Числа и их свойства

1. Задание 19 № 502027. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

Решение.

Пусть данное число равно $100a+10b+c,$ где $a,$ b и c — цифры сотен, десятков и единиц соответственно. Если частное этого числа и суммы его цифр равно k, то выполнено $100a+10b+c=ka+kb+kc.$

а) Если частное равно $90,$ то $100a+10b+c=90a+90b+90c;$ $10a=80b+89c,$ что верно, например, при $c=0,$ $b=1,$ $a=8:$ частное числа 810 и суммы его цифр равно $90.$

б) Если частное равно $88,$ то $100a+10b+c=88a+88b+88c \Leftrightarrow 12a=78b+87c.$ Получаем: $a<10 \Leftrightarrow 12a<120 \Leftrightarrow 78b+87c<120.$ Значит, $b=0, c=1$ или $b=1, c=0.$ Но ни $78,$ ни 87 не делится на $12.$ Значит, частное трёхзначного числа и суммы его цифр не может быть равным $88.$

в) Пусть k — наибольшее натуральное значение частного числа, не кратного $100,$ и суммы его цифр. Тогда

$$100a+10b+c=ka+kb+kc \Leftrightarrow (100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c.$$

Учитывая, что $b+c>0,$ получаем:

$$9\,(100-k) \geq (100-k)\,a=(k-10)\,b+(k-1)\,c \geq (k-10)\,(b+c) \geq k-10,$$

откуда $9\,(100-k) \geq k-10 \Leftrightarrow 10k \leq 910 \Leftrightarrow k \leq 91.$

Частное числа 910 и суммы его цифр равно $91.$ Значит, наибольшее натуральное значение частного трёхзначного числа, не кратного $100,$ и суммы его цифр равно $91.$

Ответ: а) да; б) нет; в) 91.

2. Задание 19 № 505570. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m=3,$ $d=2.$

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m+d=10.$

в) Каковы все возможные значения $d,$ если $m=7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

Решение.

а) Каждая из двух девочек могла выиграть оба раза у всех троих мальчиков, получив в сумме 6 очков. Сыграв две партии друг с другом, девочки распределили между собой ещё 2 очка. Всего $6+6+2=14$ очков.

б) Играя по две партии каждый с каждым, десять детей играют всего $2\cdot\dfrac{9\cdot 10}{2}=90$ партий. В каждой партии вне зависимости от её исхода разыгрывается одно очко. Поэтому всего набрано 90 очков.

в) Всего детей было $7d+d=8d,$ играя по две партии каждый с каждым они сыграли между собой $2\cdot\dfrac{8d(8d-1)}{2}=8d(8d-1)$ партий и разыграли $8d(8d-1)$ очков. Из них у мальчиков три четверти очков, а у девочек — одна четверть, т. е. у девочек $2d(8d-1)=16d^2-2d$ очков. Заметим, что если каждая девочка выиграла у всех мальчиков, то вместе девочки набрали максимум $2\cdot d\cdot 7d$ очков, а играя между собой, девочки распределили $d(d-1)$ очков. Поэтому наибольшее количество очков, которое могли набрать девочки, равно $14d^2+d(d-1).$ Тем самым, имеем: $16d^2-2d \leq 15d^2-d \Leftrightarrow d^2 \leq d.$ Следовательно, девочек не могло быть больше одной.

Если девочка была одна, то мальчиков было семеро. Они сыграли 56 партий и разыграли 56 очков. Девочка набрала 14 очков, выиграв у каждого из мальчиков по две партии. Играя между собой, мальчики разыграли оставшиеся 42 очка.

3. Задание 19 № 507493. Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения .

Решение.

По условию $x \geq \frac{x^2+6}{7} \geq \frac{6}{7} > 0$. Поэтому, если обозначить $\frac{x^2+6}{7} = b$, то $x = \sqrt{7b-6}$. Тогда число b — целое и должно удовлетворять системе:

$$\begin{cases} b \leq \sqrt{7b-6}, \\ b > \sqrt{7b-6}-1, \\ b \geq \frac{6}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2-7b+6 \leq 0, \\ b^2-5b+7 > 0, \\ b \geq \frac{6}{7}. \end{cases}$$

Второе неравенство верно при всех b, а из первого неравенства находим: $1 \leq b \leq 6$. Следовательно, $x = \sqrt{7 \cdot 1 - 6} = 1$, $x = \sqrt{8}$, $x = \sqrt{15}$, $x = \sqrt{22}$, $x = \sqrt{29}$ и $x = 6$.

Ответ: $1,\ \sqrt{8},\ \sqrt{15},\ \sqrt{22},\ \sqrt{29},\ 6.$

4. Задание 19 № 507495. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна

$$(2+\ldots+7)(13+\ldots+21) = \left(\frac{2+7}{2} \cdot 6\right) \cdot \left(\frac{13+21}{2} \cdot 9\right) = 27 \cdot 153 = 4131 .$$

2. Так как сумма оказалась нечетной, то чисто нечетных слагаемых в ней нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведений, которая получится при раскрытии следующих скобок:

$$(-2+3-4+5+6-7)(-13-14-15-16+17-18+19+20+21) = 1 \cdot 1 = 1 .$$

Ответ: 1 и 4131.

5. Задание 19 № 507501. Найдите все тройки натуральных чисел *k, m* и *n*, удовлетворяющие уравнению $2 \cdot k! = m! - 2 \cdot n!\,(1! = 1; 2! = 1 \cdot 2 = 2; n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots)$.

Решение.

1. Так как $m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!,$ то $n < m$ и $k < m$.
2. Пусть $n \geq k$, тогда $4 \cdot n! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (n+1) \cdot n!,$ откуда $4 \geq n+1$ и $k \leq n \leq 3$.
3. Пусть $n < k$, тогда $4 \cdot k! \geq 2 \cdot k! + 2 \cdot n! = m! \geq (k+1) \cdot k!,$ откуда $4 \geq k+1$ и $n \leq k \leq 3$.
4. Далее конечным перебором значений $1 \leq n \leq 3, 1 \leq k \leq 3$ находим все решения:

n	**k**	$m! = 2 \cdot k! + 2 \cdot n!$	**m**
3	3	24	4
3	2	16	нет решений
3	1	14	нет решений
2	3	16	нет решений
2	2	8	нет решений
2	1	6	3
1	3	14	нет решений
1	2	6	3
1	1	4	нет решений

Ответ: $k = 1,\ n = 2,\ m = 3;\ k = n = 3,\ m = 4;\ k = 2,\ n = 1,\ m = 3.$

6. Задание 19 № 507579. Найдите все пары натуральных чисел *m* и *n*, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

Решение.

Пусть n — четное число $n = 2k$. Тогда $2^m = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1)$. Правая часть — произведение двух последовательных четных чисел, каждое из которых является степенью числа 2. Значит, $3^k - 1 = 2$ и $3^k + 1 = 4$, откуда $k = 1$, и $n = 2$. При этом $2^m = 8$, следовательно, $m = 3$.

Пусть теперь n —нечетное число. Все нечетные степени тройки $(3, 27, 243, \ldots)$ делятся на 4 с остатком 3. Значит, $3^n - 1$ делится на 4 с остатком 2. Из равенства $2^m = 3^n - 1$ получаем, что в этом случае $m = 1$ (если $m \geq 2$, то 2^m делится на 4 без остатка). При этом $3^n - 1 = 2$, откуда $n = 1$.

Ответ: $m = 3, n = 2$ или $m = n = 1$.

7. Задание 19 № 507590. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2<18x-20y-166, \\ 32x-y^2>x^2+12y+271. \end{cases}$$

Решение.
Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x-9)^2+(y+10)^2<15, \\ (x-16)^2+(y+6)^2<21, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств системы:

$$\begin{cases} (x-9)^2<15, \\ (x-16)^2<21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\le x\le 12, \\ 12\le x\le 20 \end{cases} \Leftrightarrow x=12.$$

Подставляя $x=12$ в систему, получаем

$$\begin{cases} (y+10)^2<6, \\ (y+6)^2<5, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\le y+10\le 2, \\ -2\le y+6\le 2, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12\le y\le -8, \\ -8\le y\le -4, \\ y\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow y=-8.$$

Ответ: $(12;-8)$.

8. Задание 19 № 507609. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167<0, \\ x+2y<\dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

Решение.
Выделяя полные квадраты, получаем:

$$\begin{cases} (x+6)^2+(y-7)^2<\dfrac{3}{2}=\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2, \\ x+2y<\dfrac{15}{2}, \\ x,y\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет пять пар решений:
$(-6;7),(-5;7),(-6;8),(-7;7),(-6;6)$.
Второму условию системы удовлетворяют только четвертая и пятая пары.

Ответ: $(-7;7),(-6;6)$.

9. Задание 19 № 507613. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

Решение.

Наименьшее общее кратное чисел, составляющих множество A. $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Поэтому числа, составляющие множество A — это делители 210. Все делителей 16:

$$1,2,3,5,7,2 \cdot 3,2 \cdot 5,2 \cdot 7,3 \cdot 5,3 \cdot 7,5 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5,2 \cdot 3 \cdot 7,2 \cdot 5 \cdot 7,3 \cdot 5 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Каждый делитель содержит не более одного множителя 2. А произведение всех чисел из A делится $1920 = 2^7 \cdot 3 \cdot 5$. Поэтому среди чисел, составляющих A, должно быть, по крайней мере семь четных, а их всего восемь:

$$2,2 \cdot 3,2 \cdot 5,2 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5,2 \cdot 3 \cdot 7,2 \cdot 5 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

Если число 2 входит в A, то любое другое число из A должно делится на 2. Значит,

$$A=\{2,6,10,14,30,42,70,210\},$$

но произведение этих чисел равно $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^4 \cdot 7^4 = (2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2)^2$.

Значит, 2 не входит в A, а числа

$$2 \cdot 3,2 \cdot 5,2 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5,2 \cdot 3 \cdot 7,2 \cdot 5 \cdot 7,2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$$

входят в A, но их всего семь. Поэтому этот набор нужно расширить, добавляя делители 210, не взаимно простые со всеми указанными семью числами. Такой делитель единственный — $3 \cdot 5 \cdot 7$.

Ответ: $A = \{6,10,14,30,42,70,105,210\}$

10. Задание 19 № 507625. Перед каждым из чисел 5, 6, . . ., 10 и 12, 13, . . ., 16 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа взяты со знаком плюс, то их сумма максимальна и равна:

$$5(5+\ldots+10)+6(12+\ldots+16)=5\left(\frac{5+10}{2}\cdot 6\right)+6\left(\frac{12+16}{2}\cdot 5\right)=30\cdot 21,5=645.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечётной, то число нечётных слагаемых в ней — нечётно, причём это свойство всей суммы не меняется при смене знака любого её слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечётной, а значит, не будет равна нулю.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(5-6-7+8-9-10)+6(12-13-14+15-16)=5\cdot(-19)+6\cdot 16=-95+96=1.$$

Ответ: 1 и 645.

11. Задание 19 № 507637. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=5(30k+11)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.
Решение.
Ясно, что $5(30k+11)$ должно делиться на n. Случай n=1 не подходит, а простых делителей, меньших, чем 5, число $5(30k+11)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 5$. Тогда $n!$ делится на 5 и поэтому в равенстве $n^{k+1}-n!=5(30k+11)$ правая часть делится на 5, поэтому левая часть тоже делится на 5. Значит, n делится на 5. Предположим, что $n=5m$, где $m>1$. Тогда после деления на 5 данное уравнение принимает вид:

$$5^k m^{k+1}-4!\cdot 6\cdot 7\cdot \ldots \cdot 5m=30k+11.$$

Левая часть делится на 5, правая не делится, противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=5$. Уравнение принимает вид: $5^{k+1}-5!=5(30k+11)$, откуда $5^{k-1}=6k+7$. Ясно, что $k=1$ и $k=2$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=3$ обе части равны 25. Остаётся доказать что бóльших подходящих значений k нет. Рассмотрим последовательность $a_k=5^{k-1}-6k-7$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=5^k-6(k+1)-7-5^{k-1}+6k+7=5^{k-1}\cdot 4-6.$$

При $k\geq 2$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>3$, то $a_k>a_3=0$, а поэтому $5^{k-1}>6k+7$.

Ответ: $n=5,\ k=3$.

12. Задание 19 № 507649. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=7(420k+1)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$.
Решение.
Ясно, что $7(420k+1)$ должно делиться на n. Случай n=1 не подходит, а простых делителей, меньших, чем 7, число $7(420k+1)$ не имеет. Следовательно, $n\geq 7$. Тогда $n!$ делится на 7 и поэтому в равенстве $n^{k+1}-n!=7(420k+1)$ правая часть делится на 7, поэтому левая часть тоже делится на 7. Значит, n делится на 7. Предположим, что $n=7m$, где $m>1$. Тогда после деления на 7 данное уравнение принимает вид:

$$7^k m^{k+1}-6!\cdot 8\cdot 9\cdot \ldots \cdot 7m=420k+1.$$

Левая часть делится на 7, правая не делится, противоречие. Осталось рассмотреть случай $n=7$. Уравнение принимает вид: $7^{k+1}-7!=7(420k+1)$, откуда $7^{k-1}=60k+103$. Ясно, что $k=1$, $k=2$ и $k=3$ не удовлетворяют полученному равенству, а при $k=4$ обе части равны 343. Остаётся доказать что бóльших подходящих значений k нет. Рассмотрим последовательность $a_k=7^{k-1}-60k-103$ и разность $a_{k+1}-a_k$:

$$a_{k+1}-a_k=7^k-60(k+1)-103-7^{k-1}+60k+103=7^{k-1}\cdot 6-60.$$

При $k\geq 3$ эта разность положительна, следовательно, последовательность возрастает. Значит, если $k>4$, то $a_k>a_4=0$, а поэтому $7^{k-1}>60k+103$.

Ответ: $n=7,\ k=4$.

13. Задание 19 № 507679. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

Решение.

Пусть в каждой из x коробок лежит три пакетика, по n винтиков в каждом. Во втором случае коробок $x+2$, пакетиков в коробке 2, а винтиков в пакетике $n+3$. По условию задачи получаем:

$$3nx = 2(n+3)(x+2) \Leftrightarrow 3nx = 2(n+3)(x+2).$$

Откуда $n = \dfrac{6x+12}{x-4} = 6 + \dfrac{36}{x-4} = 6\left(1+\dfrac{6}{x-4}\right)$. Учитывая, что числа n и x натуральные, получаем, что $x-4$ — натуральный делитель числа 36. Количество винтиков при этом

$$f(x) = 3nx = 18\left(x + \frac{6x}{x-4}\right) = 18\left(x+\frac{24}{x-4}\right) + 108.$$

Решение находим перебором делителей.

Ответ: 840.

Примечание.

Перебор можно заменить исследованием функции.

Функция $y = x + \dfrac{24}{x-4}$ монотонно убывает при $4 < x \leq 2+\sqrt{6}$ и монотонно возрастает при $x \geq 4+2\sqrt{6}$. Следовательно, наибольшее значение функции $f(x)$ достигается, если $x-4$ — наибольший или наименьший натуральный делитель числа 36.

Если $x-4=1$, то $x=5$, $f(5) = 18(5+24)+108 = 630$.

Если $x-4=36$, то $x=40$, $f(40) = 18\left(40+\dfrac{2}{3}\right)+108 = 840$.

14. Задание 19 № 507710. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m - 3^n = 1$.

Решение.

Если $m=1$, то получаем уравнение $3^n = 1$, решением которого является не натуральное число 0.

Если $m=2$, то получаем уравнение $3^n = 3$, которое имеет натуральное решение $n=1$.

При $m>2$, решений нет, поскольку левая часть уравнения $2^m = 3^n + 1$ кратна 8, а правая нет. Действительно, при делении на 8 число $3^{2k} = 9^k = (8+1)^k$ даёт остаток 1, число 3^{2k+1} даёт остаток 3, а число $3^{2k+1}+1$ — остаток 4.

Ответ: $m=2$, $n=1$.

15. Задание 19 № 507820. Решите в натуральных числах уравнение $n! + 5n + 13 = k^2$, где $n! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Решение.

Возьмем $n!$ последняя цифра этого числа 0 для всех $n \geq 5$. Возьмем $5n$ последняя цифра этого числа 0 или 5 , если n четное или n нечетное. Тогда последняя цифра левой части или 3 или 8, но в правой части k^2 — а все квадраты целых чисел заканчиваются на 0, 5, 1, 4, 6, 9

Равенство не получается. Значит n<5.

По условию n — натуральное число. Варианты. 1, 2, 3, 4. Подставим висходное уравнение и найдем пару (n, k). Возьмём n = 2 и k = 5. Остальные значения n не подходят, так как сумма в левой части, не является квадратом целого числа.

Ответ: $n=2$; $k=5$.

16. Задание 19 № 507826. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$, где $m>n$.

Решение.

I способ Так как m и n натуральные числа, то для решения задачи требуется решить в натуральных числах уравнение $25n+25m=mn$ (1), где m > n.

При $n=25$ равенство (1) неверно, поэтому из равенства (1) можно выразить неизвестную m:

$$m=\frac{25n}{n-25}=25+\frac{625}{n-25}.$$

Теперь очевидно, что m является натуральным числом при $n>25$ лишь в случаях:

1) $n-25=1$,
2) $n-25=5$,
3) $n-25=5^2$,
4) $n-25=5^3$,
5) $n-25=5^4$.

Но при этом условие $m>n$ будет выполнено лишь в случаях: $m=650$, $n=26$ и $m=150$, $n=30$.

II способ Воспользуемся правилом разложения обыкновенной дроби на сумму двух аликвотных дробей (дробей с числителем 1). Умножим числитель и знаменатель аликвотной дроби на сумму двух взаимно простых делителей её знаменателя. Полученную дробь заменим суммой двух дробей, знаменатели которых равны знаменателю полученной дроби, а числители - слагаемым вышеупомянутой суммы. После сокращения дробей (или одной дроби) получится сумма аликвотных дробей. Если знаменатель исходной дроби составное число, то количество возможных вариантов замены исходной аликвотной дроби суммой двух аликвотных дробей равно числу пар взаимно простых делителей знаменателя исходной дроби. Правомерность этого метода подтверждается следующими преобразованиями.

$$\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a(a+1)}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)};$$
$$\frac{1}{ab}=\frac{a+b}{ab(a+b)}=\frac{a}{ab(a+b)}+\frac{b}{ab(a+1)}=\frac{1}{b(a+b)}+\frac{1}{a(a+b))}.$$

У знаменателя дроби $\frac{1}{25}$ имеются две пары взаимно простых делителей: 1 и 5; 1 и 25. Следовательно, данная дробь может быть представлена суммой двух аликвотных дробей двумя способами.

$$\frac{1}{25}=\frac{5+1}{25(5+1)}=\frac{5+1}{25\cdot 6}=\frac{1}{30}+\frac{1}{150};$$
$$\frac{1}{25}=\frac{25+1}{25(25+1)}=\frac{25+1}{25\cdot 26}=\frac{1}{26}+\frac{1}{650}.$$

Ответ: $m=150;\ n=30$ или $m=650;\ n=26.$

17. Задание 19 № 508977. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

Решение.

а) Пусть $a=10,\ b=20, c=11$ и $d=37$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{21}{57}=\frac{7}{19}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда:

$$11(a+c)bd=(b+d)(ad+bc)\Leftrightarrow 11abd+11bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10abd-ad^2=b^2c-10bcd\Leftrightarrow ad(10b-d)=bc(b-10d).$$

С другой стороны имеем: $10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\geq b-10d$. Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ разные знаки и, значит, левая и правая часть в последнем равенстве не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq a\geq 3b+1$ и $c\geq 6d+1$. Значит, $b\leq\frac{98}{3}<33.$ Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\leq 32$. Используя неравенства $a\geq 3b+1,\ c\geq 6d+1,\ b\leq 32$ и $d\geq 10$, получаем:

$$\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{3b+6d+2}{b+d}=3+\frac{3d+2}{b+d}\geq 3+\frac{3d+2}{d+32}=6-\frac{94}{d+32}\geq 6-\frac{94}{42}=\frac{79}{21}.$$

Пусть $a=97,\ b=32,\ c=61$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{158}{42}=\frac{79}{21}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{79}{21}$.

Ответ: а) Да, например, если $a=10,\ b=20,\ c=11$ и $d=37$; б) нет; в) $\frac{79}{21}$.

18. Задание 19 № 509006. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{3a+2c}{b+d}=\dfrac{12}{19}$.

б) Может ли дробь $\dfrac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{3a}{b}+\dfrac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

Решение.

а) Пусть $a=10,\ b=50, c=15$ и $d=45.$ Тогда $\dfrac{3a+2c}{b+d}=\dfrac{60}{95}=\dfrac{12}{19}.$

б) Предположим, что $11\cdot\dfrac{3a+2c}{b+d}=\dfrac{3a}{b}+\dfrac{2c}{d}.$ Тогда:

$$11(3a+2c)bd=(b+d)(3ad+2bc)\Leftrightarrow 33abd+22bcd=3abd+2bcd+3ad^2+2b^2c\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30abd-3ad^2=2b^2c-20bcd\Leftrightarrow 3ad(10b-d)=2bc(b-10d).$$

С другой стороны имеем: $10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-19\cdot 10\geq b-10d.$ Следовательно, числа $ad(10b-d)$и$bc(b-10d)$ разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq c\geq 2d+1$ и $a\geq 3b+1.$ Значит, $d\leq\dfrac{98}{2}=49.$ Используя неравенства $a\geq 3b+1,\ c\geq 2d+1,\ d\leq 49$ и $b\geq 10,$ получаем:

$$\frac{3a+2c}{b+d}\geq\frac{9b+4d+5}{b+d}=4+\frac{5b+5}{b+d}\geq 4+\frac{5b+5}{b+49}=9-\frac{240}{b+49}\geq 9-\frac{240}{59}=\frac{291}{59}.$$

Пусть $a=31,\ b=10,\ c=99$ и $d=49.$ Тогда $\dfrac{3a+2c}{b+d}=\dfrac{291}{59}.$ Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\dfrac{3a+2c}{b+d}$ равно $\dfrac{291}{59}.$

Ответ: а) Да, например, если $a=10,\ b=50,\ c=15$ и $d=45;$ б) нет; в) $\dfrac{291}{59}.$

19. Задание 19 № 509048. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

Решение.

а) Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 19 и центральный сектор 50 получаем: $60 + 57 + 50 = 167$.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дает меньше 54 очков. Если все шесть бросков были по 60 очков, то игрок набрал 360 очков, что больше 356. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшится как минимум на 6, а, значит, станет не больше 354 очков, что меньше 356 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый результат 357 очков, а хотя бы две замены — не более 354 очков. Значит, 356 очков шестью бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 16 бросков он наберет не более 960 очков, а тогда для того, чтобы набрать 1001 очко понадобится не менее 17 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 1001 очко за 17 бросков. Предположим, что он сделал 15 бросков на 60 очков (итого 900), один бросок в зону утроения сектора 17 (51 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет $900 + 51 + 50 = 1001$ очко.

Ответ: а) да; б) нет; в) за 17 бросков.

20. Задание 19 № 509069. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 161 очко?

б) Может ли игрок четырьмя бросками набрать ровно 235 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 947 очков?

Решение.

Да, например, при попадании в утроение сектора 20, утроение сектора 17 и центральный сектор 50 получаем: $60 + 51 + 50 = 161$.

б) Наибольшее количество очков, которое может набрать игрок одним броском — 60 (утроение 20), далее идут: 57 очков (утроение 19) и 54 очка (утроение 18). Попадание во все остальные сектора и зоны дают меньше 54 очков. Если все четыре броска были по 60 очков, то игрок набрал 240 очков, что больше 235. Если хотя бы один бросок на 60 очков заменить броском на 54 очка или меньше, то сумма уменьшится как минимум на 6, а, значит, станет не больше 234 очков, что меньше 235 очков. Следовательно, бросок на 60 очков можно заменять только броском на 57 очков. Но одна такая замена дает итоговый результат 237 очков, а хотя бы две замены — не более 234 очков. Значит, 235 очков четырьмя бросками набрать невозможно.

в) Как было показано в пункте б) каждый бросок приносит игроку не более 60 очков. Значит, за 15 бросков он наберет не более 900 очков, а тогда для того, чтобы набрать 947 очков понадобится не менее 16 бросков.

Покажем, что игрок может набрать 947 очков за 16 бросков. Предположим, что он сделал 14 бросков на 60 очков (итого 840), один бросок в зону утроения сектора 19 (57 очко) и один бросок в центральный сектор 50 очков. Тогда в сумме он наберет $840 + 57 + 50 = 947$ очков.

Ответ: а) да; б) нет; в) за 16 бросков.

21. Задание 19 № 509097. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235.

Решение.

а) Да. Например, числа 1, 3, 5, 7 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 1 + 3 + 5 + 7 = 16.

б) Так как все данные n чисел натуральные, то наименьшее из них больше или равно 1, а поскольку все эти числа различны (т. е. отличаются друг от друга не менее, чем на 1), то их сумма S не меньше суммы 1 + 2 + ... +, т. е. $S \geq \frac{n(n+1)}{2}$. Если известно, что S < 900, то из неравенства $\frac{n(n+1)}{2} \leq S$ следует, что $\frac{n(n+1)}{2} < 900$, $n(n+1) < 1800$, откуда n < 42 (при $n \geq 42$ имеем: $n(n+1) \leq 42 \cdot 43 > 1800$). При n = 41 имеем: $n(n+1) \leq 41 \cdot 42 < 1800$, натуральные числа от 1 до 41 (без пропусков) составляют арифметическую прогрессию, их количество равно 41, а сумма меньше 900. Таким образом, наибольшее возможное значение n в пункте б) равно 41.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, образующих арифметическую прогрессию, d — разность этой прогрессии. Тогда по известной формуле сумма этих n чисел равна $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Если известно, что сумма данных n чисел равна 235, то $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 470$. Заметим, что $470 = 47 \cdot 10$, число 47 простое и $n < 47$ (в пункте б) доказано, что $n \leq 41$), то n — один из делителей числа 10.

Так как $n \geq 3$, то возможные значения n = 5 или n = 10. Подставим в равенство $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 470$ поочередно n = 5 и n = 10, получаем следующие равенства: $2a_1 + 4d = 94$ и $2a_1 + 9d = 47$. Первое из этих равенств выполняется, например, при $a_1 = 1,\ d = 23$, а второе — при $a_1 = 1,\ d = 5$. Прогрессии 1, 24, 47, 70, 93 и 1, 6, 11, …, 46 состоят из 5 и 10 членов, а их сумма равна 235.

Ответ: а) да; б) 41; в) 5 и 10.

22. Задание 19 № 509126. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

Решение.

а) Нет. $S = \frac{2n_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Если известно, что S = 13,то $(2n_1 + d(n-1)) \cdot n = 26$. Заметим, что $26 = 13 \cdot 2$, так как $n \geq 3$, n = 13 или n = 26. Но сумма 13-ти различных натуральных чисел больше 13.

б) Так как все данные n чисел натуральные, то наименьшее из них больше или равно 1, а поскольку все эти числа различны (т. е. отличаются друг от друга не менее, чем на 1), то их сумма S не меньше суммы 1 + 2 + ... +, т. е. $S \geq \frac{n(n+1)}{2}$. Если известно, что S < 500, то из неравенства $\frac{n(n+1)}{2} \leq S$ следует, что $\frac{n(n+1)}{2} \leq 500$, $n(n+1) < 1000$, откуда n < 32 (при $n \geq 32$ имеем: $n(n+1) \leq 32 \cdot 33 > 1000$). При $n = 31$ имеем: $n(n+1) \leq 31 \cdot 32 < 1000$, натуральные числа от 1 до 31 (без пропусков) составляют арифметическую прогрессию, их количество равно 31, а сумма меньше 500. Таким образом, наибольшее возможное значение n в пункте б) равно 31.

в) Пусть a_1 — наименьшее из данных n чисел, образующих арифметическую прогрессию, d — разность этой прогрессии. Тогда по известной формуле сумма этих n чисел равна $\frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$. Если известно, что сумма данных n чисел равна 57, то $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 114$. Заметим, что $114 = 2 \cdot 3 \cdot 19$ и n — один из делителей числа 114.

Так как $n \geq 3$, то возможные значения n = 3, 19. Исходя из неравенства $n \cdot (n+1) \leq 114$, получим, что $n \leq 10$. Подставим в равенство $(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 228$. При n = 3 и n = 6, получаем равенства: $a_1 + d = 19$ и $2a_1 + 5d = 19$. Равенство выполняются, например, при $a_1 = 1, d = 18$ и $a_1 = 1, d = 3{,}4$. Прогрессии 1; 19; 37 и 1; 4,4; 7,8; 11,2; 14,6; 18 состоят из 3 членов и 6 членов, а их сумма равна 57.

Ответ: а) нет; б) 31; в) 3 и 6.

23. Задание 19 № 511111. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

Решение.

а) Для чисел $x = 17$ и $y = 10$ выполняется условие $3x = 8y - 29$, $q = 170$, $d = 1$, $\frac{q}{d} = 170.$

б) и в) При $x = 1$ и $y = 4$ выполняется равенство $3x = 8y - 29$ и $\frac{q}{d} = 4.$ Покажем, что никакое значение $\frac{q}{d} < 4$ не реализуется.

Если $x = y$, то $x = y = \frac{29}{5}$, что невозможно, поскольку числа x и y — натуральные. Пусть для определённости $x < y$ и $x = ad$, а $y = bd$. Тогда натуральные числа a и b взаимно просты и $a < b$. Получаем $q = \frac{xy}{d} = abd$, откуда $\frac{q}{d} = ab.$

Если $\frac{q}{d} = 1$, то $a = b$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 2$, то $a = 1$, $b = 2$ и, значит, $y = 2x$, откуда $x = \frac{29}{13}$, что невозможно.

Если $\frac{q}{d} = 3$, то $a = 1$, $b = 3$ и, значит, $y = 3x$, откуда $x = \frac{29}{21}$, что невозможно.

Ответ: а) да; б) нет) в) 4.

24. Задание 19 № 512341. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>5b$ и $c>8d$?

Решение.

а) Пусть $a=20$, $b=30$, $c=7$ и $d=39$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{27}{69}=\frac{9}{23}$.

б) Предположим, что $11\cdot\frac{a+c}{b+d}=\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$. Тогда

$$11\cdot(a+c)bd=(b+d)(ad+bc),$$
$$11abd+11bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c,$$
$$10abd-ad^2=b^2c-10bcd,$$
$$ad(10b-d)=bc(b-10d).$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq a\geq 5b+1$ и $c\geq 8d+1$. Значит, $b\leq\frac{98}{5}<20$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\leq 19$.

Используя неравенства

$$a\geq 5b+1,\quad c\geq 8d+1,\quad b\leq 19,\quad d\geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{5b+8d+2}{b+d}=5+\frac{3d+2}{b+d}\geq 5+\frac{3d+2}{d+19}=8-\frac{55}{d+19}\geq 8-\frac{55}{29}=\frac{177}{29}.$$

Пусть $a=96$, $b=19$, $c=81$ и $d=10$. Тогда $\frac{a+c}{b+d}=\frac{177}{29}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\frac{a+c}{b+d}$ равно $\frac{177}{29}$.

Ответ: а) Да, например, если $a=20$, $b=30$, $c=7$ и $d=39$; б) нет; в) $\frac{177}{29}$.

25. Задание 19 № 512383. Известно, что *a, b, c*, и *d* — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{6}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>7d$?

Решение.

а) Пусть $a=10$, $b=20$, $c=14$ и $d=72$. Тогда $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{24}{92}=\dfrac{6}{23}$.

б) Предположим, что $11\cdot\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$. Тогда

$$\begin{gathered}
11\cdot(a+c)bd=(b+d)(ad+bc),\\
11abd+11bcd=abd+bcd+ad^2+b^2c,\\
10abd-ad^2=b^2c-10bcd,\\
ad(10b-d)=bc(b-10d).
\end{gathered}$$

С другой стороны, имеем

$$10b-d\geq 10\cdot 10-99>0>99-10\cdot 10\geq b-10d.$$

Следовательно, числа $ad(10b-d)$ и $bc(b-10d)$ имеют разные знаки и не могут быть равны. Пришли к противоречию.

в) Из условия следует, что $99\geq a\geq 4b+1$ и $c\geq 7d+1$. Значит, $b\leq\dfrac{98}{4}<25$. Отсюда, учитывая, что число b целое, получаем, что $b\leq 24$.

Используя неравенства

$$a\geq 4b+1,\quad c\geq 7d+1,\quad b\leq 24,\quad d\geq 10,$$

получаем

$$\frac{a+c}{b+d}\geq\frac{4b+7d+2}{b+d}=4+\frac{3d+2}{b+d}\geq 4+\frac{3d+2}{d+24}=7-\frac{70}{d+24}\geq 7-\frac{70}{34}=\frac{84}{17}.$$

Пусть $a=97$, $b=24$, $c=71$ и $d=10$. Тогда $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{168}{34}=\dfrac{84}{17}$. Следовательно, наименьшее возможное значение дроби $\dfrac{a+c}{b+d}$ равно $\dfrac{84}{17}$.

Ответ: а) Да, например, если $a=10$, $b=20$, $c=14$ и $d=72$; б) нет; в) $\dfrac{84}{17}$.

26. Задание 19 № 512404. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются 5014, 5015, …, 5033. Очень счастливыми среди них являются числа 5014, 5023 и 5032.

б) б) Предположим, что это возможно. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись меньшего из этих двух очень счастливых чисел, а $\overline{klmn}$ — десятичная запись большего из них. Из условия следует, что либо $10c + d + 16 = 10m + n$, либо $10c + d + 16 = 100 + 10m + n$. Отсюда получаем, что либо $(m + n) - (c + d) = 9(c + m + 1) + 7$, либо $(m + n) - (c + d) = 9(c - m - 10) + 6$. Значит, число $(m + n) - (c + d)$ даёт при делении на 9 или остаток 7, или остаток 6.

Также из условия следует, что либо $1000a + 100b + 2000 = 1000k + 100l$, либо $1000a + 100b + 2100 = 1000k + 100l$.

Отсюда получаем, что либо $(k + l) - (a + b) = 9(a - k + 2) + 2$, либо $(k + l) - (a + b) = 9(a - k + 2) + 3$. Значит, число $(k + l) - (a + b)$ даёт при делении на 9 или остаток 2, или остаток 3. Приходим к противоречию, так как по условию $(k + l) - (a + b) = (m + n) - (c + d)$.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры очень счастливых четырёхзначных чисел кратных 2, 3, 5 и 7: число 2680 кратно 2 и 5; число 1890 кратно 3 и 7.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо очень счастливого числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c).$$

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b - a + d - c = 0$, либо $b - a + d - c = 11$, либо $b - a + d - c = -11$.

В первом случае имеем $a + b = c + d$ и $a + c = b + d$. Вычитая эти равенства, получаем $b - c = c - b$, т. е. $b = c$, — противоречие. Во втором случае имеем $a + b = c + d$ и $a + c + 11 = b + d$. Вычитая эти равенства, получаем $b - c - 11 = c - b$, т. е. $2(b - c) = 11$, — тоже противоречие, так как 11 не кратно 2. Аналогичное противоречие получается и в третьем случае. Значит, не существует очень счастливых четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 5014, 5015, …, 5033; б) нет; в) 11.

27. Задание 19 № 512876. а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящая из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение.

Без ограничения общности можно считать прогрессию возрастающей. Обозначим a — первый член прогрессии, n — количество членов, а d — её разность. Числа a, n, и d — натуральные.

а) Сумма первого и пятого членов этой прогрессии равна $2a + 4d$ и является чётным числом. Поскольку число 99 нечётное, сумма наибольшего и наименьшего членов конечной арифметической прогрессии из 5 натуральных чисел не может быть равной 99.

б) Сумма первого и шестого членов этой прогрессии равна $2a + 5d = 9$. Поскольку d — натуральное число, получаем d — натуральное число, получаем $d = 1$. Тогда $a = 2$. Искомые числа: 2, 3, 4, 5, 6, 7.

в) Среднее арифметическое прогрессии равно полусумме её крайних членов, поэтому получаем $2a + (n-1)d = 13.$ Значит, $(n-1)d \le 11;\ n - 1 \le 11;\ n \le 12.$ Натуральны числа от 1 до 12 составляют прогрессию, среднее арифметическое членов которой равно 6,5, а количество членов равно 12. Поэтому наибольшее возможное количество чисел — это 12.

Ответ: а) нет; б) 2, 3, 4, 5, 6, 7; в)12.

28. Задание 19 № 512887. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 15$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 27$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 19$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1000$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1000$. Найдите количество возможных значений числа a.

Решение.

а) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=12 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=(c-d)(c+d)-a-b-c-d=12 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=12.$$

Поскольку $a+b+c+d=15>12,$ получаем: $a=b+1$ или $c=d+1.$

В первом случае из равенства $(c-d-1)(c+d)=12,$ учитывая, что $c-d-1<c+d<\frac{15}{2}$ и числа $c+d$ и $c-d-1$ имеют разную чётность, находим $c+d=4,$ $c-d-1=3,$ чего не может быть.

Во втором случае из неравенства $(a-b-1)(a+b)=12,$ учитывая, что $a+b>\frac{15}{2},$ находим $a+b=12,$ $a-b-1=1,$ откуда получаем: $a=7,$ $b=5,$ $c=2,$ $d=1.$

б) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)=a+b+c+d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=0.$$

Поскольку $a-b-1\le 0,$ $a+b>0,$ $c-d-1\le 0,$ $c+d>0,$ последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1.$ Значит, $2b+2d+2=19,$ что невозможно.

в) Из равенства $a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d$ получаем: $a=b+1,$ $c=d+1.$ Значит, $2a+2d=1000;$ $d=500-a.$ Получаем четвёрку чисел $(a;\ b;\ c;\ d)=(a;\ a-1;\ 501-a;\ 500-a).$ Поскольку $b>c$, получаем: $a>251.$ Кроме того, $d>0$, откуда $a<500.$

Значит, a принадлежит промежутку (251; 500). Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 248 значений.

Ответ: а) $a = 7$, $b = 5$, $c = 2$, $d = 1$; б) нет; в) 248.

29. Задание 19 № 512893. Натуральные числа a, b, c и d удовлетворяют условию $a > b > c > d$.

а) Найдите числа a, b, c и d, если $a + b + c + d = 15$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 19$.

б) Может ли быть $a + b + c + d = 23$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 23$?

в) Пусть $a + b + c + d = 1200$ и $a^2 - b^2 + c^2 - d^2 = 1200$. Найдите количество возможных значений числа a.

Решение.

а) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2-a-b-c-d=4 \Leftrightarrow (a-b)(a+b)=(c-d)(c+d)-a-b-c-d=4 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=4.$$

Поскольку $a+b+c+d=15>4,$ получаем: $a=b+1$ или $c=d+1.$

В первом случае из равенства $(c-d-1)(c+d)=4,$ находим $c+d=4$ и $c-d-1=1,$ откуда получаем: $a=6,$ $b=5,$ $c=3$ и $d=1.$

Второй случай не реализуется, поскольку $a+b>\frac{15}{2}$, а $(a-b-1)(a+b)=4.$

б) Из условия получаем:

$$a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d \Leftrightarrow (a-b)(a+b)+(c-d)(c+d)=a+b+c+d \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (a-b-1)(a+b)+(c-d-1)(c+d)=0.$$

Поскольку $a-b-1 \le 0,$ $a+b>0,$ $c-d-1 \ge 0,$ $c+d>0,$ последнее равенство выполняется только при $a=b+1$ и $c=d+1.$ Значит, $2b+2d+2=23,$ что невозможно.

в) Из равенства $a^2-b^2+c^2-d^2=a+b+c+d$ получаем: $a=b+1,$ $c=d+1.$ Значит, $2a+2d=1200;$ $d=600-a.$ Получаем четвёрку чисел $(a;\ b;\ c;\ d)=(a;\ a-1;\ 601-a;\ 600-a).$ Поскольку $b>c,$ получаем: $a>301.$ Кроме того, $d>0,$ откуда $a<600.$

Значит, a принадлежит промежутку (301; 600). Более того, для любого целого a из этого промежутка найденная четвёрка чисел удовлетворяет условию задачи. Таким образом, a может принимать 298 значений.

Ответ: а) $a = 6$, $b = 5$, $c = 3$, $d = 1$; б) нет; в) 298.

30. Задание 19 № 504548. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

Решение.

а) Да, могло. Например, если числа записаны в порядке 9, 16, 15, 14, 13, 12, 11, 18, 17, 10.

б) Всего по кругу записано 10 чисел. Для каждой пары соседних чисел мы ищем наибольший общий делитель, следовательно, получим 10 наибольших общих делителей. Если они все попарно различны, то хотя бы один из них не меньше 10. Но такого быть не может, так как для данных чисел наибольший из всевозможных наибольших общих делителей есть НОД(18, 9) = 9.

в) Числа 11, 13 и 17 являются простыми, наибольшие общие делители этих чисел со всеми остальными числами равняются 1. Каждое из чисел имеет двух соседей, следовательно, хотя бы два числа из этих трёх будут иметь по крайней мере одного соседа, отличного от этих трёх чисел. Таким образом, хотя бы четыре из всех наибольших общих делителей будут равняться 1, то есть совпадать. Следовательно, не может быть больше, чем семь попарно различных наибольших общих делителей, поскольку всего их десять, причём четыре совпадают. Для расстановки 9, 18, 12, 16, 14, 13, 11, 17, 10, 15 получается ровно 7 попарно различных наибольших общих делителей.

Ответ: а) Да; б) нет; в) семь.

31. Задание 19 № 504855. Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное m. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное n.

а) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел m и n равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел m и n?

Решение.

а) Да, например, Коля умножил 6 на 7, получив 42, а Вова умножил 6 на 8, получив 48. Модуль разности полученных произведений равен 6.

б) Заметим, что произведение последовательных чисел всегда четно, так как одно из них четно. Таким образом, Колино произведение будет четным. Вовино же произведение четно в силу того, что он перемножает два четных числа. Значит, и модуль разности чисел a и b будет четным, таким образом, он не может быть равен 13.

в) Как было показано в пункте б) модуль разности будет четным. Покажем, что он не может быть равен нулю. Пусть Коля перемножал числа x и $x+1$, а Вова — числа y и $y+2$. Тогда, если модуль разности их произведений равен нулю, имеем:

$$x(x+1)=y(y+2) \Leftrightarrow x^2+x=y^2+2y \Leftrightarrow x^2+x+1=(y+1)^2.$$

Заметим, что $x<y+1$, так как $x^2<(y+1)^2$ С другой стороны, $y+1<x+1$, так как $(y+1)^2=x^2+x+1<(x+1)^2$.

Итак, $x<y+1<x+1$, но натуральное число не может лежать между двумя соседними натуральными числами. Значит, модуль разности не может равняться 0. Тогда он не меньше 2, так как четен.

Покажем, что он может принимать любое четное натуральное значение. Пусть Коля умножил четное число n на $n+1$, а Вова умножил n на $n+2$. Тогда модуль разности их произведений равен:

$$n(n+2)-n(n+1)=n.$$

ввиду того, что n — любое четное натуральное число, то искомый модуль разности может принимать любое четное натуральное значение.

Ответ: а) да; б) нет; в) все четные натуральные числа.

32. Задание 19 № 505421. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

Решение.

Обозначим рейтинг кинофильма, вычисленный по старой системе оценивания, через A, а рейтинг кинофильма, вычисленный по новой системе через B.

а) Заметим, что $A=\frac{m}{7}$, $B=\frac{n}{5}$, где m и n — некоторые натуральные числа. Значит,

$$A-B=\frac{m}{7}-\frac{n}{5}=\frac{5m-7n}{35}.$$

Если $A-B=\frac{1}{30}$, то $5m-7n=\frac{35}{30}$, что невозможно. Таким образом, разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам не может равняться $\frac{1}{30}$.

б) Например, для оценок экспертов 0, 1, 2, 4, 7, 8, 9 разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равна

$$\frac{0+1+2+4+7+8+9}{7}-\frac{1+2+4+7+8}{5}=\frac{31}{7}-\frac{22}{5}=\frac{1}{35}.$$

в) Пусть x — наименьшая из оценок, z — наибольшая, а y — сумма остальных пяти оценок. Тогда

$$A-B=\frac{x+y+z}{7}-\frac{y}{5}=\frac{5x-2y+5z}{35}\le\frac{5x+5z-2((x+1)+(x+2)+\ldots+(x+5))}{35}=$$

$$=\frac{5z-5x-30}{35}\le\frac{5\cdot 10-5\cdot 0-30}{35}=\frac{4}{7}.$$

Для оценок экспертов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 10 разность $A-B$ равна $\frac{4}{7}$. Значит, наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания, равно $\frac{4}{7}$.

Ответ: а) нет; б) да; в) $\frac{4}{7}$.

33. Задание 19 № 505475. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

Решение.

а) Пусть k — число посетителей, проголосовавших за футболиста. Заметим, что рейтинг футболиста будет равен 38, если доля голосов, отданных за него, лежит в пределах от 37,5% до 38,5%. Таким образом, получаем двойное неравенство:

$$\frac{37,5}{100} \le \frac{k}{11} < \frac{38,5}{100} \Leftrightarrow 4,125 \le k < 4,235.$$

Число k — целое, следовательно, оно не может лежать в полученном интервале.

б) Пусть число проголосовавших равно 999. Из них за первого футболиста — 332 человека, за второго — 333, за третьего — 334. Тогда рейтинги каждого из них равны 33%.

в) Пусть k — число голосов, отданных за футболиста, включая Васин голос, n — общее число голосов. Заметим, что после того как Вася отдал свой голос за данного футболиста, *доля голосов*, отданных за этого футболиста увеличилась, а рейтинг нет, получаем:

$$\frac{4,5}{100} \le \frac{k-1}{n-1} < \frac{k}{n} < \frac{5,5}{100}$$

Представляя в виде системы двух неравенств получим:

$$\begin{cases} \dfrac{9}{200} \le \dfrac{k-1}{n-1}, \\ \dfrac{k}{n} < \dfrac{11}{200}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9n-9 \le 200k-200, \\ 200k < 11n \end{cases} \Leftrightarrow 9n+191 \le 200k < 11n \Leftrightarrow n > 95,5.$$

Так как n — целое, то $n \ge 96$. Учитывая, что должны выполняться все неравенства системы получим:

$$1055 \le 9n+191 \le 200k \Leftrightarrow k > 5,275$$

Так как k — целое, то $k \ge 6$. Тогда из неравенства $200k < 11n$ получаем:

$$1200 \le 200k < 11n \Leftrightarrow n > 109,09...$$

Следовательно, $n \ge 110$. Значит, минимальное число проголосовавших при условиях, данных в задаче равно 110.

Ответ: 110.

34. Задание 19 № 484659. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

Решение.

Наименьшее возможное значение третьего члена возрастающей последовательности натуральных чисел $a_3 = 3$, причем только если $a_1 = 1$ и $a_2 = 2$. То есть если десятичная дробь начинается так:

$$0,123\ldots \text{ (четвертая цифра не } 0).$$

Заметим, что таким образом начинается, например, число

$$m = 10^{-1} + 2 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + \ldots + n \cdot 10^{-n} + \ldots$$

Найдем число m и проверим, удовлетворяет ли оно условиям задачи. Для этого запишем сумму подробнее.

$$\begin{aligned} m = 10^{-1} + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-2} + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-3} + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots + 10^{-4} + \ldots + 10^{-n} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots + 10^{-n} + \ldots \end{aligned}$$

В каждой строчке — сумма геометрической прогрессии со знаменателем 10^{-1}. По формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получаем:

$$\begin{aligned} m = 10^{-1}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + 10^{-2}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots + 10^{-n}\left(\frac{1}{1-10^{-1}}\right) + \ldots = \\ = \frac{10}{9}\left(10^{-1} + 10^{-2} + \ldots + 10^{-n} + \ldots\right) = \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{9} = \frac{10}{81}. \end{aligned}$$

Следовательно, m — рациональное число, и оно представляется дробью со знаменателем 81, что меньше ста. Число m удовлетворяет условию задачи и для этого числа $a_3 = 3$.

Ответ: 3.

Приведем другое решение.

Ясно, что если дробь можно записать в виде 0,123..., то $a_3 = 3$. Вспомним, что $\frac{1}{8} = \frac{10}{80} = 0,125.$ Чтобы уменьшить величину дроби, увеличим ее знаменатель на 1, получим $\frac{10}{81} = 0,1234\ldots$ Это число дает искомый пример.

Примечание.

Возможны и другие примеры: $\frac{9}{73}, \frac{11}{89}, \frac{12}{97}$.

35. Задание 19 № 484660. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

Решение.

Покажем, что искомое число равно $0,111\ldots$ $(p=1)$

Действительно, пусть $p>1$. Предположим, что наименьший период полученного рационального числа равен T. Тогда Tk — тоже период при любом натуральном k. Пусть первый период начинается с некоторой по счету цифры, принадлежащей десятичной записи степени p^m. Возьмем период такой длины Tk, чтобы эта длина была больше, чем длина записи p^m.

В записи числа p^{m+1} цифр столько же, сколько в p^m или на одну больше. Аналогично, число p^{m+2} длиннее, чем p^m не более, чем на две цифры и так далее. Значит, можно найти такую степень $p^n>p^m$, что число p^n имеет длину Tk.

Цифры числа p^n занимают весь период — группу длиной Tk. Тогда в записи следующего числа p^{n+1} первые Tk цифр тоже образуют период и должны повторять цифры числа p^n.

Получается, что либо $p^{n+1}=p^n$, либо $p^{n+1}=10p^n+\alpha$, где α — какое-то однозначное число. Последнее равенство невозможно, так как $p^{n+1}\le 9p^n$.

Следовательно, верно $p^{n+1}=p^n$, откуда $p=1$. Десятичная дробь имеет вид $0,111\ldots=\dfrac{1}{9}$.

Ответ: $\dfrac{1}{9}$.

36. Задание 19 № 484663. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Решение.

Если число p является делителем числа k^3+9k, то оно является также и делителем числа $k(k^3+9k)=k^4+9k^2$. Но если число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^4+9k^2, то оно является также и делителем разности этих чисел, то есть числа

$$(k^4+12k^2+12)-(k^4-9k^2)=3k^2+12\ .$$

Аналогично получаем:

1) число p является общим делителем чисел k^3+9k и $3k^2+12$, значит, p является делителем числа

$$3(k^3+9k)-k(3k^2+12)=15k\ ;$$

2) число p является общим делителем чисел $3k^2+12$ и $15k$, значит, p является делителем числа

$$5(3k^2+12)-k15k=60\ ;$$

Число 60 имеет ровно три различных простых делителя — 2, 3 и 5. Остается проверить найдутся ли такие целые числа k для каждого из которых одно из чисел 2, 3 и 5 является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

Если число k — четное, то число 2 является общим делителем данных чисел. Если число k кратно 3, то число 3 является общим делителем данных чисел. Если число $k=1$, то число 5 является общим делителем данных чисел.

Ответ: 2, 3, 5.

37. Задание 19 № 484668. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\dfrac{a^4+16a^2+7}{a^3+15a}$ можно сократить на b.

Решение.

Если целые числа a^4+16a^2+7 и a^3+15a делятся на b, то целое число

$$(a^4+16a^2+7)-a(a^3+15a)=a^2+7$$

также делится на b. Тогда число

$$(a^3+15a)-a(a^2+7)=8a$$

тоже делится на b.

Тогда число

$$8(a^2+7)-a\cdot 8a=56$$

также делится на b.

Таким образом, искомое b — простой делитель числа 56, то есть 2 или 7. Осталось проверить, для каких из найденных чисел можно подобрать a. Если a нечетное, то числитель и знаменатель данной дроби — четные числа, поэтому дробь можно сократить на 2. Если a кратно 7, то числитель и знаменатель данной дроби также кратны 7, поэтому дробь можно сократить на 7.

Ответ: 2, 7.

38. Задание 19 № 501400. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 4000. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна n% от длины другой стороны, где n — также натуральное число.

а) Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника?

б) Какое наименьшее значение может принимать площадь прямоугольника?

в) Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника, если дополнительно известно, что $n<100$.

Решение.

а) Так как периметр равен 4000, то сумма смежных сторон прямоугольника равна 2000. Известно, что наибольшее значение площади прямоугольника при фиксированном периметре достигается в том случае, если он является квадратом. Таким образом, его стороны должны быть равны 1000, что не противоречит условию (длины обеих сторон натуральные числа, длина одной стороны равна 100% от длины другой). Значит, наибольшее значение площади прямоугольника равно 1 000 000.

б) Пусть меньшая сторона прямоугольника (или равная другой стороне, если это квадрат) равна x $(1 \le x \le 1000)$, тогда другая сторона равна $(2000-x)$. В этом случае площадь прямоугольника равна $(2000x-x^2)$. Графиком данной функции является парабола, ветви которой направлены вниз, а число x не превосходит абсциссы вершины параболы. Следовательно, значение функции $(2000x-x^2)$ будет тем меньше, чем дальше находится число x от абсциссы вершины. Таким образом, наименьшее значение функции достигается при $x=1$, а тогда площадь равна 1999. В этом случае условие также соблюдается, так как число 1999 равно 199900% от числа 1.

в) Пусть a — это сторона, n% от которой равны другой стороне. Тогда другая сторона равна $\frac{an}{100}$. Поскольку сумма смежных сторон прямоугольника равна 2000, получаем:

$$a+\frac{an}{100}=2000;\ 100a+an=200\,000;\ a(100+n)=200\,000.$$

Так как a и n — целые числа, то число 200 000 кратно числу $(100+n)$.

Заметим, что $100<(100+n)<200$, так как $n<100$. Следовательно, требуется найти все делители числа 200 000, меньшие 200, но большие 100. Так как $200000=2^6\cdot 5^5$, то искомый делитель может содержать в своем разложении на простые множители лишь 2 и 5, причем соответствующие степени не превосходят 6 и 5.

Возможны три случая:

1) Число $(100+n)$ не делится на 5. Тогда оно может быть только степенью двойки, причем не более, чем шестой. Но тогда оно не превосходит 64, что меньше 100.

2) Число $(100+n)$ делится на 5, но не делится на 25. Из чисел вида $5\cdot 2^n$ в искомый промежуток попадает только число $5\cdot 2^5=160$. В этом случае $\mathrm{a}=1250$, а площадь равна 937 500.

3) Число $(100+n)$ делится на 25. В этом случае оно может быть равно 125, 150 или 175. Но число 150 делится на 3, а 175 делится на 7, значит, они оба не являются делителями числа 200 000. Если же 100 + n = 125, то a = 1600, а площадь равна 640 000.

Ответ: а) 1 000 000; б) 1999; в) 937 500 или 640 000.

39. Задание 19 № 484673. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

Решение.

Сумма чисел кратна их наибольшему общему делителю, поэтому их наибольший общий делитель является делителем числа 43, откуда следует, что он равен 1. Тогда наименьшее общее кратное этих чисел равно их произведению. Обозначив искомые числа x и y, получаем систему

$$\begin{cases} x+y=43, \\ xy=120, \end{cases}$$

решая которую, получаем числа 40 и 3.

Ответ: 40 и 3.

40. Задание 19 № 501734. а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

Решение.

Каждое число $0 \le a_i \le 99$ однозначно представляется в виде $a_i = 10b_i + c_i$, где $0 \le b_i \le 9$ и $0 \le c_i \le 9$ $(i = 0;\ 1;\ 2;\ 3)$. Значит, для каждого представления некоторого числа N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ имеет место единственное представление N в виде $N = 10n + m$, где $n = b_3 \cdot 10^3 + b_2 \cdot 10^2 + b_1 \cdot 10 + b_0$ и $m = c_3 \cdot 10^3 + c_2 \cdot 10^2 + c_1 \cdot 10 + c_0$ — произвольные целые числа от 0 до 9999. Число способов записать число N в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ равно числу способов записать число N в виде $N = 10n + m$.

а) Для представления числа 1292 в виде $1292 = 10n + m$ в качестве n можно взять любое целое число от 0 до 129. При этом $m = 1292 - 10n$ определено однозначно. Таким образом, искомое число способов равно 130.

б) Повторяя рассуждения предыдущего пункта, несложно показать, что каждое из чисел от 1290 до 1299 представимо в требуемом виде ровно 130 способами.

в) Рассмотрим представление некоторого числа N в виде $N = 10n + m$, где n и m — некоторые целые числа от 0 до 9999. Представим m в виде $m = 10k + l$, где l — цифра единиц числа m, а k — некоторое целое число от 0 до 999. Тогда выполнено:

$$N = 10n + 10k + l \Leftrightarrow N - l = 10(n + k) \Leftrightarrow \frac{N - l}{10} = n + k.$$

Найдём все числа K, представимые ровно 130 способами в виде $K = n + k$, где n — некоторое целое число от 0 до 9999, а k — некоторое целое число от 0 до 999.

Пусть для некоторого числа K представления $K = n_1 + k_1$ и $K = n_2 + k_2$ таковы, что n_1 — наименьшее возможное n, а n_2 — наибольшее возможное n. Тогда $n_1 = 0$ или $k_1 = K - n_1 = 999$, иначе бы было представление $K = (n_1 - 1) + (k_1 + 1)$. Аналогично, $n_2 = 9999$ или $k_2 = K - n_2 = 0$.

Заметим, что для любого целого n_0 такого, что $n_1 < n_0 < n_2$, имеется представление $K = n_0 + k_0$, поскольку $0 \le n_1 < n_0 < n_2 \le 9999$, $0 \le k_2 < k_0 < k_1 \le 999$. Таким образом, количество представлений равно $n_2 - n_1 + 1$. Если $n_1 = 0$; $n_2 = 9999$ или $k_1 = 999$, $k_2 = 0$, то представлений больше. Значит, или $n_1 = 0$; $n_2 = 129$; $k_2 = 0$; $K = 129$; $N = 1290 + l$, или $n_2 = 9999$; $n_1 = 9870$; $k_1 = 999$; $K = 10869$; $N = 108690 + l$, где l — произвольная цифра. Таким образом, искомое количество чисел равно 20.

Ответ: а) 130; б) да; в) 20.

41. Задание 19 № 505433. Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$. Оказалолсь, что рейтинги всех кинофильмов — это различные целые числа.

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?

б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?

в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

Решение.

а) Заметим, что если рейтинг кинофильма — целое число, то произведение оценок двух экспертов — точный квадрат. Произведение двух чисел от 1 до 10 не превосходит 90. Под это условие попадают квадраты чисел от 1 до 9. Но числа 1, 25, 49, 64 и 81 не представляются в виде произведения двух различных целых чисел от 1 до 10. Значит, для двух экспертов может быть не более четырёх кинофильмов.

б) Допустим кинофильмы получили такие наборы оценок: (1; 2 4), (2; 4; 8), (1; 3; 9), (4; 6; 9). Тогда среднее геометрическое этих наборов — различные целые числа. Условие задачи выполняется.

в) Если кинофильм получил оценки (3; 6; 8; 9), то условие задачи выполняется. Если экспертов больше четырёх, то произведение их оценок делится на a^5, где a — рейтинг кинофильма. Произведение всех возможных оценок 10! делится только на 1^5 и $2\text{^}{}^5$. Значит, целый рейтинг может равняться только 1 и 2 соответственно. Но среди чисел от 1 до 10 только одна степень единицы и четыре степени двойки. Значит, экспертов не могло быть более четырёх. Таким образом, наибольшее возможное число экспертов — это 4.

Ответ: а) нет; б) да; в) 4.

42. Задание 19 № 505503. а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение.

а) Да, можно это верно, например, для чисел 2006 и 8, их сумма равна 2014, а сумма цифр в каждом числе равна 8.

б) Попробуем представить число 199 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы 198 + 1. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что как бы мы ни разбивали 199 на два целых числа сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 19. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр втрого числа $19 - m$. Они равны, если $m = 19 - m$, откуда получаем, что $m = 9{,}5$. Но m целое, следовательно, получили противоречие. Таким образом, 199 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

в) Необходимо суммировать как можно меньшие числа, тогда и получим наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти натуральных чисел с одинаковой суммой цифр. Примем во внимание, что наименьшая сумма цифр, при которой можно получить 5 различных чисел с одинаковой суммой цифр, равна 4. получим числа 4, 13, 22, 31, 40, их сумма будет наименьшей, и будет равна 110.

Ответ: а) да; б) нет; в) 110.

43. Задание 19 № 506109. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно -3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно -8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому $4k - 8l + 0 \cdot m = -3(k + l + m)$.

а) Заметим, что в левой части приведённого выше равенства каждое слагаемое делится на 4, поэтому $k + l + m$ — количество целых чисел — делится на 4. По условию $40 < k + l + m < 48$, поэтому $k + l + m = 44$. Таким образом, написано 44 числа.

б) Приведём равенство $4k - 8l = -3(k + l + m)$ к виду $5l = 7k + 3m$. Так как $m \geq 0$, получаем, что $5l \geq 7k$, откуда $l > k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) Подставим $k + l + m = 44$ в правую часть равенства $4k - 8l = -3(k + l + m)$, откуда $k = 2l - 33$. Так как $k + l \leq 44$, получаем: $3l - 33 \leq 44$; $3l \leq 77$; $l \leq 25$; $k = 2l - 33 \leq 17$, то есть положительных чисел не более 17.

в) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 17. Пусть на доске 17 раз написано число 4, 25 раз написано число -8 и два раза написан 0. Тогда $\dfrac{4 \cdot 17 - 8 \cdot 25}{44} = -3;$ указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 44; б) отрицательных; в) 17.

Дублирует задание 510056.

44. Задание 19 № 484653. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами $\dfrac{96}{35}$ и $\dfrac{97}{36}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

Решение.

Так как

$$\frac{96}{35} = 2\frac{26}{35} \text{ и } \frac{97}{36} = 2\frac{25}{36},$$

то достаточно найти правильную дробь с наименьшим знаменателем, лежащую между числами

$$\frac{25}{36} = 0,69\ldots \text{ и } \frac{26}{35} = 0,74\ldots,$$

а затем прибавить к ней число 2.

Среди дробей со знаменателями 2, 3, 4, 5 и 6 нужных дробей нет, так как

$$\frac{1}{2} < 0,69,\ \frac{2}{3} < 0,69,\ \frac{2}{4} < 0,69,\ \frac{3}{4} = 0,75 > 0,74\ldots,$$
$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < 0,69,\ \frac{4}{5} > 0,75,\ \frac{1}{6} < \frac{2}{6} < \frac{3}{6} < \frac{4}{6} < 0,69,\ \frac{5}{6} > 0,75.$$

Для знаменателя 7 получаем $\dfrac{5}{7} = 0,71\ldots$, то есть

$$\frac{25}{36} < \frac{5}{7} < \frac{26}{35} \text{ и, следовательно, } 2\frac{25}{36} < 2\frac{5}{7} < 2\frac{26}{35}.$$

Ответ: $\dfrac{19}{7}$.

45. Задание 19 № 484655. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

Решение.

Имеем: $\overline{ab} = ab + 32 \Leftrightarrow a \cdot 10^k + b = ab + 32$, где $k \in \mathbb{N}$ — число цифр в числе b.

Тогда $(10^k - b)a = 32 - b \Rightarrow k = 1$, иначе

$$(10^k - b)a > 32 - b \Rightarrow b = 1, 2, ..., 9.$$

Непосредственно проверяем: $b_1 = 8;\ b_2 = 9$. Соответственно, $a_1 = 12,\ a_2 = 23$.

Ответ: 12 и 8; 23 и 9.

46. Задание 19 № 484656. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

Решение.

Число делится на 11 тогда и только тогда, когда разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и на четных местах, делится на 11.

Запишем все цифры подряд: 9876543210. В написанном числе указанная разность сумм равна 5. Меняя местами, например, 5 и 8, мы одну сумму увеличиваем на 3, а другую уменьшаем на 3. Значит, разность между суммами его цифр, стоящих на нечетных и на четных местах, становится равной 11.

Меняя местами, например, 1 и 4 или 3 и 6, получаем требуемые примеры.

Ответ: найдутся.

47. Задание 19 № 484657. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

Решение.

Разложим N на простые множители:

$$N = 2^{\alpha_2} 3^{\alpha_3} 5^{\alpha_5} 7^{\alpha_7} \dots p^{\alpha_p},$$

где p — наибольший простой множитель и $\alpha_i = 0, 1, 2, \dots$. Если запись числа N оканчивается n нулями, то или $\alpha_2 = n,\ \alpha_5 \geq n$, или, наоборот, $\alpha_2 \geq n,\ \alpha_5 = n$.

Оценим количество делителей k числа N:

$$k = (\alpha_2 + 1)(\alpha_3 + 1)(\alpha_5 + 1) \dots (\alpha_p + 1) \geq (n + 1)^2,$$

при этом k делится на $n + 1$.

Первый случай. Если k — четное, то все делители разбиваются на $\dfrac{k}{2}$ пар вида $\left(d, \dfrac{N}{d}\right)$ так, что произведение делителей в каждой паре равно N. Поэтому произведение всех делителей равно $N^{\frac{k}{2}}$.

Второй случай. Если k — нечетное, то $k - 1$ делителей разбиваются на пары указанного вида, и есть еще один делитель — $\sqrt{N}$. В этом случае тоже произведение всех делителей: $N^{\frac{k-1}{2}} \cdot \sqrt{N} = N^{\frac{k}{2}}$.

Значит, для любого N произведение всех делителей оканчивается $\dfrac{nk}{2}$ нулями, следовательно, $nk = 2 \cdot 399 = 798$. При этом $798 = nk \geq n(n + 1)^2$, откуда следует, что n — делитель числа 798, и $n \leq 8$.

Выпишем все такие n: $1, 2, 3, 6, 7$. Из равенства $798 = nk$ также следует, что 798 делится на $n + 1$. Поэтому возможно только $n = 1, 2$ и $n = 6$. Для каждого из этих n подберем N. Ограничимся простыми множителями 2 и 5. Значит, нужно подобрать только α_2 и α_5.

1. $\alpha_2 = n = 1, k = 798, \alpha_5 = \dfrac{k}{n+1} - 1 = 398, N = 2^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_5} = 2^1 \cdot 5^{398}.$
2. $\alpha_2 = n = 2, k = 399, \alpha_5 = 132, N = 2^2 \cdot 5^{132}.$
3. $\alpha_2 = n = 6, k = 133, \alpha_5 = 18, N = 2^6 \cdot 5^1 8.$

Таким образом, для $n = 1, 2, 6$ найдены (и даже не все) N, оканчивающиеся n нулями, произведение делителей которых оканчивается 399 нулями.

Ответ: 1, 2, 6.

48. Задание 19 № 484658. Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

Решение.

Обозначим эти числа за *a, b* и *c*. Имеем

$$\frac{1000a+b}{c}=3\cdot\frac{ab}{c},$$

а значит, $1000a+b=3ab$.

Так как правая часть полученного равенства делится на *a,* значит , левая часть тоже делится на a и $b=ka$. Получаем

$$1000a+ka=3ka^2,$$

что равносильно

$$1000+k=3ka \; .$$

Обратим внимание, что k не превосходит 9, так как a и b — трехзначные числа, а $1000+k$ делится на 3. Значит, возможны только варианты $k=2,\;\; k=5,\;\; k=8$.

Если $k=2$, то $a=167,\;\; b=334$, а $c=27889$ или $c=55778$ (других пятизначных делителей у ab нет).

Если $k=5$, то $a=67$, что противоречит условию.

Если $k=8$, то $a=42$, что противоречит условию.

Ответ: 167, 334 и 27889 или 167, 334 и 55778.

49. Задание 19 № 484665. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что $\frac{p}{q}=\frac{1234567\overbrace{888\ldots8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999\ldots9}_{1999}87654321}$.

Решение.

Пусть $a=1234567888\ldots87654321$, $b=12345678999\ldots987654321$, а $\text{НОД}(a,b)$ — наибольший общий делитель чисел a и b. Тогда $p=\frac{a}{\text{НОД}(a,b)}$, $q=\frac{b}{\text{НОД}(a,b)}$.

Число a состоит из 2014 знаков, а число b — из 2015 знаков, а значит, b и $10a$ состоят из одинакового количества разрядов. Более того, рассмотрим разность $b-10a$:

$$\begin{array}{r}-\begin{array}{r}12345678\overbrace{99\ldots9}^{1999}87654321\\ \underline{1234567888\ldots876543210}\end{array}\\ \underbrace{11\ldots1}_{1999}11111111\end{array}$$

По свойствам наибольшего общего делителя $\text{НОД}(a,b)=\text{НОД}(a,b-10a)=\text{НОД}(a,\underbrace{11\ldots1}_{2007})$.

Заметим, что $a=\underbrace{11111111}_{8}\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2007}$, значит, число a кратно числу $\underbrace{11\ldots1}_{2007}$.

Поэтому $\text{НОД}(a,b)=\underbrace{11\ldots1}_{2007}$, и тогда $p=\frac{a}{\underbrace{11\ldots1}_{2007}}=\underbrace{11\ldots1}_{8}$, $q=\frac{b}{\underbrace{11\ldots1}_{2007}}=\underbrace{11\ldots1}_{9}$.

Ответ: $\frac{11111111}{111111111}$.

50. Задание 19 № 513352. Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.

Решение.

а) Примером таких чисел являются числа 6222 и 6219.

б) Предположим, что такие числа существуют. Рассмотрим какие-либо два таких интересных числа. Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись большего из них, а k — та из цифр a, b, c или d, которая равна сумме трёх других. Тогда сумма цифр этого числа равна $2k$, то есть чётна. Аналогично получаем, что сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел также чётна. Так как $d \neq 0$, четвёртая цифра меньшего из рассматриваемых интересных чисел равна $d-1$. Так как $c \neq 0$, третья цифра этого числа равна $c-1$.

Аналогично получаем, что вторая цифра этого числа равна $b-1$. Наконец, первая цифра этого числа равна a. Значит, сумма цифр меньшего из рассматриваемых интересных чисел на три меньше суммы чисел большего из них. Пришли к противоречию.

в) Покажем, что искомое число равно 11. Для этого сначала приведём примеры интересных четырёхзначных чисел, кратных 2, 3, 5, и 7: число 2114 кратно 2 и 7, число 9135 кратно 3 и 5.

Пусть $\overline{abcd}$ — десятичная запись какого-либо интересного числа, кратного 11. Тогда

$$\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = 11(91a + 9b + c) + (b - a + d - c).$$

Получаем, что число $b - a + d - c$ кратно 11. Поскольку a, b, c и d — цифры, отсюда следует, что либо $b + d = a + c$, либо эти две суммы отличаются на 11. Составим две пары чисел: a и c, b и d. Пусть k — та из цифр a, b, c и d, которая равна сумме трёх других, l — та из них, которая в паре с k. Пусть m и n — две оставшиеся из цифр a, b, c и d. Поскольку $k = l + m + n$, имеем $k + l > m + n$. Значит, $k + l = m + n + 11$. Вычитая из этого равенства равенство $k = l + m + n$, получаем $l = 11 - l$. Следовательно, $2l = 11$. Пришли к противоречию. Значит, не существует интересных четырёхзначных чисел, кратных 11.

Ответ: а) Да, например, 6222 и 6219; б) нет; в) 11.