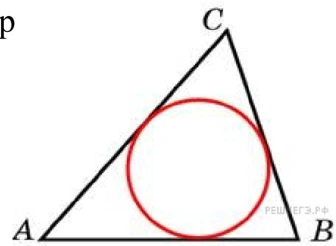
Вписанная и описанная окружности

1. Задание 3 № 27626. Площадь треугольника равна 54, а его периметр 36. Найдите радиус вписанной окружности.



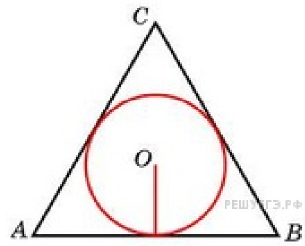
Решение.

Площадь треугольника равна произведению полупериметра на радиус вписанной окружности, поэтому

$$r=\frac{S}{p}=\frac{54}{18}=3.$$

Ответ: 3.

2. Задание 3 № 27908. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, равен 6. Найдите высоту этого треугольника.



Решение.

$$r=\frac{2S_{ABC}}{P_{ABC}}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}AC^2\sin 60^\circ}{3AC}=\frac{AC\sin 60^\circ}{3}=\frac{h}{\sin 60^\circ}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{3}=\frac{h}{3},$$

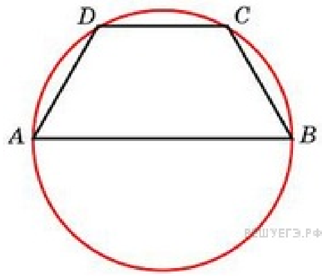
значит, $h=3r=18.$

Ответ: 18.

Приведем другое решение.

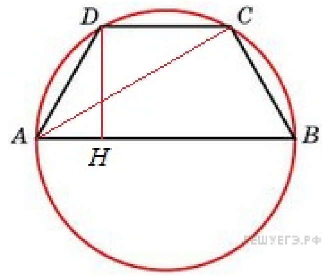
Высота правильного треугольника равна 3 радиусам вписанной окружности, поэтому она равна 18.

3. Задание 3 № 27925. Боковая сторона равнобедренной трапеции равна ее меньшему основанию, угол при основании равен 60°, большее основание равно 12. Найдите радиус описанной окружности этой трапеции.



Решение.

Окружность, описанная вокруг трапеции, описана и вокруг треугольника ADC. Это треугольник равнобедренный, угол при вершине равен 120°, углы при основании равны 30°. Найдем его боковую сторону:



$$AD = AB - 2AH = AB - 2AD\cos 60^\circ = 12 - AD,$$

откуда $AD = 6$. Тогда по теореме синусов:

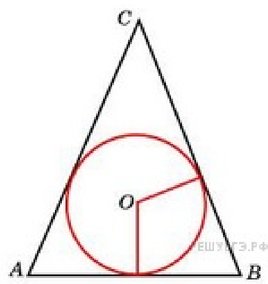
$$R = \frac{AD}{2\sin\angle DCA} = \frac{6}{2\sin 30^\circ} = 6.$$

Ответ: 6.

Приведем другое решение (Р. А., СПб.).

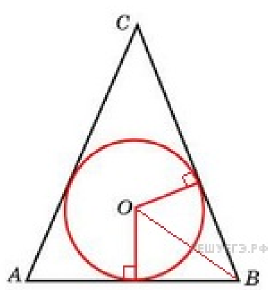
Хорды AD, DC и CB равны, поэтому равны и стягиваемые ими дуги. Вписанный угол A равен 60°, он опирается на две из этих дуг и равен половине их суммы. Поэтому каждая из дуг равна 60°, их сумма равна 180°, а хорда AB является диаметром. Отсюда получаем, что искомый радиус равен 6.

4. Задание 3 № 27935. Окружность, вписанная в равнобедренный треугольник, делит в точке касания одну из боковых сторон на два отрезка, длины которых равны 5 и 3, считая от вершины, противолежащей основанию. Найдите периметр треугольника.



Решение.

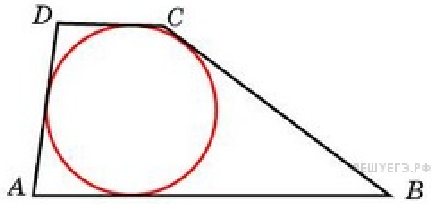
Пусть точки H и K являются точками касания окружности и сторон AB и CB соответственно. Треугольники HOB и KOB равны, т. к. являются прямоугольными с общей гипотенузой и равными катетами, значит, $HB = KB = 3$.



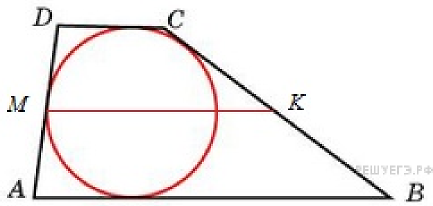
$$P_{ABC} = AC + CB + AH + HB = 2CB + 2HB = 16 + 6 = 22.$$

Ответ: 22.

5. Задание 3 № 27936. Боковые стороны трапеции, описанной около окружности, равны 3 и 5. Найдите среднюю линию трапеции.



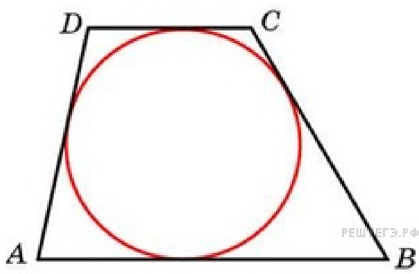
Решение.
в выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$,



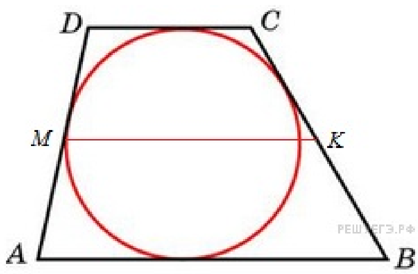
$$MK=\frac{DC+AB}{2}=\frac{AD+BC}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

Ответ: 4.

6. Задание 3 № 27937. Около окружности описана трапеция, периметр которой равен 40. Найдите ее среднюю линию.



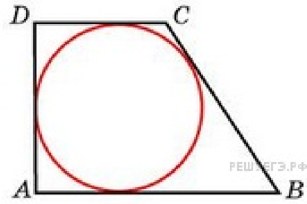
Решение.
В выпуклый четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$,



$$MK=\frac{DC+AB}{2}=\frac{P_{ABCD}}{4}=10.$$

Ответ: 10.

7. Задание 3 № 27938. Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 22, ее большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.



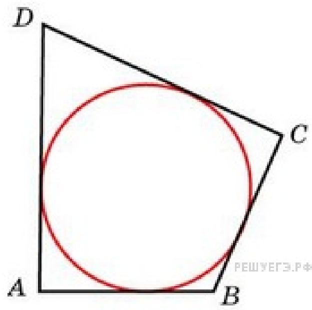
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$,

$$r=\frac{AD}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{P}{2}-BC\right)=\frac{11-7}{2}=2.$$

Ответ: 2.

8. Задание 3 № 27939. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $CD=16$. Найдите периметр четырехугольника.



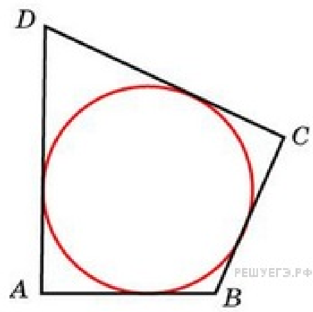
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$. Тогда

$$P_{ABCD}=AB+CD+BC+DA=2(AB+CD)=52.$$

Ответ: 52.

9. Задание 3 № 27941. В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB=10$, $BC=11$ и $CD=15$. Найдите четвертую сторону четырехугольника.



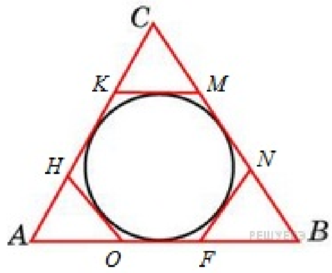
Решение.

В четырехугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда $AB+CD=BC+AD$, значит,

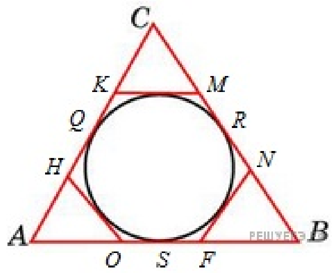
$$AD=(AB+CD)-BC=14.$$

Ответ: 14.

10. Задание 3 № 27943. К окружности, вписанной в треугольник ABC, проведены три касательные. Периметры отсеченных треугольников равны 6, 8, 10. Найдите периметр данного треугольника.



Решение.
Отрезки касательных, проведенных к окружности из точек $K,\ H,\ O,\ F,\ N,\ M,$ соответственно равны друг другу. Поэтому



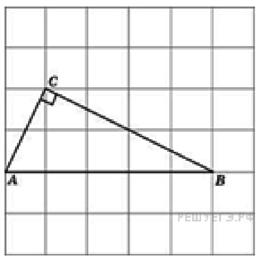
$$CQ+CR=P_{CKM},\ AQ+AS=P_{AHO},\ BS+BR=P_{BFN}.$$

Следовательно,

$$P_{ABC}=P_{AOH}+P_{KCM}+P_{FNB}=24.$$

Ответ: 24.

11. Задание 3 № 27946. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, если стороны квадратных клеток равны 1.

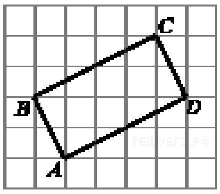


Решение.
треугольник прямоугольный, значит, радиус описанной вокруг него окружности равен половине гипотенузы.

$$R=\frac{AB}{2}=2,5.$$

Ответ: 2,5.

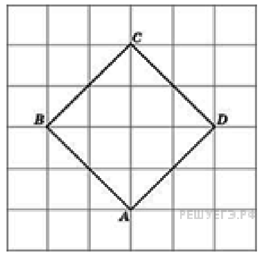
12. Задание 3 № 27947. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника $ABCD$, если стороны квадратных клеток равны 1.



Решение.
Радиус окружности, описанной около прямоугольника, равен половине его диагонали. Диагональ равна 5, поэтому радиус равен 2,5.

Ответ: 2,5.

13. Задание 3 № 27948. Найдите радиус окружности, вписанной в квадрат $ABCD$, считая стороны квадратных клеток равными $\sqrt{2}$.

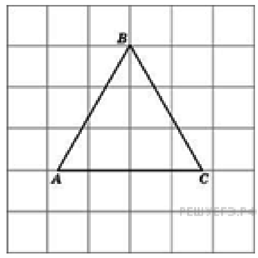


Решение.
радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине его стороны.

$$r = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{4+4}}{2} = \frac{4}{2} = 2.$$

Ответ: 2.

14. Задание 3 № 27950. Найдите радиус окружности, описанной около правильного треугольника ABC, считая стороны квадратных клеток равными 1.



Решение.
Радиус окружности, описанной вокруг равностороннего треугольника, равен двум третьим его высоты. Поэтому он равен 2.

Ответ: 2.