Линейные уравнения. Уравнение $ax=b$, где x — неизвестное, a и b — любые действительные числа, называется *линейным уравнением* относительно x. Если $a \neq 0$, оно имеет единственное решение тогда $x=\frac{b}{a}$. Если $a=b=0$ его решением является любое действительное число. Если $a=0$, $b \neq 0$, то линейное уравнение не имеет решений.

Квадратные уравнения. Уравнение $ax^2+bx+c=0$, где x — неизвестное, $a \neq 0$, b и c – любые действительные числа, называется *квадратным уравнением* относительно x. Выражение $D=b^2-4ac$ называется дискриминантом уравнения $ax^2+bx+c=0$. В зависимости от значения дискриминанта квадратное уравнение на множестве действительных чисел может иметь два корня, один корень или не иметь корней. Если $D>0$ уравнение имеет два корня $x=\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, если $D=0$ — один корень $x=-\frac{b}{2a}$, если $D<0$ корней нет.

Рациональные выражения - это целые и дробные выражения, соединённые между собой знаками арифметических действий: деления, умножения, сложения или вычитания, возведения в целую степень и знаками последовательности этих выражений.

Если хотя бы в одной части рационального уравнения содержится дробь, то уравнение называется **дробно рациональным**.

Чтобы решить дробно рациональное уравнение, необходимо:

1. Найти значения переменной, при которых уравнение не имеет смысл (ОДЗ);
2. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
3. Умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
4. Решить получившееся целое уравнение;
5. Исключить из его корней те, которые обращают в ноль общий знаменатель.

Иррациональные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, являются уравнениями одного из трех типов: «корень нечетной степени равен числу», «корень четной степени равен числу» и «квадратный корень равен линейному выражению». Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Теорема. Пусть m — нечетное натуральное число, $m \geq 3$, n — четное натуральное число, a — любое число, $b \geq 0$.

Тогда:

$$\sqrt[m]{f(x)} = a \Leftrightarrow f(x) = a^m,$$

$$\sqrt[n]{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = b^n,$$

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = g^2(x). \end{cases}$$

Иными словами, обе части уравнений указанного вида возводят в степень так, чтобы избавиться от знака корня. Причем возведение в нечетную степень является равносильным преобразованием при любых значениях правой части, а возведение в четную степень является равносильным преобразованием только в случае неотрицательности правой части уравнения.

Показательные уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из двух типов: $a^{f(x)} = a^b$ или $a^{f(x}) = a^{g(x)}$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших показательных уравнений. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$. Тогда:

$$a^{f(x)} = a^b \Leftrightarrow f(x) = b,$$

$$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$$

Логарифмические уравнения, включенные в задания ЕГЭ, приводятся к одному из трех типов: $\log_a f(x) = b$, $\log_{f(x)} a = b$, $\log_a f(x) = \log_a g(x)$. Для этого могут понадобиться формулы свойств логарифмов: $\log_a b + \log_a c = \log_a bc$, $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$, $\log_a (b)^n = n\log_a b$. Сформулируем теорему для решения уравнений указанных типов.

Решение простейших логарифмических уравнений. Пусть $a > 0$, $a \neq 1$, $b \in \mathbb{R}$. Тогда:

$$\log_a f(x) = b \Leftrightarrow f(x) = a^b,$$

$$\log_{f(x)} a = b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ f(x) \neq 1, \\ (f(x))^b = a. \end{cases}$$

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > 0, \\ f(x) = g(x). \end{cases}$$

Простейшие тригонометрические уравнения

$$\boxed{\sin x = a\,,\ |\,a\,| \le 1}$$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \qquad n \in \mathbf{Z}$$

- Частные случаи:

$\sin x = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

$\sin x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\sin x = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$$\boxed{\cos x = a\,,\ |\,a\,| \le 1}$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in Z$$

- Частные случаи:

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\cos x = 1$

$x = 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -1$

$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$$\boxed{tgx = a}$$

$$x = arctga + \pi n, n \in Z$$

- Частные случаи:

$$tgx = 0 \qquad tgx = 1 \qquad tgx = -1$$

$$x = \pi n, n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \qquad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

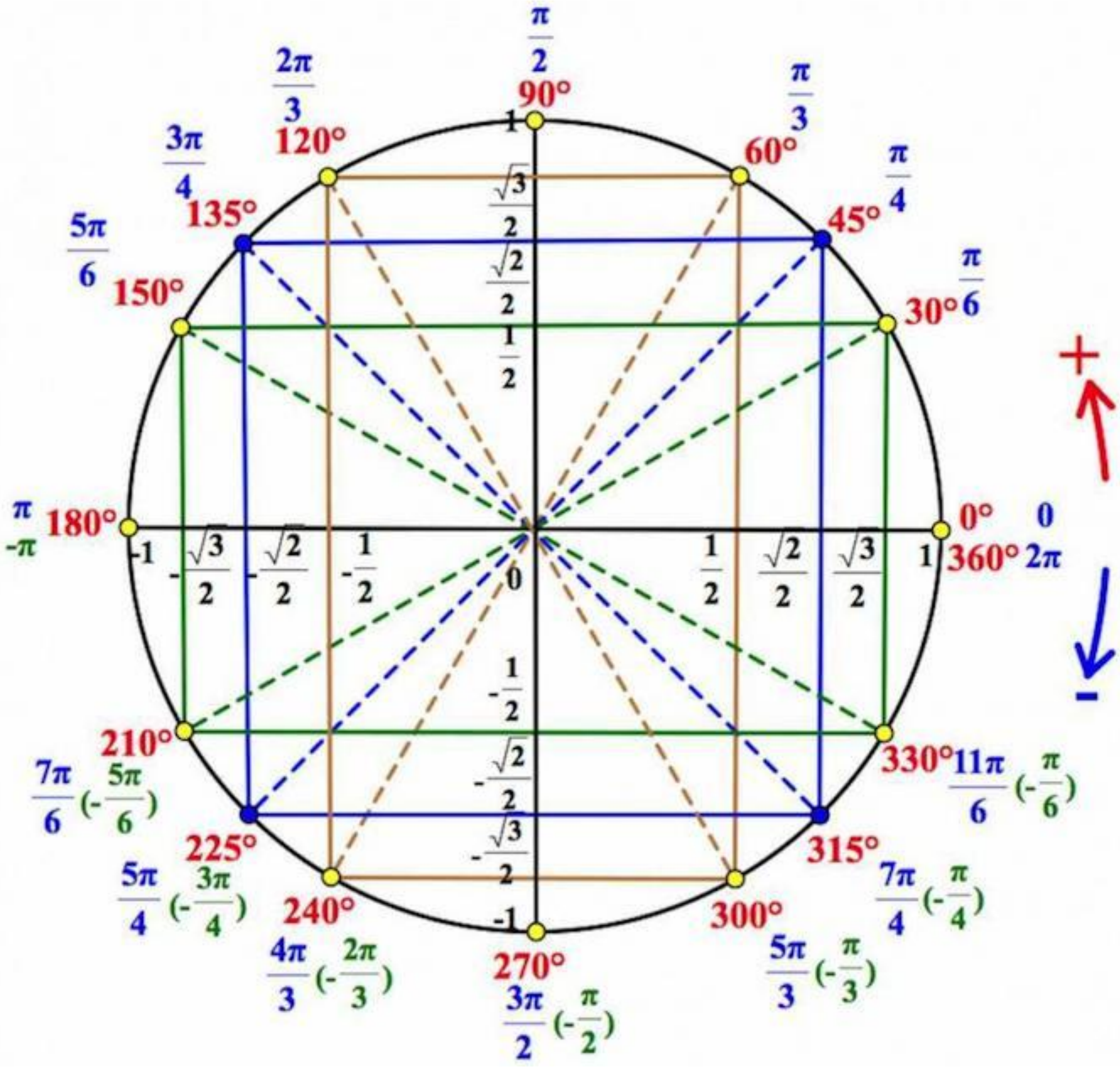
$$\boxed{ctgx = a}$$

$$x = arcctga + \pi n, n \in Z$$

- Частные случаи:

$$ctgx = 0 \qquad ctgx = 1 \qquad ctgx = -1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \qquad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \qquad x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$



0° 0
360° 2π
30° π/6
45° π/4
60° π/3
90° π/2
120° 2π/3
135° 3π/4
150° 5π/6
180° π -π
210° 7π/6 (-5π/6)
225° 5π/4 (-3π/4)
240° 4π/3 (-2π/3)
270° 3π/2 (-π/2)
300° 5π/3 (-π/3)
315° 7π/4 (-π/4)
330° 11π/6 (-π/6)
1
-1
0
1/2
√2/2
√3/2
-1/2
-√2/2
-√3/2
+
-