Числа и их свойства

1. Задание 19 № 502027. Дано трёхзначное натуральное число (число не может начинаться с нуля), не кратное 100.

а) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 90?

б) Может ли частное этого числа и суммы его цифр быть равным 88?

в) Какое наибольшее натуральное значение может иметь частное данного числа и суммы его цифр?

2. Задание 19 № 505570. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. В турнире принимают участие m мальчиков и d девочек, причём каждый играет с каждым дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если $m = 3$, $d = 2$.

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если $m + d = 10$.

в) Каковы все возможные значения d, если $m = 7d$ и известно, что в сумме мальчики набрали ровно в 3 раза больше очков, чем девочки?

3. Задание 19 № 507493. Наибольшее целое число, не превосходящее число x, равно $\frac{x^2+6}{7}$. Найдите все такие значения .

4. Задание 19 № 507495. Каждое из чисел 2, 3, …, 7 умножают на каждое из чисел 13, 14, …, 21 и перед каждым из полученных произведений произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего все 54 полученных результата складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

5. Задание 19 № 507501. Найдите все тройки натуральных чисел k, m и n, удовлетворяющие уравнению $2\cdot k! = m! - 2\cdot n!\,(1! = 1; 2! = 1\cdot 2 = 2; n! = 1\cdot 2\cdot \ldots)$.

6. Задание 19 № 507579. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $3^n - 2^m = 1$.

7. Задание 19 № 507590. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2+y^2 < 18x-20y-166, \\ 32x-y^2 > x^2+12y+271. \end{cases}$$

8. Задание 19 № 507609. Найдите все пары $(x;y)$ целых чисел, удовлетворяющие системе:

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2+24x-28y+167 < 0, \\ x+2y < \dfrac{15}{2}. \end{cases}$$

9. Задание 19 № 507613. Множество A состоит из натуральных чисел. Количество чисел в A больше семи. Наименьшее общее кратное всех чисел из A равно 210. Для любых двух чисел из A их наибольший общий делитель больше единицы. Произведение всех чисел из A делится на 1920 и не является квадратом никакого целого числа. Найти числа, из которых состоит A.

10. Задание 19 № 507625. Перед каждым из чисел 5, 6, . . ., 10 и 12, 13, . . ., 16 произвольным образом ставят знак плюс или минус, после чего к каждому из образовавшихся чисел первого набора прибавляют каждое из образовавшихся чисел второго набора, а затем все 30 полученных результатов складывают. Какую наименьшую по модулю и какую наибольшую сумму можно получить в итоге?

11. Задание 19 № 507637. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=5(30k+11)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

12. Задание 19 № 507649. Решите в натуральных числах уравнение $n^{k+1}-n!=7(420k+1)$.
Примечание.
Для натурального n символом $n!$ обозначается произведение $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n$.

13. Задание 19 № 507679. Винтики можно разложить в пакетики, а пакетики упаковать в коробки, по 3 пакетика в одну коробку. Можно эти же винтики разложить в пакетики так, что в каждом пакетике будет на 3 винтика больше, чем раньше, но тогда в каждой коробке будет лежать по 2 пакетика, а коробок потребуется на 2 больше. Какое наибольшее число винтиков может быть при таких условиях?

14. Задание 19 № 507710. Найдите все пары натуральных чисел m и n, являющиеся решениями уравнения $2^m-3^n=1$.

15. Задание 19 № 507820. Решите в натуральных числах уравнение $n!+5n+13=k^2$, где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

16. Задание 19 № 507826. Решите в натуральных числах уравнение $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{1}{25}$, где $m>n$.

17. Задание 19 № 508977. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d}=\frac{7}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>6d$?

18. Задание 19 № 509006. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{3a+2c}{b+d}=\frac{12}{19}$.

б) Может ли дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{3a}{b}+\frac{2c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{3a+2c}{b+d}$, если $a>3b$ и $c>2d$?

19. Задание 19 № 509048. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 167 очков?

б) Может ли игрок шестью бросками набрать ровно 356 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 1001 очко?

20. Задание 19 № 509069. В игре «Дротики» есть 20 наружных секторов, пронумерованных от 1 до 20 и два центральных сектора. При попадании в наружный сектор игрок получает количество очков, совпадающее с номером сектора, а за попадание в центральные сектора он получает 25 или 50 очков соответственно. В каждом из наружных секторов есть области удвоения и утроения, которые, соответственно, удваивают или утраивают номинал сектора. Так, например, попадание в сектор 10 (не в зоны удвоения и утроения) дает 10 очков, в зону удвоения сектора — 20 очков, в зону утроения — 30 очков.

а) Может ли игрок тремя бросками набрать ровно 161 очко?

б) Может ли игрок четырьмя бросками набрать ровно 235 очков?

в) С помощью какого наименьшего количества бросков, игрок может набрать ровно 947 очков?

21. Задание 19 № 509097. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n \geq 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 16?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 900?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 235.

22. Задание 19 № 509126. Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 13?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 500?

в) Найдите все возможные значение n, если сумма всех данных чисел равна 57.

23. Задание 19 № 511111. Пусть q — наименьшее общее кратное, а d — наибольший общий делитель натуральных чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $3x = 8y - 29$.

а) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 170?

б) Может ли $\frac{q}{d}$ быть равным 2?

в) Найдите наименьшее значение $\frac{q}{d}$.

24. Задание 19 № 512341. Известно, что a, b, c, и d — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\frac{a+c}{b+d} = \frac{9}{23}$?

б) Может ли дробь $\frac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\frac{a+c}{b+d}$, если $a > 5b$ и $c > 8d$?

25. Задание 19 № 512383. Известно, что *a, b, c*, и *d* — попарно различные положительные двузначные числа.

а) Может ли выполняться равенство $\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{6}{23}$?

б) Может ли дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$ быть в 11 раз меньше, чем сумма $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}$?

в) Какое наименьшее значение может принимать дробь $\dfrac{a+c}{b+d}$, если $a>4b$ и $c>7d$?

26. Задание 19 № 512404. Будем называть четырёхзначное число очень счастливым, если все цифры в его десятичной записи различны, а сумма первых двух из этих цифр равна сумме последних двух из них. Например, очень счастливым является число 3140.

а) Существуют ли двадцать последовательных четырёхзначных чисел, среди которых есть три очень счастливых?

б) Может ли разность двух очень счастливых четырёхзначных чисел равняться 2016?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему очень счастливого четырёхзначного числа.

27. Задание 19 № 512876. а) Существует ли конечная арифметическая прогрессия, состоящая из пяти натуральных чисел, такая, что сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 99?

б) Конечная арифметическая прогрессия состоит из шести натуральных чисел. Сумма наибольшего и наименьшего членов этой прогрессии равна 9. Найдите все числа, из которых состоит эта прогрессия.

в) Среднее арифметическое членов конечной арифметической прогрессии, состоящая из натуральных чисел, равно 6,5. Какое наибольшее количество членов может быть в этой прогрессии?

28. Задание 19 № 512887. Натуральные числа *a, b, c* и *d* удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа *a, b, c* и *d*, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=27$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=19$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$?

в) Пусть $a+b+c+d=1000$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1000$. Найдите количество возможных значений числа *a*.

29. Задание 19 № 512893. Натуральные числа *a, b, c* и *d* удовлетворяют условию $a>b>c>d$.

а) Найдите числа *a, b, c* и *d*, если $a+b+c+d=15$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=19$.

б) Может ли быть $a+b+c+d=23$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=23$?

в) Пусть $a+b+c+d=1200$ и $a^2-b^2+c^2-d^2=1200$. Найдите количество возможных значений числа *a*.

30. Задание 19 № 504548. По кругу в некотором порядке по одному разу написаны числа от 9 до 18. Для каждой из десяти пар соседних чисел нашли их наибольший общий делитель.

а) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители равны 1?

б) Могло ли получиться так, что все наибольшие общие делители попарно различны?

в) Какое наибольшее количество попарно различных наибольших общих делителей могло при этом получиться?

31. Задание 19 № 504855. Коля множил некоторое натуральное число на соседнее натуральное число, и получил произведение, равное *m*. Вова умножил некоторое четное натуральное число на соседнее четное натуральное число и получил произведение, равное *n*.

а) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 6?

б) Может ли модуль разности чисел *m* и *n* равняться 13?

в) Какие значения может принимать модуль разности чисел *m* и *n*?

32. Задание 19 № 505421. Семь экспертов оценивают кинофильм. Каждый из них выставляет оценку — целое число баллов от 0 до 10 включительно. Известно, что все эксперты выставили различные оценки. По старой системе оценивания рейтинг кинофильма — это среднее арифметическое всех оценок экспертов. По новой системе оценивания рейтинг кинофильма оценивают следующим образом: отбрасываются наименьшая и наибольшая оценки и подсчитывается среднее арифметическое оставшихся оценок.

а) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{30}$?

б) Может ли разность рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания равняться $\frac{1}{35}$?

в) Найдите наибольшее возможное значение разности рейтингов, вычисленных по старой и новой системам оценивания.

33. Задание 19 № 505475. На сайте проводится опрос, кого из футболистов посетители сайта считают лучшим по итогам сезона. Каждый посетитель голосует за одного футболиста. На сайте отображается рейтинг каждого футболиста – доля голосов, отданных за него, в процентах, округленная до целого числа. Например, числа 9,3, 10,5 и 12,7 округляются до 9, 11 и 13 соответственно.

а) Всего проголосовало 11 посетителей сайта. Мог ли рейтинг некоторого футболиста быть равным 38?

б) Пусть посетители сайта отдавали голоса за одного из трех футболистов. Могло ли быть так, что все три футболиста получили разное число голосов, но их рейтинги одинаковы?

в) На сайте отображалось, что рейтинг некоторого футболиста равен 5. Это число не изменилось и после того, как Вася отдал свой голос за этого футболиста. При каком наименьшем числе отданных за всех футболистов голосов, включая Васин голос, такое возможно?

34. Задание 19 № 484659. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны члены возрастающей последовательности натуральных чисел a_n. В результате получилось рациональное число, которое выражается несократимой дробью, знаменатель которой меньше 100. Найдите наименьшее возможное значение a_3.

35. Задание 19 № 484660. Бесконечная десятичная дробь устроена следующим образом. Перед десятичной запятой стоит нуль. После запятой подряд выписаны все целые неотрицательные степени некоторого однозначного натурального числа p. В результате получается рациональное число. Найдите это число.

36. Задание 19 № 484663. Найдите все простые числа p, для каждого из которых существует такое целое число k, что число p является общим делителем чисел k^4+12k^2+12 и k^3+9k.

37. Задание 19 № 484668. Найдите все простые числа b, для каждого из которых существует такое целое число a, что дробь $\dfrac{a^4+16a^2+7}{a^3+15a}$ можно сократить на b.

38. Задание 19 № 501400. Длины сторон прямоугольника — натуральные числа, а его периметр равен 4000. Известно, что длина одной стороны прямоугольника равна n% от длины другой стороны, где n — также натуральное число.

а) Какое наибольшее значение может принимать площадь прямоугольника?

б) Какое наименьшее значение может принимать площадь прямоугольника?

в) Найдите все возможные значения, которые может принимать площадь прямоугольника, если дополнительно известно, что $n < 100$.

39. Задание 19 № 484673. Сумма двух натуральных чисел равна 43, а их наименьшее общее кратное в 120 раз больше их наибольшего общего делителя. Найдите эти числа.

40. Задание 19 № 501734. а) Чему равно число способов записать число 1292 в виде $1292 = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$?

б) Существуют ли 10 различных чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

в) Сколько существует чисел N таких, что их можно представить в виде $N = a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$, где числа a_i — целые, $0 \le a_i \le 99$, $i = 0;1;2;3$ ровно 130 способами?

41. Задание 19 № 505433. Несколько экспертов оценивают несколько кинофильмов. Каждый из них выставляет оценку каждому кинофильму — целое число баллов от 1 до 10 включительно. Известно, что каждому кинофильму все эксперты выставили различные оценки. Рейтинг кинофильма — это среднее геометрическое оценок всех экспертов. Среднее геометрическое чисел $a_1, \ldots, a_n$ равно $\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n}$. Оказалолсь, что рейтинги всех кинофильмов — это различные целые числа.

а) Могло ли быть 2 эксперта и 5 кинофильмов?

б) Могло ли быть 3 эксперта и 4 кинофильма?

в) При каком наибольшем количестве экспертов описанная ситуация возможна для одного кинофильма?

42. Задание 19 № 505503. а) Можно ли число 2014 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

б) Можно ли число 199 представить в виде суммы двух различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

в) Найдите наименьшее натуральное число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел с одинаковой суммой цифр.

43. Задание 19 № 506109. На доске написано более 40, но менее 48 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −3, среднее арифметическое всех положительных из них равно 4, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −8.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

44. Задание 19 № 484653. Среди обыкновенных дробей с положительными знаменателями, расположенных между числами $\frac{96}{35}$ и $\frac{97}{36}$, найдите такую, знаменатель которой минимален.

45. Задание 19 № 484655. Найдите все такие пары натуральных чисел a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа десятичную запись числа b, то получится число, большее произведения чисел a и b на 32.

46. Задание 19 № 484656. Найдутся ли хотя бы три десятизначных числа, делящиеся на 11, в записи каждого из которых использованы все цифры от 0 до 9?

47. Задание 19 № 484657. Произведение всех делителей натурального числа N оканчивается на 399 нулей. На сколько нулей может оканчиваться число N?

48. Задание 19 № 484658. Ученик должен перемножить два трехзначных числа и разделить их произведение на пятизначное. Однако он не заметил знака умножения и принял два записанных рядом трехзначных числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное (натуральное) оказалось в 3 раза больше истинного. Найдите все три числа.

49. Задание 19 № 484665. Найдите несократимую дробь $\frac{p}{q}$ такую, что $\frac{p}{q}=\frac{1234567\overbrace{888\ldots8}^{2000}7654321}{12345678\underbrace{999\ldots9}_{1999}87654321}$.

50. Задание 19 № 513352. Будем называть четырёхзначное число интересным, если среди четырёх цифр в его десятичной записи нет нулей, а одна из этих цифр равна сумме трёх других из них. Например, интересным является число 6321.

а) Приведите пример двух интересных четырёхзначных чисел, разность между которыми равна трём.

б) Найдутся ли два интересных четырёхзначных числа, разность между которыми равна 111?

в) Найдите наименьшее простое число, для которого не существует кратного ему интересного четырёхзначного числа.