Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки

1. Задание 19 № 505541. Каждый из группы учащихся сходил в кино или в театр, при этом возможно, что кто-то из них мог сходить и в кино, и в театр. Известно, что в театре мальчиков было не более $\frac{4}{13}$ от общего числа учащихся группы, посетивших театр, а в кино мальчиков было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа учащихся группы, посетивших кино.

а) Могло ли быть в группе 10 мальчиков, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть в группе, если дополнительно известно, что всего в группе было 20 учащихся?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа учащихся в группе без дополнительного условия пунктов а) и б)?

Решение.

а) Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 10 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 11 или больше. Тогда девочек было 9 или меньше. Театр посетило не более 4 мальчиков, поскольку если бы их было 5 или больше, то доля мальчиков в театре была бы не меньше $\frac{5}{5+9}=\frac{5}{14}$, что больше $\frac{4}{13}$. Аналогично, кино посетило не более 6 мальчиков, поскольку $\frac{7}{7+9}=\frac{7}{16}>\frac{2}{5}$, но тогда хотя бы один мальчик не посетил ни театра, ни кино, что противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 20 учащихся могло быть 10 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 10.

в) Предположим, что некоторый мальчик сходил и в театр, и в кино. Если бы вместо него в группе присутствовало два мальчика, один из которых посетил только театр, а другой — только кино, то доля мальчиков и в театре, и в кино осталась бы прежней, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек в группе можно считать, что каждый мальчик сходил или только в театр, или только в кино.

Пусть в группе m_1 мальчиков, посетивших театр, m_2мальчиков, посетивших кино, и d девочек. Оценим долю девочек в этой группе. Будем считать, что все девочки ходили и в театр, и в кино, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля в театре и в кино не уменьшится.

Из условия:

$$\frac{m_1}{m_1+d}\le\frac{4}{13},\ \frac{m_2}{m_2+d}\le\frac{2}{5},$$

значит, $\frac{m_1}{d}\le\frac{4}{9}$, $\frac{m_2}{d}\le\frac{2}{3}$. Тогда $\frac{m_1+m_2}{d}\le\frac{10}{9}$, поэтому доля девочек в группе:

$$\frac{d}{m_1+m_2+d}=\frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1}\ge\frac{1}{\frac{10}{9}+1}=\frac{9}{19}.$$

Если группа состоит из 4 мальчиков, посетивших только театр, 6 мальчиков, посетивших только кино, и 9 девочек, сходивших и в театр, и в кино, то условие задачи выполнено, а доля девочек в группе равна $\frac{9}{19}$.

Ответ: а) да: б) 10; в) $\frac{9}{19}$.

2. Задание 19 № 507655. Группу школьников нужно перевези из летнего лагеря одним из двух способов: либо двумя автобусами типа A за несколько рейсов, либо тремя автобусами типа B за несколько рейсов, причем в этом случае число рейсов каждого автобуса типа B будет на один меньше, чем рейсов каждого автобуса типа A. В каждом из случаев автобусы заполняются полностью.

Какое максимальное количество школьников можно перевезти при указанных условиях, если в автобус типа B входит на 7 человек меньше, чем в автобус типа A?

Решение.

Тип А: 2 автобуса; n – рейсов каждый; m + 7 – человек в автобусе

Тип В: 3 автобуса; $n - 1$ – рейс; m – человек

$$3(n-1)m = 2n(m+7) \Leftrightarrow 3mn - 3m = 2nm + 14n \Leftrightarrow mn - 3m = 14n \Leftrightarrow$$
$$m(n-3) = 14n \Leftrightarrow m = \frac{14n}{n-3} = \frac{14(n-3)+42}{n-3} = 14 + \frac{42}{n-3}.$$

Следовательно надо найти делители 42: $n-3 = 1; 2; 3; 6; 7; 14; 21; 42.$

Если $n-3=1,$ то получаем $n=4,\ m=56,$ а всего школьников 504.

Если $n=5, m=35,$ то школьников 420;

Если $n=6, m=28,$ то школьников 420;

Если $n=9, m=21,$ то школьников 504;

Если $n=10, m=20,$ то школьников 540;

Если $n=17, m=17,$ то школьников 816;

Если $n=45, m=15,$ то школьников 1980.

Ответ: 1980.

3. Задание 19 № 507892. Красный карандаш стоит 17 рублей, синий — 13 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 495 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на пять.

а) Можно ли купить при таких условиях 32 карандаша?

б) Можно ли купить при таких условиях 35 карандашей?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить при таких условиях?

Решение.

а) Например, можно купить 14 красных и 18 синих карандашей:

$$14 \cdot 17 + 18 \cdot 13 = 472 \text{ (руб.)}.$$

б) Дешевле всего 35 карандашей будут стоить, если купить наибольшее возможное число синих карандашей и наименьшее возможное число красных, то есть если купить 15 красных и 20 синих, поскольку если красных меньше 15, то синих больше 20, и в этом случае разность между числом красных и синих больше чем 5. Но тогда стоимость покупки

$$15 \cdot 17 + 20 \cdot 13 = 515 \text{ (руб.)},$$

что больше, чем имеющаяся сумма 495 рублей.

в) Пусть n и m —число синих и красных карандашей соответственно. Тогда

$$\begin{cases} 17m + 13n \le 495, \\ |m - n| \le 5, \\ m,\ n = 0,\ 1, 2,\ \ldots \end{cases}$$

Положим $s = n + m$, тогда

$$\begin{cases} 4m + 13s \le 495, \\ -5 \le 2m - s \le 5, \\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ s, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \le \dfrac{495 - 13s}{4}, \\ \dfrac{s-5}{2} \le m \le \dfrac{s+5}{2}, \\ m = 0,\ 1,\ \ldots,\ s, \end{cases}$$

Следовательно, $\dfrac{s-5}{2} \le \dfrac{495 - 13s}{4}$, откуда $s \le 33\dfrac{2}{3}$.

Можно купить не больше 33 карандашей. Осталось проверить, возможен ли случай, когда $s = 33$. При $m = 14$, $n = 19$ получаем

$$14 \cdot 17 + 19 \cdot 13 = 485 < 495.$$

Значит, наибольшее возможное число карандашей 33.

Ответ: а) да; б) нет; в) 33.

4. Задание 19 № 508238. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

Решение.

а) Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 19 и центральный сектор 50 получаем: $60 + 57 + 50 = 167$.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дает меньше 54 очков. Если все шесть бросков были по 60 очков, то игрок набрал 360 очков, что больше 356. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшится как минимум на 6, а, значит, станет не больше 354 очков, что меньше 356 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый результат 357 очков, а хотя бы две замены — не более 354 очков. Значит, 356 очков шестью бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 16 бросков он наберет не более 960 очков, а тогда для того, чтобы набрать 1001 очко понадобится не менее 17 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 1001 очко за 17 бросков. Предположим, что он сделал 15 бросков на 60 очков (итого 900), один бросок в зону утроения сектора 17 (51 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет $900 + 51 + 50 = 1001$ очко.

Отметим, что в пунктах а) и в) учащийся мог привести другие верные примеры.

Ответ: а) да; б) нет; в) за 17 бросков.

5. Задание 19 № 508259. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 161 очко?

б) Может ли игрок четырьмя бросками набрать ровно 235 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 947 очков?

Решение.

а) Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 17 и центральный сектор 50 получаем: $60 + 51 + 50 = 161$.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дают меньше 54 очков. Если все четыре броска были по 60 очков, то игрок набрал 240 очков, что больше 235. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшится как минимум на 6, а, значит, станет не больше 234 очков, что меньше 235 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый результат 237 очков, а хотя бы две замены — не более 234 очков. Значит, 235 очков четырьмя бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 15 бросков он наберет не более 900 очков, а тогда для того, чтобы набрать 947 очков понадобится не менее 16 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 947 очков за 16 бросков. Предположим, что он сделал 14 бросков на 60 очков (итого 840), один бросок в зону утроения сектора 19 (57 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет $840 + 57 + 50 = 947$ очков.

Отметим, что в пунктах а) и в) учащийся мог привести другие верные примеры.

Ответ: а) да; б) нет; в) за 16 бросков.

6. Задание 19 № 509027. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 50, а вместе солдат меньше чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду? в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение.

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом:

$$\begin{cases} 50 < k < l, \\ k + l \leq 119. \end{cases}$$

а) Например, 54 и 63 солдата. Вместе 117, их можно построить в колонну по 9 человек в ряду так, что 6 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 7 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 11. Тогда, учитывая, что $50 < k < 60$, получаем, что $k = 55$. Наименьшее возможное значение l равно $55 + 11 = 66$, но вместе получается 121 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \geq 8$; $k - l \leq -8$, что вместе с условием $k + l \leq 119$ приводит к неравенству $2k \leq 111$, то есть $k \leq 55$. При этом $k + d \leq l \leq 119 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 7.

Если $k = 51 = 3 \cdot 17$, то $d = 17$, $l = 68$, а в роте 119 солдат.

Если $k = 52 = 4 \cdot 13$, то $65 \leq l \leq 67$. Тогда $l = 65$, общий делитель 13 и $k + l = 117$.

Если $k = 53$, то $53 + 53 = 106 \leq l \leq 66$. Противоречие.

Если $k = 54 = 6 \cdot 9$, то $54 + 9 = 63 \leq l \leq 65$. Тогда $l = 63$, общий делитель равен 9, и в роте 117 солдат.

Если $k = 55 = 5 \cdot 11$, то $66 \leq l \leq 64$, но числа 63 и 64 взаимно просты с 55. Противоречие.

Ответ: а) Например, 54 и 63; б) нет; в) 117 и 119.

7. Задание 19 № 509164. В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше чем 46, а вместе солдат меньше чем 111. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 8, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 13 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

Решение.

Пусть в первом взводе k солдат, во втором l солдат. Тогда числа k и l имеют общий делитель, больший 7, и при этом:

$$\begin{cases} 47 < k < l, \\ k + l \leq 110. \end{cases}$$

а) Например, 50 и 60 солдат. Вместе 110, их можно построить в колонну по 10 человек в ряду так, что 5 рядов будет заполнено солдатами только из первого взвода, а 6 рядов — только из второго.

б) Предположим, что общий делитель 13. Тогда, учитывая, что $47 < k < 55$, получаем, что $k = 52$. Наименьшее возможное значение l равно $52 + 13 = 65$, но вместе получается 117 человек, что противоречит условию.

в) Число $l - k$ больше нуля и делится на общий делитель чисел k и l, поэтому $l - k \geq 9$; $k - l \leq -9$, что вместе с условием $k + l \leq 110$ приводит к неравенству $2k \leq 101$, то есть $k \leq 50$. При этом $k + d \leq l \leq 110 - k$, где d — наименьший общий делитель, превосходящий 8.

Если $k = 47$, то $d = 47$, $47 + 47 = 94 \leq 110 - 47 = 63$. Противоречие.

Если $k = 48$, то $d = 12$, $l = 60$, а в роте 108 солдат.

Если $k = 49$, то $98 \leq l \leq 110 - 49 = 61$. Противоречие.

Если $k = 50$, то $d = 10$, $l = 60$, а в роте 110 солдат.

Ответ: а) Например, 50 и 60; б) нет; в) 108 и 110.

8. Задание 19 № 509185. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 (от 1 до 15) включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма вычисляется следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое пяти оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться — $\frac{1}{30}$?

б) Может ли эта разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равняться — $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе оценивания, через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}, B=\frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа.

Значит, $A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}$. Если $A-B=\frac{1}{30}$, то $5m-7n=\frac{35}{30}$, что невозможно.

Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, не может равняться $\frac{1}{30}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7}-\frac{1+2+4+7+8}{5}=\frac{31}{7}-\frac{22}{5}=\frac{1}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\leq\frac{5x+5z-2((x+1)+(x+2)+\ldots+(x+5))}{35}=$$
$$=\frac{5z-5x-30}{35}\leq\frac{5\cdot 10-5\cdot 0-30}{35}=\frac{4}{7}$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность $A-B$ равна 4. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{4}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$

9. Задание 19 № 509953. Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 100, 82 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{82+2}{2}=42$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 105, 87 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составил 100 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{105+87}{2}=96$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 95. Имеем два уравнения:

$$90N = 75(N - a) + 100a \text{ и } 95N = 79(N - b) + 103b,$$

откуда $15N = 25a$, то есть $3N = 5a$, и $16N = 24b$, то есть $2N = 3b$. Таким образом, $N \geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 74 балла, 1 участник — 80 баллов и 9 участников по 100 баллов. Тогда средний балл был равен 90, средний бал участников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

Дублирует задание 510105.

10. Задание 19 № 509974. Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 90, 72 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{72+2}{2}=37$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 95, 77 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составлял 90 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{95+77}{2}=86$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 85. Имеем два уравнения: $90N = 65(N - a) + 90a$ и $85N = 69(N - b) + 93b$, откуда $15N = 25a$, то есть $3N = 5a$, и $16N = 24b$, то есть $2N = 3b$. Поэтому целое число N делиться на 5 и на 3, то есть делится на 15. Таким образом, $N \geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 64 балла, 1 участник — 70 баллов и 9 участников по 90 баллов. Тогда средний балл был равен 80, средний бал участников, сдавших тест, был равен 90, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 65. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 69. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

11. Задание 19 № 510105. Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 83 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 90, средний балл участников, сдавших тест, составил 100, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 75. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, а не сдавших — 79. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 100, 82 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{82+2}{2}=42$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 105, 87 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составил 100 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{105+87}{2}=96$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 95. Имеем два уравнения:

$$90N=75(N-a)+10a \text{ и } 95N=79(N-b)+103b,$$

откуда $15N=25a$, то есть $3N=5a$, и $16N=24b$, то есть $2N=3b$. Таким образом, $N\geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 74 балла, 1 участник — 80 баллов и 9 участников по 100 баллов. Тогда средний балл был равен 90, средний бал участников, сдавших тест, был равен 100, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 75. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 103, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 79. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

12. Задание 19 № 510112. Участники одной школы писали тест. Результатом каждого ученика является целое неотрицательное число баллов. Ученик считается сдавшим тест, если он набрал не менее 73 баллов. Из-за того, что задания оказались слишком трудными, было принято решение всем участникам теста добавить по 5 баллов, благодаря чему количество сдавших тест увеличилось.

а) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, не сдавших тест, понизился?

б) Могло ли оказаться так, что после этого средний балл участников, сдавших тест, понизился, и средний балл участников, не сдавших тест, тоже понизился?

в) Известно, что первоначально средний балл участников теста составил 80, средний балл участников, сдавших тест, составил 90, а средний балл участников, не сдавших тест, составил 65. После добавления баллов средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, а не сдавших — 69. При каком наименьшем числе участников теста возможна такая ситуация?

Решение.

а) Пусть было 3 участника, которые набрали 90, 72 и 2 балла. Средний балл участников, не сдавших тест $\frac{72+2}{2}=37$ балла. После добавления баллов у участников оказалось 95, 77 и 7 баллов. Средний балл участников, не сдавших тест, составил 7 баллов.

б) В примере предыдущего пункта средний балл участников теста, сдавших тест, первоначально составлял 90 баллов, а после добавления баллов составил $\frac{95+77}{2}=86$ баллов.

в) Пусть всего было N участников теста, сдали тест a участников, после добавления баллов сдали тест b участников. Заметим, что средний балл после добавления составил 85. Имеем два уравнения: $90N = 65(N - a) + 90a$ и $85N = 69(N - b) + 93b$, откуда $15N = 25a$, то есть $3N = 5a$, и $16N = 24b$, то есть $2N = 3b$. Поэтому целое число N делиться на 5 и на 3, то есть делится на 15. Таким образом, $N \geq 15$.

Покажем, что N могло равняться 15. Пусть изначально 5 участников набрали по 64 балла, 1 участник — 70 баллов и 9 участников по 90 баллов. Тогда средний балл был равен 80, средний бал участников, сдавших тест, был равен 90, а средний балл участников, не сдавших тест, был равен 65. После добавления средний балл участников, сдавших тест, стал равен 93, средний балл участников, не сдавших тест, стал равен 69. Таким образом, все условия выполнены.

Ответ: а) да; б) да; в) 15.

13. Задание 19 № 500068. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 99 см, но не больше 102 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 33 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение.

Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример.

Рассмотрим моток веревки длиной x см. Условие того, что его можно разрезать на n стандартных кусков, записывается в виде $99n \le x \le 102n$ или $99 \le \frac{x}{n} \le 102.$

а) В данном случае имеем $99 \cdot 33 < x < 102 \cdot 33$ (неравенства строгие, поскольку среди кусков есть неравные). Пусть эту веревку можно разрезать на n стандартых кусков, тогда, при $n \ge 34$ получаем

$$\frac{x}{n} \le \frac{x}{34} < \frac{102 \cdot 33}{34} = 99,$$

то есть этот моток веревки нельзя разрезать больше, чем на 33 стандартных куска.

При $n = 33$ получаем $99 \le \frac{x}{33} \le 102.$ Значит, эту веревку можно разрезать на 33 одинаковых стандартных куска, но нельзя разрезать на большее количество стандартных кусков.

б) Отрезки $[99n,\ 102n]$ и $[99(n+1),\ 102(n+1)],$ являющиеся решениями неравенств $99n \le x \le 102n$ и $99(n+1) \le x \le 102(n+1),$ имеют общие точки для всех $n,$ при которых $99(n+1) \le 102n,$ то есть при $n \ge 33.$ Значит, любую веревку длиной $99 \cdot 33 = 3267$ см или более можно разрезать на стандартные куски.

Докажем, что веревку, длина которой больше $102 \cdot 32 = 3264$ см, но меньше $99 \cdot 33 = 3267$ см, нельзя разрезать на n стандартных кусков ни для какого $n.$ При $n \ge 33$ получаем $x < 99 \cdot 33 \le 99n,$ что противоречит условию $99n \le x.$ При $n \le 32$ получаем $x > 102 \cdot 32 \ge 102n,$ что противоречит условию $x \le 102n.$ Таким образом, искомое число равно 3267.

Ответ: а) 33; б) 3267.

14. Задание 19 № 500351. Моток веревки режут без остатка на куски длиной не меньше 115 см, но не больше 120 см (назовем такие куски стандартными).

а) Некоторый моток веревки разрезали на 23 стандартных куска, среди которых есть куски разной длины. На какое наибольшее число стандартных одинаковых кусков можно было бы разрезать тот же моток веревки?

б) Найдите такое наименьшее число l, что любой моток веревки, длина которого больше l см, можно разрезать на стандартные куски.

Решение.

Решение каждого пункта состоит из двух частей: оценка и пример.

Рассмотрим моток веревки длиной x см. Условие того, что его можно разрезать на n стандартных кусков, записывается в виде $115n \le x \le 120n$ или $115 \le \frac{x}{n} \le 120.$

а) В данном случае имеем $115 \cdot 23 < x < 120 \cdot 23$ (неравенства строгие, поскольку среди кусков есть неравные). Пусть эту веревку можно разрезать на n стандартных кусков, тогда При $n \ge 24$ получаем

$$\frac{x}{n} \le \frac{x}{24} < \frac{120 \cdot 23}{24} = 115,$$

т.е. этот моток веревки нельзя разрезать больше, чем на 23 стандартных куска.

При $n = 23$ получаем $115 \le \frac{x}{23} \le 120.$ Значит, эту веревку можно разрезать на 23 одинаковых стандартных куска, но нельзя разрезать на большее количество стандартных кусков.

б) Отрезки $[115n; 120n]$ и $[115(n+1); 120(n+1)]$, являющиеся решениями неравенств $115n \le x \le 120n$ и $115(n+1) \le x \le 120(n+1)$, имеют общие точки для всех n, при которых $115(n+1) \le 120n$, то есть при $n \ge 23.$ Значит, любую веревку длиной $115 \cdot 23 = 2645$ см или более можно разрезать на стандартные куски.

Докажем, что веревку, длина которой больше $120 \cdot 22 = 2640$ см, но меньше $115 \cdot 23 = 2645$ см, нельзя разрезать на n стандартных кусков ни для какого $n.$ При $n \ge 23$ получаем $x < 115 \cdot 23 \le 115n,$ что противоречит условию $115n \le x.$ При $n \le 22$ получаем $x > 120 \cdot 22 \ge 120n,$ что противоречит условию $x \le 120n.$ Таким образом, искомое число равно 2645.

Ответ: а) 23; б) 2645.

15. Задание 19 № 501220. В стране Дельфиния установлена следующая система подоходного налога (денежная единица Дельфинии — золотые):

Заработок (в золотых)	Налог (в %)
1 — 100	1
101 — 400	20
Более 400	50

а) Два брата заработали в сумме 1000 золотых. Как им выгоднее всего распределить эти деньги между собой, чтобы в семье осталось как можно больше денег после налогообложения? При дележе каждый получает целое число золотых.

б) Как выгоднее всего распределить те же 1000 золотых между тремя братьями, при условии, что каждый также получит целое число золотых?

Решение.

а) 1. Если один из братьев получит $x_1 \leq 100$ золотых, то второй получит $1000 - x_1$. В этом случае первый брат заплатит налог 1%, а второй — 50%. Следовательно, общая сумма, которая останется у братьев после налогообложения $x_1 \cdot 0,99 + (1000 - x_1) \cdot 0,5 = 0,49 \cdot x_1 + 500 \leq 0,49 \cdot 100 + 500 \leq 549$ золотых.

2. Если каждый из них получит более 400 золотых, значит, они оба заплатят налог 50%, и тогда в сумме у них останется 500 золотых.

3. Пусть один из них получит x золотых, где $100 < x \leq 400.$ Тогда его брат получит $1000 - x$ золотых, причем это число будет больше 400. Значит, первый брат заплатит налог 20%, а второй — 50%. Таким образом, после налогообложения у них останется $0,8x + 0,5(1000 - x) = 0,3x + 500$ золотых. Очевидно, что чем больше x, тем больше данная сумма. Значит, следует выбрать наибольшее возможное значение x, то есть 400. В этом случае в семье останется 620 золотых, что больше, чем в первом и во втором случаях.

Ответ: 400 и 600.

б) Заметим, что чем меньше золотых отдадут братья в качестве налога, тем больше денег у них останется. Таким образом, можно решать равносильную задачу: распределить деньги между братьями так, чтобы они в сумме заплатили как можно меньше.

1. Пусть все три брата получили от 101 до 400 золотых. В этом случае каждый из них заплатил налог 20%, а значит, они должны в сумме заплатить 200 золотых.

2. Пусть хотя бы один из братьев получил более 400 золотых. Тогда он должен заплатить налог 50%, то есть более 200 золотых. В этом случае сумма, которую заплатят все три брата, больше 200 золотых. Таким образом, распределение, разобранное в первом случае, выгоднее.

3. Пусть хотя бы один из братьев получил не более 100 золотых. В этом случае остальные 900 золотых нужно распределить между двумя братьями, а значит, хотя бы у одного из них окажется сумма не меньше 450 золотых. Этот случай разобран в п.2.

Следовательно, сумма, которая останется у братьев, будет наибольшей в том случае, если каждый из них получит от 101 до 400 золотых. При этом верным будет любое разбиение 1000 золотых на три слагаемых, каждое из которых лежит в указанном промежутке (в качестве примера можно выбрать числа 366, 366 и 268).

Ответ: любые три числа от 101 до 400, сумма которых равна 1000 (например, 366, 366 и 268).

16. Задание 19 № 503257. Имеются каменные глыбы: 50 штук по 800 кг, 60 штук по 1 000 кг и 60 штук по 1 500 кг (раскалывать глыбы нельзя).

а) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 60 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

б) Можно ли увезти все эти глыбы одновременно на 38 грузовиках, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

в) Какое наименьшее количество грузовиков, грузоподъёмностью 5 тонн каждый, понадобится, чтобы вывезти все эти глыбы одновременно, предполагая, что в грузовик выбранные глыбы поместятся?

Решение.

а) Масса любых трёх таких глыб не превосходит 5 тонн. Значит, в 60 грузовиков можно погрузить 180 таких глыб. Всего глыб 170, поэтому их можно увезти на 60 грузовиках.

б) Суммарная масса глыб равна $50 \cdot 800 + 60 \cdot 1000 + 60 \cdot 1500 = 190\,000$ (кг), то есть в точности совпадает с грузоподъёмностью 38 грузовиков. Значит, если возможно увезти эти глыбы на 38 грузовиках, то каждый грузовик должен быть загружен полностью (по массе груза).

Если в каком-то грузовике есть глыба массой 800 кг, то единственная возможность загрузить такой грузовик полностью — это добавить ещё 4 таких глыбы и одну глыбу массой 1 000 кг. Таким образом, грузовиков, загруженных так, понадобится 10 штук. Поскольку осталось 60 глыб, массой 1 500 кг каждая, и 28 грузовиков, то в одном из грузовиков должно быть хотя бы 3 такие глыбы. Но в грузовик, в который загружено 3 глыбы, массой 1 500 кг каждая, ничего больше погрузить не получится.

Значит, на 38 грузовиках увезти эти глыбы нельзя.

в) В предыдущем пункте было показано, что 38 грузовиков не хватит.

Если в 10 грузовиков загрузить по 5 глыб, массой 800 кг каждая, и глыбу массой 1 000 кг, в 25 грузовиков загрузить по 2 глыбы, массой 1 000 кг каждая, и по 2 глыбы, массой 1 500 кг каждая, в 3 грузовика загрузить

3 глыбы, массой 1 500 кг каждая, и в один грузовик глыбу массой 1 500 кг, то все глыбы окажутся загружены в 39 грузовиков. Значит, наименьшее количество грузовиков — это 39.

Ответ: а) да; б) нет; в) 39.

17. Задание 19 № 501071. За новогодним столом дети ели бутерброды и конфеты, причем каждый что-то ел, и может быть так, что кто-то ел и то и другое. Известно, что мальчиков, евших бутерброды, было не более чем $\frac{5}{16}$ от общего числа детей, евших бутерброды, а мальчиков, евших конфеты, было не более $\frac{2}{5}$ от общего числа детей, евших конфеты.

а) Могло ли за столом быть 13 мальчиков, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

б) Какое наибольшее количество мальчиков могло быть за столом, если дополнительно известно, что всего за столом было 25 детей?

в) Какую наименьшую долю могли составлять девочки от общего числа детей без дополнительного условия пунктов а и б?

Решение.

а) Если за столом было 5 мальчиков, евших только бутерброды, 8 мальчиков, евших только конфеты, и 12 девочек, каждая из которых ела и то и другое, то условие задачи выполнено. Значит, в группе из 25 детей могло быть 13 мальчиков.

б) Предположим, что мальчиков было 14 или больше. Тогда девочек было 11 или меньше. Пусть число мальчиков, евших бутерброды равно m_1. Тогда число $\frac{m_1}{m_1+11}$ не больше , чем доля мальчиков, евших бутерброды среди всех детей, евших бутерброды, а это число не больше, чем $\frac{5}{16}$, откуда $\frac{m_1}{m_1+11} \le \frac{5}{16}$ и, следовательно, $m_1 \le 5$. Пусть m_2 — число мальчиков, евших конфеты. Аналогично, $\frac{m_2}{m_2+11} \le \frac{2}{5}$, откуда, учитывая, что m_2 число целое, находим: $m_2 \le 7$. Но тогда общее число мальчиков, евших хот что-то не больше, чем 5 + 7 = 12. Следовательно, по крайней мере, 2 мальчика ничего не ели, а это противоречит условию.

В предыдущем пункте было показано, что в группе из 25 учащихся могло быть 13 мальчиков. Значит, наибольшее количество мальчиков в группе — 13.

в) Предположим, что некоторый мальчик ел и конфеты, и бутерброды. Если бы вместо него было два мальчика, один из которых ел только конфеты, а другой — только бутерброды, то доля мальчиков, евших конфеты и доля мальчиков, евших бутерброды, остались бы прежними, а общая доля девочек стала бы меньше. Значит, для оценки наименьшей доли девочек можно считать, что каждый мальчик ел или только конфеты, или только бутерброды.

Пусть, как прежде, m_1 мальчиков ели бутерброды, m_2 ели конфеты, и всего было d девочек. Оценим долю девочек. Будем считать, что каждая девочка ели и конфеты, и бутерброды, поскольку их доля в группе от этого не изменится, а доля среди евших конфеты и доля среди евших бутерброды не станут меньше.

По условию $\frac{m_1}{m_1+d} \le \frac{5}{16}, \frac{m_2}{m_2+d} \le \frac{2}{5}$, значит $\frac{m_1}{d} \le \frac{5}{11}, \frac{m_2}{d} \le \frac{2}{3}$.

Тогда $\frac{m_1+m_2}{d} \le \frac{37}{33}$, поэтому доля девочек равна

$$\frac{d}{m_1+m_2+d} = \frac{1}{\frac{m_1+m_2}{d}+1} \ge \frac{1}{\frac{37}{33}+1} = \frac{33}{70}.$$

Осталось показать, что такая доля девочек действительно могла быть. Например, если из 70 детей 15 мальчиков ели только бутерброды, 22 мальчика ели только конфеты, и еще было 33 девочки, каждая из которых ела и то, и другое, то условие задачи выполнено, а доля девочек в точности равна $\frac{33}{70}$.

Ответ:а) да; б) 13; в) $\frac{33}{70}$