Последовательности и прогрессии

1. Задание 19 № 502079. Каждое из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равно 1, 2, 3 или 4. Обозначим

$$S_1 = a_1+a_2+...+a_{350},$$
$$S_2 = a_1^2+a_2^2+...+a_{350}^2,$$
$$S_3 = a_1^3+a_2^3+...+a_{350}^3,$$
$$S_4 = a_1^4+a_2^4+...+a_{350}^4.$$

Известно, что $S_1 = 513$.

а) Найдите S_4, если еще известно, что $S_2 = 1097$, $S_3 = 3243$.

б) Может ли $S_4 = 4547$?

в) Пусть $S_4 = 4745$. Найдите все значения, которые может принимать S_2.

Решение.

Пусть количества единиц, двоек, троек и четвёрок среди $a_1, a_2, \ldots, a_{350}$ равны m_1, m_2, m_3, m_4 соответственно. Тогда $m_1+m_2+m_3+m_4=350$ и $m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513$.

а) По условию

$$S_1 = m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513, \quad S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=1097,$$

$$S_3=m_1+8m_2+27m_3+64m_4=3243, \text{ где } m_1+m_2+m_3+m_4=350.$$

Решая систему четырёх линейных уравнений с четырьмя неизвестными, находим: $m_1=282,\ m_2=7,\ m_3=27,\ m_4=34.$ Значит,

$$S_4=282+16\cdot 7+81\cdot 27+256\cdot 34=11285.$$

б) Если $S_4=m_1+16m_2+81m_3+256m_4=4547,$ где $m_1+m_2+m_3+m_4=350,$ то $15m_2+80m_3+255m_4=4197.$ В последнем равенстве левая часть кратна 5, а правая — нет, поэтому S_4 не может быть равным 4547.

в) Если $S_4=m_1+16m_2+81m_3+256m_4=4745,$ где $m_1+m_2+m_3+m_4=350,$ то $15m_2+80m_3+255m_4=4395.$ Кроме того, поскольку $m_1+2m_2+3m_3+4m_4=513.$ получаем:

$$m_2+2m_3+3m_4=163 \Leftrightarrow 15m_2+30m_3+45m_4=2445.$$

Вычтем из первого полученного равенства второе: $50m_3+210m_4=1950 \Leftrightarrow 5m_3+21m_4=195.$ Значит, m_4 делится на 5 и может равняться только 0 или 5. При $m_4=0$ получаем:

$$m_3=\frac{195-21m_4}{5}=39,\ m_2=163-2m_3-3m_4=85,$$
$$m_1=350-m_2-m_3-m_4=226,\ S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=917.$$

При $m_4=5$ получаем:

$$m_3=\frac{195-21m_4}{5}=18,\ m_2=163-2m_3-3m_4=112,$$
$$m_1=350-m_2-m_3-m_4=215,\ S_2=m_1+4m_2+9m_3+16m_4=905.$$

Ответ: а) 11285; б) нет; в) 905 или 917.

2. Задание 19 № 507513. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадра- том суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 48 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 12 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1440 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Пример: 1, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов равна 36 − 14 = 22. Если добавить число 4, то разность будет равна 100 − 30 = 70, что ровно на 48 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда разность, вычиленная математиком в первый раз, равна

$$\begin{aligned}
&(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2=\\
&=2a_n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1}+\\
&+2a_{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}+\\
&+\ldots+\\
&+2a_3(a_1+a_2)+\\
&+2a_2a_1.
\end{aligned}$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1}, то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=2(a_1+nd)\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n=(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1440,$$

откуда $n \leq 11.$ Значит, 12 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n=1440$ следует, что n является делителем числа 1440. Значит, $n \neq 11.$

Если $n = 10$, получаем

$$(a_1+10d)(2a_1+9d)=144.$$

Если $d \geq 2,$ то левая часть не меньше чем $90d^2 \geq 90 \cdot 4 = 360 > 144.$

Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2+29a_1-54=0,$$

которое не имеет целых решений.

Если $n = 9$, получаем

$$(a_1+9d)(2a_1+8d)=160.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $72d^2 \geq 72 \cdot 4 = 280 > 160.$
Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$a_1^2 + 13a_1 - 44 = 0,$$

которое не имеет целых решений.
Если $n = 8$, получаем:

$$(a_1 + 8d)(2a_1 + 7d) = 180.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 180.$
Следовательно, $d = 1$. Получаем уравнение

$$2a_1^2 + 23a_1 - 124 = 0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 4.
Значит, прогрессия из восьми чисел 4, 5, 6, ..., 11 удовлетворяют условию задачи.

Ответ: а) 1, 2, 3; б) нет; в) 8.

3. Задание 19 № 507588. Возрастающая конечная арифметическая прогрессия состоит из различных целых неотрицательных чисел. Математик вычислил разность между квадратом суммы всех членов прогрессии и суммой их квадратов. Затем математик добавил к этой прогрессии следующий её член и снова вычислил такую же разность.

а) Приведите пример такой прогрессии, если во второй раз разность оказалась на 40 больше, чем в первый раз.

б) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Могла ли прогрессия сначала состоять из 13 членов?

в) Во второй раз разность оказалась на 1768 больше, чем в первый раз. Какое наибольшее количество членов могло быть в прогрессии сначала?

Решение.

а) Например, 2, 3. Разность квадрата суммы и суммы квадратов этих чисел равна 25 − 13 = 12. Если добавить число 4, то разность будет равна 81 − 29 = 52, что ровно на 40 больше, чем было.

б) Обозначим члены прогрессии $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Тогда разность, вычисленная математиком в первый раз, равна

$$(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2-a_1^2-a_2^2-\ldots-a_n^2=2a_n(a_1+a_2+\ldots+a_{n-1})+2a_{n-1}(a_1+a_2+\ldots+a_{n-2}) \\ +\ldots+2a_3(a_1+a_2)+2a_2a_1.$$

Когда к прогрессии добавили член a_{n+1}, то вычисленная во второй раз разность отличается от первой дополнительным слагаемым

$$2a_{n+1}(a_1+a_2+\ldots+a_n)=2(a_1+nd)\frac{2a_1+(n-1)d}{2}n=(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n,$$

где d — разность прогрессии.

Из условия следует, что $a_1 \geq 0$ и $d \geq 1$, поэтому

$$(a_1+nd)(2a_1+(n-1)d)n^2(n-1).$$

Получаем неравенство

$$n^2(n-1) \leq 1768,$$

откуда $n \leq 12.$ Значит, 13 членов в начальной прогрессии быть не может.

в) Из равенства $(a_1+nd)(2A_1+(n-1)d)n=1768$ следует, что n является делителем числа 1768 = 2 · 2 · 2 · 13 · 17. Наибольший делитель, меньший 13, равен 8. При n = 8 получаем

$$(a_1+8d)(2a_1+7d)=221.$$

Если $d \geq 2$, то левая часть не меньше, чем $56d^2 \geq 56 \cdot 4 = 224 > 221.$ Следовательно, d = 1. Получаем уравнение

$$2a_1^2+23a_1-165=0,$$

которое имеет единственный натуральный корень 5. Значит, прогрессия из восьми чисел 5, 6, 7, ..., 12 удовлетворяет условию задачи.

Ответ: а) 2, 3; б) нет; в) 8.

4. Задание 19 № 507626. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1008 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Пусть n — количество последовательных членов геометрической прогрессии, произведение которых делит 1008. $1008 = 2^4 \cdot 3 <^2 \cdot 7^1$, следовательно, члены геометрической прогрессии состоят только из простых множителей $2, 3$ и 7.

Пусть первый член равен $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c$, а знаменатель прогрессии равен $2^d \cdot 3^e \cdot 7^f$, где a, b, c, d, e, f — целые неотрицательные числа, при этом хотя бы одно из чисел d, e, f больше нуля. Тогда произведение чисел равно

$$2^{na+d+2d+\ldots+(n-1)d} \cdot 3^{nb+e+2e+\ldots+(n-1)e} \cdot 7^{nc+f+2f+\cdots+(n-1)f} =$$
$$= 2^{na+\frac{(n-1)n}{2}d} \cdot 3^{nb+\frac{(n-1)n}{2}e} \cdot 7^{nc+\frac{(n-1)n}{2}f}.$$

Полученное число является делителем числа $1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^1$. Следовательно,

$$na + \frac{(n-1)nd}{2} \leq 4, \; nb + \frac{(n-1)ne}{2} \leq 2, \; nc + \frac{(n-1)nf}{2} \leq 1.$$

Если $n \geq 4$, то $na + \frac{(n-1)nd}{2} \geq 4a + 6d$. Аналогично, $nb + \frac{(n-1)ne}{2} \geq 4b + 6e$ и $nc + \frac{(n-1)nf}{2} \geq 4c + 6f$.

Неравенства $4a + 6d \leq 4$, $4b + 6e \leq 2$ и $4c + 6f \leq 1$ имеют целые неотрицательные решения только при $d = e = f = 0$, что невозможно.

Следовательно, $n \leq 3$. Тем самым мы ответили на вопросы а) и б) — ни пять, ни четыре числа не могут образовывать геометрическую прогрессию и иметь при этом произведение, которое делит 1008.

Приведем пример пяти чисел, удовлетворяющих условию задачи при $n = 3$. Положим $a = b = c = e = f = 0$, $d = 1$.

Получаем три члена геометрической прогрессии $1, 2, 4$. Их произведение равно 8. $\frac{1008}{8} = 126 = 3 \cdot 42$. Следовательно, в качестве четвертого и пятого можно взять, например, числа 3 и 42: $1008 = 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 42$.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

5. Задание 19 № 507630. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 510 и 740.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Решение.

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв $b_1 = 512 = 8^3$ и $q = \frac{9}{8}$, получим

$$b_2 = 8 \cdot 8 \cdot 9 = 576,\ b_3 = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648,\ b_4 = 9^3 = 729.$$

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \frac{m}{k}$, где m и k — взаимно простые натуральные числа. Тогда прогрессия имеет вид:

$$510 < b_1 < b_2 = b_1 q < \ldots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} m^4 < 740.$$

Так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 740$, откуда $m \le 5$. Так как $q > 1$, $k < m$. Но k — целое, поэтому $k \le m - 1 \le 4$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \ge b_1 \frac{5^4}{4^4} > 510 \cdot \frac{625}{256} > 740,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да. б) нет.

6. Задание 19 № 507744. Натуральные числа $a,\ b,\ c$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию, причём все они больше 500 и являются квадратами натуральных чисел. Найдите наименьшее возможное, при указанных условиях, значение b.

Решение.

Пусть $\sqrt{a}=a',\ \sqrt{b}=b',\ \sqrt{c}=c';\ a'<b'<c'$. Тогда $a'\geq 23;\ b'=a'+t,\ t\in\mathbb{N}$. Тогда

$$2a'^2+4a't+2t^2=a'^2+c'^2\Leftrightarrow(a'+2t+c')(a'+2t-c')=2t^2.$$

Положим $p=a'+2t+c';\ q=a'+2t-c';\ p-q=2c'$. Значит, числа $p,\ q$ — одной чётности, а так как $pq=2t^2$, получаем:

$$p=2n,\ q=2m\ (n,\ m\in\mathbb{N})\Rightarrow t=2\nu\ \ (\nu\in\mathbb{Z}).$$

Значит,

$$\begin{cases}a'+2t=(p+q)/2=n+m,\\ c'=(p-q)/2=n-m,\\ nm=2\nu^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a'=n+m-4\nu\geq 23,\\ c'=n-m\geq 25,\\ nm=2\nu^2.\end{cases}$$

При этих условиях необходимо найти наименьшее значение $b'=n+m-2\nu$. Так как $n\geq 26,\ m\geq 1$, находим, что $2\nu^2=nm\geq 26$, откуда $\nu\geq 4$.

Далее перебираем случаи:

1) $\nu=4\Rightarrow\begin{cases}nm=32m\ n+m\geq 39,\\ n-m\geq 25,\ n\geq 26,\ m\geq 1\end{cases}$ решений нет;

2) $\nu=5\Rightarrow\begin{cases}nm=50,\ n+m\geq 43,\\ n-m\geq 25,\ n\geq 26,\ m\geq 1\end{cases}\Rightarrow n=50,\ n=1,\ b'=41;$

3) $\nu=6\Rightarrow\begin{cases}nm=72,\ n+m\geq 47,\\ n-m\geq 25,\ n\geq 26,\ m\geq 1\end{cases}\Rightarrow n=72,\ m=1,\ b'=61;$

4) $\nu=5\Rightarrow\begin{cases}nm=98,\ n+m\geq 51,\\ n-m\geq 25,\ n\geq 26,\ m\geq 1\end{cases}\Rightarrow b'=37$ или $b'=85;$

5) $\nu\geq 8\Rightarrow b'\geq 23+2\nu\geq 23+16=39.$

Значит, наименьшее значение b равно $37^2=1369$, при этом $a=23^2,\ c=47^2$.

Ответ: 1369.

7. Задание 19 № 507808. Последние члены двух конечных арифметических прогрессий $a_1=5$, $a_2=8$, ..., a_N и $b_1=9$, $b_2=14$, ..., b_M совпадают, а сумма всех совпадающих (взятых по одному разу) членов этих прогрессий равна 815. Найдите число членов в каждой прогрессии.

Решение.

Ясно, что

$$a_m=5+3(m-1),\ m=1,...,N,\ b_k=9+5(k-1),\ k=1,...,M.$$

Общие члены прогрессий удовлетворяют уравнению:

$$5+3(m-1)=9+5(k-1)\Leftrightarrow 3m=5k+2.$$

Левая часть последнего уравнения делится на 3, поэтому $k=3n-1$, то есть $3m=15n$, где $1\leq n\leq L$. Найдём L. Общие члены двух прогрессий сами образуют арифметическую прогрессию с первым членом равным 14, а последним — равным $15L-1$. Значит, $\frac{14+15L-1}{2}L=815\Leftrightarrow 15L^2+13L-1630=0$, откуда $L=10$. Поэтому $M=5L-1=49,\ N=3L-1=29.$

Ответ: 49 и 29.

8. Задание 19 № 507829. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 12, либо в 8 раз. Сумма всех членов последовательности равна 437.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух членов, так как уравнения $x + (x + 12) = 437$, $x + 8x = 437$ неразрешимы в целых числах.

Последовательность может состоять из трёх членов, например, так: 25 + 200 + 212 = 437.

б) Сумма двух соседних чисел равна как минимум 9; поскольку 437 = 48 · 9 + 5, будет самое большее 48 пар и ещё одно число. Но сумма может быть равна 9 только для пары 1 + 8, а если все пары такие, то добавить к ним число 5 нельзя. А для остальных пар сумма равна как минимум 14. Поэтому на самом деле 97 чисел обеспечить нельзя, а 96 чисел можно в ситуации 1, 8, 1, 8, 1, 8, ..., 1, 8, 1, 13 (пара 1, 8 повторяется 47 раз).

Ответ: а) 3; б) 96.

9. Задание 19 № 502119. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Решение.

Без ограничения общности можно считать, что числа составляют возрастающую арифметическую прогрессию. Обозначим a — первый член этой прогрессии, а d её разность. Тогда сумма её членов равна $\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n.$

а) Да, может. Числа 1, 2, 3, 4 составляют арифметическую прогрессию, а их сумма равна 10.

б) Для суммы членов арифметической прогрессии верно неравенство

$$\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n \geq \frac{2+(n-1)}{2} \cdot n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Значит, $\frac{n(n+1)}{2} < 1000,$ откуда находим $n \leq 44.$ Сумма арифметической прогрессии 1, 2, …, 44 равна 990 < 1000 . Значит, наибольшее значение n равно 44.

в)Для суммы членов арифметической прогрессии верно:

$$\frac{2a+d(n-1)}{2} \cdot n = 129;\ (2a+d(n-1))n = 258 = 2 \cdot 3 \cdot 43.$$

Таким образом, число n является делителем числа 258. Если $n \geq 43,$ то $(2a+d(n-1))n \geq 44 \cdot 43 > 258,$ следовательно, $n < 43.$ Поскольку $n \geq 3,$ получаем, что $n = 3$ или $n = 6.$ Прогрессии из 3 и 6 членов с суммой 129 существуют: например, 42, 43, 44 и 19, 20, 21, 22, 23, 24.

Ответ: а) да; б) 44; в) 3; 6.

10. Задание 19 № 505245. Целое число S является суммой не менее трех последовательных членов непостоянной арифметической прогрессии, состоящей из целых чисел.

а) Может ли S равняться 8?

б) Может ли S равняться 1?

в) Найдите все значения, которые может принимать S.

Решение.

а) Число 8 является суммой четырех последовательных членов арифметической прогрессии. Например, $8 = -1 + 1 + 3 + 5$.

б) Пусть число 1 является суммой первых k членов арифметической прогрессии с первым членом a и разностью d. Тогда

$$1 = \frac{k(2a+d(k-1))}{2} \Leftrightarrow 2 = k(2a+d(k-1)).$$

значит, число k — делитель 2, что противоречит условию $k \geq 3$.

в) Любое натурально число $n \geq 2$ является суммой арифметической прогрессии $1-n;\ 2-n\ \ldots;\ n-1;\ n,$ состоящей из $2n \geq 4$ членов. Если заменить все члены этой прогрессии на противоположные, то получится арифметическая прогрессия, состоящая из $2n$ членов, сумма которой равна $-n$.

В предыдущем пункте мы показали, что S не может равняться 1. Аналогично можно показать, что S не может равняться -1. Число S может равняться 0, например, для прогрессии -1; 0; 1. Таким образом, S может принимать любые целые значения, кроме -1 и 1.

Ответ: а) да; б) нет; в) любые целые значения, кроме -1 и 1.

11. Задание 19 № 484654. Перед каждым из чисел 14, 15, . . ., 20 и 4, 5, . . ., 8 прозвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего от каждого из образовавшихся чисел первого набора отнимают каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 35 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все числа первого набора взяты с плюсами, а второго — с минусами, то сумма максимальна и равна

$$5(14+\ldots+20)-7(-4-\ldots-8)=5\left(\frac{14+20}{2}\cdot 7\right)+7\left(\frac{4+8}{2}\cdot 5\right)=35\cdot 23=805.$$

2. Так как предыдущая сумма оказалась нечетной, то число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство всей суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из полученных сумм будет не четной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при следующей расстановке знаков у чисел:

$$5(-14-15+16-17+18-19+20)-7(-4+5+6-7-8)=-5\cdot 11+7\cdot 8=-55+56=1.$$

Ответ: 1 и 805.

12. Задание 19 № 484662. Каждое из чисел 5, 6, . . ., 9 умножают на каждое из чисел 12, 13, . . ., 17 и перед каждым произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю сумму и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

Решение.

1. Если все произведения взяты со знаком плюс, то их сумма наибольшая и она равна

$$(5+...+9)(12+...+17)=\left(\frac{5+9}{2}\cdot 5\right)\cdot\left(\frac{12+17}{2}\cdot 6\right)=35\cdot 87=3045\ .$$

2. Так как сумма нечетная, число нечетных слагаемых в ней — нечетно, причем это свойство суммы не меняется при изменении знака любого ее слагаемого. Поэтому любая из получающихся сумм будет нечетной, а значит, не будет равна 0.

3. Значение 1 сумма принимает, например, при такой расстановке знаков у произведения, которая получится при раскрытии следующих скобок

$$(5+6+7-8-9)(12-13-14+15-16+17)=1\cdot 1=1\ .$$

Ответ: 1 и 3045.

13. Задание 19 № 485960. В возрастающей последовательности натуральных чисел каждые три последовательных члена образуют либо арифметическую, либо геометрическую прогрессию. Первый член последовательности равен 1, а последний 2076.

а) может ли в последовательности быть три члена?

б) может ли в последовательности быть четыре члена?

в) может ли в последовательности быть меньше 2076 членов?

Решение.

а) Нет, поскольку $1+2076$ не делится на 2, а 2076 не является квадратом натурального числа.

б) Последовательность не может быть арифметической прогрессией, поскольку $2076-1$ не делится на 3.

Последовательность не может быть геометрической прогрессией, поскольку 2076 не является кубом натурального числа.

Если первые три члена образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую, то эти числа: $1, q, q^2, 2q^2-q$, но уравнение $2q^2-q-2076=0$ не имеет целых корней.

Если первые три члена образуют арифметическую прогрессию, а последние три – геометрическую, то эти числа: $1, a+1$ и $2a+1$ где a — натуральное число. Тогда последнее число должно равняться

$$\frac{(2a+1)^2}{a+1}=4a+\frac{1}{a+1},$$

но это не натуральное число.

в) Да, например, $1, 2, 4, 6, 8, \ldots, 2076.$

Ответ: а) Нет, б) нет, в) да.

14. Задание 19 № 500116. Рассматриваются конечные непостоянные арифметические прогрессии, состоящие из натуральных чисел, которые не имеют простых делителей, отличных от 2 и 3.

а) Может ли в этой прогрессии быть три числа?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

Решение.

а) В такой прогрессии может быть три члена: например, 2, 4, 6.

б) В такой прогрессии может быть четыре члена: например, 1, 2, 3, 4.

Предположим, что существует такая арифметическая прогрессия, состоящая не менее чем из пяти членов. Рассмотрим любые пять её последовательных членов. Разделим каждый член на наибольший общий делитель всех пяти членов. Поскольку разности соседних членов уменьшатся в одинаковое число раз, полученные числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 также образуют арифметическую прогрессию, удовлетворяющую условию задачи. Заметим, что числа a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 не могут все быть четными или все делиться на 3.

Если разность этой прогрессии делится на 3, то в ней не может быть члена, делящегося на 3 (иначе все члены прогрессии делятся на 3), поэтому все члены прогрессии являются степенями двойки. Поскольку все члены не могут быть четными, получаем, что среди них присутствует 1. Но в этом случае разность прогрессии нечётна, поэтому чётные и нечётные члены прогрессии чередуются, а нечётных степеней двойки, отличных от 1, не существует.

Пусть теперь разность прогрессии d не делится на 3. Тогда если a_1 делится на 3, то члены $a_2=a_1+d$, $a_3=a_1+2d$ и $a_5=a_1+4d$ не делятся на 3, а $a_4=a_1+3d$ делится на 3. Аналогично, если a_2 делится на 3, то из чисел a_1, a_3, a_4, a_5 на 3 будет делиться только a_5. Наконец, если a_3 делится на 3, то ни одно из чисел a_1, a_2, a_4, a_5 не делится на 3. Значит, найдутся два последовательных члена прогрессии, являющиеся степенями двойки.

Если оба эти члена четны, то и все члены прогрессии чётны, чего не может быть. Поэтому одно из этих чисел - единица. Единица может стоять в прогрессии только на первом или пятом месте, в этом случае на 3 делится только a_3, поскольку единица — один из двух последовательных членов прогрессии, являющихся степенями двойки. Тогда a_1, a_2, a_4, a_5 являются степенями двойки. Разность прогрессии $d=a_2-a_1=a_5-a_4$, значит, она чётна и все члены прогрессии чётны, чего не может быть.

Ответ: а) да; б) 4.

15. Задание 19 № 500217. Число S таково, что для любого представления S в виде суммы положительных слагаемых, каждое из которых не превосходит 1, эти слагаемые можно разделить на две группы так, что каждое слагаемое попадает только в одну группу и сумма слагаемых в каждой группе не превосходит 19.

а) Может ли число S быть равным 38?

б) Может ли число S быть больше $37,05$?

в) Найдите максимально возможное значение S.

Решение.

а) Рассмотрим разбиение числа 38 на 39 слагаемых, равных $\frac{38}{39}$. При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна $20 \cdot \frac{38}{39} = \frac{760}{39} = 19\frac{19}{39} > 19.$ Значит, S не может быть равным 38.

б) Поскольку S является суммой двух чисел, не больших 19, получаем $S \leq 38.$ Пусть $37,05 < S \leq 38.$ Рассмотрим разбиение числа S на 39 слагаемых, равных $\frac{S}{39} \leq \frac{38}{39} < 1.$ При разделении этих слагаемых на две группы в одной из них окажется не менее 20 чисел, сумма которых равна $20 \cdot \frac{S}{39} > 20 \cdot \frac{37,05}{39} = 19.$ Значит, S не может быть больше $37,05.$

в) Докажем, что число $37,05$ удовлетворяет условию задачи. Рассмотрим произвольное представление $S = 37,05$ в виде суммы положительных слагаемых, не превосходящих $1: S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$ Можно считать, что слагаемые упорядочены по не возрастанию: $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_{n-1} \geq x_n.$ Первую группу составим из k небольших слагаемых так, чтобы $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 19 < x_1 + x_2 + \ldots + x_k + x_{k+1}.$ Вторую группу составим из оставшихся слагаемых.

Пусть $S_1 < 18,05 = 37,05 - 19.$ В этом случае $0,95 < 19 - S_1 < x_{k+1} \leq x_k \leq \ldots \leq x_1$ и $0,95k < x_1 + \ldots + x_k = S_1 < 18,05.$ Поэтому $k < 19,$ то есть $k \leq 18$ и $S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_k \leq 18.$ Тогда $1 \leq 19 - S_1 < x_{k+1} \leq 1.$

Полученное противоречие доказывает, что $S_1 = 18,05.$ Поэтому сумма слагаемых во второй группе $S_2 = x_{k-1} + x_{k+2} + \ldots + x_n = 37,05 - S_1 = 19.$

Таким образом, число $S = 37,05$ удовлетворяет условию задачи. В предыдущем пункте было показано, что ни одно из чисел $S > 37,05$ не удовлетворяет условию задачи, значит, максимально возможное значение S — это $37,05.$

Ответ: а) нет; б) нет; в) $37,05.$

16. Задание 19 № 500412. В ряд выписаны числа: $1^2, 2^2, \ldots, (N-1)^2, N^2.$ Между ними произвольным образом расставляют знаки «$+$» и «$-$» и находят получившуюся сумму.

Может ли такая сумма равняться:

а) 12, если $N = 12$?

б) 0, если $N = 50$?

в) 0, если $N = 80$?

г) 5, если $N = 90$?

Решение.

а) При следующей расстановке знаков получается требуемая сумма:

$$1^2 - 2^2 - 3^2 + 4^2 + 5^2 - 6^2 - 7^2 + 8^2 + 9^2 - 10^2 - 11^2 + 12^2 = 12.$$

б) Среди выписанных 50 чисел 25 чётных и 25 нечётных. Поэтому любая сумма, которую можно получить, будет нечётной и не может равняться 0.

в) Заметим, что $(a+3)^2 - (a+2)^2 - (a+1)^2 + a^2 = 4$. Значит, между 8 квадратами последовательных натуральных чисел можно расставить знаки так, что полученная сумма будет равняться 0:

$$(a+7)^2 - (a+6)^2 - (a+5)^2 + (a+4)^2 - (a+3)^2 + (a+2)^2 + (a+1)^2 - a^2 = 0.$$

При $N = 80$ можно разбить все данные числа на группы по 8 чисел в каждой так, что сумма чисел в каждой группе равна 0, а значит, и сумма всех чисел равна 0.

г) Как и в предыдущем пункте, расставим знаки между 88 числами $3^2, 4^2, \ldots, 89^2, 90^2$ таким образом, чтобы их сумма равнялась 0. Перед 2^2 поставим знак «$+$». При такой расстановке знаков сумма равна $1^2 + 2^2 + 0 = 5.$

Ответ: а) да; б) нет; в) да; г) да.

17. Задание 19 № 484652. Найдите все целые значения m и k такие, что $3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=2010.$

Решение.

Заметим, что из условия следует, что $k\in\mathbb{N}.$ Далее имеем:

1. Если $m=0,$ то каждое из слагаемых равно $1,$ и при $k=2010$ равенство будет верно.

2. Если $m<0,$ левая часть уравнения не превосходит суммы конечной геометрической прогрессии с первым членом 3^{-1} и знаменателем $3^{-1},$ сумма которой, в свою очередь, меньше суммы бесконечно убывающей прогрессии с тем же первым членом и тем же знаменателем:

$$3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}\le 3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}<3^{-1}+3^{-2}+\ldots+3^{-k}+\ldots<\frac{3^{-1}}{1-3^{-1}}=\frac{1}{2}.$$

Таким образом, в этом случае уравнение решений не имеет.

3. Если $m>0,$ то $3^m+3^{2m}+3^{3m}+\ldots+3^{k\cdot m}=3^m\dfrac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1},$ откуда получаем:

$$3^m\frac{3^{k\cdot m}-1}{3^m-1}=2010\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=2010\cdot(3^m-1)\Leftrightarrow 3^m(3^{k\cdot m}-1)=3\cdot 670\cdot(3^m-1).$$

Числа 670 и 3^m-1 на три нацело не делятся, следовательно, $m=1,$ откуда $3^k-1=670\cdot 2$ и $3^k=1341.$ Последнее уравнение натуральных решений не имеет.

Ответ: $m=0, k=2010.$

18. Задание 19 № 501049. Дана последовательность натуральных чисел, причём каждый следующий член отличается от предыдущего либо на 10, либо в 6 раз. Сумма всех членов последовательности равна 257.

а) Какое наименьшее число членов может быть в этой последовательности?

б) Какое наибольшее количество членов может быть в этой последовательности?

Решение.

а) Последовательность не может состоять из двух членов, так как уравнения x+(x+10)=257, x+6x=257 неразрешимы в целых числах. Последовательность может состоять из трёх членов, например, так: 19+114+124=257.

б) Сумма двух соседних чисел равна минимум 7; поскольку 257=36·7+5, будет самое большее 36 пар и еще одно число. Но сумма может быть равна 7 только для пары 1+6, а если все пары такие, то добавить к ним число 5 нельзя. А для остальных пар сумма равна минимум 12. Поэтому на самом деле 73 числа обеспечить нельзя, а 72 числа можно в ситуации 1,6,1,6,1,6,...,1,6,1,11 (пара 1,6 повторяется 35 раз).

Ответ: а)3; б) 72.

19. Задание 19 № 500971. Дана арифметическая прогрессия (с разностью, отлично от нуля), составленная из натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 9.

а) Может ли в такой прогрессии быть десять членов?

б) Докажите, что число её членов меньше 100.

в) Докажите, что число членов всякой такой прогрессии не больше 72.

г) Приведите пример такой прогрессии с 72 членами

Решение.

а) Да, например 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20.

б) Можно считать, что разность d прогрессии положительна. Пусть разность имеет k цифр. Тогда при переходе от какого-либо члена последовательности к следующему $(k+1)$-й разряд либо не меняется, либо увеличивается на 1. Так как цифра 9 запрещена, возможно не больше 8 переходов со сменой этого разряда. Может случиться несколько членов подряд с одной и той же цифрой в $(k+1)$-м разряде. Назовём такие члены группой. Всего таких групп не более 9. Обозначим длину группы L.

Найти наибольшую возможную длину группы. Так как d -- k-значное число, каждый переход, не меняющий $(k+1)$-й разряд, увеличивает k-й разряд. И так ка цифра 9 запрещена в то числе в k-м разряде, то таких переходов подряд может быть не более 8. Следовательно, $L \leq 9$, а в прогрессии не более $9 \cdot L - 81$ членов.

в) Если в прогрессии нет переходов со сменой $(k+1)$-го разряда, то членов прогрессии не больше 9. Пусть такие переходы есть. Рассмотрим член прогрессии, стоящий перед таким переходом. Так как он не содержит 9, то его k-значный "хвост" (имеет остаток от деления на 10^k) не больше $\underbrace{88...88}_{k\,\text{раз}}$. Но при прибавлении d должен произойти переход через десяток в $(k+1)$-м разряде. Следовательно, $d > \underbrace{11...11}_{k\,\text{раз}}$.

Рассмотрим такую группу членов прогрессии $a_m, a_{m+1}, ..., a_{m+L-1}$, что $(k+1)$-й разряд не меняется. Тогда k-значные хвосты сами образуют арифметическую прогрессию с той же разностью: $b_m, b_{m+1}, ..., b_{m+L-1}$. Но $b_m >\geq 0, b_{m+L-1} = b_m + d(L-1) \leq \underbrace{88...88}_{k\,\text{раз}}$, следовательно $L \leq 8$.

г) Пример нужно прогрессии дает прогрессия с первым членом 1 и разностью 125:

1	1001	2001	...	8001
126	1126	2126	...	8126
251	1251	2251	...	8251
376	1376	2376	...	8376
501	1501	2501	...	8501
626	1626	2626	...	8626
751	1751	2751	...	8751
876	1876	2876	...	8876

Ответ:а) да; г) например, 1, 126, ... 8876.

20. Задание 19 № 485939. Все члены геометрической прогрессии — различные натуральные числа, заключенные между числами 210 и 350.

а) может ли такая прогрессия состоять из четырех членов?

б) может ли такая прогрессия состоять из пяти членов?

Решение.

а) Приведём пример геометрической прогрессии из четырёх членов: взяв $b_1 = 216 = 6^3$ и $q = \frac{7}{6}$, получим

$$b_2 = 6 \cdot 6 \cdot 7 = 252,\ b_3 = 6 \cdot 7 \cdot 7 = 294,\ b_4 = 7^3 = 343.$$

б) Докажем, что прогрессии из пяти членов, удовлетворяющей условию задачи, не существует.

Предположим, такая последовательность есть. Без ограничения общности она возрастает; пусть её знаменатель есть $q = \frac{m}{k}$, где m и k — взаимно простые натуральные числа. Тогда:

$$210 < b_1 < b_2 = b_1 q < \ldots < b_5 = b_1 q^4 = \frac{b_1}{k^4} m^4 < 350.$$

Так как m и k взаимно просты, b_1 делится на k^4, а значит, $m^4 < 350$, откуда $m \le 4$. Так как $q > 1, k < m$. Но k — целое, поэтому $k \le m - 1 \le 3$. Отсюда

$$q = \frac{m}{k} \ge \frac{m}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1} \ge 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}.$$

Поэтому

$$b_5 = b_1 q^4 \ge b_1 \frac{4^4}{3^4} > 210 \cdot \frac{256}{81} > 350,$$

что противоречит требованию задачи.

Ответ: а) да. б) нет.

21. Задание 19 № 485958. Можно ли привести пример пяти различных натуральных чисел, произведение которых равно 1512 и

а) пять;

б) четыре;

в) три

из них образуют геометрическую прогрессию?

Решение.

Случай а). Пусть числа $\frac{b}{q^2}, \frac{b}{q}, b, bq, bq^2$, где по условию b — натуральное число, $q > 0, b \ge 2, q \ne 1$ — искомые члены прогрессии. Их произведение равно b^5 но уравнение $b^5 = 1512$ не имеет натуральных решений. Итак, необходимой прогрессии из 5 чисел не существует.

Случай б). Пусть прогрессия состоит из четырех членов $\frac{b}{q}, b, bq, bq^2$, а пятое натуральное число равно k. Поскольку $1512 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, имеем: $b^4 q^2 k = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$, что невозможно для натуральных b^4, q^2 и k поскольку разложение числа 1512 не содержит четвертых степеней простых сомножителей отличных от 1. Заметим однако, что знаменатель прогрессии q может не быть натуральным числом и исследуем этот случай. Пусть $q = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь, $m, n \in \mathbb{N}$. Тогда $bq^2 \in \mathbb{N} \Rightarrow b \vdots n^2 \Rightarrow b^4 \vdots n^8 \Rightarrow b^4 q^2 k \vdots n^6$, что невозможно, так как разложение числа 1512 не содержит шестых степеней простых сомножителей отличных от 1.

Случай в). Пусть прогрессия состоит из трех членов $\frac{b}{q}, b, bq$, а четвертое и пятое натуральные числа равны k и l. Тогда $b^3 kl = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^1$. Положим в этом равенстве $b = 6, k = 7, l = 1$. Далее, полагая $q = 2$, получим один из требуемых наборов чисел: 3, 6, 12, 7, 1.

Ответ: а) нет; б) нет; в) да.

22. Задание 19 № 505539. Все члены конечной последовательности являются натуральными числами. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, либо в 10 раз больше, либо в 10 раз меньше предыдущего. Сумма всех членов последовательности равна 3024.

а) Может ли последовательность состоять из двух членов?

б) Может ли последовательность состоять из трёх членов?

в) Какое наибольшее количество членов может быть в последовательности?

Решение.

а) Если последовательность состоит из двух членов, a и $10a$ (в произвольном порядке), то $a+10a=3024.$ Уравнение $11a=3024$ не имеет решений в натуральных числах. Поэтому последовательность не может состоять из двух членов.

б) Последовательность может состоять из трёх членов: 252, 2520, 252.

в) Приведём пример последовательности из 549 членов: $10,\underbrace{1,\ 10,\ 1,\ 10,\ldots,\ 1,\ 10}_{274}.$ Сумма её членов равна $10+11\cdot 274=3024.$

Допустим, что в последовательности более чем 549 членов. Разобьём первые 550 членов последовательности на 275 пар соседних членов: первый и второй, третий и четвёртый, пятый и шестой и т. д. Сумма двух членов в каждой паре делится на 11 и поэтому не меньше 11. Значит, сумма всех членов последовательности не меньше, чем $275\cdot 11=3025>3024.$ Получили противоречие.

Ответ: а) нет, б) да, в) 549.

23. Задание 19 № 484667. Найдите все тройки натуральных чисел k, m и $n,$ удовлетворяющие уравнению $2\cdot k!=m!\ -2\cdot n!,$ где $1!=1, 2!=1\cdot 2=2, n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n.$

Решение.

1. Так как $m!=2\cdot k!+2\cdot n!,$ то $n<m$ и $k<m.$
2. Пусть $n\geq k,$ тогда $4\cdot n!\geq 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\geq (n+1)\cdot n!,$ откуда $4\geq n+1$ и $k\leq n\leq 3.$
3. Пусть $n<k,$ тогда $4\cdot k!\geq 2\cdot k!+2\cdot n!=m!\geq (k+1)\cdot k!,$ откуда $4\geq k+1$ и $n\leq k\leq 3.$
4. Далее конечным перебором значений $1\leq n\leq 3, 1\leq k\leq 3$ находим все решения:

n	k	$m!=2\cdot k!+2\cdot n!$	m
3	3	24	4
3	2	16	нет решений
3	1	14	нет решений
2	3	16	нет решений
2	2	8	нет решений
2	1	6	3
1	3	14	нет решений
1	2	6	3
1	1	4	нет решений

Ответ: $k=1,\ n=2,\ m=3;\ k=n=3,\ m=4;\ k=2,\ n=1,\ m=3.$

24. Задание 19 № 513433. Бесконечная арифметическая прогрессия $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ состоит из различных натуральных чисел.

а) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_7$ ровно три числа делятся на 100?

б) Существует ли такая прогрессия, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100?

в) Для какого наибольшего натурального n могло оказаться так, что среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ больше кратных 100, чем среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$?

Решение.

а) Подходящим примером является прогрессия с первым членом 50 и разностью 50. Среди первых семи её членов (50, 100, 150, 200, 250, 300, 350) ровно три делятся на 100.

б) Обозначим через d разность арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$. Из условия следует, что d — натуральное число. Пусть m и n — натуральные числа, $m > n$, НОД(d, 100) обозначает наибольший общий делитель чисел d и 100. Имеем

$$a_m - a_n = (a_1 + (m-1)d) - (a_1 + (n-1)d) = (m-n)d.$$

Следовательно, разность $a_m - a_n$ делится на 100 тогда и только тогда, когда разность $m - n$ делится на $k = \frac{100}{\text{НОД}(d,\ 100)}$. Значит, если среди членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ есть кратные 100, то это члены с номерами вида $kp + q$, где q — номер первого члена, кратного $100 (q \le k)$, а p пробегает все неотрицательные целые числа. Поэтому среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 100. Если $k \le 4$, то $12 < \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ будет по крайней мере 12 чисел, кратных 100. Если же $k \ge 5$, то $10 > \frac{49}{k}$, и среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ будет не более 10 чисел, кратных 100. Значит, не существует такой прогрессии, в которой среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{49}$ ровно 11 чисел делятся на 100.

в) Обозначим через $[x]$ целую часть числа x — наименьшее целое число, не превосходящее x. По доказанному в пункте б) среди любых k последовательных членов прогрессии $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ ровно один будет делиться на 100, где $k = \frac{100}{\text{НОД}(d,\ 100)}$, d — разность арифметической прогрессии.

Значит, среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{2n}$ кратными 100 будут не более $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1$ чисел. Аналогично, среди чисел $a_{2n+1}, a_{2n+2}, ..., a_{5n}$ кратными 100 будут не менее $\left[\frac{3n}{k}\right]$ чисел. Неравенство $\left[\frac{2n}{k}\right] + 1 > \left[\frac{3n}{k}\right]$ выполнено тогда и только тогда, когда $\left[\frac{2n}{k}\right] = \left[\frac{3n}{k}\right]$. Пусть это равенство выполнено. Тогда разность между числами $\frac{3n}{k}$ и $\frac{2n}{k}$ меньше 1. Получаем, что $\frac{n}{k} < 1$ и $\frac{2n}{k} < 2$. Значит, $\left[\frac{3n}{k}\right] = \left[\frac{2n}{k}\right] < 2$, $\frac{3n}{k} < 2$ и $n < \frac{2k}{3}$. Поскольку число k не превосходит 100, отсюда следует, что $n \le 66$. Рассмотрим прогрессию с первым членом 69 и разностью 1. Тогда среди чисел $a_1, a_2, ..., a_{132}$ ровно два делятся на 100 ($a_{32} = 100$ и $a_{132} = 200$). Среди чисел $a_{133}, a_{134}, ..., a_{330}$ ровно одно делится на 100 ($a_{232} = 300$). Этот пример показывает, что n может равняться 66.

Ответ: а) Да, например, прогрессия 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, ...; б) нет; в) 66.