Числовые наборы на карточках и досках

1. Задание 19 № 501694. Задумано несколько (не обязательно различных) натуральных чисел. Эти числа и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Если какое-то число n, выписанное на доску, повторяется несколько раз, то на доске оставляется одно такое число n, а остальные числа, равные n, стираются. Например, если задуманы числа 1, 3, 3, 4, то на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11.

а) Приведите пример задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 2, 4, 6, 8, 10.

б) Существует ли пример таких задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22?

в) Приведите все примеры задуманных чисел, для которых на доске будет записан набор 7, 8, 10, 15, 16, 17, 18, 23, 24, 25, 26, 31, 33, 34, 41.

Решение.

а) Задуманные числа 2, 2, 2, 2, 2 дают требуемый набор, записанный на доске.

б) Поскольку задуманные числа натуральные, то наименьшее число в наборе — это наименьшее из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Среди чисел записанного набора должна быть сумма всех чисел, кроме наименьшего, то есть $22 - 1 = 21$. Но этого числа нет в наборе, поэтому не существует примера таких задуманных чисел, для которого на доске будет выписан набор из условия.

в) Число 7 — наименьшее число в наборе — является наименьшим из задуманных чисел, а наибольшее число в наборе — это сумма всех задуманных чисел. Поэтому количество задуманных чисел не превосходит целой части $\frac{41}{7}$, то есть 5. Кроме того, числа 8 и 10 меньше, чем сумма двух чисел 7, поэтому они также являются задуманными. Значит, сумма оставшихся задуманных чисел равна $41 - 7 - 8 - 10 = 16$. Таким образом, так как наименьшее задуманное число равно 7, оставшиеся задуманные числа — это 8 и 8 или 16. Для задуманных чисел 7, 8, 8, 8, 10 и 7, 8, 10, 16 на доске будет записан набор, данный в условии.

Ответ: а) 2, 2, 2, 2, 2; б) нет; в) 7, 8, 8, 8, 10 или 7, 8, 10, 16.

2. Задание 19 № 509826. На доске написано число 2015 и еще несколько (не менее двух) натуральных чисел, не превосходщих 5000. Все написанные на доске числа различны. Сумма любых двух из написанных чисел делится на какое-нибудь из остальных.

а) Может ли на доске быть написано ровно 1009 чисел?

б) Может ли на доске быть написано ровно пять чисел?

в) Какое наименьшее количество чисел может быть написано на доске?

Решение.

Заметим, что если среди выписанных чисел есть число 1, то попарные суммы всех остальных чисел будут делиться на 1.

а) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 7, ..., 2017 (выписано 1008 нечётных чисел от 1 до 2017 и число 2). Сумма 1 и любого нечётного числа делится на 2, сумма 1 и 2 делится на 3, сумма любых двух чисел, отличных от 1, делится на 1.

Другой пример: 1, 2, 3, ... , 1007, 2014, 2015. Если среди двух чисел нет 1, то их сумма делится на 1. Если вместе с 1 выписаны числа k и $k + 1$, то сумма первых двух делится на третье; оставшиеся суммы $1 + 1007$ и $1 + 2015$ делятся на 2. Третий пример: 1, 2, 3, 5, 6, ... , 1009, 2015 (в группе подряд идущих чисел пропущено 4). И т. д.

б) Может. Например, числа 1, 2, 3, 5, 2015. Другой пример — числа a, $2a$, $3a$, $4a$, $5a$, где $a = 403$.

в) Пример для четырёх чисел: 1, 2, 3, 2015. Другой пример — числа a, $2a$, $3a$, $5a$, где $a = 403$.

Покажем, что трёх чисел быть не может. Действительно, пусть три различных числа таковы, что $a < b < c$. Тогда $a + b < 2b < b + c < 2c$, откуда в силу делимости суммы двух меньших чисел на большее получаем: $a + b = c$. Тогда $b < a + c = 2a + b < 3b$, откуда в силу делимости $a + c$ на b получаем: $a + c = 2b$. Тогда $b = 2a$, $c = 3a$, а искомая тройка чисел имеет вид a, $2a$, $3a$. По условию одно из этих чисел равно 2015, поскольку 2015 не делится ни на 2, ни на 3, им может быть только число a. Но в этом случае $3a > 5000$. Противоречие.

Приведём другое доказательство. Пусть даны числа $a, b, c,$ и сумма любых двух из них делится на третье. Если они все имеют отличный от 1 наибольший общий делитель d, то на него можно сократить, и свойство делимости сохранится. Будем считать, что все три числа взаимно простые. Поскольку сумма двух чисел делится на третье, то сумма всех чисел делится на каждое. Числа попарно взаимно просты, поэтому их сумма должна делиться на произведение. В частности, $a + b + c \geq abc$. Полагая $a < b < c$, имеем $a + b + c < 3c$, откуда $ab < 3$. Следовательно, $a = 1$, $b = 2$. При этом $c + 3$ делится на $2c$, поэтому $c = 3$. Таким образом, тройка чисел должна иметь вид d, $2d$, $3d$. Поскольку 2015 нечётно и не делится на 3, оно равно d, но тогда $3d > 5000$.

3. Задание 19 № 501714. Задумано несколько целых чисел. Набор этих чисел и их все возможные суммы (по 2, по 3 и т. д.) выписывают на доску в порядке неубывания. Например, если задуманы числа 2, 3, 5, то на доске будет выписан набор 2, 3, 5, 5, 7, 8, 10.

а) На доске выписан набор −11, −7, −5, −4, −1, 2, 6. Какие числа были задуманы?

б) Для некоторых различных задуманных чисел в наборе, выписанном на доске, число 0 встречается ровно 4 раза. Какое наименьшее количество чисел могло быть задумано?

в) Для некоторых задуманных чисел на доске выписан набор. Всегда ли по этому набору можно однозначно определить задуманные числа?

Решение.

а) Если было задумано 4 числа или более, то на доске должно быть записано не менее 15 чисел. Если было задумано 2 числа или меньше, то на доске должно быть записано не более 3 чисел. Значит, было задумано 3 числа. Если бы было задумано 2 положительных числа, то на доске было бы выписано не менее трёх положительных чисел. Значит, положительное число одно, и это число — наибольшее число в наборе, то есть 6. Наименьшее число в наборе −11 является суммой двух отрицательных задуманных чисел. Из отрицательных выписанных чисел только −7 и −4 дают в сумме −11. Значит, были задуманы числа −7, −4 и 6.

б) Рассмотрим различные задуманные числа, среди которых нет нуля. Пусть для этих чисел в наборе на доске оказалось ровно k нулей. Если добавить к задуманным числам нуль, то на доске окажется ровно $2k+1$ нулей: k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел, k нулей, получающихся как суммы ненулевых задуманных чисел и задуманного нуля, и задуманный нуль. Таким образом, если среди задуманных чисел есть нуль, то в наборе на доске окажется нечётное количество нулей.

Если на доске выписано ровно 4 нуля, то среди задуманных чисел нет нуля. Пусть задумано четыре или меньше ненулевых числа. Нуль получается тогда, когда сумма некоторого количества положительных чисел равна по модулю сумме некоторого количества отрицательных чисел. Одно задуманное число даёт одну сумму; два различных задуманных числа одного знака дают три различные суммы: три различных задуманных числа дают семь сумм, среди которых не более двух (задуманное число, наибольшее по модулю, и сумма двух других задуманных чисел) совпадают. Значит, среди сумм положительных и отрицательных чисел совпадают по модулю не более трёх. Таким образом, если было задумано не более четырёх различных ненулевых чисел, то на доске окажется не более трёх нулей.

Если были задуманы числа −2; −1; 1; 2; 3, то на доске окажется ровно четыре нуля. Значит, наименьшее количество задуманных чисел — 5.

в) Нет, не всегда. Например, для задуманных чисел −3, 1, 2 и −2, −1, 3 на доске будет выписан один и тот же набор −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3.

Ответ: а) −7, −4, 6; б) 5; в) нет.

4. Задание 19 № 500005. На доске написано число 7. Раз в минуту Вася дописывает на доску одно число: либо вдвое большее какого-то из чисел на доске, либо равное сумме каких-то двух чисел, написанных на доске (таким образом, через одну минуту на доске появится второе число, через две — третье и т.д.).

а) Может ли в какой-то момент на доске оказаться число 2012?

б) Может ли в какой-то момент сумма всех чисел на доске равняться 63?

в) Через какое наименьшее время на доске может появиться число 784?

Решение.

а) Заметим, что каждое число на доске будет делиться на 7. Действительно, исходное число делится на 7, в случае удвоения числа делящегося на 7, получится число, делящееся на 7. А при сложении чисел, делящихся на 7, также получится число, делящееся на 7. Таким образом, все числа на доске будут делиться на 7, а 2012 на 7 не делится, следовательно, оно не может появиться на доске.

б) Да, может. Пример: 7, 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7), 14 (удвоенное число 7). Сумма полученных 5 чисел равна 63.

Замечание. В условии не сказано, что одно число нельзя удваивать несколько раз.

в) Как было замечено в пункте а), все числа на доске будут делиться на 7. Рассмотрим аналогичную задачу, разделив исходное число 7 и то число, которое нужно получить, то есть 784, на 7. От этого количество операций не изменится. Таким образом, достаточно за наименьшее количество операций получить число 112, начав с числа 1.

Заметим, что наибольшее число, которое может получиться на доске через 6 минут, равно 64 (если Вася каждый раз будет удваивать текущее наибольшее число). Следовательно, если в первые 6 минут Вася каждый раз удваивал наибольшее число на доске, то число 112 нельзя получить за 7 минут: если число 64 удвоить, то получится 128, а если прибавить к нему число, не превосходящее 32, то 112 не получится.

В том случае, если в течение первых 6 минут Вася использовал хотя бы одно сложение вместо удвоения, то при первом использовании сложения наибольшее число, записанное на доске увеличилось не более, чем в полтора раза: действительно, в этом случае самый большой результат получится тогда, когда мы к максимальному на данный момент числу прибавим второе по величине, то есть, его половину (напомним, что мы рассматриваем первый случай сложения, то есть до этого были только удвоения). Таким образом, даже если в течение первых 7 минут сделано 6 удвоений и одно сложение (в некотором порядке), то наибольшее число, которое может получиться, равно 96, что меньше 112.

Итак, за 7 минут число 112 получить невозможно.

Приведем пример, как его получить за 8 минут:

$$1 \to 1,\, 2 \to 1,\, 2,\, 4 \to 1,\, 2,\, 4,\, 8 \to 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16 \to 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32 \to 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32,\, 64 \to$$
$$\to 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32,\, 64,\, 96\,(96 = 64 + 32) \to 1,\, 2,\, 4,\, 8,\, 16,\, 32,\, 64,\, 96,\, 112\,(112 = 96 + 16).$$

Ответ: а) нет; б) да; в) 8 минут.

5. Задание 19 № 500017. Каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9 по одному записываю на 8 карточках. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?

б) Может ли в результате получиться 1?

в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (4; -3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

6. Задание 19 № 500023. Имеется 8 карточек. На них записывают по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. Карточки переворачивают и перемешивают. На их чистых сторонах заново пишут по одному каждое из чисел 1, -2, -3, 4, -5, 7, -8, 9. После этого числа на каждой карточке складывают, а полученные восемь сумм перемножают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Какое наименьшее целое неотрицательное число может в результате получиться?

Решение.

а) Среди восьми данных чисел нет противоположных. Значит, сумма чисел на каждой карточке не равна 0. Поэтому всё произведение не может равняться нулю.

б) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, на какой-то карточке попадётся два нечётных числа, и их сумма чётная. Поэтому всё произведение чётно и не может равняться 1.

в) Среди восьми данных чисел пять нечётных. Значит, хотя бы на двух карточках с обеих сторон написаны нечётные числа, и сумма чисел на каждой из этих карточек чётная. Поэтому всё произведение делится на 4.

Наименьшее целое положительное число, делящееся на 4, это 4. Оно получается при следующем наборе пар чисел на карточках: (1; -2); (-2; 1); (-3; 4); (4; -3); (-5; 7); (7; -5); (-8; 9); (9; -8).

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

7. Задание 19 № 500197. Натуральные числа от 1 до 12 разбивают на четыре группы, в каждой из которых есть по крайней мере два числа. Для каждой группы находят сумму чисел этой группы. Для каждой пары групп находят модуль разности найденных сумм и полученные 6 чисел складывают.

а) Может ли в результате получиться 0?
б) Может ли в результате получиться 1?
в) Каково наименьшее возможное значение полученного результата?

Решение.

Обозначим суммы чисел в группах S_1, S_2, S_3, S_4 а указанную в условии сумму модулей их попарных разностей через A. Можно считать, что $S_1 \le S_2 \le S_3 \le S_4$.

а) Чтобы число A равнялось 0, необходимо, чтобы каждая из разностей $S_i - S_j$ равнялась 0, то есть $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$. Сумма всех двенадцати чисел $1+2+\ldots+11+12 = \dfrac{12\cdot 13}{2} = 78$. С другой стороны, она равна $S_1+S_2+S_3+S_4 = 4S_1$, но 78 не делится на 4. Значит, $A \ne 0$.

б) Чтобы число A равнялось 1, необходимо, чтобы все, кроме одной, разности $S_i - S_j$ равнялись 0. Значит, $S_1 < S_4$, но в этом случае каждая из сумм S_2, S_3 не равна хотя бы одной из сумм S_1, S_4 поэтому хотя бы три разности $S_i - S_j$ не равны 0 и число A не меньше 3. Значит, $A \ne 1$.

в) Выразим число A явно через S_1, S_2, S_3, S_4:

$$A = (S_2-S_1)+(S_3-S_1)+(S_4-S_1)+(S_3-S_2)+(S_4-S_2)+(S_4-S_3) = 3(S_4-S_3)+4(S_3-S_2)+3(S_2-S_1).$$

В предыдущих пунктах было показано, что $A \ge 3$. Если $A = 3$, то $S_1 = S_2 = S_3 = S_4 - 1$ или $S_4 = S_2 = S_3 = S_1 + 1$. В этом случае сумма всех двенадцати чисел равна $4S_1 + 1$ или $4S_4 - 1$, то есть нечётна, что неверно.

Для следующего разбиения чисел на группы: $\{12;7\}$; $\{11;6;2\}$; $\{10;5;4;1\}$; $\{9;8;3\}$ — число A равно 4.

Ответ: а) нет; б) нет; в) 4.

8. Задание 19 № 505540. На доске написано более 27, но менее 45 целых чисел. Среднее арифметическое этих чисел равно −5, среднее арифметическое всех положительных из них равно 9, а среднее арифметическое всех отрицательных из них равно −18.

а) Сколько чисел написано на доске?

б) Каких чисел написано больше: положительных или отрицательных?

в) Какое наибольшее количество положительных чисел может быть среди них?

Решение.

Пусть среди написанных чисел k положительных, l отрицательных и m нулей. Сумма набора чисел равна количеству чисел в этом наборе, умноженному на его среднее арифметическое, поэтому

$$9k-18l+0\cdot m=-5(k+l+m).$$

а) Заметим, что в левой части каждое слагаемое делится на 9, поэтому $k+l+m$ — количество целых чисел — делится на 9. По условию $27<k+l+m<45$, поэтому

$$k+l+m=36.$$

Таким образом, написано 36 чисел.

б) Приведём равенство $9k-18l=-5(k+l+m)$ к виду

$$13l=14k+5m.$$

Так как $m\geq 0$, получаем, что $13l\geq 14k$, откуда $l>k$. Следовательно, отрицательных чисел больше, чем положительных.

в) (оценка) Подставим $k+l+m=36$ в правую часть равенства

$$9k-18l=-5(k+l+m):\ 9k-18l=-180,$$

откуда

$$k=2l-20.$$

Так как $k+l\leq 36$, получаем:

$$3l-20\leq 36,\ 3l\leq 56,\ l\leq 18,\ k=2l-20\leq 16;$$

то есть положительных чисел не более 16.

в) (пример) Приведём пример, когда положительных чисел ровно 16. Пусть на доске 16 раз написано число 9, 18 раз написано число −18 и два раза написан 0.

Тогда

$$\frac{9\cdot 16-18\cdot 18}{36}=\frac{144-324}{36}=-5$$

указанный набор удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: а) 36; б) отрицательных; в) 16.