения $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2 = 0$.

Полагая $4^{\frac{1}{x}-1} = t, t > 0$, получим $t^2 - t - 2 = 0$. Имеем $t = -1$, $t = 2$. Отсюда $x = \frac{2}{3}$.

2. При $x = 0$ исходное уравнение не имеет смысла.

3. Точками $x = \frac{2}{3}$ и $x = 0$ числовая прямая разбивается на три промежутка: $(-\infty; 0)$; $\left(0; \frac{2}{3}\right)$; $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$.

4. На каждом из полученных промежутков определяем знаки выражения $16^{\frac{1}{x}-1} - 4^{\frac{1}{x}-1} - 2$.

5. Записываем ответ: $\left(0; \frac{2}{3}\right]$.

Таким образом, мы можем сделать вывод, что при оценивании задания 14 потеря корней или включение в ответ посторонних решений приводит к потере одного балла исключительно в тех случаях, когда это не связано с областью допустимых значений неравенства. В противном случае, если в ответ записываются точки, не принадлежащие ОДЗ, школьник за решение получает ноль баллов.

Наши рекомендации. Ученику необходимо определиться с наиболее подходящим методом решения предложенного неравенства. В соответствии с выбранным методом верно произвести последовательность всех необходимых шагов решения, обосновав основные моменты. Усвоить метод интервалов, не использовать, как основной, обобщённый метод интервалов. При выполнении замены переменной доводить до конца решение полученного неравенства (а не переходить к исходной переменной на этапе решения вспомогательного уравнения) [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А. Роль и развитие метода интервалов в школьном курсе математики / А. А. Голубев, Г. Н. Столярова // Традиции и новации в профессиональной подготовке и деятельности педагога: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь, 2015. – С. 283-290.

2. Голубев А.А. Уравнения и неравенства в школьном курсе математики: учебное пособие / А. А. Голубев, Т. А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 160 с.

3. Голубев А.А., Спасская Т.А. Практикум по элементарной математике. Учебное пособие. – Тверь, 2020. – 160 с.

УДК 517.54

ТОЧНАЯ ОЦЕНКА МОДУЛЯ ТРЕТЬЕГО ТЕЙЛОРОВСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА НА КЛАССЕ ОГРАНИЧЕННЫХ НЕ ОБРАЩАЮЩИХСЯ В НУЛЬ ФУНКЦИЙ С ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ступин Денис Леонидович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: DStupin@mail.ru

Ключевые слова: *гипотеза Кшижа, проблема Кшижа, ограниченные не обращающиеся в нуль функции, оценки модулей тейлоровских коэффициентов.*

Аннотация. В работе найдена точная оценка модуля третьего тейлоровского коэффициента на классе ограниченных не обращающихся в нуль функций с действительными коэффициентами.

Введение. Тейлоровские коэффициенты функции $f(z)$ будем обозначать $\{f\}_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$.

Класс B состоит из голоморфных в единичном круге Δ функций f, таких, что $0 < |f(z)| \leq 1, z \in \Delta$.

В 1968 г. Ян Кшиж [1] предположил, что если $f \in B$, то

$$|\{f\}_n| \leq 2/e, \qquad n \in \mathbb{N},$$

причем равенство достигается только на функциях вида $e^{i\psi}F\big(e^{i\varphi}z^n, 1\big)$, где

$$F(z,t) := e^{-t\frac{1-z}{1+z}}, \qquad \varphi, \psi \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, +\infty).$$

Гипотеза Кшижа привлекает внимание ряда математиков, однако в настоящее время, она доказана только до пятого тейлоровского коэффициента включительно [2].

Существование экстремалей в этой задаче очевидно, поскольку после присоединения к классу B функции $f(z) \equiv 0$ получается компактное семейство функций.

Поскольку класс B инвариантен относительно вращений в плоскости переменной w ($w = f(z)$), то можно ограничиться изучением функций, для которых $f(0) > 0$. Так как $0 < \{f\}_0 \leq 1$, то можно положить $\{f\}_0 = e^{-t}$, где параметр $t \in [0, +\infty)$. Эти подклассы обозначим через B_t. Как известно из теории подчинённых функций [3], каждую функцию класса B_t можно представить в виде

$$f(z) = e^{-t\frac{1-\omega(z)}{1+\omega(z)}}, \qquad \omega \in \Omega_0, \tag{1}$$

где Ω_0 – класс, состоящий из голоморфных в Δ функций ω, таких, что

$$|\omega(z)| \leq 1, \quad \omega(0) = 0, \qquad z \in \Delta.$$

Отметим, что при каждом $t \geq 0$ эта формула устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами Ω_0 и B_t.

Неравенства на $\mathbf{\Omega_0}$. На Ω_0 имеет место точное неравенство [4]

$$\left|\{\omega\}_3 + \frac{\overline{\{\omega\}_1}\{\omega\}_2^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}\right| \leq \frac{(1-|\{\omega\}_1|^2)^2 - |\{\omega\}_2|^2}{1-|\{\omega\}_1|^2}. \tag{2}$$

Заметим, что из этого неравенства сразу следует неравенство Пика [5]

$$|\{\omega\}_2| \leq 1 - |\{\omega\}_1|^2, \tag{3}$$

а из него сразу следует неравенство Шварца [5]

$$|\{\omega\}_1| \leq 1. \tag{4}$$

Для доказательства этих фактов достаточно рассмотреть неравенства $r_3 \geq 0$ и $r_2 \geq 0$, где r_3 и r_2 – правые части первых двух неравенств соответственно.

Предварительный анализ задачи. Пользуясь связью (1), из неравенства (2) выразим $\{f\}_3$ через $\{\omega\}_1$, $\{\omega\}_2$, $\{\omega\}_3$. Имеем

$$F(z,t) = \{F\}_0 + \{F\}_1 z + \{F\}_2 z^2 + \{F\}_3 z^3 + \cdots =$$
$$= \frac{1}{e^t} + \frac{2t}{e^t}(z + \alpha z^2 + \beta z^3 + \cdots),$$

где $\alpha \coloneqq (t-1)$, $\beta \coloneqq \frac{1}{3}(2t^2 - 6t + 3)$. Легко показать, что

$$\{f\}_3 = \{F\}_1\{\omega\}_3 + \{F\}_2 2\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \{F\}_3\{\omega\}_1^3 =$$

$$= 2te^{-t}(\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3).$$

То есть,

$$\frac{|\{f\}_3|}{2te^{-t}} = |\{\omega\}_3 + 2\alpha\{\omega\}_1\{\omega\}_2 + \beta\{\omega\}_1^3|.$$

Сведение задачи к исследованию на экстремум функции 2-х действительных аргументов. Принимая во внимание неравенства (4) и (3), введём обозначения $x \coloneqq \{\omega\}_1$, $y \coloneqq \{\omega\}_2$. Таким образом, наша задача свелась к поиску условных экстремумов функции двух действительных аргументов

$$\mathrm{h}(x,y) \coloneqq 1 - x^2 - \frac{y^2}{1-x} + 2\alpha xy + \beta x^3,$$

при ограничениях $-1 \leq x \leq 1$, $-(1-x^2) \leq y \leq 1 - x^2$.

Исследование на экстремум $\boldsymbol{h\left(x, -(1-x^2)\right)}$. Имеем

$$h\left(x, -(1-x^2)\right) = (2\alpha + \beta + 1)x^3 - (2\alpha + 1)x.$$

Очевидно, $h_1(t) \coloneqq h\big(-1, -(1-(-1)^2)\big) = -\beta,\ t \geq 0$.

Далее, $\Big(\mathrm{h}_x\big(x, -(1-x^2)\big)\Big)' = 3(2\alpha+\beta+1)x^2 - (2\alpha+1)$, то есть

$$x_{1,2} \coloneqq \pm\sqrt{\frac{(2\alpha+1)}{3(2\alpha+\beta+1)}}$$

– стационарные точки, причём

$$h_2(t) \coloneqq \mathrm{h}\left(x_{1,2}, -\big(1-x_{1,2}^2\big)\right) = \pm\sqrt{\frac{4(2\alpha+1)^3}{27(2\alpha+\beta+1)}}.$$

Заметим, что $\left|x_{1,2}\right| \leq 1,\ t \geq 1/2$.

Наконец, $-h_1(t) = \mathrm{h}\big(-1, -(1-1^2)\big) = \beta,\ \mathrm{t} \geq 0$.

Исследование на экстремум $\boldsymbol{h(x, y_1)}$. Имеем

$$h_y'(x, y) = 2\left(\alpha x - \frac{y}{1-x}\right),$$

то есть $y_1 \coloneqq \alpha x(1-x)$ – точка максимума, так как

$$h_y''(x, y) = -\frac{2}{1-x}.$$

Отметим, что $|y_1| \leq 1 - x^2$ равносильно при $t \notin \{0, 2\}$

$$\begin{cases} x \geq (|\alpha|-1)^{-1}, & \mathrm{t} \in (0{,}2), \\ x \leq (|\alpha|-1)^{-1}, & \mathrm{t} > 2. \end{cases}$$

Очевидно, $h(x, y_1) = 1 + (-\alpha^2+\beta)x^3 + (\alpha^2-1)x^2$.

Так как $|y_1(-1)| = 2|t-1| \leq 1-(-1)^2$ влечёт $t = 1$, то

$$h_1(t) = h\big(-1, y_1(-1)\big) = h(-1, 0) = -\beta,\ \ t = 1.$$

Далее, $\Big(h_x\big(x, y_1(x)\big)\Big)' = 3(-\alpha^2+\beta)x^2 + 2(\alpha^2-1)x$, то есть точки $x = 0$ и

$$x_3 \coloneqq \frac{2(\alpha^2-1)}{3(\alpha^2-\beta)}$$

есть стационарные точки, причём $h_3(t) \coloneqq h\big(0, y_1(0)\big) = 1, t \in [0, 2]$, а

$$h_4(t) \coloneqq h\big(x_3, y_1(x_3)\big) = 1 + \frac{4(\alpha^2-1)^3}{27(\alpha^2-\beta)^2}.$$

Заметим, что $|x_3| \leq 1$ влечёт $4/3 \leq t \leq 4$, однако, так как ещё должно выполняться условие $|y_1| \leq 1 - x^2$, рассмотренное несколько выше, то здесь $\mathrm{t} \in \left[4/3, \big(9+\sqrt{17}\big)/4\right] \setminus \{2\}$.

Наконец, $h\big(1, y_1(1)\big) = \beta,\ \ t \geq 0$.

Исследование на экстремум $\boldsymbol{h(x, 1-x^2)}$. Имеем

$$h(x, 1-x^2) = (-2\alpha+\beta+1)x^3 + (2\alpha-1)x.$$

Очевидно, $h(-1,\ 1-(-1)^2) = -\beta, t \geq 0$.

Далее, $\left(h(x, 1-x^2)\right)'_x = 3(-2\alpha+\beta+1)x^2 + 2\alpha - 1$, то есть

$$x_{4,5} := \pm\sqrt{\frac{(2\alpha-1)}{3(2\alpha-\beta-1)}}$$

– стационарные точки, причём

$$h_5(t) := h\left(x_{4,5}, 1-x_{4,5}^2\right) = \pm\sqrt{\frac{4(2\alpha-1)^3}{27(2\alpha-\beta-1)}}.$$

Ясно, что $|x_{4,5}| \leq 1$ влечёт $t \in \left[0, \left(5-\sqrt{7}\right)/2\right] \cup \left[3/2, \left(5-\sqrt{7}\right)/2\right]$.

Наконец, $h(1,1-1^2) = \beta, t \geq 0$.

Анализ результатов. Итак, при каждом $t \geq 0$ нам нужно найти максимум среди $|h_k(t)|$, $k = \overline{1,5}$.

Обозначим $m(\mathrm{t}) := max_{k=\overline{1,5}, t\geq 0}\{h_k(t)\}$. График этой функции изображён на рис. 1.

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если $f \in B_t$, то имеет место точная при каждом $t \geq 0$ оценка*

$$|\{\mathrm{f}\}_3| \leq 2\mathrm{te}^{-\mathrm{t}}\mathrm{m}(\mathrm{t}) = 2\mathrm{te}^{-\mathrm{t}}\begin{cases} 1, & t \in [0, t\_1), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{(2t-1)^3}}{t}, & t \in [t\_1, t\_2), \\ \frac{\sqrt{2}}{3}\frac{\sqrt{(2t-3)^3}}{\sqrt{-t^2+6t-6}}, & t \in [t\_2, t\_3), \\ \beta(t), & t \geq t\_3, \end{cases}$$

где $t_1 \approx 1.655$, $t_2 \approx 3.304$, $t_3 \approx 3.823$. Экстремальные функции имеют вид (1) при $\omega(z)$ найденных в виде произведений Бляшке по первым трём коэффициентам.

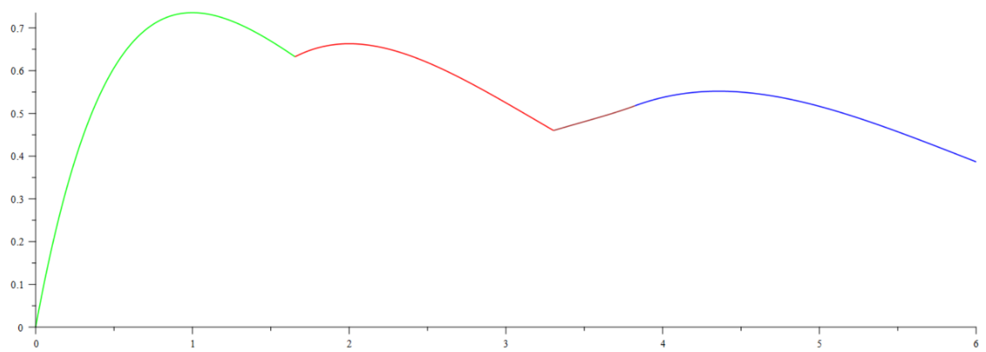


Рис. 1. График функции *m*(*t*)

Заметим, что Д. В. Прохоров и Я. Шиналь в работе [6] получили точную для каждого $t \geq 0$ оценку $|\{f\}_3|$ для случая комплексных коэффициентов.

Разница между результатами показана на рис. 2.

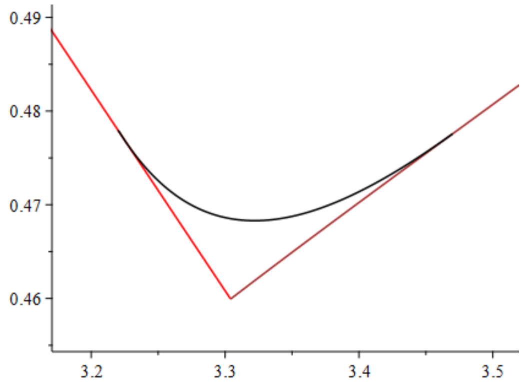


Рис.2. Отличие от случая комплексных коэффициентов

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Krzyz J. G. Coefficient problem for bounded nonvanishing functions. Ann. Polon. Math. 1968. V. 70. P. 314.

2. Samaris N. A proof of Krzyz's conjecture for the fifth coefficient. Compl. Var. Theory and Appl. 2003. V. 48. P. 753-766.

3. Rogosinski W. On the coefficients of subordinate functions. Proc. London Math. Soc. 1943. V. 48. P. 48-82.

4. Brown J. E. Iterations of functions subordinate to schlicht functions. Compl. Var. 1987. V.9. P.143-152.

5. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

6. Prokhorov D. V. and Szynal J. Coefficient estimates for bounded nonvanishing functions. Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. 1981 V. 29. N. 5-6. P. 223-230.

УДК 517.54

О КЛАССАХ N-ЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ, ПОРОЖДАЕМЫХ ФУНКЦИЯМИ, БЛИЗКИМИ К ЗВЁЗДНЫМ

Суетин Валерий Юрьевич
Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина, г. Москва
E-mail: suetin-vu@rguk.ru

Ключевые слова: *однолистные и многолистные, звёздные функции, коэффициентные оценки, конформные отображения.*

Аннотация. При использовании метода площадей в решении задачи Бибербаха возникает класс функций, образ внешности единичного круга которых является n-листной римановой поверхностью. Ясно, что функции этого класса могут порождаться звёздными функциями. В настоящей статье построен пример, показывающий, что не только звёздные функции могут порождать указанный класс. Обоснование проводится с помощью построений в пакете MAPLE путём поворота функции класса Каратеодори на небольшой угол, так, чтобы вывести её из этого класса.

В 1916 году Л.Бибербах (цит. по [1]) вычислил точное значение константы Кёбе, то есть радиуса круга покрытия для класса S однолистных и голоморфных в единичном круге Δ функций $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$, и доказал, что в этом классе выполняется точная оценка $|a_2| \leq 2$, а также высказал гипотезу, что в классе S для всех натуральных n имеют место точные оценки $|a_n| \leq n$ с экстремалями - лучевыми функциями Кёбе. Задача была решена Де Бранжем в 1984 г. Экстремальными свойствами однолистных в круге функций занимались многие математики, из недавних работ по этой тематике следует отметить работы [2], [3].

Класс Σ состоит из однолистных во внешности единичного круга $\Delta^* = \{z \in \mathbb{C}: |z| > 1\}$ функций, представимых в Δ^* рядами вида

$$f(z) = z + b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \cdots,$$

а его подкласс Σ' – из не обращающихся в ноль на Δ^* функций класса Σ . Известно [1], что в классе Σ' выполнено неравенство $|b_0| \leq 2$, то есть $diam|\mathbb{C}, f(\Delta^*)| \leq 4$.

В.Г.Шеретов [1] предложил использовать для нахождения коэффициентных оценок в классе Σ' метод площадей. Введём подкласс $\Sigma'[n]$ функций класса Σ', риманова поверхность которых n-листна. Функции из класса Σ вида $f(z) = 1 / \psi(\zeta)$, где $\zeta = z^{-1}$ и $\psi(\zeta)$ – звёздная функция из S при $\zeta \in \Delta$ входят в этот класс.

Покажем, что имеются и не звёздные функции из S, порождающие функции класса $\Sigma'[n]$. Рассмотрим функцию

$$h_1(t) = 1 + \left(\frac{7}{8}t + \frac{7}{8}t^2 + \frac{7}{16}t^3 + \frac{7}{64}t^4 + \frac{7}{640}t^5\right).$$

Как видим, действительная часть образа положительна, то есть эта функция входит в класс Каратеодори (рис.1). Теперь повернём функцию на угол $\frac{\pi}{6}$ относительно точки 1 так, чтобы она вышла из класса Каратеодори (рис. 2):

$$h(t) = 1 + \left(\frac{7}{8}t + \frac{7}{8}t^2 + \frac{7}{16}t^3 + \frac{7}{64}t^4 + \frac{7}{640}t^5\right) \cdot e^{\pi i/6}.$$

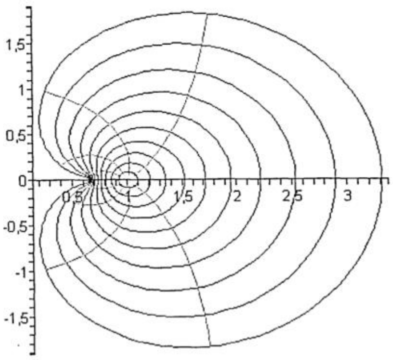


Рис. 1

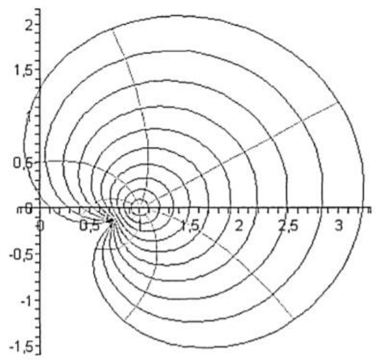


Рис. 2

Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = ze^{\int_0^z \frac{h-1}{t}dt}.$$

Это будет однолистная не звёздная функция из класса S ([10]). Эта функция не является звёздной, так как порождающая её функция $h(t)$ не входит в класс Каратеодори.

Нужную нам функцию $f \in \Sigma'[2]$ определим как

$$f(z) = \frac{1}{f_1(1/z)} = z\,exp\left(-\int_0^{z^{-1}} \frac{h-1}{t}dt\right)$$

Как видим, построено однолистное в единичном круге и не звёздное отображение (рис. 3).

Перемножив $f(z)$ на $-f(-z) = g(z)$, получим двулистную риманову поверхность с единственной точкой ветвления в бесконечности (рис. 4).

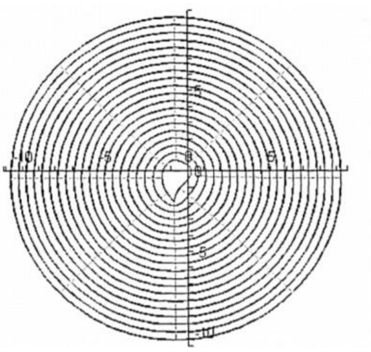


Рис. 3

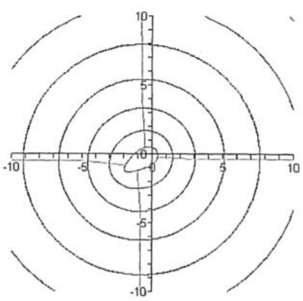


Рис. 4

Аналогичные построения можно провести для класса $S^{(p)}[n]$ однолистных в единичном круге функций с p-кратной круговой симметрией, то есть

$$f(z) = z + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_{p\nu+1} z^{p\nu+1}; \quad f\left(z \cdot e^{2\pi i/p}\right) = e^{2\pi i/p} f(z)$$

Выделим в этом классе подкласс $S^{(p)}[n]$, $n \in \mathbb{N}$, для всех функций f из которого образ единичного круга Δ при всех $k \leq n$ и $\eta = exp(2\pi i \,/\, kp)$ при отображении

$$F_k(z) = \prod_{\nu=0}^{k-1} \eta^{-\nu} f(\eta^{\nu} z) = z^k (1 + \alpha_1 z^{pk} + \alpha_2 z^{2pk} + \cdots)$$

является k-листной римановой поверхностью ([4]). Понятно, что сюда входят все звёздные функции из S. Сейчас мы построим пример не звёздной функции, входящей в класс $S^{(3)}[2]$.

Вспомогательную функцию

$$h_1(t) = 1 + \left(\left(1 + t^{3/2}\right)^4 - 1\right) \cdot 0{,}6 = 1 + \frac{6}{5} t^3 \vdash \frac{9}{10} t^6 + \frac{3}{10} t^9 + \frac{3}{80} t^{12}$$

из класса Каратеодори (рис. 5) повернем на угол $\frac{\pi}{6}$ относительно точки 1 (то есть выведем из класса Каратеодори).

$$h(t) = 1 + 0{,}6\left(\left(1 + t^{\frac{3}{2}}\right)^4 - 1\right) \cdot e^{\pi i/6}$$

Линии уровня отображения единичного круга примут вид, как на рис. 6.

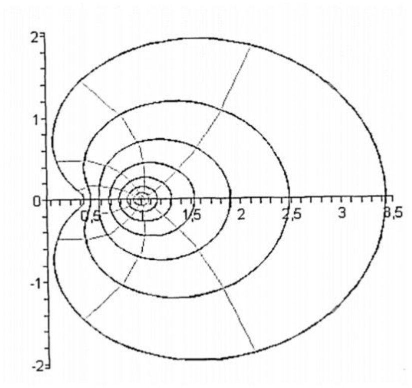


Рис. 5

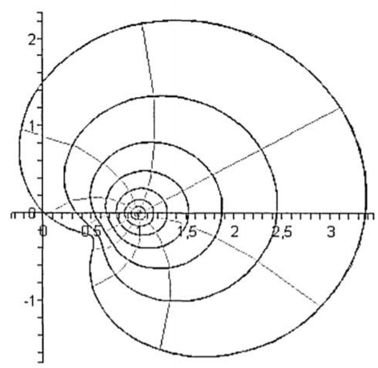


Рис. 6

Строим функцию $f \in S^{(3)}$ [2]:

$$f(z) = z \cdot exp\left(\int_0^z \frac{h-1}{t} dt\right).$$

Разложение в ряд Тейлора имеет вид

$$f(z) = z + \left(\frac{\sqrt{3}}{5} + \frac{1}{5} i\right) z^4 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{40} + \frac{1}{25} + \left(\frac{3}{40} + \frac{\sqrt{3}}{25}\right) i\right) z^7 +$$

$$+\left(\frac{\sqrt{3}}{60}+\frac{3}{100}+\left(\frac{41}{1500}+\frac{3\sqrt{3}}{100}\right)i\right)z^{10}+O(z^{13}).$$

Как видим (рис. 7), построенное отображение однолистно и не звёздно в единичном круге.

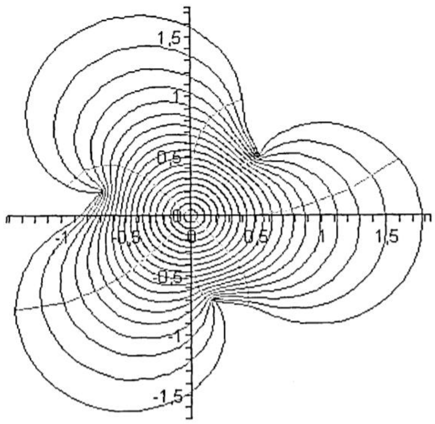


Рис. 7

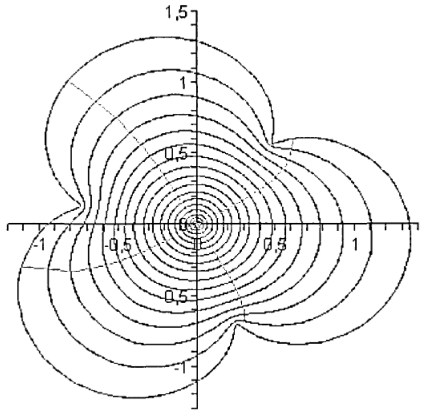


Рис. 8

Полагаем $u = e^{-\pi i/3} f\left(e^{\pi i/3} z\right)$ и умножим f на u. Получим локально двулистное в нуле отображение с не налегающими линиями уровня, что обеспечивает двулистность на всём единичном круге (рис. 8). Все построения выполнены в пакете MAPLE.

Коэффициентные неравенства для рассмотренных классов функций получены в [4].

Таким образом, построены примеры, показывающие, что рассматриваемые классы функций порождаются не только звёздными функциями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов В. Г. Новый подход к доказательству гипотезы Бибербаха// Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, ТвГУ. 2003. с. 100-115.

2. Ponnusamy S., Kaliraj A.S., Starkov V.V. Absolutely convex, uniformly starlike and uniformly convex harmonic mappings [Electronic resource] / Complex Variables and Elliptic Equations. Germany, 2016. №61 (10). p.1418-1433. URL: http://dx.doi.org/10.1080/17476933.2016.1182518. (Web of Science, Scopus)

3. Crane K. Conformal geometry of simplicial surfaces. //Proceedings of Symposia in Applied Mathematics. 2020. Volume 76

4. Суетин В. Ю. Применение метода площадей к оценке коэффициентов функций класса Σ //Современные проблемы теории функций и их приложения. Тезисы докладов 12-й Саратовской зимней школы. Саратов. 2004. с. 176-177.

УДК 004.65

ПОСТРОЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ БАЗЫ ДАННЫХ ПЛАТФОРМЫ CODEFORCES

Филимонов Иван Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: mr.filimonov-iwan@mail.ru

Цирулёва Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *проектирование баз данных, уровни моделирования, предметная область, логическая модель, сущность, атрибуты сущности, связи между сущностями.*

Аннотация. В работе приводится пример построения логической модели базы данных онлайн-платформы Codeforces, используемой для проведения олимпиад по программированию.

В статье [1] описана структура индивидуального проекта по дисциплине СУБД [2] для специальности «Компьютерная безопасность». Подчас трудность при создании проекта вызывает описание предметной области, а в ограничениях логической модели не прослеживается связь с допущениями и ограничениями предметной области. Связи и ограничения логической модели должны быть естественными следствиями соответствующих ограничений и допущений предметной области. В данной работе дается подробное описание процесса создания логической модели базы данных онлайн-платформы Codeforces.

1. Описание предметной области. Предметная область – это онлайн-платформа (сайт) Codeforces для проведения олимпиад по программированию. Новые пользователи могут регистрироваться в ней при помощи адреса электронной почты, задав никнейм (который уникален в пределах системы). После регистрации пользователь также может, по желанию, указать организацию, в которой он учится или работает, и дату рождения. Система имеет состязательно-образовательное значение. Каждый пользователь при регистрации получает рейтинг, равный 1500. Система рейтингов схожа с системой рейтингов Эло: для каждого пользователя, участвующего в соревновании, вычисляется ожидаемое место, которое он займёт. Если реальное место окажется выше, рейтинг увеличивается (чем выше результат от ожидаемого, тем больше), если ниже – уменьшается. Таким образом, пользователь может увеличивать или уменьшать свой рейтинг, участвуя в контестах.

Контесты – это наборы задач алгоритмического характера, которые нужно решить, написав программу. Для каждой задачи существует набор закрытых тестов. Суть оценки правильности решения задачи состоит в следующем: программа компилируется и запускается на каждом тесте (либо интерпретируется на нём, в зависимости от языка) по отдельности, последовательно. Тест – это набор данных (либо программа, которая такие данные генерирует), которые подаются на вход проверяемой программе. Она должна выдать на выход ответ, соответствующий формату, указанному в задании. Задача считается решённой, если на каждом тесте она не превысила ограничения по памяти и по времени, указанные в задаче, и выдала ответ, который проверяющая программа (checker, у каждой задачи своя) решила, что ответ правильный. Чекер вместо простого сравнения вывода эталонов требуется в связи с тем, что может быть несколько различных вариантов ответа, каждый из которых правилен (например, требуется вывести ровно один любой цикл в графе, который может иметь несколько циклов).

Таблица результатов строится следующим образом. Для каждого из участников вычисляется количество решённых им задач и штрафное время. Последнее определяется как сумма минут для каждой задачи (время округляется с точностью до целой минуты в меньшую сторону), прошедших с момента начала соревнования до первой успешной попытки решения, плюс количество неверных попыток решения сданных задач (неверные попытки, которые были совершены по задачам, решить полностью которые не удалось, не учитываются), умноженное на 20. То есть, по факту, штраф за каждую отправку программы, не прошедшей проверку по задаче, равен 20 минутам при условии решения в конечном итоге этой задачи. В таблицу результатов добавляются все участники контеста и ранжируются, в первую очередь, по количеству сданных задач (по убыванию), во вторую – по штрафному времени (по возрастанию). Таким образом, при одинаковом количестве решённых задач выше в таблице находится тот, у кого штрафное время меньше.

После контеста для каждого участника вычисляется изменение рейтинга в соответствии с занятым им местом, и прибавляется к его текущему рейтингу.

2. Модель предметной области. Основные абстракции области, применяемые рядовыми пользователями – контест, задача, пользователь, посылка, тест, рейтинг. Опишем с их помощью то, что требуется от системы.

Пользователь. В системе есть пользователи, которые могут участвовать в контестах. У каждого пользователя обязательно есть никнейм, e-mail и рейтинг. Также каждый пользователь может указать по своему желанию дату рождения и организацию, в которой он учится или работает. Аккаунт пользователя может быть активен либо заблокирован по решению администрации.

Контест. Контесты состоят из одной или нескольких задач. Каждый контест имеет собственное название, уникальный номер. Пользователи могут зарегистрироваться на контест, если он ещё не начался, после чего, когда наступит дата и время начала контеста, они автоматически становятся его участниками. Регистрацию можно отменить, но только до фактического начала контеста. Администрация ресурса может добавлять в контест задачи либо удалять их из него, менять ограничения рейтинга и переносить время и дату начала контеста (при необходимости). После окончания контеста администрацией публикуется разбор задач соревнования в виде текста, в котором описываются идеи и подходы к их решению.

Задача. У каждой задачи имеется условие (в которое входит в виде текста набор открытых тестов (sample, один или несколько)), название, ограничение по времени (в миллисекундах, целое число; типичное ограничение – 1000 ms), ограничение по памяти (в мегабайтах, целое число) и чекер (код программы на языке C++, компилируемой с помощью GNU C++17, которая, имея набор входных данных к задаче, может определить, правильный ли ответ выдаёт программа пользователя, решавшего задачу). Задачи могут отправляться на проверку пользователями, не участвующими в соревновании, а также после окончания контеста. Однако посылки, сделанные при таких условиях, не учитываются при построении турнирной таблицы и не могут влиять на рейтинг пользователя никоим образом.

Тест. Для каждой задачи имеется набор закрытых тестов, которые недоступны пользователям, кроме администрации системы. Они нужны для проверки правильности решения задачи (задача считается решённой, если по всем закрытым тестам программа для её решения выдала правильный ответ и ни на одном из них не превысила ограничения ни по времени, ни по памяти). Тест к задаче задаётся следующим образом. Во-первых, это переменная is_generator логического типа (true или false), которая позволяет определить, является ли текст теста данными, передаваемыми на вход тестируемой посылке, либо генератором таких данных. Во-вторых, сам тест (что он из себя представляет, понятно из атрибута is_generator). К тесту может быть добавлен короткий комментарий.

Посылка. Посылка – это попытка решения задачи пользователем, программа, которая, предположительно, решает эту задачу. Суть тестирования состоит в следующем: после отправки посылки в систему ей присваивается вердикт “In_queue”. После этого в базе данных выбираются все тесты к данной задаче, ограничение по времени и по памяти, чекер, после чего посылка встаёт в очередь на проверку на этих тестах. Результат проверки на каждом тесте сохраняется в виде вердикта посылки на тесте, использованного программой времени и памяти. Программа на каждом тесте должна задействовать количество ресурсов, не больше указанных в задаче. Возможных вердиктов ограниченное количество: 'In_queue' – присваивается посылке, которая пришла в систему и встала в очередь на тестирование; 'OK' – программа отработала на тесте в рамках установленных ограничений и выдала правильный ответ; 'WA' – ответ неверный; 'RE' – в программе произошла ошибка времени выполнения; 'CE' – ошибка компиляции; 'TL' – превышено ограничение по времени; 'ML' –

превышено ограничение по памяти; 'PE' – программа завершилась в штатном режиме и не превысила лимиты ресурсов, но её вывод не соответствует ожидаемому формату, описанному в задаче; 'Crash' – по какой-то причине работала чекера завершилась аварийно (это событие требует внимания администрации ресурса).

Тестирование происходит на всех тестах к задаче последовательно, т.е. если на каком-то тесте вердикт окажется отличным от 'OK', посылка выбывает из очереди, использованные время и память и полученный вердикт записываются в базу данных, проверка на оставшихся тестах не производится. Если же вердикт на каждом тесте 'OK', то он записывается в базу для данной посылке, а в качестве использованных времени и памяти для посылки записываются соответствующие максимальные значения среди полученных на каждом отдельном тесте.

Существует как минимум два подхода к формированию последовательности тестов. Первый – от тестов, описывающих более простые случаи, к тестам, в которых даются наиболее сложные либо неочевидные варианты входных данных. В этом случае у каждого из них в рамках одной задачи имеется свой номер (все тесты обозначаются последовательными числами от 1 до числа, равного количеству тестов к задаче). Если во время проверки посылки произошла какая-то ошибка, помимо вердикта для неё записывается номер теста, на котором вердикт оказался отличным от 'OK'. Этот номер доступен пользователю, сделавшему посылку, т.е. он увидит примерно следующее: «WA на тесте 25». Несмотря на то, что содержание тестов пользователю недоступно, при следующей попытке решения по её вердикту он сможет понять, рассмотрел ли особый случай и исправил ли ту ошибку, из-за которых произошло «падение» в прошлый раз (если посылка получит вердикт 'OK' или отличный от него, но на тесте с большим номером), или же ничего не изменилось (если вердикт тот же).

Второй подход – не показывать номер теста, из-за которого произошла ошибка, отправителю решения, а лишь указать вердикт. В таком случае порядок наборов входных данных, на которых проверяется программа, не имеет смыслового значения и может лишь оптимизироваться с целью более быстрого отсечения неверных решений, о чём рядовой пользователь ничего не узнает. Именно этот вариант (но без оптимизации) мы будет использовать в дальнейшем.

Рейтинг. При регистрации пользователю присваивается рейтинг 1500.

Для контеста может быть задан минимальный и максимальный рейтинг, в пределах которых должен находиться рейтинг пользователя, чтобы он мог принять участие в соревновании.

В соответствие с вышесказанным к базе данных предполагаются следующие запросы:

- вставки, обновления: добавление и изменение контестов, задач, тестов и информации по ним; добавление пользователей в систему и изменение любой их информации (кроме никнейма и e-mail); добавление посылок по задачам в систему; добавление результатов тестирования каждой посылки на наборе тестов; обновление рейтингов пользователей в соответствии с занятыми ими местами на контесте (см. п. 1);
- разнообразные выборки из базы, включая, но не ограничиваясь: получение результатов контеста (см. п. 1); получение списка задач соревнования, получение информации по контестам, задачам, пользователям, посылкам и тестам; получение списка тестов к задачам; определение наиболее быстрых решений по задачам.

3. Логическая модель предметной области

3.1. Выделение сущностей. Свойства сущностей и первичные ключи. В рассматриваемой предметной области, в соответствие с п. 2, можно выделить следующие сущности и их атрибуты (первичные ключи выделены подчёркиванием):

Пользователь (cfuser). Его атрибуты: <u>ID</u> (INT, ПК), Никнейм (поле VARCHAR, никнейм уникален), Организация (поле VARCHAR), Дата рождения (DATE), E-mail (поле VARCHAR, e-mail уникален), Рейтинг (INT), Заблокирован ли пользователь (поле типа BOOL), Является ли пользователь администратором (поле типа BOOL).

Контест (contest). Его атрибуты: <u>ID</u> (INT, ПК), Дата и время начала контеста (DATETIME), Дата и время окончания контеста (DATETIME), Ограничение рейтинга верх (INT), Ограничение рейтинга низ (INT), Название контеста (VARCHAR), Разбор контеста (TEXT).

Посылка (submission). Её атрибуты: <u>ID</u> (INT, ПК), Код посылки (TEXT), Язык и компилятор посылки (ENUM('GNU C++17', 'Java 9', 'Python 3.8')), Затраченная память посылки (INT), Затраченное время посылки (INT), Дата и время отправки посылки (DATETIME).

Задача (problem). Её атрибуты: <u>ID</u> (INT, ПК), Условие задачи (TEXT), Название_задачи (VARCHAR), Ограничение по времени задачи (INT), Ограничение по памяти задачи (INT), Чекер к задаче (TEXT).

Тест (problem_test). Его атрибуты: <u>ID</u> (INT, ПК), Является ли тест генератором (BOOL), Содержание теста (TEXT), Комментарий к тесту (TEXT).

Нераспределёнными остались следующие свойства, которые невозможно отнести к какой-то отдельной из перечисленных сущностей, и которые точно не являются самостоятельными сущностями: Изменение_рейтинга_пользователя, Вердикт_посылки_по_тесту, Время_посылки_на_тесте, Память_посылки_на_тесте.

Первый относится одновременно и к пользователю, и к контесту, три других – и к посылке, и к тесту. Их можно будет распределить после того, как появятся таблицы связей между основными сущностями.

3.2. Связи между сущностями. Между сущностями наблюдаются следующие связи (1:М) – один к многим и (М:М) – многие к многим:

Пользователь >--< Контекст (М:М). Пользователь может участвовать в нескольких контестах, а в контесте участвуют несколько пользователей. Требуется промежуточная таблица-проекция «Пользователь_контест» (user2contest).

Пользователь <--< Посылка (1:М). Пользователь может сделать несколько посылок, но автором одной посылки может быть только один пользователь.

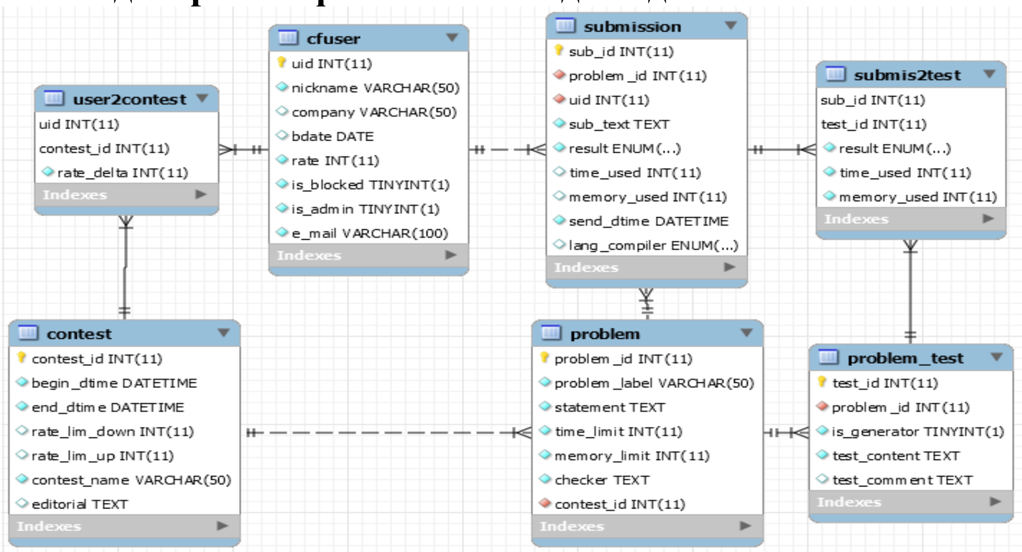
Контекст <--< Задача (1:М). В одном контесте может содержаться несколько задач, но одна задача может входить только в один контест.

Посылка >--< Тест (М:М). Одна посылка может быть проверена на нескольких тестах, а на одном и том же тесте может быть проверено несколько посылок. Требуется промежуточная таблица-проекция «Посылка_тест» (submis2test).

Задача <--< Посылка (1:М). Одна посылка может быть отправлена только к одной задаче, но к одной и той же задаче может быть сделано несколько посылок.

Задача <--< Тест (1:М). Для одной и той же задачи может существовать несколько тестов, но каждый тест обязательно относится только к одной задаче.

3.3. ER-диаграмма физической модели данных



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цирулёва В.М. Об индивидуальных проектах по дисциплинам СУБД и ОПЗБД для специальности «Компьютерная безопасность» / Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Тверь, Изд-во ТвГУ, 2022. 6 с.

2. Цирулёва В.М. Проектирование баз данных: учеб.-метод. пособие. Тверь: Изд-во ТвГУ, 2014. 168 с.

УДК 371.3

ФОРМИРОВАНИЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ГРАМОТНОСТИ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

Харинова Галина Вячеславовна
МОУ многопрофильная гимназия № 12 г.Твери, г. Тверь
E-mail: HGW.72@mail.ru

Фролова Маргарита Николаевна
МОУ гимназия № 8, г. Тверь
E-mail: frolovamargarita@gmail.com

Ключевые слова: *функциональная грамотность, урок информатики, ключевые компетенции, работа с информацией, формирование мышления, работа с текстом.*

Аннотация: в условиях стремительного развития информационного общества возрастает необходимость в формировании поколения людей способных жить и эффективно работать с мировыми информационными ресурсами, взаимодействовать с другими людьми. В работе рассматриваются способы и методы работы со школьниками по формированию этой функциональной грамотности.

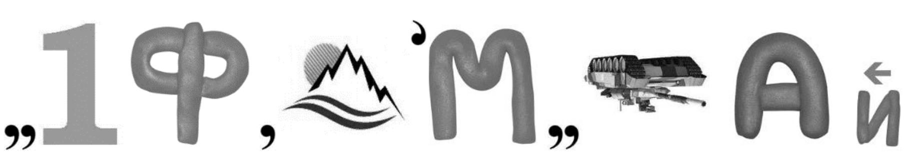
Одна из важнейших задач современной школы – формирование функционально грамотных людей. Что такое «функциональная грамотность»?

«Функциональная грамотность — способность человека использовать приобретаемые в течение жизни знания для решения широкого диапазона жизненных задач в различных сферах человеческой деятельности, общения и социальных отношений». А. А. Леонтьев.

Современная школа учит своих учеников применять полученные знания в повседневной жизни. У школьников должно быть развито умение ориентироваться во времени, а также умение решать задачи, сюжет которых связан с жизненными ситуациями.

Главной задачей на уроках информатики является интеллектуальное развитие ребенка, важной составляющей которого является словесно-логическое мышление.

На уроках мы решаем логические задания, разгадываем ребусы, учимся работать с текстом. Например, в 5-6 классах в этих ребусах зашифрованы термины информатики и компьютерной техники.



Орфографическая грамотность – это составная часть общей языковой культуры, залог точности выражения мысли и взаимопонимания, основа развития ключевых компетенций учащихся. Формирование навыков грамотного письма у школьников – одна из самых трудных задач, которую приходится решать учителю и при этом эта задача обозначена как важнейшая программная установка при формировании функционально грамотной личности. В 5-7 классах – это не только набор текста, но и активная работа над содержанием.

Пример 1. При разработке алгоритма формируется способность грамтно объяснять набор действий.

Задание 4

1. **Откройте документ Алгоритм.rtf из папки Заготовки:**

Засыпь ямку. Поставь лопату и лейку на место. Выкопай ямку. Возьми лейку и полей саженец. Возьми лопату и саженец. Посади саженец в ямку.

2. **Расставьте команды алгоритма «Посадка дерева» в разумной последовательности. Для этого:**
   1) **внимательно прочитайте весь текст;**
   2) **найдите строку с командой, которая должна быть выполнена первой;**
   3) **выделите найденную строку;**
   4) **удалите выделенную строку в буфер (команда Вырезать);**
   5) **поместите курсор в начало первой строки и вставьте первую команду из буфера;**
   6) **при необходимости пользуйтесь командой Отменить**  **;**
   7) **повторяйте аналогичные действия, пока все команды не окажутся на своих местах.**
3. **Сохраните документ с изменениями в личной папке под именем Алгоритм1.**

Пример 2. Сопоставление текста по смыслу.

3. Соедини стрелками понятие, связанное с исполнителем и его значение

Понятие		Значение понятия
Круг решаемых задач		Обстановка, в которой может действовать исполнитель
Среда исполнителя		Невозможность выполнения команд, так как исполнитель «не понимает» команду и не может выполнить
Система команд исполнителя		Выполнение исполнителем определенного круга задач
Система отказов исполнителя		Непосредственный, когда команда выполняется сразу после поступления, программируемый, когда исполнитель выполняет все команды в автоматическом режиме по заданной программе
Режимы работы исполнителя		Набор команд, которые исполнитель «понимает» и может выполнить

Пример 3. Умение выбрать верное утверждение по смыслу.

Тест «Верно ли, что...» *(Слайд 1)*

1. Бесконечная последовательность шагов – это алгоритм? (-)
2. Алгоритм, в котором команды выполняются последовательно друг за другом – это циклический алгоритм? (-)
3. Исполнитель – это только человек? (-)
4. Алгоритм – это конечная последовательность, имеющая ожидаемый результат? (+)
5. Алгоритм, в котором некоторые команды повторяются – это алгоритм с ветвлениями? (-)
6. Компьютерная программа – это алгоритм? (+)
7. Машина не может быть исполнителем алгоритма? (-)
8. Овал в блок-схеме означает начало алгоритма? (+)
9. Алгоритм можно записать только схемой? (-)
10. Шаги в алгоритме должны быть записаны на понятном исполнителю языке? (+)
11. Человек может выполнить любой алгоритм? (-)
12. Для записи алгоритмов существует специальная среда? (+)

- Ребята, какой вопрос у вас вызвал затруднение? Почему?

Пример 4. Словообразование. Самостоятельная разработка и анализ правильной работы алгоритмов для исполнителя с произвольным начальным положением.

Задание №4

Напишите алгоритмы для исполнителя **Кузнечик**, используя его СКИ (<+число>;<-число>;), с помощью которых он составит следующие слова:

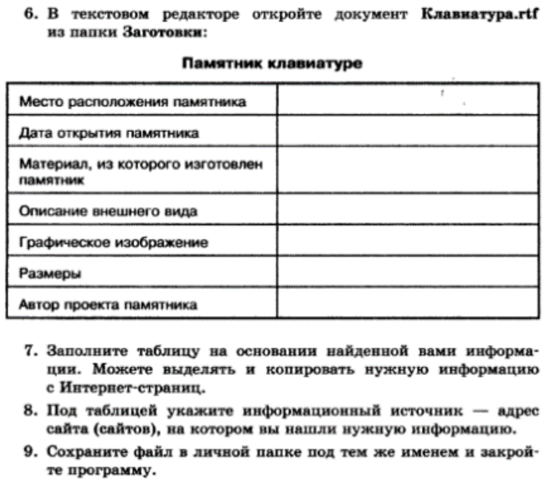
ПРИВЛЕЧЕНИЕ; ПОГОВОРКА; ЦВЕТОЧЕК; ЧЕТВЕРГ; БЕГОТНЯ.

Выбирайте любую исходную позицию. Укажите ее перед записью алгоритма.

Умение производить поиск, хранение, обработку различных видов информации с помощью соответствующего ПО – это информационная функциональная грамотность современного школьника.

Это находит своё отражение на уроках и в знакомстве с компьютером, и в овладении способами работы с информацией, в развитии критического мышления, применении компьютерных технологий для решения учебных задач по разным предметам. Дети видят, что, например, поиск информации в интернете – это не просто развлечение, а инструмент для работы с информацией. В результате приходит понимание роли информации в жизни человека.

Например, в 5 классе, выполняя практические задания, обучающиеся ищут новые факты, учатся организовывать свое рабочее пространство, выполнять поиск по заданию и оформлять выполненную работу.



6. **В текстовом редакторе откройте документ Клавиатура.rtf из папки Заготовки:**

Памятник клавиатуре

Место расположения памятника	
Дата открытия памятника	
Материал, из которого изготовлен памятник	
Описание внешнего вида	
Графическое изображение	
Размеры	
Автор проекта памятника	

7. **Заполните таблицу на основании найденной вами информации. Можете выделять и копировать нужную информацию с Интернет-страниц.**
8. **Под таблицей укажите информационный источник — адрес сайта (сайтов), на котором вы нашли нужную информацию.**
9. **Сохраните файл в личной папке под тем же именем и закройте программу.**

Название животного:______________________

*Вид:*______________________

*Страна обитания:*______________________

*Что ест:*______________________

*Впадает ли в спячку:*______________________

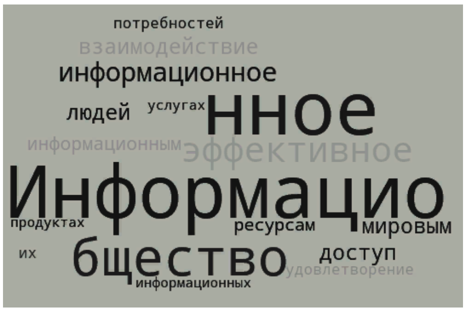
*Цвет/окрас:*______________________

*Содержится ли в неволе:*______________________

*Литературное произведение(где встречается это животное):*______________________

*Интересный факт:*______________________

В 9 классе учатся, например, работать с онлайн редакторами, писать определения, используя полученные знания и свой жизненный опыт.



Важной частью работы учителя по данному направлению является определение результативности деятельности и выявление уровня читательской грамотности. Например, в 5-6 классах, работая с текстовой информацией, учим находить и выделять заданные объекты текста, используя справочный материал и приводя примеры собственных жизненных ситуаций. В 7 классе ребята уже работают не со «сплошным текстом», а с элементами справочного материала, делая выводы по результатам собственных исследований, которые являются уникальными. Обучающиеся начинают осознано работать с информацией, анализируя, сопоставляя, выбирая нужное. У ребенка появляется мотивация и умение формировать свою точку зрения.

При работе с текстовыми задачами, обучающимся 9-11 классов предлагаются задачи с экономическим содержанием. Ребята должны использовать вычислительные таблицы для их решения. Школьники видят, что можно произвести большие математические расчеты, затрачивая при этом меньше времени, чем, если бы они все это делали вручную. Это осуществляется за счет использования различных формул, которыми обладают электронные таблицы. Экономические задачи способствуют формированию у учащихся экономического мышления. При их решении с помощью электронных вычислительных таблиц дети обучаются расчетам, оценивают сравнительную выгоду той или иной покупки, сделки, предпринимательской деятельности, развивают логическое мышление, учатся выбирать инструменты для достижения своих целей.

Например, задание №14 ОГЭ, в котором предлагается файл с данными в электронной таблице, требуется организовать обработку информации с помощью формул и различных встроенных функций данного приложения таким образом, чтобы были получены ответы на поставленные вопросы. Применяя разные формулы, диаграммы, а также способы организации данных, обучающиеся из большого потока выбирают нужные сведенья.

В задании №3 ЕГЭ приводится фрагмент базы данных экономического содержания, например, о поставках товаров в магазины районов города. База данных состоит из трёх таблиц. Необходимо организовать обработку информации таким образом, чтобы получить ответ на поставленный вопрос. Для этого учащиеся использую разные подходы к анализу данных и инструменты программного обеспечения.

Применение знаний, умений и навыков – важнейшее условие подготовки обучающихся к жизни, путь установления связи теории с практикой в учебно-воспитательной работе. Их применение стимулирует учебную деятельность, вызывает уверенность обучающихся в своих силах, что является необходимым при выполнении заданий, предложенных в ЕГЭ. Участник, который прошёл хорошую подготовку, может выбрать разнообразные методы решения, разные программные продукты для достижения своих целей. Например, при выполнении задания №15 ЕГЭ по информатике необходимо показать свое умение по вычислению логического значения сложного высказывания по известным значениям элементарных высказываний. Один из способов решения – это составление алгоритма, который реализуется на одном из современных языков программирования, а для этого нужно не только знать математические методы решения задачи, логические операции и законы, но и один из языков программирования. В задании №17 ЕГЭ, учащиеся выбирают самостоятельно метод решения, используя электронные таблицы или среду программирования по своему усмотрению.

В заключении хотелось бы отметить, что в современном мире для школьников важны не только фундаментальные знания по предметам, но и умение работать с большими объемами и разными видами информации, обладать креативным мышлением, иметь способность планировать исследования и грамотно объяснять процессы и явления.

Для достижения результатов в работе используются:

- Загадки, парадоксы, афоризмы, дилеммы, диспуты, инсценировки и т.д., тем самым вовлекая детей в учебный процесс;
- Учебное сотрудничество – учение в общении. Таким образом, дети получат возможность обмениваться мнениями о задании, смогут

обсудить пути решения, сравнить их способы и полученные результаты.

- Активная поисковая деятельность.
- Самостоятельная оценочная деятельность. Индивидуальная и групповая.
- Альтернативные ответы. Нестандартные вопросы. Разные пути и методы достижения, поставленной цели. Выбор программных продуктов для достижения цели работы.
- Читательская грамотность. Она необходима не только на уроках русского языка и литературы, но и на других учебных предметах. 20-30 процентов ошибок могут возникнуть из-за того, что дети не понимают смысл задания или не могут грамотно прочитать текст.

Таким образом, развитие навыков работы с информацией становится одним из приоритетных направлений работы учителя в реалиях современных требований к образованию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Л. Босова, А.Ю. Босова. Информатика. Учебник для 6 класса, 2010
2. Л.Л. Босова, А.Ю. Босова. Информатика. Учебник для 7 класса, 2010
3. [Электронный ресурс]: Приёмы формирования функциональной грамотности на уроках литературного чтения в начальной школе. Режим доступа: https://nsportal.ru/nachalnaya-shkola/materialy-mo/2021/08/19/priyomy-formirovaniya-funktsionalnoy-gramotnosti-na-urokah, свободный.
4. [Электронный ресурс]: Формирование функциональной грамотности на уроках информатики (из опыта работы учителя информатики МАОУ СОШ №5 Скрябиной Г.Н.). Режим доступа: https://infourok.ru/formirovanie-funkcionalnoj-gramotnosti-na-urokah-informatiki-iz-opyta-raboty-5671143.html, свободный.
5. [Электронный ресурс]: Электронное портфолио: Персональный сайт в системе «Современный Учительский Портал» (из опыта работы учителя г.Соль- Илецк Оренбургской области Кутеповой Н.В.). Режим доступа: https://infourok.ru/formirovanie-funkcionalnoj-gramotnosti-na-urokah-informatiki-iz-opyta-raboty-5671143.html, свободный.

УДК 372.851

О МЕТОДИКЕ ПРЕПОДАВАНИЯ ДИСЦИПЛИН ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКОГО ЦИКЛА

Хохлов Юрий Степанович
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва
E-mail: yskhokhlov@yandex.ru

Ключевые слова: *теория вероятностей и математическая статистика, методика преподавания.*

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые вопросы, связанные с методикой преподавания теории вероятностей и математической статистики, их приложений.

Вероятностно-статистические методы занимают одно из центральных мест при построении математических моделей сложных систем. Это относится как к техническим, так и социально-экономическим системам. Отсюда следует важность правильного построения комплекса дисциплин, охватывающего все разделы теории вероятностей и математической статистики и их приложений, необходимые при построении, анализе и применении математических моделей реальных систем. Данный доклад преследует две цели. С одной стороны, мы хотим поделиться опытом преподавания указанных дисциплин в различных университетах и факультетах, с другой стороны привлечь внимание преподавателей и сотрудников других факультетов к обсуждаемым вопросам. Все высказанные ниже суждения отражают личную точку зрения автора и никоим образом не претендуют на роль абсолютной истины. Более того, участники конференции приглашаются к активной дискуссии по этой тематике

Автор этого доклада на протяжении многих лет преподавал многочисленные дисциплины указанного цикла на факультете ПМиК ТвГУ, факультете ВМиК и экономическом факультете МГУ, факультете физико-математических наук РУДН, филиалах МГУ в Астане, Баку и Ереване, Совместном Российско-Китайском университете в Шеньчжэне. Сказанное далее отражает его опыт работы в данной области. Определены концептуальные подходы к организации обучения геометрии в классах физико-математического профиля.

1. Преподавание вероятностно-статистических дисциплин на математических специальностях

Основой, на которой строится преподавание всех остальных дисциплин указанного цикла, является курс теории вероятностей и математической статистики. Курс читается в двух семестрах и охватывает основные разделы теории вероятностей и математической статистики. Естественным продолжением этого курса является курс теории случайных процессов. В рамках этого курса изучаются динамические модели стохастических систем, в частности, цепи Маркова с дискретным и непрерывным временем, процессы рождения и гибели, ветвящиеся процессы, стационарные процессы, и некоторые прикладные задачи теории случайных процессов, среди которых особо следует отметить задачи фильтрации и прогноза.

Казалось бы, что преподавание этих курсов не должно вызывать особых затруднений, когда мы имеем дело с математиками. Однако это не так. При изучении других математических дисциплин студенты привыкли, что им сразу предъявлена готовая математическая модель, в рамках которой нужно провести те или вычисления или исследовать свойства модели. Например, в математическом анализе они обучаются поиску решения некоторых задач на максимум и минимум. В теории вероятностей очень часто задача формулируется неформально и сначала необходимо построить саму математическую модель. Это вызывает некоторые затруднения у студентов и требует развития некоторых навыков. В силу этого много времени в начале курса необходимо потратить на приобретение таких навыков. На начальном этапе не надо бояться затратить много времени на обсуждение таких вопросов как что такое элементарный исход, формальное и неформальное описание событий и операций над ними и подобных им. При этом для развития интуиции очень полезна апелляция к наглядным преставлениям изучаемых понятий. Например, при изучении свойств вероятностей полезно отметить, что они обладают в точности такими же свойствами, что и площади плоских фигур, свойства которых хорошо известны студентам из школьного курса математики и их повседневного опыта. Думаю, что подобные вопросы возникают и при преподавании других математических дисциплин: дифференциальных уравнений, уравнений математической физики, методов оптимизации и многих других.

Другая проблема характерна не только для теории вероятностей, а вообще для всех математических дисциплин, особенно в последнее время. После изучения того или иного курса у многих студентов возникает вопрос: а зачем все это нужно. Поэтому общий курс теории вероятностей и математической статистики и сопутствующий ему курс теории случайных процессов очень полезно дополнить некоторым количеством спецкурсов более прикладного характера.

Мы очень рекомендуем следующие курсы:

- Эконометрика
- Актуарная математика (математическая теория страхования)
- Многомерные методы статистики
- Эконометрическое моделирование
- Стохастическая финансовая математика
- Модели социально-экономических систем и методы прогнозирования

•Модели телетрафика

В этих курсах излагаются специальные разделы теории вероятностей и математической статистики, развивающие общий курс, а также некоторые их приложения. Например, корреляционный и регрессионный анализ, кластерный , дискриминантный и факторный анализы, методы оценки стоимости страховых полисов, методы оценивания производных ценных бумаг и их применения в задачах управления финансовым риском, построение конкретных количественных моделей социально-экономических систем и их применения для анализа специальных задач (макро- и микромодели экономики, анализ распределения доходов населения, демографические модели, маркетинговые исследования, прогноз динамики реальных систем и некоторые другие). Многие из этих курсов после соответствующей адаптации были бы полезны и студентам других специальностей и факультетов. В последнее время стали очень популярны вопросы, связанные с методами так называемого машинного обучения. В рамках таких курсов обсуждают вопросы построения так называемых нейронных сетей, с помощью которых решают разнообразные прикладные задачи, в частности, задачу прогноза. Те, кто немного знаком с данной тематикой, знают, что одной из основных задач здесь является настройка сети, которая производится с помощью байесовских методов из теории вероятностей.

Важной частью обучения студентов является знакомство их с современными пакетами прикладных программ по статистике и их применение для решения прикладных задач. Студенты должны быть знакомы с несколькими пакетами такого типа, знать их преимущества и недостатки. Математики-прикладники должны быть знакомы с основными принципами и методами построения таких пакетов и уметь, в случае необходимости, создавать специализированные мини-пакеты для решения каких-либо специфических задач, дополняя их необходимыми средствами обработки, применяемыми только в этой области. Но не нужно этим особенно увлекаться. Если существует хороший универсальный пакет, с помощью которого можно решить вашу задачу, то лучше освоить этот пакет и работать с ним. Это сэкономит время и средства и позволит научиться решать и целый набор других аналогичных задач. Например, преподавание таких предметов, как вводный курс эконометрики и дальнейших продвинутых курсов совершенно немыслимо без набора хорошо подобранных реальных примеров, анализ которых проводится с помощью того или иного статистического пакета. Одним из хорошо организованных, ориентированных на построение и анализ эконометрических моделей, является пакет EViews. В связи с этим рекомендуется обратить внимание на прекрасно написанный учебник [6] с хорошими примерами, взятыми из реальной экономической практики. В последнее время все более популярным является пакет R, в силу его свободной доступности и создания большого числа средств решения многих статистических задач. Конечно, существует и большое число других статистических пакетов, например, SAS, Statistica и другие.

По многим курсам и спецкурсам на кафедре математической статистики и системного анализа факультета ПМиК ТвГУ подготовлены учебные пособия (см., например, [1-4]). Кроме того, преподавателями кафедры подготовлено большое число учебно-методических разработок по проведению лабораторных и практических занятий. При этом подобраны специальные серии упражнений, имитирующие реальное исследование (см. [5]).

Важное значение при освоении общих курсов имеют расчетно-графические работы, в ходе выполнения которых студенты самостоятельно изучают некоторый раздел курса и затем производят расчеты для некоторых модельных примеров. Это развивает у студентов навыки самостоятельной работы.

2. Преподавание вероятностно-статистических дисциплин на гуманитарных специальностях

Наш опыт общения со студентами и специалистами гуманитарного профиля говорит о том, что они имеют минимальные общематематические знания. При этом, так как сведения из теории вероятностей и математической статистики излагаются в курсе высшей математики и зачастую преподавателями, которые не являются специалистами в этой области математики, то на них остается очень мало времени. Это приводит к тому, что студенты усваивают некоторые формальные правила вычисления каких-то величин, не понимая, зачем это нужно делать и каков смысл полученных результатов.

Вторая трудность состоит в том, что при решении реальных задач в гуманитарных науках необходимо применять довольно сложные вероятностно-статистические модели, о которых многие математики, не являющиеся специалистами в области теории вероятностей и математической статистики, никогда и не слышали. Нашим глубоким убеждением является то, что курсы подобного типа должны читать наиболее квалифицированные специалисты. Прочитать такой курс гуманитариям гораздо сложнее, чем математикам.

Далее, мы считаем, что все основные понятия в курсе должны быть аккуратно определены. Это глубокое заблуждение, будто изложение на интуитивном уровне более понятно студентам-гуманитариям. Логические мышление присуще всем людям. Другое дело, что многие результаты можно приводить без доказательства, апеллируя к тем или иным наглядным образам и примерам, но таким, которые не искажают суть дела. Например, изучая свойства вероятностей, можно использовать знания студентов о свойствах площадей плоских фигур. Кроме того, после введения нового понятия или получения нового результата нужно приводить пример, относящийся к реальной практике, хотя бы условный.

Последнее замечание состоит в том, что полезно разделить подобный курс на три части: элементарное введение в теорию вероятностей и математическую статистику с упором на идейную сторону, изложение продвинутых разделов математической статистики, изучение прикладных задач с реальным содержанием из предметной области гуманитарной науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хохлов Ю.С., Захарова И.В., Сидорова О.И. Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие. ТвГУ, Тверь, 2014, - 220 с.

2. Захарова И.В., Хохлов Ю.С. Теория случайных процессов: Учебное пособие. ТвГУ, Тверь, 2015. – 123 с.

3. Хохлов Ю.С. Эконометрика. Вводный курс: Учебное пособие. – М.: Издательский отдел факультета ВМиК МГУ им. М.В. Ломоносова, 2007. -- 120 с.

4. Иванова Н.Л., Хохлов Ю.С. Актуарная математика: Учебное пособие. ТвГУ, Тверь, 2009. – 100 с.

5. Сидорова О.И., Захарова И.В., Хохлов Ю.С. Математическая статистика: практикум по получению первичных профессиональных умений и навыков, в том числе первичных умений и навыков научно-исследовательской деятельности: учеб. пособие. -- Тверь: твер. гос. ун-т, 2018. -- 126 с.

6. Studenmund A.H. (2001) Using Econometrics: A Practical Guide, 4-th Edition, with EViews 3.1 Student Version Software -- Addison Wesley. – 662 p.

7. Franses Ph. H. and Paap R. (2001) Quantitative models in Marketing Research. -- Cambridge University Press. – 221 p.

УДК 004.65, 004.056

ОБ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ ПРОЕКТАХ ПО ДИСЦИПЛИНАМ СУБД И ОПЗБД ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТИ «КОМПЬЮТЕРНАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ»

Цирулёва Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *проектирование баз данных, уровни моделирования, SQL-запросы, защищенная база данных, методы аутентификации.*

Аннотация. В работе предложены сценарии индивидуальных проектов по дисциплинам «Системы управления базами данных» (СУБД) и «Основы построения защищенных баз данных» (ОПЗБД), изучаемых на специальности «Компьютерная безопасность».

Изучение дисциплин СУБД [1] и ОПЗБД на специальности «Компьютерная безопасность» предполагает большое разнообразие видов работ: лекции, лабораторные занятия в дисплейных классах, на которых студенты работают с тестовой учебной базой данных, контрольные работы, подготовка и выступления студентов с докладами и презентациями, а также создание индивидуальных проектов.

На 4 курсе студенты выполняют индивидуальный проект в рамках курсовой работы по дисциплине СУБД. Этот вид работы преследует две цели. Во-первых, студент должен научиться проектировать базы данных, проходя все уровни моделирования, что соответствует требованиям компетенции ОПК-14.1: проектирует реляционные базы данных и осуществляет нормализацию отношений при проектировании реляционной базы данных. Во-вторых, научиться формулировать запросы, отвечающие бизнес-логике проекта и выражать их в форме SQL-запроса, что соответствует требованиям компетенций ОПК-14.2: настраивает и применяет современные системы управления базами данных и ОПК-14.3: составляет запросы для поиска информации в базах данных. Студенты должны освоить два метода проектирования баз данных: с помощью построения ER-диаграмм и с помощью нормализации.

Как лабораторные работы, так и индивидуальные проекты большинство студентов выполняют с СУБД MySQL 8 [2], но желающие, по согласованию с преподавателем, могут выбрать другую СУБД, например, MS SQL Server или PostgreSQL.

Название курсовой работы может быть сформулировано в произвольной форме, отражающей ее содержание. Необходимое условие: указание предметной области. К выбору предметной области предъявляются следующие требования: тему курсовой работы студент выбирает самостоятельно, но она должна быть согласована с преподавателем, темы не должны повторяться, можно использовать и модифицировать тему из предлагаемого преподавателем списка, например в [1], спроектированная модель базы данных должна содержать не менее пяти основных сущностей. Ниже приводится содержание курсовой работы.

Содержание курсовой работы

1. Описание предметной области. Назначение базы данных, предполагаемые запросы
2. Модель предметной области. (Объекты, информация о которых должна храниться в базе данных, и сами сведения, которые требуется хранить об этих объектах (предполагаемые сущности и их характеристики), допущения, ограничения, анализируемые формы документов: квитанции, договоры, накладные и т. д.)
3. Логическая модель данных
   a. Построение E-R диаграммы
      i. Выделение сущностей. Свойства сущностей и первичные ключи
      ii. Связи между сущностями (требуется указать допущение (ограничение), которому соответствует определенная связь между сущностями)
      iii. Переход к физической модели. Внешние ключи, таблицы-проекции
      iv. E-R диаграмма физической модели данных
   b. Нормализация базы данных
      i. Универсальное отношение
      ii. Функциональные зависимости (ФЗ). Первичный ключ (ПК) универсального отношения (ПК получается в результате анализа всех ФЗ, которые следуют из модели предметной области)
      iii. Переход ко второй нормальной форме (2НФ)
      iv. Переход к третьей нормальной форме (3 НФ)
      v. Переход к НФ более высоких порядков: нормальной форме Бойса-Кодда (НФБК), четвертой нормальной форме (4НФ), пятой нормальной форме (5НФ), если требуется
4. Физическая модель данных
   a. Создание структуры базы данных. Таблицы, ключи (ПК и внешние ключи (ВК)), ограничения, индексы
   b. Заполнение таблиц. Скрипты запросов, вывод содержимого таблиц
   c. Дамп базы данных
5. Запросы к базе данных (30 запросов)
   a. Для каждого запроса: словесная формулировка запроса, формулировка SQL-запроса, результат выполнения запроса в виде таблицы
6. Выводы
7. Список литературы

На 5 курсе студенты выполняют индивидуальный проект по дисциплине ОПЗБД, который является продолжением проекта, созданного в рамках курсовой работы на 4 курсе. Целью данного проекта является применение всех изученных средств для защиты базы данных, спроектированной в ходе выполнения курсовой работы по дисциплине СУБД и построение защищенной базы данных, что соответствует требованиям компетенции **ОПК-14:** способен проектировать базы данных, администрировать системы управления базами данных в соответствии с требованиями по защите информации. Ниже приводится содержание проекта.

Содержание проекта

1. Структура базы данных «...». ER- диаграмма. (Если база данных была изменена по сравнению с предыдущей, или в нее были внесены новые записи, поместить в отчет соответствующие скрипты)
2. Представления. (10 – 15 представлений, в том числе – с проверкой ограничений)
   2.1. Описание (назначение представления), скрипт, реализация и результаты
3. Хранимые процедуры и функции. (10 –15 процедур / функций, в коде использовать по максимуму операторы PL/SQL)
   3.1. Описание (назначение процедуры / функции), скрипт, реализация и результаты
4. Триггеры. (10 – 15 триггеров)
   4.1. Описание (назначение триггера), скрипт, реализация и результаты.
5. Дискреционная модель разграничения доступа в MySQL (матрица доступа, создание пользователей, предоставление им привилегий, тестирование работы созданных средств защиты, отзыв привилегий, удаление пользователей)
6. Ролевая модель разграничения доступа
   6.1. Словесное описание и определение ролей и наборов их привилегий к объектам базы данных
   6.2. Схема ролей и их привилегий (графическое изображение, матрица доступа)
   6.3. Иерархия ролей (словесное описание и графическое изображение)
   6.4. Реализация ролевой модели разграничения доступа в MySQL (создание ролей, наделение их привилегиями, предоставление ролей пользователям, создание триггеров и процедур, проверяющих права пользователей на выполнение определенных действий, тестирование работы созданных средств защиты, отзыв ролей, уничтожение ролей)
7. Мандатная модель разграничения доступа
   7.1. Словесное описание и определение уровней секретности для пользователей и строк одной из таблиц
   7.2. Имитация мандатной модели на примере одной из таблиц с помощью специального столбца, триггеров, процедуры и представлений, тестирование работы созданных средств защиты

8. Система аудита
    8.1. Реализация аудита операций с помощью триггеров. (Сохранение данных об операциях в таблице Архив: имя пользователя, дата, название операции, название таблицы / таблиц, название атрибута, старое и новое значение, свои (необходимые по смыслу задачи) данные)
    8.2. Описание (назначение триггера), скрипт, реализация и результаты.
9. Использование криптографических средств защиты, которыми располагает СУБД
10. Дамп построенной защищенной базы данных, включающий все возможные средства защиты.
11. Выводы
12. Список литературы

Так как в MySQL 8 реализованы дискреционная и ролевая модели доступа, но не реализована мандатная модель разграничения доступа, а студенты знакомятся с реализацией последней модели на лекции на примере СУБД Oracle, то им предлагается использовать следующий сценарий создания имитации мандатной модели для MySQL 8.

Сценарий создания мандатной модели

1. **Мандатная модель разграничения доступа** подразумевает предоставление пользователям доступа к записям соответствующего уровня секретности в некоторой таблице БД.
    1.1. Пользователь может получить доступ на чтение (select) к записям своего уровня секретности и ниже.
    1.2. Пользователь может получить доступ на запись (insert) записей своего уровня секретности и выше.
2. **Словесное описание мандатной модели**
    2.1. Выбрать таблицу для реализации мандатной модели mand_tab.
    2.2. Определить пользователей и их права по выполнению операций с записями таблицы.
    2.3. Для разграничения ответственности за выполнение операций с записями таблицы ввести уровни секретности пользователей, соответствующие их привилегиям по работе с записями.
    2.4. Установить каждому пользователю уровень секретности.
3. **Реализация мандатной модели**
    3.1. Добавить в таблицу mand_tab столбец level с правами (метками) доступа.
    3.2. Создать пользователей с паролями и назначить им роли по умолчанию (совпадающие с именами пользователей).
    3.3. Создать таблицу user_levels с двумя столбцами user_name и user_level, в которой будут храниться уровни секретности пользователей.

3.4. Заполнить таблицу user_levels: определить для созданных пользователей уровни секретности.

3.5. **Реализация вставки**

3.5.1. Написать триггер вставки before insert для таблицы mand_tab, который осуществляет контроль за вставкой записей в эту таблицу. В триггере выполнить следующие операции:

3.5.1.1. С помощью функции USER() определить имя текущего (активного) пользователя.

3.5.1.2. Определить его уровень доступа по таблице user_levels.

3.5.1.3. Если уровень секретности пользователя не позволяет ему осуществлять данную операцию (значение метки вставляемой записи не соответствует метке пользователя – см. п. 1.2), вызвать сообщение об ошибке (например, с помощью signal sqlstate '50005' set message_text = 'Сообщение об ошибке').

3.5.2. После создания триггера выполнить вставку от имени каждого пользователя.

3.5.3. Распечатать системные сообщения и результаты вставки в таблицу.

3.6. **Реализация обновления**

3.6.1. Написать триггер обновления before update для таблицы mand_tab, который осуществляет контроль за обновлением записей в этой таблице. В триггере выполнить следующие операции.

3.6.1.1. С помощью функции USER() определить имя текущего (активного) пользователя.

3.6.1.2. Определить его уровень доступа по таблице user_levels.

3.6.1.3. Если уровень секретности пользователя не позволяет ему осуществлять данную операцию (значение метки обновляемой записи не соответствует метке пользователя), вызвать сообщение об ошибке (например, с помощью signal sqlstate '50005' set message_text = 'Сообщение об ошибке').

3.6.2. После создания триггера выполнить обновление от имени каждого пользователя.

3.6.3. Распечатать системные сообщения и результат обновления таблицы.

3.7. **Реализация удаления**

3.7.1. Написать триггер удаления before delete для таблицы mand_tab, который осуществляет контроль за удалением записей из этой таблицы. В триггере выполнить следующие операции.

3.7.1.1. С помощью функции USER() определить имя текущего (активного) пользователя.

3.7.1.2. Если метка доступа пользователя не соответствует метке доступа удаляемой записи, вызвать сообщение об ошибке (например, с помощью signal sqlstate '50005' set message_text = 'Сообщение об ошибке').

3.7.2. После создания триггера выполнить удаление записи из таблицы mand_tab от имени каждого пользователя.

3.7.3. Вывести системные сообщения и таблицы с результатами.

3.8. Реализация выборки

3.8.1. Написать хранимую процедуру select_ mand_tab без параметров, которая читает записи из таблицы mand_tab, соответствующие уровню секретности пользователя. Внутри процедуры выполнить следующие операции:

3.8.1.1. С помощью функции USER() определить имя текущего (активного) пользователя.

3.8.1.2. Определить его уровень доступа по таблице user_levels.

3.8.1.3. Выбрать из таблицы mand_tab записи, соответствующие правам доступа на чтение этого пользователя – для этой цели использовать представления.

3.8.1.4. Если уровень секретности пользователя не позволяет ему осуществлять данную операцию (значение метки обновляемой записи не соответствует метке пользователя – см. п. 1.1), напечатать соответствующее сообщение.

3.8.2. Выполнить созданную процедуру для каждого пользователя (роли).

3.8.3. Вывести системные сообщения и таблицы с результатами.

Как показывает опыт преподавания, студенты, выполнившие самостоятельно два предлагающихся проекта, более успешно овладевают компетенциями, планируемыми в качестве результата освоения дисциплин СУБД и ОПЗБД.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цирулёва В.М. Проектирование баз данных: учебно-методическое пособие по курсу «Системы управления базами данных». Тверь: Изд-во ТвГУ, 2014. 168 с.

2. MySQL 8. Полное руководство. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://www.rldp.ru/mysql/mysql80/index.htm (дата обращения: 14.03.2022).

УДК 378.14

О ПОДГОТОВКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ КАДРОВ В ТВЕРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Чемарина Юлия Владимировна
Тверской государственный университет, г. Тверь,
E-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь,
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *математическое образование, математический факультет ТвГУ, кузница научно-педагогических кадров.*

Аннотация. В работе говорится о том, что в настоящее время Тверской государственный университет является основным центром математического образования в Твери и Тверской области, главным источником кадров высшей квалификации с высочайшим педагогическим и научным потенциалом.

Математическое образование в современном мире признано одним из главных факторов развития интеллектуальных ресурсов и инновационного процесса. Поэтому одной из актуальных на сегодняшний день задач является подготовка высококвалифицированных специалистов в области математики и её приложений.

Тверской государственный университет – один из крупнейших региональных вузов России, ведущий подготовку математических кадров с конца XIX века и обладающий мощнейшим научно-педагогическим потенциалом. История подготовки педагогических кадров в нашем регионе начинается с 1 декабря 1870 года, когда в Твери открывается частное педагогическое учебное заведение «Тверская женская учительская школа П.П. Максимовича». В начале XX в. по распоряжению министра народного просвещения Временного правительства от 17 июня 1917 года на базе земской учительской школы создаётся учительский институт, который позже преобразуется в педагогический институт, а с 1 сентября 1971 года Калининский педагогический институт преобразуется в университет. 18 февраля 1972 года в Калининском драматическом театре состоялось торжественное открытие Калининского государственного университета, в 1990 году Калининский государственный университет был переименован в Тверской ([1, 2]).

К числу старейших факультетов вуза относится математический факультет, открытый в 1917 году и отметивший в декабре 2017 года 100-летие своего основания [3]. На факультете в разное время работали такие известные учёные и педагоги как Владимир Модестович Брадис, Алексей Иванович Маркушевич, Павел Петрович Коровкин, Николай Алексеевич Давыдов, Владимир Николаевич Никольский, Александр Моисеевич Рубинов, Лев Васильевич Тайков, Владимир Георгиевич Шеретов, Александр Васильевич Чагров.

В настоящее время Тверской государственный университет является основным центром математического образования в Твери и Тверской области, главным источником кадров высшей квалификации с высочайшим педагогическим и научным потенциалом [4]. Сегодня на математическом факультете Тверского государственного университета обучение студентов осуществляется по трём направлениям «Математика», «Математика и компьютерные науки», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», а также по специальности «Компьютерная безопасность». Многолетний опыт по подготовке специалистов в области фундаментальной и прикладной математики является гарантией нашей качественной работы и гарантией востребованности наших выпускников на рынке труда.

С 2017 года математический факультет Тверского государственного университета возобновил обучение студентов по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика с профилем подготовки «Преподавание математики и информатики», ориентированной на подготовку выпускников к осуществлению педагогической и научно-исследовательской деятельности в области математики и информатики, а с 2021 года обучение по направлению подготовки бакалавров 01.03.01 Математика реализуется по двум профилям подготовки: «Преподавание математики и информатики» и новому профилю – «Фундаментальная и прикладная математика». Обучение по новому профилю ориентировано на подготовку выпускников к осуществлению научно-исследовательской деятельности и области математики, её приложений и информационных технологий. [5]

Высокий уровень математических исследований поддерживается деятельностью учебных, научно-исследовательских лабораторий и научных центров. Тверской государственный университет ведёт активное научное сотрудничество с Лабораторией информационных технологий ОИЯИ г. Дубна, по теме: «Математическое моделирование физических процессов». Между университетом и ЛИТ ОИЯИ заключён договор о сотрудничестве. Преподаватели математического факультета принимают участие в совместных научных семинарах, консультациях, используют материально-техническую базу ЛИТ ОИЯИ для научных исследований и производственной практики студентов-математиков.

С 2017 года по 2019 год математический факультет трижды организовывал Всероссийскую научно-практическую конференцию «Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области», а с 2020 года проводит Всероссийскую научно-практическую конференцию «Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации». В работе конференций активное участие принимают преподаватели высшей школы, учителя-предметники, студенты и школьники.

На протяжении десятилетий взаимодействие со многими учебными заведениями Твери и Тверской области является одним из основных факторов развития факультета и вуза в целом. Тверской государственный университет имеет договоры о сотрудничестве практически со всеми общеобразовательными учреждениями г. Твери, в том числе с МБОУ СОШ № 17 с углубленным изучением математики, МОУ Гимназия № 12 и другими ведущими школами, лицеями и гимназиями, традиционно занимающими призовые места в математических олимпиадах регионального и всероссийского уровней. Академическая гимназия ТвГУ является собственной площадкой университета, позволяющей внедрять передовые образовательные технологии.

Математический факультет тесно сотрудничает с Тверской региональной общественной организацией «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области» (https://matem-tver.3dn.ru/) [6], принимает активное участие в работе областных педагогических конференций, участвует в проведении семинаров для учителей средних школ в рамках повышения квалификации учителей математики в ГБОУ ДПО ТОИУУ. Одним из важных направлений деятельности математического факультета является работа с одарёнными детьми, их выявление и дальнейшее развитие математических способностей. Мы предлагаем школьникам Тверского региона целый ряд бесплатных образовательных программ: «Школа по подготовке к ЕГЭ по математике, информатике и ИКТ», «Воскресные лектории», математическая олимпиада для школьников «МАТ-ОЛИМП». Мы пытаемся создать основу для нашего будущего, для будущего математики [7].

Математический факультет принимает активное участие по организации и проведении семинаров-встреч с одарёнными школьниками нашего региона в рамках образовательной программы, поддержанной Региональным центром выявления, развития и поддержки способностей и талантов у детей и молодёжи Тверской области «Орион» [9], тем самым, вовлекая детей в мир математики. Так, в октябре и декабре 2021 г. и марте 2022 г. силами преподавателей нашего факультета (к.ф.-м.н., доцент Баранова О.Е.; к.ф.-м.н., доцент Голубев А.А.; к.ф.-м.н., доцент Граф С.Ю., к.ф.-м.н., доцент Могилевский И.Ш., к.ф.-м.н., доцент, PhD Рыбаков М.Н.) проводились трёхдневные семинары «Математические проблемы и методы их решения» со школьниками Тверского региона. Ребята не только учились решать нестандартные задачи, задачи повышенной сложности по алгебре и геометрии, но и рассмотрели возможности реализации знаний математики в прикладных и жизненных ситуациях. Бесценный опыт получили

[9] http://oriontver69.ru/

старшеклассники от общения с ведущими преподавателями математического факультета ТвГУ, которые не только помогли ребятам закрепить, углубить и расширить знания, но и поделились научным и жизненным опытом, рассказали о развитии математической науке в России и мире, о навыках, необходимых современному учёному, о центрах математического образования[10].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тверской государственный университет: Исторический очерк / ТвГУ; под. ред. А.Н. Кудинова. – 2-е изд., пер. и доп. Тверь: ОГУП «Тверское областное книжно-журнальное издательство». 2001, 192 с.
2. История ТвГУ в документах / под ред. С.Н. Смирнова, О.К. Ермишкиной. Тверь: Лилия Принт. 2006, 264 с.
3. Голубев А.А., Чемарина Ю.В. Столетие физико-математического образования в Верхневолжском регионе / В сборнике Столетие физико-математического образования в Верхневолжском регионе: сб. науч. тр. научной конф. (7 декабря 2017 г., г. Тверь). Тверь: Твер. гос. ун-т. 2018, 116 с. С. 50–57.
4. Чемарина Ю.В., Голубев А.А., Кратович П.В., Шаповалова И.А. О реализации концепции развития математического образования в Российской Федерации на математическом факультете Тверского государственного университета / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы научно-практической конференции. 2017. С. 162–165.
5. Баранова О.Е., Голубев А.А. Направление 01.03.01 Математика: подготовка специалистов в области математики и её преподавания на математическом факультете Тверского государственного университета / В сборнике Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы II Всероссийской научно-практической конференции. Тверь, 2021. С. 22–29.
6. Голубев А.А. Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области» / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы научно-практической конференции. 2017. С. 64–68.
7. Чемарина Ю.В., Голубев А.А. Математическое образование в Тверском регионе / Тезисы Всероссийского съезда учителей и преподавателей математики и информатики, 18−19 ноября 2021 года, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова https://event.msu.ru/congress/mct-theses

[10] https://vk.com/oriontver69?w=wall-206106998_534

УДК 37.016:51

РАЗВИТИЕ ИНТЕЛЛЕКТА. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СПОСОБНОСТИ

Черепанова Оксана Николаевна
МОУ СОШ№46, г. Тверь
E-mail: *oksana_cherepanova_1991@mail.ru*

Ключевые слова: *интеллект, математические способности, способности.*

Аннотация. В статье рассматриваются математические способности как индивидуально-психологические особенности деятельности человека. Автор выделяет виды, структуру и специфичность математических способностей.

Разную профессиональную успешность людей, оказавшихся в одинаковых условиях, кроме личностных качеств, объясняют степенью развития способностей человека. Там, где один человек максимально успешен, достигает мастерства, другой, при всем своем старании, лишь определенного среднего уровня. Существуют виды деятельности, например наука, искусство, в которых успешен лишь человек с определенными способностями.

Интеллект – в переводе с латинского intellectus – понимание, познание; intellectum – разум. Проблема развития интеллекта отсылает нас к способностям.

В психологии различаются задатки, способности, одарённость

Дружинин В. Н. в своей работе «Психология общих способностей» определяет задатки, как врождённые, генетически детерминированные особенности центральной нервной системы или отдельных анализаторов, являющиеся предпосылками развития способностей.

Способности – это индивидуально-психологические особенности, определяющие успешность выполнения деятельности или ряда деятельностей, несводимых к знаниям, умениям и навыкам.

Одарённость – это системное развивающееся в течение жизни качество психики, определяющее возможности достижения человеком исключительно

высоких результатов в одном или нескольких видах деятельности по сравнению с другими людьми [1].

Таким образом, задатки являются врождёнными, а способности и одарённость не даются с рождения, а развиваются в течение жизни. Поэтому

в процессе обучения школьников следует развивать задатки учащихся, доводя их до способностей, а способности до одарённости.

Большой вклад в разработку теории способностей внес Б. М. Теплов.

Основные положения его теории:

1. Под способностями понимаются индивидуально-психологические особенности, отличающие одного человека от другого.

Например, для музыканта – это не длинные пальцы рук, а прежде всего музыкальный слух, чувство ритма.

2. Способностями называют не всякие индивидуальные особенности, а лишь такие, которые обеспечивают успешную деятельность.

Таким образом, под способностями понимают те психические свойства и качества личности, которые служат необходимым условием успешного выполнения деятельности.

Способность может существовать только в процессе деятельности и развития человека. Способности — прижизненное образование, имеющее врожденную основу. Если он перестает ею пользоваться, она угасает.

Говоря о способностях, то имеем ввиду способности к чему-либо конкретному – к математике, литературе, музыке и т. д. Любая способность есть способность к какой-либо деятельности. Вместе с тем есть такие способности, которые проявляются только в связи с определенным видом деятельности. Поэтому способности человека разделяют на специальные и общие:

- *Специальные* способности – это способности, проявляющиеся только в отдельных видах деятельности (художественные, музыкальные, математические и т. д.).
- *Общими* способностями называют такие, которые проявляются во всех видах деятельности человека (умственные способности, развитая ручная моторика, память и т. д.). Это способность к обучению

Люди с хорошо развитыми общими способностями легко обучают, они эрудированные, с ними интересно общаться, так как они много знаю, но выбор профессии у них, как правило затруднен и они не всегда становятся профессионалами своего дела.

Л. А. Ясюкова в своих исследованих общих способностей опирается на положения в учении Л. С. Выготского о понятийном мышлении. Она выделяет несколько компонентав в составе понятийного мышления [3]:

- Интуитивный компонент понятийного мышления (умение выделять существенное, главное в описательном и неструктурированном материале; умение понимать со слуха, сразу выхватываю суть)
- Логический компонент понятийного мышления (умение выделять объективные причино-следственные связи, умение строить доказательства, умение понимать зависимости, законы и причино-следственная связь в формулах)
- Понятийная категоризация (умение обобщать, систематизировать информацию категориально строя пирамиду понятий)

Л. С. Выгодский говорил, что мышление представляет собой не отдельные операции, а это целая структура, то есть пирамида понятий.

Понятийное мышление характеризует общую способность к обучению. Те или иные операции понятийного мышления входят в базовые структуры способностей к конкретным видам деятельности.

Например, экономисту плюс к общим способностям требуется абстрактное мышление, математические навыки. Для инженеров необходимы кроме, всех компонентов понятийного мышления, абстрактое мышление, образный синтез, пространственный анализ.

Математические способности – индивидуально-психологические особенности деятельности человека в изучении и творческом развитии математики. В. А. Крутецкий разделяет математические способности на два вида: способности к изучению школьного курса математики и способности к научному математическому творчеству. Он пишет: «...каждый нормальный человек обладает задатками в той мере, в какой это необходимо для развития способностей в усвоении школьного курса математики. Но далеко не всякий обладает задатками для развития высшего уровня математических способностей, связанного с научным творчеством, открытием нового» [2].

Следует отметить, что в настоящее время всех учащиеся школы можно условно разделить на две неравные группы: способных и неспособных усвоить математику. Примерно 5-6 % детей начальной школы испытывают устойчивые трудности при овладевании счетными навыками. Данное нарушение, называется дискалькулия. Оно классифицируется в МКБ-10 (F81.2) как специфическое расстройство арифметических навыков, в МКБ-11 (MB4B.5) – символические дисфункции. Дефицит связан с неспособностью овладеть базовыми вычислительными навыками сложения, вычитания, умножения и деления. И как следствие, неспособность усвоить более абстрактные математические навыки в тригонометрии, геометрии и др. Другая группа детей имеет математические способности, достаточные для изучения предмета.

Математические способности – сложное структурное психическое образование. В понятие «математические способности» входят:

1) Способность получать математическую информацию.

Способность воспринимать формализованные математические объекты, а именно, математические понятия, их отношения, формулировки аксиом, доказательства математических теорем, содержание математических задач и тому подобное.

2) Способность быть внимательным, а при решении задач и восприятии доказательств – способность к сосредоточенному вниманию.

Для восприятия же сложных задач часто нельзя обойтись без концентрированного внимания.

3) Развитая математическая память.

Такая память, как и внимание, является структурной составляющей математических способностей. Математическая память является обобщенной памятью на математические отношения, схемы рассуждений и доказательств, методы решения задач и подходы. Способные ученики запоминают, в основном, обобщенные и свёрнутые структуры. Такое запоминание экономично, позволяет не загружать мозг запоминанием мелочей и быстро извлекать из памяти необходимые сведения. В некоторых случаях нет необходимости запоминать все конечные результаты, иногда проще запомнить ход рассуждений.

4) В структуру математических способностей входит способность к воображению, умению опираясь на предыдущий опыт представить идеальный результат до того, как он будет реально достигнут.

Например, прежде чем посторить график функции ученик должен провести анализ функции и представить ее график.

Надо отметить, что в структуре математических способностей не являются обязательными, хотя и могут оказаться полезными, следующие способности человека, которые нейтральны по отношению к математическим способностям:

а) быстрота мыслительных процессов, то есть характеристика времени протекания мыслительных процессов;

б) вычислительные способности;

в) хорошая память на числа и формулы;

г) способность наглядно представлять абстрактные

математические понятия и отношения;

д) способность к пространственным представлениям далеко не всегда присуща математикам-исследователям.

Математические способности весьма специфичны в силу следующих положений:

1) Поле деятельности математиков – это количественные отношения и пространственные формы действительного мира.

2) Высокий общий интеллект не гарантирует высоких математических способностей, так же как и математические способности не могут означать развитый общий интеллект. Общий интеллект более связан со стереотипным мышлением, а высокое творческое мышление, в том числе и математическое, отклоняется в сторону оригинальности.

Зачастую математические способности являются не единственными способностями. С. В. Ковалевская была не только выдающимся математиком, но и писателем. Известный математик В. Я. Буняковский был поэтом; английский математик Ч. Л. Доджсон под псевдонимом Льюис Керрол был талантливым детским писателем, автором книги «Алиса в стране чудес».

Несколько слов о математически одарённых учениках. Развитию математических способностей учеников способствуют регулярные занятия учащихся с математиком-исследователем. Непосредственное общение с творцами математики само по себе служит развитию математических способностей учащихся школ, выбору ребятами направлений для самостоятельных занятий.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дружинин В. Н. Психология общих способностей. СПб.: «Питер», 1999. С. 348-353.

2. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М.: Просвещение, 1968. С. 76–77

3. Ясюкова Л.А. Закономерности развития понятийного мышления и его роль в обучении. Спб.: ГП ИМАТОН, 2005. – 256 с.

УДК 511.12

ТЕХНОЛОГИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ОБУЧЕНИЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Шаповалова Алёна Анатольевна
Муниципальное образовательное учреждение
средняя общеобразовательная школа № 25, г. Тверь
E-mail: fedotova99@rambler.ru

Ключевые слова: *технология, дифференцированное обучение, групповая работа, опорные задачи.*

Аннотация. В статье рассматривается применение технологии дифференцированного обучения на разных этапах урока и при составлении задания на дом. Эта технология сегодня прочно вошла в школьное преподавание, является эффективной и позволяет проводить содержательные и интересные уроки, обеспечивающие достижение поставленных целей обучения с учетом специфики конкретного класса и ученика.

«Страшная это опасность – безделье, безделье за партой; безделье шесть часов подряд ежедневно, безделье месяцы и годы. Это морально калечит человека и ничто не может возместить того, что упущено в самой главной сфере, где человек должен быть тружеником, – в сфере мысли».

В. А. Сухомлинский

По своим природным способностям, уровню восприятия, темпу работы, специфике мыслительной деятельности обучающиеся отличаются друг от друга. И, как правило, учитель чаще всего выбирает формы и методы обучения, направленные на достижения результатов средним учеником. И при таком отношении «сильные» ученики теряют интерес к учению, а «слабые» – ищут «обходные» пути. Поэтому основная задача учителя – раскрыть индивидуальные способности каждого ученика, чтобы на уроке активизировать, стимулировать и направлять процесс мышления всех обучающихся.

Эффективным способом развития всех учеников и индивидуально каждого является дифференциальное обучение, которое особенно необходимо в школах, где нет параллелей. И важным моментом дифференциации обучения является размещение обучающихся в классе в зависимости от вида работы:

- по одному;
- по парам;
- по группам;
- по вариантам;
- по «творческим союзам».

Методика работы:

<u>Первый этап – изучение нового материала</u>

Новый материал рассматривается крупными блоками, используются опорные схемы. Это позволяет лучше осмыслить и осознать логические взаимосвязи между темами. После изучения новой темы обучающимся объявляется, что нужно знать на «3», на «4» и на «5», и они сами решают, на какую оценку готовиться. Здесь же проверка теоретического материала, закрепление полученных знаний и умений: задания разделяются на обязательную и дополнительную часть, при этом каждый приступает к последующему заданию после положительной оценки выполнения предыдущего задания (ставится «+»), а если есть ошибка, получают консультацию учителя или «сильного» ученика и исправляют решение. Если какое-то задание вызывает затруднение у большинства обучающихся, то оно выполняется на доске с комментариями. Для «слабых» обучающихся задания подбираются так, чтобы они снова и снова возвращались к основным моментам темы. В конце урока можно оценить работу всех обучающихся или выборочно, на усмотрение учителя.

<u>Второй этап – дифференцированная домашняя работа</u>

Домашняя работа дается дифференцированно как по теоретическому материалу, так и по практической части. Практическая часть дается на определенный срок. При проверке, если в задании есть ошибка, ставится «-», это означает, что ошибку нужно исправить и снова принести решение на проверку. Затем проводится зачетная работа: из всего домашнего задания выбираются наиболее значимые задачи, которые объявляются обучающимся с тем, чтобы они подготовились к следующему уроку, на котором каждый выполнит 50% от тех, что были названы.

<u>Третий этап – проверка усвоения пройденного материала</u>

Возможны несколько вариантов этого этапа. Одним из которых является подбор учителем заданий, выполняемых «сильными» обучающимися в режиме «самоконтроля», а «средние» и «слабые» обучающиеся поочередно работают у доски. Второй вариант: обучающиеся рассаживаются по группам: по заготовленным вопросам «сильные» обучающиеся опрашивают друг друга, «средних», «средние» – «слабых», а в заключении проводится практическая работа. И третий вариант - это групповая работа или самостоятельная, представляющая собой набор задач разной степени сложности: вначале всем дается задание с простой задачей, решив ее, обучающийся (при условии правильного выполнения) берет другое задание и так в течение определенного (запланированного) времени. На таких уроках присутствует дух соревнования, что активизирует работу ребят и позволяет дифференцировать их нагрузку.

<u>Четвёртый этап – организация базового повторения</u>

На этом этапе устраняются выявленные пробелы в материале, происходит разъяснение ошибок и недочетов в самостоятельных работах, здесь же идет подготовка к зачёту или контрольной работе по теме. Поэтому необходимо подобрать задачи, которые будут удовлетворять таким требованиям, как:

1) наличие «опорных задач»;
2) задачи, предназначенные для организации групповой и индивидуальной работы;
3) задачи, в которых изученная теория проявлялась бы наиболее разносторонне;
4) задачи, позволяющие организовать творческий поиск решения.

Особого внимания требует организация контроля усвоения опорных задач, этот материал не всеми усваивается одновременно, поэтому здесь очень важно применение дифференцированного контроля. Для организации эффективной учебной деятельности, с учетом уровня математических способностей и учитывая отношение друг к другу, класс делится на группы. Обязательным требованием является выполнение задания каждым учеником. Для повышения уровня активной познавательной деятельности важно соблюдение процедуры отчета за каждое выполненное задание и работа по жетонам, которые берут по очереди участники одной группы:

- ✓ «Делегат» - один из группы по выбору самих ребят должен отчитаться о выполненной работе.
- ✓ «Выбор учителя» - один из группы по выбору учителя должен отчитаться о своей работе.
- ✓ «Комментирование по цепочке» - учитель подходит к группе и каждый по очереди комментирует решение.
- ✓ «По вопросам» - учитель задает вопросы любому из группы.
- ✓ «На доверии» - решение задания засчитывается без какого-либо отчета.

При такой работе обучающиеся проверяют друг друга, помогают друг другу в решении задач. Эта работа имеет и контролирующий, и обучающий характер: усилено внимание к содержанию изучаемого материала, высокая работоспособность, формирование ответственности. Игровой момент способствует созданию познавательного мотива в учении, развитию «сильных» обучающихся, дает основной части класса получить прочные знания по изучаемой теме.

Пятый этап – зачётные или контрольные работы

Зачётные и контрольные работы проводятся также дифференцированно и состоят из трех частей: решение по образцу, тест и самостоятельное подробное решение.

Схема проведения урока алгебры в 10 классе по теме: «Логарифмы. Свойства логарифмов» с применением групповой работы.

Состав групп можно менять в зависимости от цели и задач групповой работы.

Цель урока: учить применять свойства логарифмов для преобразования выражений.

Ход урока:

1. Устная самостоятельная работа. (5–6 мин.) Даны 5-10 заданий, обучающиеся на листочках пишут только ответы. «Сильных» обучающихся проверяет учитель, «средних» и «слабых» проверяют «сильные» ученики.
2. Проверка теории (определение логарифма, свойства логарифмов). (10–12 мин.). К доске выходят «сильные» обучающиеся, остальные задают им вопросы. Учитель выступает в качестве наблюдателя, отмечает правильность ответов, при необходимости тоже спрашивает. После учитель доверяет им проверить знания у других групп обучающихся.
3. Работа по группам. (20–25 мин.). На доске для каждой группы записаны номера задач из учебника. Как только группа отчиталась по выполнению задания, рядом с соответствующим номером ставится «+». Виден результат работы класса в целом. Если группа справилась со семи заданиями, ей предлагается задание повышенной сложности, но отчитывается уже каждый за себя.
4. Итог урока. (2–5 мин.). Сообщаются итоги устной самостоятельной работы, оценки за знание теории и групповую работу.

Как показывает опыт работы, внедряемые элементы дифференцированного подхода позволяют выявить глубину и прочность умений и навыков всех обучающихся класса, сформировать мотивацию к самообразованию, активизируют стремление обучающихся к знаниям, они чувствуют себя ответственными за процесс обучения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Егошина Л. Технология дифференцированного обучения в условиях сельской школы / Л. Егошина // Математика. – 2008. - № 14. – С. 25-30.

2. Журавлёва Е. П. Современные педагогические технологии по ФГОС / Е. П. Журавлёва // Образовательная площадка МультиУрок – (https://multiurok.ru/files/sovriemiennyie-piedaghoghichieskiie-tiekhnologh-24.html)

3. Колягин Ю.М., Ткачёва М.В., Фёдорова Н.Е., Шабунин М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В.Ткачёва, Н.Е.Фёдорова, М.И.Шабунин]. – 8-е изд. – М.: Просвещение, 2020.

4. Фирсов В. В. Дифференциация обучения на основе обязательных результатов обучения. – М.: Просвещение, 1994.

УДК 514.82, 524.8

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ СОВРЕМЕННЫХ МОДЕЛЕЙ В ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ И КОСМОЛОГИИ

Шаров Герман Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru

Ключевые слова: *гравитация, космологические модели, наблюдательные данные.*

Аннотация. Рассматриваются математические (геометрические) идеи, лежащие в основе современных концепций и теорий в области гравитационных явлений и космологии, начиная с общей теории относительности А. Эйнштейна. В обзор включены стандартная космологическая модель ΛCDM с холодной темной материей и Λ-членом (темной энергией), гравитационные модели со скалярными полями, модели с $F(R)$ в лагранжиане, теории с инвариантами вида Гаусса-Бонне, модификации понятия метрики, модели с дополнительными пространственными измерениями, связь с теорией струн. Кратко описан критерий жизнеспособности теорий – соответствие современным наблюдательным данным.

Создание в 1916 общей теории относительности (ОТО) А. Эйнштейна вызвало переворот в теории гравитации и фактически привело к возникновению современной космологии – науки об устройстве и эволюции Вселенной как целого. В теории Эйнштейна тяготение есть результат искривленности пространства-времени, а гравитационное поле описывается метрическим тензором с компонентами $g_{\mu\nu}$, удовлетворяющими уравнениям Эйнштейна

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \gamma T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}.$$

Эти уравнения связывают метрику $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ пространства-времени и определяемый $g_{\mu\nu}$ тензор Риччи $R_{\mu\nu}$ (характеризующий его искривлённость) со свойствами заполняющей его материи с тензором энергии импульса $T_{\mu\nu}$. Здесь $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ – скалярная кривизна, $\gamma = 8\pi G/c^4$, G – ньютоновская гравитационная постоянная, ниже используем единицы, в которых скорость света $c = 1$, слагаемое с «космологической постоянной» Λ Эйнштейн ввёл в 1917 году в работе «Космологические соображения к общей теории относительности» для построения модели стационарной Вселенной.

Следующий шаг в приложении ОТО к космологии был сделан в работах А.А. Фридмана 1922 и 1925 гг., где он описал однородную изотропную Вселенную с веществом, обладающую положительной, нулевой или отрицательной скалярной кривизной ее пространственной части. Обозначив k – знак кривизны, запишем метрику (Фридмана-Робертсона-Уокера) 3+1-мерного пространства-времени

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)\,[(1 - k\,r^2)^{-1}\,dr^2 + r^2\,d\Omega]. \qquad (1)$$

Здесь $a(t)$ – масштабный фактор (радиус при k =1), $d\Omega$ – метрика 2-сферы.

Три модели Фридмана (при k = 1, 0, –1 и Λ = 0) описывают расширяющуюся Вселенную. Это предсказание было подтверждено в 1929 году Э. Хabблом, он обнаружил и описал связанное с расширением Вселенной разбегание галактик по закону

$$V = H_0 \cdot D,$$

где, V – скорость, D – расстояние до галактики, константа H_0 называется постоянной Хаббла. В однородной изотропной Вселенной постоянная H_0 равна современному (при $t = t_0$) значению параметра Хаббла $H(t)$:

$$H(t) = \dot{a} / a = (d/dt) \ \ln a, \qquad H(t_0) = H_0.$$

В 1998-1999 годах исследование фотометрического расстояния и красного смещения $z = a_0/a - 1$ сверхновых показало, что расширение Вселенной происходит с ускорением [1–4]. Это явление, подтвержденное более поздними наблюдениями, не описывается моделями Фридмана, для его объяснения были привлечены различные космологические модели, в частности, модель ΛCDM [3–5] с Λ-членом (темной энергией) и холодной темной материей. Космологическая постоянная Λ эквивалентна наличию вещества с отрицательным давлением $px = -\rho x,$ называемого темной энергией, и составляющего в модели ΛCDM около 70% в общем балансе в настоящее время. Остальная материя в этой модели представлена видимой составляющей (около 4%), включающей барионы и излучение, а также холодной темной материей (Cold Dark Matter) неизвестного происхождения, занимающей около 25% в общем балансе энергии. Темную материю и барионы удобно объединить, объединенная плотность такой пылевидной материи обозначим $\rho_m = \rho_c + \rho_b$, ее давление $\rho_m = 0$.

Модель wCDM отличается от модели ΛCDM тем, что уравнение состояния для темной энергии имеет более общий вид:

$$p_x = w\rho_x, \tag{2}$$

где w= const.

В этих моделях для однородной изотропной Вселенной (1) уравнения Эйнштейна приводятся к виду

$$3\frac{\acute{a}^2+k}{a^2} = \gamma\rho, \tag{3}$$

$$\acute{\rho} + \frac{3(\rho+p)\acute{a}}{a} = 0. \tag{4}$$

Решение уравнения непрерывности (4) для пылевидной материи имеет вид $\rho m = \rho_{m0}/a^3$, а для темной энергии в wCDM – вид $\rho x = \rho_{x0}/a^{3(1+w)}$.
Из уравнения Фридмана (3) следует выражение для параметра Хаббла, имеющее для ΛCDM следующий вид:

$$H(z) = H_0\sqrt{\Omega_m^0(1+z)^3 + \Omega_\Lambda + \Omega_k(1+z)^2}, \tag{5}$$

где $\Omega_m^0 = \gamma\rho_0/(3H_0)$ – доля барионной и темной материи в современном балансе плотности, $\Omega_\Lambda = \Lambda/(3H_0)$ – доля плотности темной энергии, $\Omega_k = -k/H_0$– вклад кривизны пространства-времени.

Если в уравнение (5) подставить $z = 0$ ($t = t_0$ наше время), то оно станет равенством

$$\Omega_m^0 + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1,$$

Модель ΛCDM достаточно хорошо описывает современные наблюдательные данные и, как правило, рассматривается в качестве стандартной модели [1 – 5]. Однако, в ней имеются проблемы, в частности,

– неясность природы темной энергии и темной материи,

– малая вероятность совпадения по порядку величины долей Ω_m^0 и Ω_Λ,

– чрезвычайная малость наблюдаемой космологической постоянной Λ,

– расхождение оценок H_0 (H_0 tension) коллабораций Planck (H_0= 67.4±0.5) и Hubble Space Telescope (SH0ES) (H_0= 74.03 ±\1.42 км/(с Мпк)) [6,7],

– плоскостность ($\Omega_k \approx 0$), проблема горизонта и др.

Эти проблемы привели к возникновению множества альтернативных космологических моделей в рамках ОТО и выходящих за ее пределы [1 – 17]:

– различные уравнения состояния темной энергии [6,8,9],

– модели с взаимодействием темных компонент [10 – 12],

– модели со скалярными полями [12.13],

– модели с вязкостью [14],

– модели с $F(R)$ в лагранжиане (объясняющие инфляцию и др.) [8.15,16],

– теории с инвариантами (Гаусса-Бонне и др.) [3,4],

– модели с дополнительными измерениями и др. [17].

Простейшая из моделей с модификацией вида (2) уравнения состояния темной энергии – модель *w*CDM, для нее из уравнений (3), (4) следует выражение для $H(z)$, подобное (5), но с заменой Ω_Λ на $\Omega_{x0}(1 + z)^{3(1+w)}$. Если ΛCDM имеет три независимых параметра: H_0 и два из трех Ω_i, то в *w*CDM к ним добавляется четвертый параметр w. Другие модификации этой модели предполагают, что в выражении (2) $p_x = w\rho_x$ множитель w зависит от a, например, в виде $w = w_0 + w_1(1 - a)$, $\rho_x = \rho_x/(A + a^B)$ и др. [8,9].

Предсказания моделей мы сравниваем с наблюдениями параметра Хаббла $H = H(z)$, с имеющимися данными по сверхновым типа Ia, барионным акустическим осцилляциям и параметрам реликтового излучения [6-16]. Результаты анализа наблюдательных данных позволяют определить оптимальные значения параметров моделей, выявить наиболее успешные сценарии с точки зрения достижения минимума функции

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N_h}\left(\frac{H(H_0,\Omega_k\ldots) - H^{obs}(z_k)}{\sigma_k}\right)^2 + \chi^2_{SN} + \chi^2_{BAO} + \chi^2_{CMB}$$

– меры соответствия модели наблюдательным данным. Этот подход позволяет продвинуться в решении некоторых космологических проблем, например, проблемы расхождения оценок H_0 [6,7].

В качестве примера сравнения различных моделей приведем таблицу из обзора [8], в которой [15,16]:

“Exp $F(R)$ + log” с действием

$$F(R) = R - 2\Lambda(1 - e^{-bR}) \cdot A + F_{\text{inf}} \quad A = 1 - aR \ln \frac{R}{R_0};$$

“Exp $F(R)$” – то же, но с a =1, “Viscous + pover“, “Viscous + log“ – модели с вязкостью [14] соответственно с $p_x = A\,\rho_x + B\,H^{2\beta}$ и $p_x = A\,\rho_x \log \rho_x + B\,H^{2\beta}$.

Model	$\min \chi^2/d.o.f$	$\Omega_m^0,\ \Omega_m^*$	other parameters
Exp $F(R)$+log	1085.41 /1102	$0.2827^{+0.0017}_{-0.0018}$	$\alpha = 0.0051^{+0.0027}_{-0.0030}$, $\beta = 1.95^{+\infty}_{-0.70}$, $\Omega_\Lambda^* = 0.654^{+0.017}_{-0.046}$
Exp $F(R)$	1088.53 /1103	$0.2803^{+0.001}_{-0.001}$	$\alpha = 0$, $\beta = 1.76^{+1.33}_{-0.49}$, $\Omega_\Lambda^* = 0.655^{+0.014}_{-0.042}$
Viscous+power	1088.98 /1102	$0.2815^{+0.0019}_{-0.0018}$	$A^* = -9.2^{+5.04}_{-\infty}$, $B^* = 8.15^{+\infty}_{-4.75}$, $\beta^* = -0.068^{+0.068}_{-0.082}$
Viscous+log	1084.05 /1101	$0.2815^{+0.0012}_{-0.0009}$	$A^* = -3.35^{+0.84}_{-0.65}$, $B^* = -4.44^{+1.16}_{-0.89}$, $\beta^* = -0.45^{+0.20}_{-0.24}$
ΛCDM	1089.03 /1105	$0.2807^{+0.0003}_{-0.0004}$	$\Omega_\Lambda = 0.7193^{+0.0004}_{-0.0003}$, $H_0 = 69.72^{+1.60}_{-1.59}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бронников К.А., Рубин С.Г. Лекции по гравитации и космологии. М.:МИФИ. 2008.
2. Виленкин А. Мир множества миров. Физики в поисках иных вселенных. М.:АСТ. 2018.
3. Bamba K., Capozziello S., Nojiri S., Odintsov S.D. Dark energy cosmology: the equivalent description via different theoretical models and cosmography tests // Astrophys. Space Sci. 2012. V. 342. P. 155-228, arXiv:1205.3421.
4. Huterer D., Shafer D.L. Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests // Rept. Prog. Phys. 2018. V. 81. No.1, 016901, arXiv:1709.01091.
5. Nojiri S., Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Modelling and testing the equation of state for (Early) dark energy // Phys. Dark Univ.2021. V. 32. P. 100837, arXiv:2103.05304.
6. Sharov G.S., Sinyakov E.S. Cosmological models, observational data and tension in Hubble constant // Mathem. Modelling and Geometry. 2020. V. 8, No.1, pp. 1-20, arXiv:2002.03599.
7. Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Analyzing the H_0 tension in $F(R)$ gravity models // Nucl. Phys. B. 2021. V. 966, P. 115377, arXiv:2011.03957
8. Sharov G.S. Interactive, $F(R)$ and Other Cosmological Models, Recent Observational Data and H_0 Tension // Physics of Atomic Nuclei, 2021, Vol. 84, No. 4, pp. 595–601.

9. Шаров Г.С., Воронцова Е.Г. Космологические модели с интегрируемыми уравнениями состояния // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 2. С. 5-26.

10. Sharov G.S. et al. A new interacting two fluid model and its consequences // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. 2017. Vol. 466, № 3 Pp. 3497–3506. arXiv:1701.00780.

11. Pan S., Sharov G.S. A model with interaction of dark components and recent observational data // Month. Not. Royal Astron. Soc. 2017. V. 472. N. 4. P. 4736-4749; arXiv:1609.02287.

12. Pan S., Sharov G.S., Yang W. Field theoretic interpretations of interacting dark energy scenarios and recent observations, Phys. Rev. D. 2020. V. 101 no.10, 103533, arXiv:2001.03120.

13. Воронцова Е.Г., Шаров Г.С. Космологические модели со скалярными полями // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. С. 97-111.

14. Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Testing the equation of state for viscous dark energy // Physical Review D. 2020. V. 101, no.4, 044010 (2020); arXiv:2001.07945.

15. Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Is exponential gravity a viable description for the whole cosmological history? // European Phys. J. C. 2017. V. 77. N. 12. P. 862.

16. Odintsov S.D., Saez-Gomez D., Sharov G.S. Testing logarithmic corrections on R^2-exponential gravity by observational data // Physical Review D. 2019. V. 99. N. 2. 024003, a:1807.02163.

17. Grigorieva O.A., Sharov G.S. Multidimensional gravitational model with anisotropic pressure // Intern. Journal of Modern Physics D. 2013. V. 22. №: 13. P 1350075; arXiv:1211.4992

УДК 517.95, 532.5

О ПРИНЦИПЕ СУПЕРПОЗИЦИИ РЕШЕНИЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Юрий Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *система Навье-Стокса, квазигидродинамическая система, точные решения, принцип суперпозиции.*

Аннотация. Сформулирован принцип суперпозиции решений для нелинейной квазигидродинамической системы. С его помощью построено точное решение, общее для системы Навье-Стокса и квазигидродинамической системы.

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости [1, 2] без учета внешних сил в стандартных обозначениях имеет вид

$$div\vec{u} = div\vec{w}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u} + \nu\nabla(div\vec{u}) + div(\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2}$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\big).$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости. Символом Δ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1) – (2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$ и давления $p = p(\vec{x},t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. При $\tau \to +0$ система (1) − (2) переходит в классическую систему Навье−Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$div\vec{u} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u}. \tag{4}$$

Пусть Ω − область в пространстве $R^3_{\vec{x}} \times R_t$. Будем рассматривать гладкие решения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t) \in C^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x},t) \in C^\infty(\Omega)$ систем Навье−Стокса и КГД.

Теорема 1. *Пусть* $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$, $p=p(\vec{x},t)$ *− гладкое решение системы НавьеСтокса (3) − (4), удовлетворяющее дополнительному условию*

$$(\vec{u}\cdot\nabla)\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}\right)+\left(\left(\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}\right)\cdot\nabla\right)\vec{u}=0\,. \tag{5}$$

Тогда пара $(\vec{u},p)$ *является точным решением квазигидродинамической системы (1)−(2).*

Доказательство теоремы 1 приведено в [2] на стр. 97–98. Определим вихрь векторного поля $\vec{u}$ по формуле

$$\vec{\omega}=rot\ \vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ u_x & u_y & u_z\end{vmatrix}. \tag{6}$$

Автором доказана следующая теорема.

Теорема 2 (Принцип суперпозиции). *Пусть* $(\vec{u}^{(1)},p^{(1)})$ *и* $(\vec{u}^{(2)},p^{(2)})$ *− два гладких решения переопределенной системы (3) − (5), и существует такая функция* $\Phi=\Phi(\vec{x},t)$, *что выполнены условия*

$$\left[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\right]+\left[\vec{u}^{(2)}\times\vec{\omega}^{(1)}\right]=\nabla\Phi, \tag{7}$$

$$\begin{gathered}(\vec{u}^{(1)}\cdot\nabla)\left(\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}^{(2)}\right)+\left(\left(\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}^{(2)}\right)\cdot\nabla\right)\vec{u}^{(1)}+\\ (\vec{u}^{(2)}\cdot\nabla)\left(\frac{\partial\vec{u}^{(1)}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}^{(1)}\right)+\left(\left(\frac{\partial\vec{u}^{(1)}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}^{(1)}\right)\cdot\nabla\right)\vec{u}^{(2)}=0.\end{gathered} \tag{8}$$

Тогда пара $(\vec{u},p)$, *где*

$$\vec{u}=\vec{u}^{(1)}+\vec{u}^{(2)}, \tag{9}$$

$$p=p^{(1)}+p^{(2)}-\left(\vec{u}^{(1)}\cdot\vec{u}^{(2)}\right)+\Phi, \tag{10}$$

является точным решением как системы Навье−Стокса (3) − (4), так и квазигидродинамической системы (1) − (2).

Проиллюстрируем применение принципа суперпозиции на примере.

Пример. В качестве полей $\vec{u}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ возьмем точное решение системы Навье−Стокса, отвечающее стационарному симметричному относительно оси oz течению Пуазейля−Куэтта:

$$\vec{u}^{(1)}=\left(\frac{A}{4\nu}\left(x^2+y^2\right)+B\ln\sqrt{x^2+y^2}+C\right)\vec{k}, \tag{11}$$

$$p^{(1)}=Az+p_0^{(1)}. \tag{12}$$

Здесь A, B, C и $p_0^{(1)}$ − заданные вещественные постоянные, причем $A<0$.

Убеждаемся в том, что для векторного поля $\vec{u}=\vec{u}^{(1)}$ условие (5) выполняется.

В качестве $\left(\vec{u}^{(2)}, p^{(2)}\right)$ возьмем общее вихревое решение систем Навье−Стокса и КГД, построенное в [3] на стр. 9−10:

$$\vec{u}^{(2)}=-\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\vec{i}+\frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\vec{j}, \quad (13)$$

$$p^{(2)}=-\frac{D^2}{4\nu(t_0+t)^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}\right)+p_0^{(2)}(t). \quad (14)$$

Здесь D и t_0 − заданные положительные константы, $p_0^{(2)}(t)$ − произвольная функция времени, определенная при $t\geq 0$. Поскольку

$$\frac{\partial\vec{u}^{(2)}}{\partial t}-\nu\Delta\vec{u}^{(2)}=0, \quad (15)$$

для векторного поля $\vec{u}=\vec{u}^{(2)}$ условие (5) выполняется. С помощью (6) находим

$$\vec{\omega}^{(1)}=rot\,\vec{u}^{(1)}=\left(\frac{Ay}{2\nu}+\frac{By}{x^2+y^2}\right)\vec{i}-\left(\frac{Ax}{2\nu}+\frac{Bx}{x^2+y^2}\right)\vec{j}, \quad (16)$$

$$\vec{\omega}^{(2)}=rot\,\vec{u}^{(2)}=\frac{D}{\nu(t_0+t)^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\vec{k}. \quad (17)$$

Принимая во внимание (16) и (17), находим

$$\left[\vec{u}^{(1)}\times\vec{\omega}^{(2)}\right]=\left(\frac{A}{4\nu}\left(x^2+y^2\right)+B\ln\sqrt{x^2+y^2}+C\right)\times$$
$$\times\frac{D}{\nu(t_0+t)^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\left[\vec{k}\times\vec{k}\right]=0, \quad (18)$$

$$\left[\vec{u}^{(2)}\times\vec{\omega}^{(1)}\right]=-\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\left(\frac{Ay}{2\nu}+\frac{By}{x^2+y^2}\right)\left[\vec{i}\times\vec{i}\right]- \quad (19)$$
$$-\frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\left(\frac{Ax}{2\nu}+\frac{Bx}{x^2+y^2}\right)\left[\vec{j}\times\vec{j}\right]+$$
$$+\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\left(\frac{Ax}{2\nu}+\frac{Bx}{x^2+y^2}\right)\left[\vec{i}\times\vec{j}\right]+$$
$$+\frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\left(\frac{Ay}{2\nu}+\frac{By}{x^2+y^2}\right)\left[\vec{j}\times\vec{i}\right]=0. \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что равенство (7) выполняется с функцией $\Phi = 0$. Если учесть (15), то условие (8) принимает вид

$$\left(\vec{u}^{(2)} \cdot \nabla\right)\left(\frac{A\vec{k}}{\nu}\right) + \frac{A}{\nu}\frac{\partial \vec{u}^{(2)}}{\partial z} = 0.$$

Оно также выполняется, поскольку частные производные от постоянного вектора обращаются в нуль, а поле $\vec{u}^{(2)}$ не зависит от z. Согласно принципу суперпозиции, функции

$$\vec{u} = \vec{u}^{(1)} + \vec{u}^{(2)} = -\frac{Dy}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\vec{i} + \frac{Dx}{2\nu(t_0+t)^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\nu(t_0+t)}\right)\vec{j} +$$

$$+\left(\frac{A}{4\nu}\left(x^2+y^2\right) + B\ln\sqrt{x^2+y^2} + C\right)\vec{k},$$

$$p = p^{(1)} + p^{(2)} - \left(\vec{u}^{(1)} \cdot \vec{u}^{(2)}\right) + \Phi =$$

$$= -\frac{D^2}{4\nu(t_0+t)^3}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\nu(t_0+t)}\right) + Az + p_0(t),$$

при $t \geq 0$ задают общее точное решение систем Навье−Стокса и КГД. Здесь $p_0(t)$ − произвольная функция времени. Квазигидродинамические уравнения широко применялись для построения численных методов. Некоторые последние результаты представлены в [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
2. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
3. Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродина-мической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. С. 5 – 19. https://doi.org/10.26456/vtpmk605
4. Kraposhin M.V., Ryazanov D.A., Elizarova T.G. Numerical algorithm based on regularized equations for incompressible flow modeling and its implementation in OpenFOAM // Computer Physics Communications. 2022. Vol. 271. № 108216. 22 p. https://doi.org/10.1016/j.cpc.2021.108216

УДК 37.013+378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Шумакова Екатерина Олеговна
Южно-Уральский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Челябинск
E-mail: shumakovaeo@cspu.ru

Ключевые слова: *электронные образовательные ресурсы, образовательная платформа, Desmos, GeoGebra.*

Аннотация. В работе подчеркнута роль современных программных продуктов для эффективного компьютерного сопровождения процесса обучения математике. Приведен пример использования среды GeoGebra при изучении многочленов.

На сегодняшний день существует тенденция устаревания знаний и вследствие информационно-технологического прогресса главным навыком в жизни человека становится самостоятельный исследовательский поиск. Образование, в свою очередь, превращается в открытый, непрерывный процесс самообучения человека в течение всей его жизни. В эпоху развития информационного общества важно научить школьников и студентов самостоятельному приобретению необходимых знаний и навыков, исследовать объекты действительности, стимулировать и мотивировать творческую активность [1].

Согласно стандарту второго поколения основного и среднего общего образования, учащиеся должны овладеть различными метапредметными умениями. Ученик при содействии педагога должен самостоятельно научиться получать новую информацию, делать необходимые выводы из собственного опыта, использовать ранее накопленные знания и умения, а также самостоятельно осуществлять поиск необходимой информации в различных источниках.

Современные программные продукты позволяют организовать внеурочную деятельность по математике, самостоятельную работу школьников наиболее эффективно. Возрастает роль электронных образовательных ресурсов в условиях дистанционного обучения. В связи с этим важно научить будущих учителей математики грамотно использовать электронные образовательные ресурсы, сочетать информационные технологии с традиционным обучением математическим дисциплинам.

Современный электронный ресурс должен отвечать следующим положениям:

– создавать условия и механизмы для повышения качества получения образования;

– разнообразить формы самостоятельной работы учащихся;

– служить источником совершенствования навыков исследовательской деятельности, сохраняя мотивацию при самостоятельном и классном обучении;

– быть удобным и эргономичным в использовании.

Детализация понятия «электронный ресурс» предполагает, что *электронный ресурс* – это совокупность программных средств, информационных, технических, нормативных и методических материалов, полнотекстовых электронных изданий, включая аудио и видеоматериалы, иллюстративные материалы и каталоги электронных библиотек, размещенные на компьютерных носителях и/или в сети Интернет [2]. Внедрение в учебный процесс использования ЭОР ни в кое случае не исключает традиционные методы обучения, а наоборот гармонирует с ними на всех этапах обучения: ознакомление, тренировка, применение, контроль. Применение ЭОР в процессе обучения позволяет использовать перспективные направления для самостоятельности, творчества и исследовательской деятельности учеников.

Рассмотрим некоторые из распространенных образовательных платформ, активно развивающихся в России.

Платформа *WordPress* представляет собой свободное программное обеспечение с дополнительными платными функциями. Данное ПО является бесплатным и удобным инструментом для создания сайта благодаря доступному интерфейсу и блочной конструкции. Программа написана на языке PHP, использует сервер базы данных — MySQL. Стоит отметить, что многие учебные заведения выбирают для своего сайта платформу WordPress.

Российская электронная школа была создана для обеспечения массового использования дидактических и методических образовательных ресурсов по вопросам образовательной деятельности всех участников образовательных отношений: для учащихся, родителей, педагогов, организаций, осуществляющих образовательную деятельность.

Довольно распространенным ресурсом является *образовательная платформа ЯКласс* – образовательный интернет-ресурс для школьников, учителей и родителей. ЯКласс помогает учителю проводить тестирование знаний учащихся, задавать домашние задания в электронном виде. С помощью данного ресурса можно разобраться в трудной теме, повторить пройденный материал или самостоятельно изучить пропущенный в школе урок. Коллекция материалов постоянно пополняется. Материалы расположены по параграфам и по темам учебника, что позволяет использовать их ко всем изданиям учебников.

Образовательный портал Учи.ру достаточно цельно представляет все необходимые возможности для осуществления образовательного процесса и полного взаимодействия с учащимися. Отметим следующие преимущества дистанционного занятия, по сравнению с традиционным уроком в школьной аудитории: использование банка заданий с автоматической проверкой ответов, совместная работа с учащимися на различных внешних ресурсах, мобильность, включение демонстрационного материала, привлекающего внимание учеников и способствующего детальному разбору понятий, использование индивидуального и дифференцированного подходов, значительная доля самообразования и саморазвития, что является важным навыком в современном обществе [3].

Платформа *Microsoft Teams* позволяет проводить он-лайн занятия в режиме видео конференции, размещать учебные материалы для определенной группы учащихся – «команды», назначать задания с указанием сроков выполнения, содержит мессенджер. Выполненные работы прикрепляются учащимися в программе, при этом фиксируется срок сдачи. Имеется возможность оставить отзыв на работу, вернуть на доработку, выставить баллы за задание. Доступна мобильная версия для смартфонов.

Веб-платформа Kahoot позволяет создавать опросы, тесты и викторины для обучения в игровой форме, включая в них видео и фото фрагменты. Возможность без труда в онлайн режиме вставить математические формулы является большим плюсом для учителя математики. Платформа позволяет педагогу активизировать, опросить и оценить каждого ученика. Оценивание происходит по двум критериям: правильность ответа и быстрота, по сравнению с одноклассниками, таким образом присутствует соревновательный момент, который нравится детям. Сразу после окончания теста показана статистика ответов, тем самым учитель видит, как обучающиеся усвоили материал и над чем нужно еще поработать.

Google-форма – платформа для создания тестов и опросов для проверки знаний учащихся. Сервис очень прост и удобен в использовании, проверка ответов осуществляется мгновенно и автоматически, что экономит время учителя. Интерфейс Google-форм не такой красочный и яркий как у веб-платформы Kahoot. Несомненным плюсом для учеников является возможность загрузки файлов с письменным решением в тетради, нежели печать математических символов с клавиатуры. Также учитель может прикреплять в задания видео и фото фрагменты.

Графический калькулятор Desmos и *динамическая математическая среда GeoGebra* нашли широкое применения в ходе преподавания математических дисциплин бакалаврам педагогического университета. В [4] описано применение Desmos и GeoGebra для визуализации и проверки решения задачи по математическому анализу. В [5] описано создание интерактивного задания для составления уравнения и построение графика функции в Desmos. Возможности динамической математической среды GeoGebra и графического калькулятора Desmos эффективно используются при выполнении студентами учебных проектов по математическому анализу [6]. В работе [7] рассмотрено применение GeoGebra в исследовательской деятельности по геометрии. Особенности применения среды GeoGebra и графического калькулятора Desmos рассмотрены в [8].

Рассмотрим пример применения среды GeoGebra для осуществления контроля решения задачи при изучении многочленов от одной переменной.

Задача. Отделить действительные корни многочлена

$f(x) = x^4 - 12x^2 - 16x - 4$, указав интервалы на числовой прямой длины не более 1.

По теореме Штурма число различных действительных корней в интервале $(a;\, b)$ равно разности $\omega(a) - \omega(b)$, где $\omega(a)$ число перемен знаков полиномов Штурма в точке a. Построим полиномы Штурма с точностью до положительных коэффициентов:

$$f_0 = x^4 - 12x^2 - 16x - 4,\;\; f_1 = x^3 - 6x - 4,\quad f_2 = 3x^2 + 6x + 2,$$
$$f_3 = x + 1,\;\; f_4 = 1.$$

Верность построения полиномов Штурма может быть проверена в он-лайн сервисах. Подобная проверка позволяет студентам самостоятельно контролировать правильность вычислений на каждом шаге выполнения задания. В среде GeoGebra выполним проверку вычисления полиномов (рис. 1).

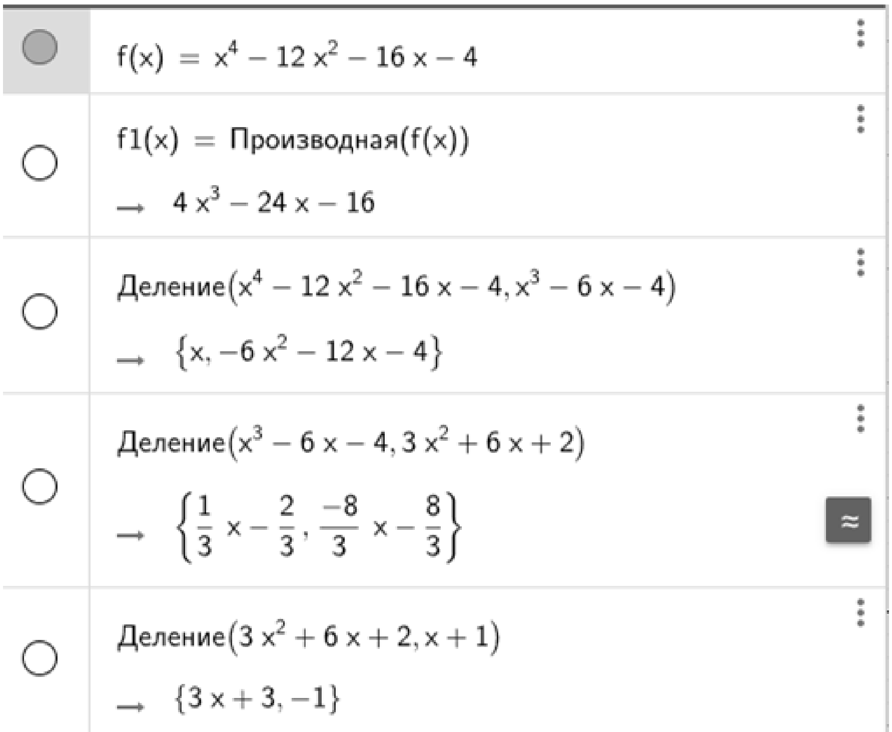


Рис. 1. Построение полиномов Штурма

Далее выясним число перемен знаков полиномов Штурма в точках числовой прямой. Для контроля вычислений студенты заполняют таблицу в MS Excel. Всего многочлен $f(x)$ имеет четыре различных действительных корня, которые находятся на интервалах (-3;-2), (-2;-1), (-1;0) и (4;5).

Выполним проверку полученных интервалов. Для этого построим график $y = f(x)$ в среде GeoGebra (рис. 2). По щелчку левой кнопки мыши в точке пересечения графика функции и оси абсцисс можно увидеть приближенные значения корней многочлена $f(x)$, подтверждающие полученное выше решение.

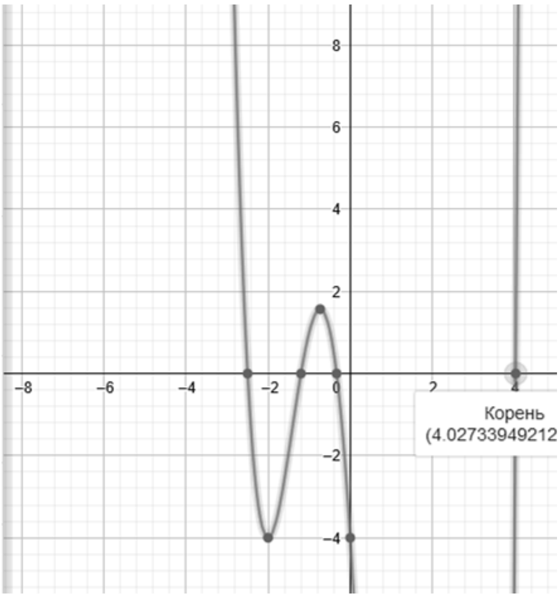


Рис. 2. Построение графика $y = f(x)$

Использование при обучении алгебре интерактивных геометрических сред позволяет создавать динамические образы математических объектов, с последующим исследованием их свойств. Работая с различными образами математического объекта (аналитическим, графическим), у студента формируется целостное представление о нем, и, как результат, повышается математическая культура будущего педагога.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Острикова, Е.А. Психолого-педагогические основы формирования исследовательских умений и навыков школьников / Е.А. Острикова. // Молодой ученый. – 2012. – № 10 (45). – С. 358-361.

2. Трайнев, В.А. Электронно-образовательные ресурсы в развитии информационного общества (обобщение и практика): монография / В.А. Трайнев. – Москва: Дашков и К, 2018. – 256 с.

3. Дударева, А.С. Обзор образовательного портала УЧИ.РУ / А.С. Дударева, Е.О. Шумакова // В сборнике: Горизонты образования, материалы I Международной научно-практической конференции. Омск, 2020. – С. 27-30.

4. Нигматулин, Р.М. Организация самостоятельной работы студентов при изучении профильных математических дисциплин с использованием

информационных технологий / Р.М. Нигматулин, М.Ю. Вагина // Информационные технологии в экономике и управлении: мат. III Всеросс. науч.-пр. конф. – ДГТУ, 2018. – С. 175-178.

5. Шумакова, Е.О. Особенности применения динамических графических приложений в процессе математической и методической подготовки бакалавров педагогического образования / Е.О. Шумакова, С.А. Севостьянова, М.Ю. Вагина // В сборнике: Информация и образование: границы коммуникаций INFO'20. сборник научных трудов № 12 (20). – Горно-Алтайск, 2020. – С. 78-81.

6. Нигматулин, Р.М. Математическое моделирование в учебных проектах бакалавров по профильным математическим дисциплинам / Р.М. Нигматулин, М.Ю.Вагина // Современные наукоемкие технологии. – 2018. – № 10. – С. 216-220.

7. Нигматулин, Р.М. Использование системы динамической геометрии Geogebra для организации исследовательской деятельности бакалавров педагогического образования в курсе геометрии / Р.М. Нигматулин, Е.В. Мартынова // В сборнике: Информационные технологии в математике и математическом образовании. Материалы VIII Всероссийской с международным участием научно-методической конференции, посвященной 80-летию профессора Ларина Сергея Васильевича / ответственный редактор В.Р. Майер; – Красноярск: КГПУ им. В.П. Астафьева, 2019. – С. 193-197.

8. Нигматулин, Р.М. Особенности использования графических онлайн-калькуляторов в процессе математической подготовки бакалавров педагогического образования / Нигматулин Р.М., Вагина М.Ю., Кипнис М.М. // В сборнике: Информатизация образования и методика электронного обучения. Материалы III Международной научной конференции. Сибирский федеральный университет, Институт космических и информационных технологий, 2019. – С. 256-261.

УДК 372.851

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА СИММЕТРИИ (ИНВАРИАНТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ) ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

Яхова Юлия Дмитриевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ydyakhova@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *задачи с параметрами, симметрия, инвариантные преобразования, уравнение, неравенство, необходимое и достаточное условия, ЕГЭ, ДВИ.*

Аннотация. В работе продемонстрированы способы использования метода симметрии (инвариантных преобразований; необходимого и достаточного условий) при решении задач с параметрами в случае, когда уравнение (неравенство) содержит только одну переменную, а также показано обоснование названия данного метода.

Всё нижесказанное для уравнений справедливо и для неравенств.

Существует много методов решения задач с параметрами, но тот, который здесь описан, обладает некоторой особенностью. Если заметить, что уравнение обладает симметрией (о том, что это такое, речь пойдёт ниже), и в задаче просят найти значения параметра, при которых количество корней будет «хорошим», то решение задачи сводится к алгоритмическому. И, если ученик прекрасно владеет техникой решения различных уравнений, не содержащих параметров, то данная задача у него не вызовет никаких трудностей. Кроме того, данную статью можно предоставить школьнику для самостоятельного изучения применения метода симметрии к решению задач с параметрами.

Преобразование $\varphi \to \psi$ будем называть инвариантным, если вид уравнения при замене φ на ψ не изменится. При этом само уравнение будем называть симметричным относительно преобразования $\varphi \to \psi$.

Пример. Рассмотрим уравнение $2|x-3| = (2022x-6066)^2$.

$$2|x-3| = (2022x-6066)^2 \Leftrightarrow 2|x-3| = 2022^2(x-3)^2.$$

Заменяя в последнем равенстве $x-3$ на $-(x-3)$, в силу чётности функций $f(x) = \cos x$ и $f(x) = x^2$ получаем

$$2|-(x-3)| = 2022^2\big(-(x-3)\big)^2 \Leftrightarrow 2|x-3| = (2022x-6066)^2.$$

А тогда исходное уравнение симметрично относительно преобразования $x-3 \to -(x-3)$.

Слово «инвариантность» в математике означает неизменность объекта при каком-то преобразовании. В нашем случае остаётся неизменным вид уравнения при инвариантном преобразовании.

Первым признаком того, что возможно задача решается с помощью метода симметрии, является вопрос «При каких значениях параметра уравнение имеет ***единственное (или три, или нечётное количество)*** решение?».

Приведём алгоритм решения уравнений с параметрами методом симметрии:

1) выяснить, относительно какого преобразования симметрично уравнение;
2) проверить необходимое условие;
3) проверить достаточное условие.

Можно выделить несколько типов «стандартных» преобразований, относительно которых стоит исследовать уравнение на симметрию.

<u>1 тип.</u> Пусть дано уравнение $F(x) = 0$, где $F(x)$ – чётная функция. Тогда исходное уравнение симметрично относительно преобразования $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$.

Замечание. Если в уравнении $F(x) = 0$ присутствуют такие функции, как $y = |x|$, $y = \cos x$, $y = x^2$, $y = x^4$, $y = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, и др. (чётные), а также если они входят в композиции функций (например, $\ln \cos x^5$), то стоит проверить данный тип.

С геометрической точки зрения симметрия уравнения относительно преобразования $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$ означает, что решения этого уравнения симметричны относительно нуля на числовой прямой.

Задача № 1.[1] Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left|\frac{x(3^x-1)}{3^x+1} - 2a\right| = a^2 + 1$$

имеет нечётное число решений.

Решение. 1) Заметим, что данное уравнение симметрично относительно преобразования $x \to -x$.

2) *Необходимое условие.* Если исходное уравнение имеет нечётное число решений, то корнем уравнения обязательно является $x = 0$. Действительно, допустим противное, то есть что решение уравнения $x \neq 0$, тогда в силу симметрии если x – корень, то и $-x \neq x$ – корень, а это значит, что количество корней обязательно будет чётно, что противоречит условию. Тогда и правда $x = 0$ – корень уравнения. Теперь, подставляя $x = 0$ в уравнение, имеем

$$|2a| = a^2 + 1 \Leftrightarrow |a|^2 - 2|a| + 1 = 0 \Leftrightarrow (|a| - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1, \\ a=-1. \end{array}\right.$$

3) *Достаточное условие.*

а) Подставляя $a = 1$ в исходное уравнение, получаем

$$\left|\frac{x(3^x-1)}{3^x+1} - 2\right| = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x(3^x-1)}{3^x+1}=0, \\ \frac{x(3^x-1)}{3^x+1}=4, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{c} x=0, \\ 3^x(x-4)=4+x. \end{array}\right.$$

Решим второе уравнение последней совокупности.

Заметим, что $x = 4$ не является его корнем, так как $0 \neq 8$. Тогда

$$x(3^x - 1) = 4(3^x + 1) \Leftrightarrow 3^x = \frac{x+4}{x-4} \Leftrightarrow 3^x = 1 + \frac{8}{x-4}.$$

Выясним количество решений последнего уравнения графически. Рассмотрим функции $f(x) = 3^x$ и $g(x) = 1 + \frac{8}{x-4}$. Заметим, что $f(x)$ – монотонно возрастающая показательная функция с горизонтальной асимптотой $y = 0$, вертикальных асимптот у неё нет, а $g(x)$ – функция обратной пропорциональности с горизонтальной асимптотой $y = 1$ и вертикальной асимптотой $x = 4$, монотонно убывающая при $x \in (-\infty; 4)$ и при $x \in (4; +\infty)$. (Эскиз $f(x)$ и $g(x)$ см. на рис. 1).

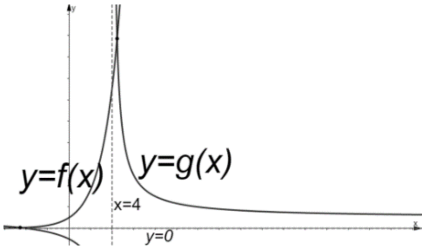


Рис. 1

Отсюда получаем, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют две точки пересечения, а значит уравнение имеет два решения, причём $x = 0$ не является корнем уравнения $3^x = 1 + \frac{8}{x-4}$, так как $3^0 \neq 1 + \frac{8}{0-4}$

Тогда при $a = 1$ исходное уравнение имеет 3 решения.

б) Подставив $a = -1$ в исходное уравнение и проделав аналогичные пункту а) действия, можно убедиться, что при $a = -1$ полученное уравнение имеет единственное решение $x = 0$.

Ответ: $a = 1$.

Задача № 2. [2] При каких значениях a уравнение

$$2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0$$

имеет единственное решение?

Решение. Выполним замену переменной. Положив $\pi(x-1) = t$, получим

$$2t^2 + 4a\cos(2(t+\pi)) - 9a^3 = 0,$$

откуда в силу периодичности $f(x) = \cos x$ имеем

$$2t^2 + 4a\cos(2t) - 9a^3 = 0. \quad (1)$$

В силу линейности замены количество требуемых корней не изменилось.

Заметим, что полученное уравнение симметрично относительно преобразования $t \to -t$.

Необходимое условие. Если уравнение (1) имеет единственное решение, то корнем уравнения является $t = 0$. Действительно, допустим противное, то есть пусть корнем уравнения (1) является $t \neq 0$. Тогда в силу инвариантного преобразования $-t \neq t$ – тоже корень (1), а тогда решений как минимум два. Получаем противоречие. Тогда $t = 0$ – корень.

Подставив $t = 0$ в (1), имеем

$$4a - 9a^3 = 0 \Leftrightarrow a(4 - 9a^2) = 0 \Leftrightarrow \ a = 0 \text{ или } a = \frac{2}{3} \text{ или } a = -\frac{2}{3}.$$

Достаточное условие.

а) Подставляя $a = 0$ в (1), получаем $t = 0$ – единственный корень.

б) Подставляя $a = \frac{2}{3}$ в (1), получаем

$$2t^2 + \frac{8}{3}\cos(2t) - \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + (4\cos(2t) - 4) = 0. \qquad (2)$$

Заметим, что для последнего уравнения $t = 0$ – решение.

Покажем, что оно имеет ещё один корень, отличный от нуля. Рассмотрим функции $f(t) = 4\cos(2t) - 4$ и $g(t) = -3t^2$.

1)$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -8,\ g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{3\pi^2}{4}$. Тогда $f\left(\frac{\pi}{2}\right) < g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

2)$f(\pi) = 0,\ g(\pi) = -3\pi^2$. Тогда $f(\pi) > \ g(\pi)$.

3)$f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

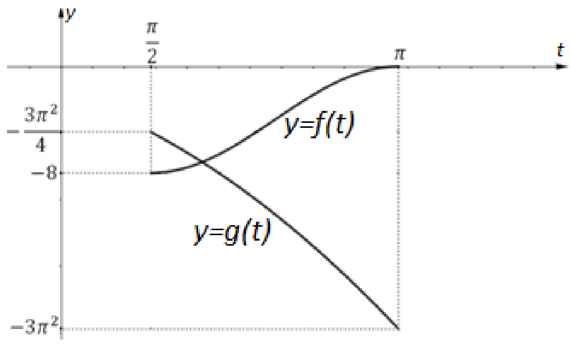


Рис. 2

Из условий 1) – 3) следует, что $f(t)$ и $g(t)$ имеют точку пересечения на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$, а тогда уравнение (2) имеет решение на $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

Таким образом, при $a = \frac{2}{3}$ уравнение имеет не единственное решение.

в) Подставляя $a = -\frac{2}{3}$ в (1), получаем

$$2t^2 - \frac{8}{3}\cos(2t) + \frac{8}{3} = 0 \Leftrightarrow 3t^2 + (4 - 4\cos(2t)) = 0. \qquad (3)$$

Известно, что $-1 \leq \cos(2t) \leq 1$, а тогда $0 \leq 4 - 4\cos(2t) \leq 8$. Тогда в (3) видим, что сумма двух неотрицательных величин $3t^2$ и $4 - 4\cos(2t)$ равна нулю, а тогда

$$3t^2 + (4 - 4\cos(2t)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3t^2 = 0, \\ 4 - 4\cos(2t) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow t = 0.$$

Таким образом, при $a = -\frac{2}{3}$ уравнение имеет единственное решение.

Ответ: $a = 0, a = -\frac{2}{3}$.

Замечание. Если мы заметили, что дано уравнение $F(x) = 0$, которое симметрично относительно преобразования $\boldsymbol{ax + b} \to -(\boldsymbol{ax + b})$, $a, b \in \mathbb{R}$,

$a \neq 0$,то его можно свести к первому типу заменой $t = ax + b$, причём количество требуемых корней не изменится в силу линейности замены.

Замечание. При решении задачи №2 можно было сначала заметить, что исходное уравнение симметрично относительно преобразования $\pi x - \pi \to -(\pi x - \pi)$, а только потом выполнить замену $t = \pi x - \pi$.

<u>2 тип.</u> Пусть дано уравнение $F(x) = 0$, такое, что $F(x) = F(c - x)$. Тогда оно симметрично относительно преобразования $\boldsymbol{x \to c - x}$, $c \in \mathbb{R}$.

С геометрической точки зрения симметрия уравнения относительно преобразования $x \to c - x$, $c \in \mathbb{R}$, означает, что решения этого уравнения симметричны относительно точки $x = \frac{c}{2}$ на числовой прямой.

Задача № 3. При каких значениях параметра a уравнение

$$|4 - x| + |x| = a \tag{4}$$

имеет 2023 решения?

1) Заметим, что исходное уравнение симметрично относительно преобразования $x \to 4 - x$.

2) *Необходимое условие.* Если количество корней 2023, то корнем уравнения (4) является $x = x_0$, такой что $x_0 = 4 - x_0 \Leftrightarrow x_0 = 2$. Действительно, допустим противное, а тогда в силу инвариантного преобразования количество корней чётно, что противоречит нечётности числа 2023. Полученное противоречие доказывает, что $x = 2$ – корень (4). Тогда подстановкой $x = 2$ в (4) получаем, что $a = 4$.

3) *Достаточное условие.* При $a = 4$ имеем $|4 - x| + |x| = 4$.

Заметим, что в силу геометрического смысла модуля любой $x \in [0; 4]$ является корнем последнего уравнения, а значит решений бесконечно много в силу плотности множества действительных чисел. Тогда при $a = 4$ количество решений не 2023.

Ответ: $a \in \emptyset$.

Замечание. Преобразование первого типа является частным случаем преобразования второго типа.

<u>3 тип.</u> Пусть дано уравнение $F(x) = 0$, такое, что $F(x) = F\left(\frac{c}{x}\right)$, $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$. Тогда оно симметрично относительно преобразования $\boldsymbol{x \to \frac{c}{x}}$, $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Замечание. Попробовать найти такой тип обязательно стоит в уравнении, в котором присутствуют дроби и $x \neq 0$ (например, $x + \frac{1}{x} = 0$).

Задача № 4. [3] Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение:

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}} + a \cdot \cos\frac{x^2 - 1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0. \tag{5}$$

Решение. 1) Заметим, что

$$F\left(\frac{1}{x}\right)=2^{\frac{2\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}+a\cdot\cos\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2-1}{\frac{1}{x}}+a^2-\frac{5}{4}=F(x),$$

то есть уравнение симметрично относительно преобразования $x\to\frac{1}{x}$.

2) *Необходимое условие.* Если (5) имеет единственное решение, то $x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=\pm1$. Действительно, допустим противное, т. е. что $x\neq\frac{1}{x}$. Тогда если x_0 – корень, то в силу инвариантного преобразования $x_1=\frac{1}{x_0}\neq x_0$ – тоже корень, а значит решений не меньше двух, откуда получаем противоречие. А значит $x=\pm1$ должны быть корнями уравнения.

а) Пусть $x=-1$. Тогда, подставляя данное решение в (5), получим

$$a^2+a-\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}\text{ или } a=-\frac{3}{4}.$$

б) Пусть $x=1$. Тогда, подставляя данное решение в (5), получим

$$a^2+a+\frac{3}{4}=0\Leftrightarrow a\in\emptyset.$$

3) Достаточное условие.

а) Пусть $a=\frac{1}{2}$. Тогда

$$2^{\frac{2x}{1+x^2}}+\frac{1}{2}\cdot\cos\frac{x^2-1}{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=0\Leftrightarrow 2^{\frac{(x+1)^2}{1+x^2}}=2-\cos\frac{x^2-1}{x}. \qquad (6)$$

Видим, что $x=-1$ – корень последнего уравнения. Покажем, что оно имеет решение, отличное от $x=-1$.

Рассмотрим функции $f(x)=2^{\frac{(x+1)^2}{1+x^2}}$ и $g(x)=2-\cos\frac{x^2-1}{x}$ на $[1;\ +\infty)$.

I. Имеем $f'(x)=2^{\frac{(x+1)^2}{1+x^2}}\cdot\ln 2\cdot\frac{2(x+1)(1-x)}{(1+x^2)^2}<0$ при $x>1$, а тогда $f(x)$ монотонно убывает при $x\geq1$.

II. Найдём наклонную асимптоту $f(x)$ в виде $y=kx+b$ при $x\geq1$.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0, b=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2^{\frac{(x+1)^2}{1+x^2}}=2.$$

Таким образом, $y=2$ – горизонтальная асимптота $f(x)$ при $x\geq1$.

III. $1<2<3$.

IV. $f(x)$ и $g(x)$ – непрерывные функции на $[1;\ +\infty)$.

V. $1\leq g(x)\leq3$, причём

1. $g(x)=1\Leftrightarrow\frac{x^2-1}{x}=2\pi k, k\in\mathbb{Z},\Leftrightarrow x^2-2\pi kx-1=0, k\in\mathbb{Z}.$

Рассмотрим уравнения вида $x^2-2\pi kx-1=0, k\in\mathbb{N}$.

Решения $x_{1_k}=\pi k+\sqrt{\pi^2k^2+1}, k\in\mathbb{N}$, данных уравнений образуют возрастающую числовую последовательность. Отсюда получаем, что при $x\geq\pi+\sqrt{\pi^2+1}>1$ функция $g(x)$ принимает значение 1 бесконечно много раз.

2. $g(x) = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2-1}{x} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \Leftrightarrow x^2 - (\pi + 2\pi n)x - 1 = 0,\ n \in \mathbb{Z}.$

Рассмотрим уравнения вида $x^2 - (\pi + 2\pi n)x - 1 = 0, n \in \mathbb{N}$.

Решения $x_{1_n} = \frac{1}{2}\left((\pi + 2\pi n) + \sqrt{(\pi + 2\pi n)^2 + 4}\right),\ n \in \mathbb{N}$, данных уравнений образуют возрастающую числовую последовательность. Отсюда получаем, что при $x \geq \frac{1}{2}\left(3\pi + \sqrt{9\pi^2 + 4}\right) > 1$ функция $g(x)$ принимает значение 3 бесконечно много раз.

По написанным условиям I – V можно построить эскиз $f(x)$ и $g(x)$ (см. рис. 3).

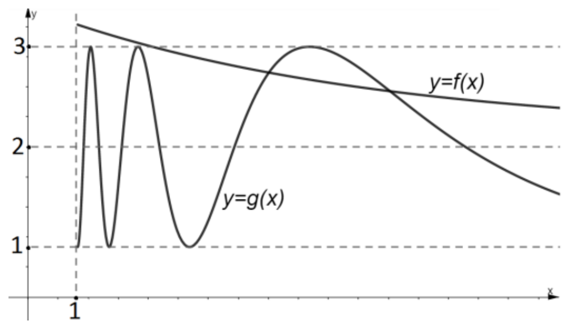


Рис. 3

Из I – V следует, что при $x > 1$ $f(x)$ и $g(x)$ пересекаются бесконечно много раз, откуда получаем, что (6) имеет решение отличное от $x = -1$. А значит $a = \frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию задачи.

б) Пусть $a = -\frac{3}{4}$, тогда

$$8 \cdot 2^{\frac{(x+1)^2}{1+x^2}} - 12\cos\frac{x^2-1}{x} - 11 = 0. \qquad (7)$$

Аналогично пункту а) можно показать, что уравнение (7) имеет не менее двух решений. А значит $a = -\frac{3}{4}$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in \emptyset$.

Однако, в формулировке задачи фраза «единственное (три; нечётное количество) решение» может быть скрыта.

Задача № 5. При каких значениях a уравнение

$$x(2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3) = 0$$

имеет два решения?

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{c} x = 0, \\ 2\pi^2(x-1)^2 + 4a\cos(2\pi x) - 9a^3 = 0. \end{array}\right.$$

А тогда одно решение $x = 0$ есть для любых a. И тогда осталось выяснить, при каких a второе уравнение совокупности имеет единственное решение. Это было проделано в задаче № 2.

Ответ: $a = 0, a = -\frac{2}{3}$.

Написанный выше текст и предложенные ниже задачи для самостоятельного решения помогут учащимся в освоении метода симметрии при решении задач с параметрами.

1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $x^2 - 2a\sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственное решение.

Ответ: $a = 0, a = 2\sin 1$. *Указание:* заметить симметрию относительно $x \to -x$. [1]

2. Найдите все неотрицательные значения a, при каждом из которых множество решений неравенства

$$1 \le \frac{2a + x^2 - 4\log_{1/3}(4a^2 - 4a + 9)}{5\sqrt{18x^4 + 7x^2} + 2a + 4 + \log_{1/3}^2(4a^2 - 4a + 9)}$$

состоит из одной точки, и найдите это решение. [4]

Ответ: $a = 0,\ a = 1,\ x = 0$. *Указание:* Заметить симметрию относительно $x \to -x$.

3. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$9^{-x+1} \cdot 3^{x^2} + a^3 + 5a^2 + a + \sqrt{2} = \sin\frac{\pi x}{4} + \cos\frac{\pi x}{4} + 3$$

имеет единственное решение. [1]

Ответ: $a = 0, a = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}, a = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$. *Указание:* Заметить симметрию относительно $x \to 2 - x$.

4. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x^3 + \left(\frac{4}{x}\right)^3 + 16 = 2a^2$$

имеет единственный корень.

Ответ:$a = 0, a = \pm 4$. *Указание:* заметить симметрию относительно $x \to \frac{4}{x}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ткачук В. В. Математика – абитуриенту. / В. В. Ткачук. – 19-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2019. – 944 с.

2. ЕГЭ по математике. Тренировочный вариант № 15. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://alexlarin.net/ege/2013/trvar15.html (последнее обращение 11.03.2022 г.).

3. Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова. Вступительное испытание по математике 1998 года. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://pk.cs.msu.ru/sites/default/files/dvi/1998.pdf (последнее обращение 11.03.2022 г.).

4. ЕГЭ 2022. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий от разработчиков ЕГЭ / И. В. Ященко [и др.]. – М.: Издательство «Экзамен», 2022. – 231 с.

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
III Всероссийской научно-практической конференции

Тверь, 24–26 марта 2022 года

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано в печать 12.04.2022. Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 15,76. Заказ № 69.
Электронное издание
Издательство Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. (4822) 35-60-63.