Тригонометрические уравнения

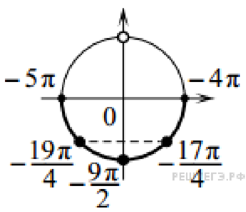
1. Задание 13 № 502114. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)\cdot\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi,\,-4\pi]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$-\sqrt{2}\cos x\sin x-\cos x=0\Leftrightarrow \cos x\cdot\left(\sqrt{2}\sin x+1\right)=0$$



Значит, либо $\cos x=0$, откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=-\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-5\pi,\,-4\pi]$. Получим числа $-\dfrac{19\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{2},\ -\dfrac{17\pi}{4}$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ -\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ -\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{19\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{2},\ -\dfrac{17\pi}{4}$.

2. Задание 13 № 507296. а) Решите уравнение:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\sin x$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $[-5\pi;\,-4\pi]$.

Решение.

Используя формулу приведения $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2x\right)=-\sin 2x$ и формулу синуса двойного угла $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получаем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow -2\sin x\cos x=\sqrt{2}\sin x\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Заданный промежуток имеет длину π, поэтому ему принадлежит не больше двух корней из первой серии, не больше одного корня из второй серии и не больше одного корня из третьей серии. Во второй серии решений из отрезка нет, из первой и третьей серии это числа $-5\pi,\ -4\pi,\ -\dfrac{19\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pi k,\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-5\pi,\ -\dfrac{19\pi}{4},\ -4\pi$.

3. Задание 13 № 509120. а) Решите уравнение $2\cos\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)\cdot\cos x=\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi;\frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) По формуле приведения $\cos\left(x-\frac{11\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=-\sin x,$ поэтому исходное уравнение преобразуется к виду:

$$-2\sin x\cdot\cos x=\sin x\Leftrightarrow\sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi k,\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\end{array}\right. k\in\mathbb{Z}.$$

б) Данному условию принадлежат корни $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{10\pi}{3}.$

Ответ: а) $\pi k,\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z};$ б) $3\pi,\ 4\pi,\ \frac{10\pi}{3}.$

4. Задание 13 № 507292. а) Решите уравнение:

$$2\sin^4 x + 3\cos 2x + 1 = 0$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$. Из неё следует, что $\sin^4 x = \frac{1}{4}(\cos^2 2x - 2\cos 2x + 1)$. Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\frac{1}{2}\cos^2 2x - \cos 2x + \frac{1}{2} + 3\cos 2x + 1 = 0;$$
$$\cos^2 2x + 4\cos 2x + 3 = 0$$

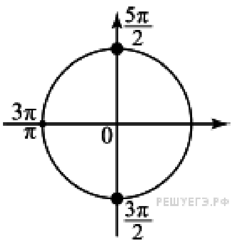
Сделаем замену $t = \cos 2x$. Получим

$$t^2 + 4t + 3 = 0;$$
$$t = -1 \text{ или } t = -3;$$
$$\cos 2x = -1 \text{ или } \cos 2x = -3.$$

Уравнение $\cos 2x = -3$ не имеет решений. Из уравнения $\cos 2x = -1$ получаем

$$2x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z};\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим $x = \frac{3\pi}{2};\ x = \frac{5\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{3\pi}{2};\ \frac{5\pi}{2}$.

5. Задание 13 № 507426. Решите уравнение: $\sqrt{\sin x \cos x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}2x}+1\right)=0.$

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{\sin x \cos x}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}2x}+1\right)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{2}\sin 2x}\left(\frac{\operatorname{tg}2x+1}{\operatorname{tg}2x}\right)=0.$$

Откуда получаем, что

$$\begin{cases}\sin 2x=0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0\end{cases} \text{или} \begin{cases}\operatorname{tg}2x+1=0,\\ \sin 2x\geq 0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0.\end{cases}$$

В первом случае решений нет. Во втором случае:

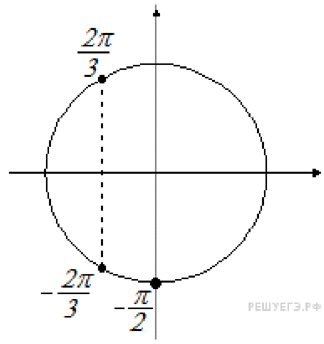
$$\begin{cases}\operatorname{tg}2x+1=0,\\ \sin 2x\geq 0,\\ \operatorname{tg}2x\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\operatorname{tg}2x=-1,\\ \sin 2x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=-\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \sin 2x>0\end{cases} \Leftrightarrow 2x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{3\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

6. Задание 13 № 507428. Решите уравнение: $(2\cos x+1)(\sqrt{-\sin x}-1)=0.$

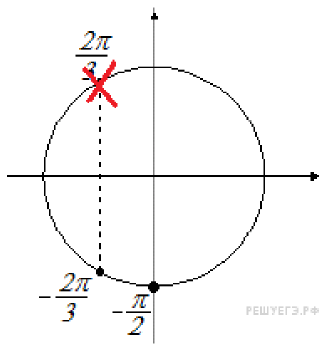
Решение.
Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x\leq 0.$

Если $\sqrt{-\sin x}-1=0,$ то $\sin x=-1,$ откуда $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$ Если $\sqrt{-\sin x}-1\neq 0,$ то



$$2\cos x+1=0 \Leftrightarrow \cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Так как $\sin x\leq 0,$ числа $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями уравнения.



Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, -\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

7. Задание 13 № 507429. Решите уравнение: $(2\sin x-1)(\sqrt{-\cos x}+1)=0.$

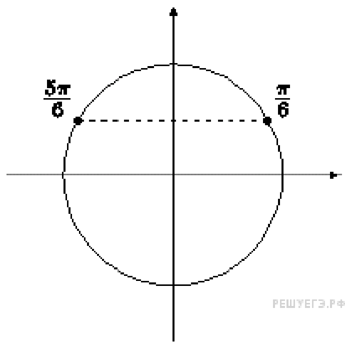
Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x\le 0.$ выражение $\sqrt{-\cos x}+1$ положительно при всех допустимых $x.$

Значит,

$$2\sin x-1=0\Leftrightarrow \sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$$

Так как $\cos x\le 0,$ числа $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями уравнения.



Ответ: $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\,n\in\mathbb{Z}.$

8. Задание 13 № 507583. а) Решите уравнение:

$$4\sin^4 2x+3\cos 4x-1=0$$

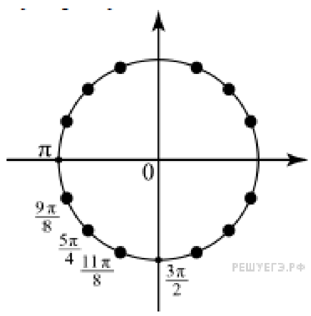
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{3\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Воспользуемся формулой $\sin^2 y=\frac{1-\cos 2y}{2}.$ Из неё следует, что $\sin^4 2x=\frac{1}{4}(\cos^2 4x-2\cos 4x+1).$ Поэтому уравнение можно преобразовать так:

$$\cos^2 4x-2\cos 4x+1+3\cos 4x-1=0;\ \cos^2 4x+\cos 4x=0;$$
$$\cos 4x=-1 \text{ или } \cos 4x=0.$$
$$4x=\pi+2\pi n,n\in\mathbb{Z} \text{ или } 4x=\frac{\pi}{2}+\pi n,n\in\mathbb{Z};$$
$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},n\in\mathbb{Z} \text{ или } x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},n\in\mathbb{Z}$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие заданному отрезку.



Получим: $x=\frac{9\pi}{8};\,x=\frac{5\pi}{4};\,x=\frac{11\pi}{8}.$

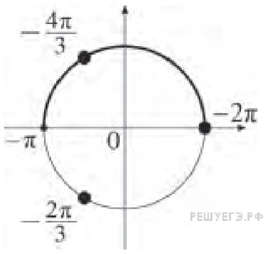
Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ n\in\mathbb{Z};$ б) $\frac{9\pi}{8};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{11\pi}{8}.$

9. Задание 13 № 507595. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащего промежутку $[-2\pi;\, -\pi]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$2\cos^2 - 1 = \cos x;\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 1$, откуда $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, либо $\cos x = -\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Отберём с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi;\, -\pi]$: $-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: а) $2\pi k,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi,\ -\frac{4\pi}{3}$.

10. Задание 13 № 505470. а) Решите уравнение $2\sqrt{3}\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) - \sin 2x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

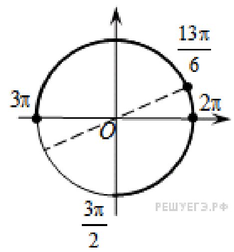
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\sqrt{3}\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x(\sqrt{3}\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$. Получим числа: $2\pi; \frac{13\pi}{6}; 3\pi$.



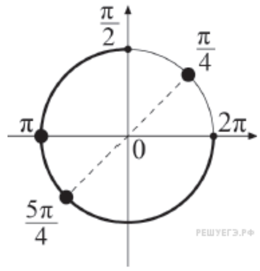
Ответ: а) $\pi k, \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $2\pi; \frac{13\pi}{6}; 3\pi$.

11. Задание 13 № 507638. а) Решите уравнение $\cos^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x=\sin x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$.

Решение.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:



$$\cos^2 x-\sin x\cos x+\cos x-\sin x=0\Leftrightarrow\cos x(\cos x+1)-\sin x(\cos x+1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\cos x+1)(\cos x-\sin x)=0.$$

1 случай. Если $\cos x=-1$, то $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 случай. Если $\cos x\neq-1$, то $\cos x-\sin x=0$. При $\cos x=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем $1-\operatorname{tg}x=0\Leftrightarrow\operatorname{tg}x=1.$

Тогда $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Отрезку $\left[\frac{\pi}{2};2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\frac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $\pi+2\pi k,\ \frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) π и $\frac{5\pi}{4}$.

12. Задание 13 № 506104. а) Решите уравнение $\cos 2x=1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$.

Решение.

а) Преобразуем обе части уравнения:

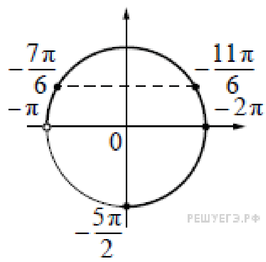
$$1-2\sin^2 x=1-\sin x\Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-1)=0,$$

откуда $\sin x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$.

Из уравнения $\sin x=0$ находим: $x=\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

Из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ находим: $x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$.



Получим числа: $-2\pi;-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n,n\in\mathbb{Z};(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,k\in\mathbb{Z}$. б) $-2\pi;-\frac{11\pi}{6};-\frac{7\pi}{6}$.

Дублирует задание 510050.

13. Задание 13 № 507680. Решите уравнение: $\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}(\operatorname{tg}2x-1)=0.$

Решение.
Преобразуем уравнение:

$$\sqrt{\cos^2 x-\sin^2 x}(\operatorname{tg}2x-1)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\cos 2x}(\operatorname{tg}2x-1)=0$$

Откуда получаем, что:

$$\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \cos 2x\neq 0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}2x-1=0,\\ \cos 2x>0.\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}2x-1=0,\\ \cos 2x>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\operatorname{tg}2x=1,\\ \cos 2x>0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}2x=\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ \cos 2x>0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{4}+2\pi k \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{8}+\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

14. Задание 13 № 507694. Дано уравнение $\operatorname{tg}x+\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2x\right)=0.$

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

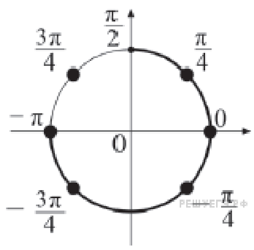
Решение.
а)

$$\operatorname{tg}x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \sin x\left(\frac{1}{\cos x}-2\cos x\right)=0.$$

Если $\sin x=0$, то $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$
Если $\sin x\neq 0$, то

$$\frac{1-2\cos^2 x}{\cos x}=0 \Leftrightarrow \cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отметим решения на единичной окружности.



Отрезку $\left[-\pi;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\pi,\ -\dfrac{3\pi}{4},\ -\dfrac{\pi}{4};\ 0$ и $\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: а) $x=\pi k;\ \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\pi,\ -\dfrac{3\pi}{4},\ -\dfrac{\pi}{4};\ 0,\ \dfrac{\pi}{4}.$

15. Задание 13 № 507698. Дано уравнение $\operatorname{ctg} x+\cos\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)=0.$

а) Решите уравнение;

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

Решение.

а)

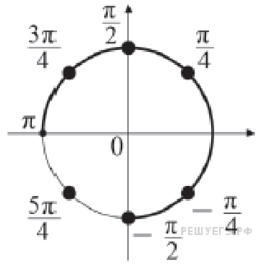
$$\operatorname{ctg} x-\sin 2x=0 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x}-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(\frac{1}{\sin x}-2\sin x\right)=0.$$

Если $\cos x=0$, то $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Если $\cos x\neq 0$, то

$$\frac{1-2\sin^2 x}{\sin x}=0 \Leftrightarrow \sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отметим решения на единичной окружности.



Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ принадлежат корни $-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}$ и $\frac{3\pi}{4}$.

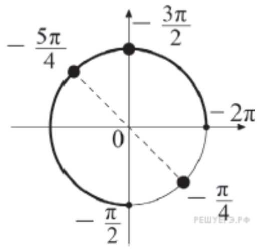
Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$ б) $-\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{4}$.

16. Задание 13 № 507704. а) Решите уравнение $\frac{1}{2}\sin 2x+\sin^2 x-\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Перенесём все члены в левую часть, преобразуем и разложим левую часть на множители:



$$\sin x\cos x+\sin^2 x-\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x)-(\sin x+\cos x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x-1)(\cos x+\sin x)=0.$$

1 случай. Если $\sin x=1$, то $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

2 случай. Если $\sin x\neq 1$, то $\cos x+\sin x=0.$ При $\cos x=0$ решений нет. Разделим обе части уравнения на $\cos x$. Получаем $1+\operatorname{tg} x=0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x=-1.$

Тогда $x=-\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

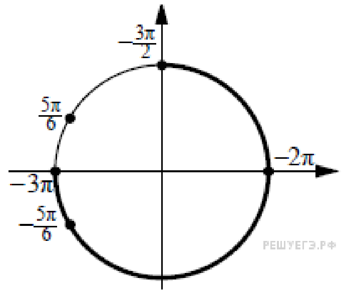
Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ -\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{2}$ и $-\frac{5\pi}{4}$.

17. Задание 13 № 508026. а) Решите уравнение $2\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\operatorname{tg}x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:



$$-2\sin x=\frac{\sqrt{3}\sin x}{\cos x}\Leftrightarrow \sin x\left(2+\frac{\sqrt{3}}{\cos x}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x=0 \text{ или } \cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

откуда $x=\pi k$ или $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$.

б) Отберем корни на промежутке $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$ с помощью тригонометрической окружности.

Получаем $x=-3\pi;\ x=-\frac{17\pi}{6}$ и $x=-2\pi$.

Ответ: а) $x=\pi k$ или $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. б) $x=-3\pi;\ x=-\frac{17\pi}{6},\ x=-2\pi$.

18. Задание 13 № 508232. а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x+\cos(\pi-x)+9)=2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Последовательно получаем:

$$\log_3(\sin 2x+\cos(\pi-x)+9)=2\Leftrightarrow \sin 2x-\cos x+9=9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z,\\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in Z.\end{array}\right.$$

б) Условию $x\in\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$ удовлетворяет только числа $\frac{13\pi}{6},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6}$.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in Z$; б) $\frac{13\pi}{6},\ \frac{5\pi}{2},\ \frac{17\pi}{6},\ \frac{7\pi}{2}$.

19. Задание 13 № 508253. а) Решите уравнение $5^{2\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.
а) Последовательно получаем:

$$5^{2\sin 2x} = \left(\frac{1}{25}\right)^{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)} \Leftrightarrow 5^{2\sin 2x} = 5^{-2\sin x} \Leftrightarrow \sin 2x + \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k,\ k \in Z, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z. \end{array}\right.$$

б) Условию $x \in \left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$ удовлетворяет только числа $2\pi,\ \frac{8\pi}{3},\ 3\pi$.

Ответ: а) $x = \pi k,\ \ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$; б) $2\pi,\ \frac{8\pi}{3},\ 3\pi$.

20. Задание 13 № 509000. а) Решите уравнение $\frac{\cos 2x + \sqrt{2}\cos x + 1}{\operatorname{tg} x - 1} = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.
а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases} \cos 2x + \sqrt{2}\cos x + 1 = 0, \\ \operatorname{tg} x - 1 \neq 0, \end{cases}$$

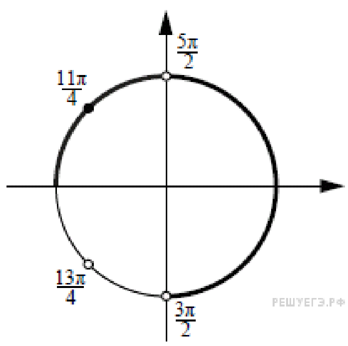
Рассмотрим первое уравнение системы:

$$2\cos^2 x - 1 + \sqrt{2}\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x + \sqrt{2}) = 0.$$

Поскольку $\cos x \neq 0$ получаем: $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$.

Условию $\operatorname{tg} x - 1 \neq 0$ удовлетворяют только числа $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$.

б) На отрезке $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем единственный корень: $\frac{11\pi}{4}$.



Ответ: а) $\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{4}$.

21. Задание 13 № 509021. а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$.

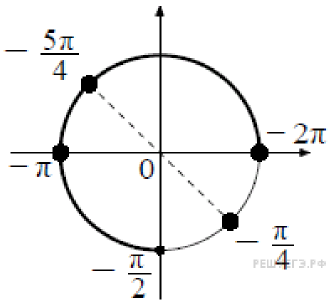
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x(\cos x + \sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin x = -\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ \operatorname{tg} x = -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pi n,\\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi;\ -\frac{\pi}{2}\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью. Получаем: $-2\pi,\ -\frac{5\pi}{4},\ x = -\pi$.

Ответ: а) $\pi n;\ -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$; б) $-2\pi;\ -\frac{5\pi}{4};\ -\pi$.



22. Задание 13 № 509091. а) Решите уравнение $2\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\sin x = \cos x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$.

Решение.

а) По формуле приведения $\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = -\cos x$, имеем:

$$-2\cos x\sin x = \cos x \Leftrightarrow \cos x(1 + 2\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0,\\ \sin x = -\frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\\ x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отрезку $\left[\frac{7\pi}{2};\ 5\pi\right]$ принадлежат корни $\frac{23\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{23\pi}{6};\ \frac{7\pi}{2};\ \frac{9\pi}{2}$.

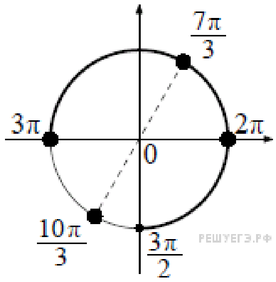
23. Задание 13 № 509158. а) Решите уравнение $2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin 2x=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\sqrt{3}\cos x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ \operatorname{tg} x=\sqrt{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2};\ 3\pi\right]$, найдём, пользуясь единичной окружностью.



Получаем: $2\pi,\ \frac{7\pi}{3},\ x=3\pi$.

Ответ: а) $\pi n;\ \frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $2\pi;\ \frac{7\pi}{3};\ x=3\pi$.

24. Задание 13 № 509201. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
Используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки:

$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+\sqrt{2})=\cos x+\sqrt{2} \Leftrightarrow (\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

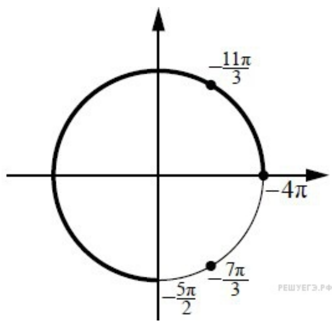
Изображая корни на единичной окружности, находим, что отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{2}$.

25. Задание 13 № 509579. а) Решите уравнение $\cos 2x-3\cos x+2=0$.

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$2\cos^2 x-1-3\cos x+2=0;$$
$$2\cos^2 x-3\cos x+1=0.$$



Получаем $\cos x=1$ или $\cos x=\frac{1}{2}$, откуда $x=2\pi n$ или $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$

б) На отрезке $\left[-4\pi;-\frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=-4\pi$ и $x=-\frac{11\pi}{3}$.

Ответ: а) $2\pi n,\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,n\in\mathbb{Z}$; б) $-4\pi,-\frac{11\pi}{3}$.

26. Задание 13 № 509820. а) Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}=\sqrt{3}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$.

Решение.
Используя формулу синуса двойного угла и формулу приведения, имеем:

$$\frac{\sin 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\frac{2\sin x\cos x}{-\sin x}=\sqrt{3}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}.$$

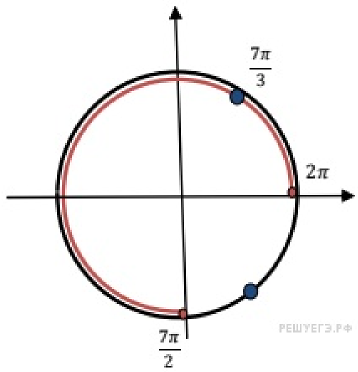
При помощи единичной окружности находим, что отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};\ -\pi\right]$ принадлежит только корень $-\dfrac{7}{6}\pi.$

Ответ: а) $\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $-\dfrac{7\pi}{6}.$

27. Задание 13 № 509888. а) Решите уравнение $2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.
Решим уравнение:



$$2\cos^3 x-\cos^2 x+2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos^2 x(2\cos x-1)+(2\cos x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(2\cos x-1)(\cos^2 x+1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0,\\ \cos^2 x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\cos x-1=0\Leftrightarrow\cos x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$$

б) Укажем корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$. Покажем на единичной окружности.

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z};$ б) $\dfrac{7\pi}{3}.$

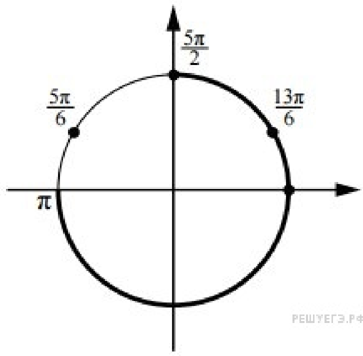
28. Задание 13 № 509926. а) Решите уравнение $\cos 2x+3\sin x-2=0.$

б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$1-2\sin^2 x+3\sin x-2=0;$$
$$2\sin^2 x-3\sin x+1=0.$$



Получаем $\sin x=1$ или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,$ где $n\in\mathbb{Z}.$

б) На отрезке $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности.

Получаем $x=\frac{13\pi}{6}$ и $x=\frac{5\pi}{2}.$

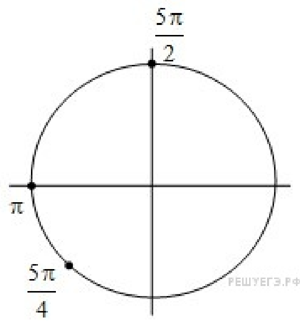
Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ \frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}.$

29. Задание 13 № 510092. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

Используем формулу синуса двойного угла, выносим за скобки:



$$\sin 2x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}\Leftrightarrow 2\sin x\cos x+\sqrt{2}\sin x=2\cos x+\sqrt{2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sin x(\cos x+\sqrt{2})=\cos x+\sqrt{2}\Leftrightarrow(\sin x-1)(2\cos x+\sqrt{2})=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\\ x=-\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Изображая корни на единичной окружности, находим, что отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{2}.$

30. Задание 13 № 510099. а) Решите уравнение $3\cos 2x-5\sin x+1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащее отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

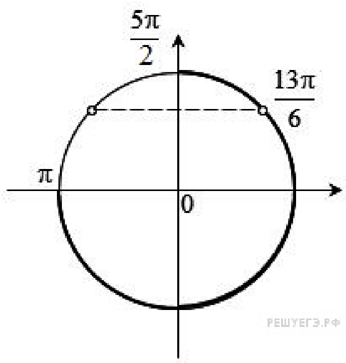
Решение.

Сведём уравнение к квадратному относительно синуса, используя формулу $\cos 2x=1-2\sin^2 x$. Имеем:

$$3\cos 2x-5\sin x+1=0\Leftrightarrow 3(1-2\sin^2 x)-5\sin x+1=0\Leftrightarrow 3(1-2\sin^2 x)-5\sin x+1=0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 6\sin^2 x+5\sin x-4=0\left[\begin{array}{l}\sin x=\dfrac{1}{2},\\ \sin x=-\dfrac{4}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$ (см. рис.), получим число $\dfrac{13\pi}{6}$.

Ответ:а) $\left\{\dfrac{\pi}{6}+2\pi n;\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\ :\ n\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $\dfrac{13\pi}{6}$.



31. Задание 13 № 510106. а) Решите уравнение $\cos 2x-5\sqrt{2}\cos x-5=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащее отрезку $\left[-3\pi;\ -\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

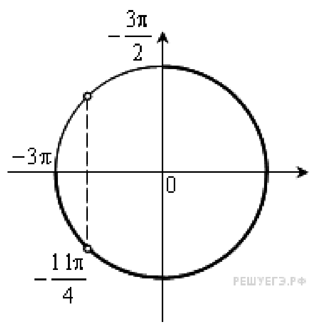
$$2\cos^2 x-1-5\sqrt{2}\cos x-5=0\Leftrightarrow(2\cos x+\sqrt{2})(\cos x-3\sqrt{2}).$$

Значит, $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ откуда $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ или $x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

Уравнение $\cos x=3\sqrt{2}$ корней не имеет.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$. Получим число $-\dfrac{11\pi}{4}$.

Ответ:а) $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{4}$.



32. Задание 13 № 504944. а) Решите уравнение $-\sqrt{2}\sin\left(-\dfrac{5\pi}{2}+x\right)\cdot\sin x=\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{9\pi}{2};6\pi\right]$.

Решение.

а) В силу нечетности и периодичности синуса имеем:

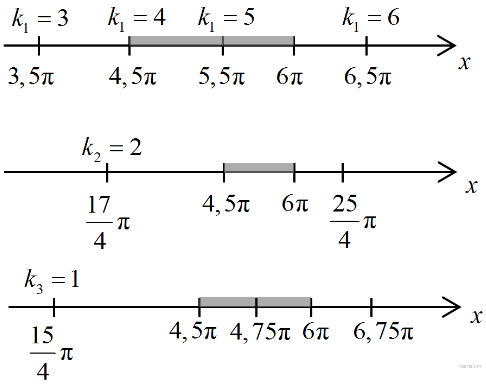
$$-\sqrt{2}\sin\left(-\frac{5\pi}{2}+x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sqrt{2}\cos x.$$

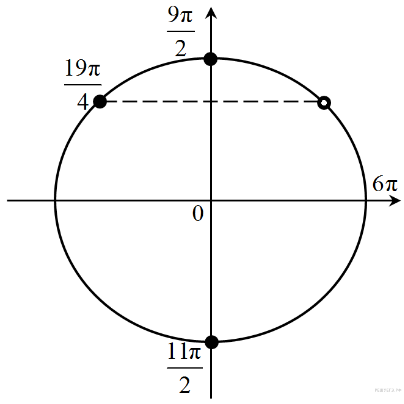
Далее имеем:

$$\sqrt{2}\cos x\cdot\sin x=\cos x\Leftrightarrow\cos x(\sqrt{2}\cdot\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) При помощи числовой прямой или тригонометрической окружности (см. рис.) для каждой из задающих решения серий отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[4,5\pi;6\pi]$.

Находим три решения: $4,5\pi;4,75\pi;5,5\pi.$





Ответ: а) $\left\{\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k:k\in\mathbb{Z}\right\}$; б) $4,5\pi,4,75\pi,5,5\pi.$

33. Задание 13 № 504240. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{3\pi}{2};3\pi\right].$

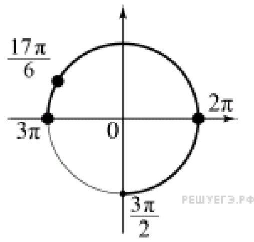
Решение.

а) Левая часть уравнения определена при $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x\neq\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен нулю:

$$2\sin^2 x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.\quad n\in\mathbb{Z}.$$

Серию $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: $x=\pi n,\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[\dfrac{3\pi}{2},3\pi\right]:x=2\pi,\ x=\dfrac{17\pi}{6},\ x=3\pi.$



Ответ: а) $\left\{\pi n,\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n\,\middle|\,n\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $2\pi,\ \dfrac{17\pi}{6},\ 3\pi.$

34. Задание 13 № 504415. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin x}{2\cos x+\sqrt{3}}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)}{\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}}=0.$$

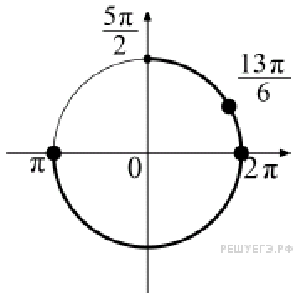
Его решениями будут те x, при которых числитель обращается в нуль, а знаменатель — нет.

Левая часть уравнения определена при $\cos x\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то есть при $x\neq\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен нулю:

$$\sin x\left(\sin x-\frac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\frac{1}{2}.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\frac{\pi}{6}+2\pi n,\\ x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\end{array}\right.\ n\in\mathbb{Z}.$$

Серию $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: $\pi n,\ \dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]:=\pi, x=2\pi, x=\dfrac{13\pi}{6}$.

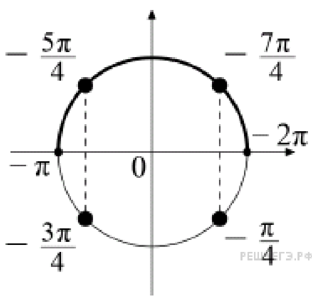


Ответ: а) $\left\{\pi n, \dfrac{\pi}{6}+2\pi n, \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $\pi,\ 2\pi,\ \dfrac{13\pi}{6}$.

35. Задание 13 № 504543. а) Решите уравнение $4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0.$
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$.
Решение.
а) Выделим полный квадрат:

$$\left(2\cos^2 x-1\right)^2=0\Leftrightarrow 2\cos^2 x=1\Leftrightarrow\cos^2 x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi;\ -\pi]$. Получим $x=-\dfrac{7\pi}{4},\ x=-\dfrac{5\pi}{4}$.



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{4};\ -\dfrac{5\pi}{4}$.

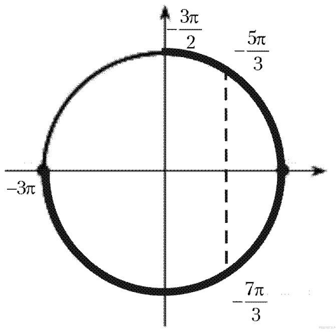
36. Задание 13 № 504850. а) Решите уравнение $4\sin^2 x+8\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;\ \dfrac{-3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4\sin^2 x+8\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)+1=0 \Leftrightarrow 4(1-\cos^2 x)-8\cos x+1=0.$$



Преобразуем уравнение дальше:

$$4\cos^2 x+8\cos x-5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{1}{2},\\ \cos x=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[-3\pi;\ \dfrac{-3\pi}{2}\right]$: $x=-\dfrac{7\pi}{3},\ -\dfrac{5\pi}{3}.$

Ответ: а) $\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{7\pi}{3},\ -\dfrac{5\pi}{3}.$

37. Задание 13 № 505422. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)+1=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

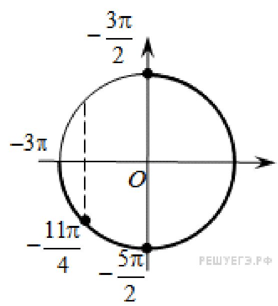
Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение:

$$2\cos^2 x-1+\sqrt{2}\cos x+1=0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x+\sqrt{2}\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x+\sqrt{2})=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z},\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z},\\ x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\dfrac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: $-\dfrac{11\pi}{4};-\dfrac{5\pi}{2};-\dfrac{3\pi}{2}.$

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; $\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$; $-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi m, m\in\mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{11\pi}{4}$; $-\dfrac{5\pi}{2}$; $-\dfrac{3\pi}{2}.$

38. Задание 13 № 485932. Дано уравнение $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)=\cos x$.

а) Решите уравнение;

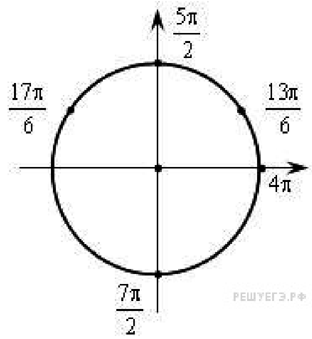
б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$.

Решение.
Используем формулу приведения и синуса двойного угла:

$$\sin 2x=\cos x \Leftrightarrow 2\sin x\cos x=\cos x \Leftrightarrow \cos x(2\sin x-1)=0.$$

Тогда $\cos x=0$ или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{5\pi}{2};4\pi\right]$. Находим:



$$\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}.$$

Ответ:

а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k; x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$.

Примечание.
Уравнение может быть так же решено при помощи следующей теоремы:

$$\cos x=\cos y \Leftrightarrow x=\pm y+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

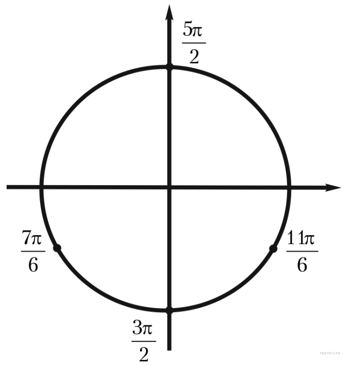
39. Задание 13 № 485942. а) Решите уравнение $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin x$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) По формуле приведения и формуле косинуса двойного угла:

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)=\sin x \Leftrightarrow -\cos 2x=\sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0.$$

Тогда $\sin x=1$ или $\sin x=-\frac{1}{2}$. Откуда $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$ или $x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.



б) С помощью единичной окружности отберём корни на отрезке $\left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$. Это числа $\frac{5\pi}{2}$ и $\frac{11\pi}{6}$ (см. рис.).

Ответ:

а) $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k, x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

б) $\frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}$.

40. Задание 13 № 485935. Решите уравнение $6\cos^2 x-7\cos x-5=0$. Укажите его корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\cos x=y$, получим квадратное уравнение $6y^2-7y-5=0$, корнями которого являются числа $-\frac{1}{2}$ и $\frac{5}{3}$. Уравнение $\cos x=\frac{5}{3}$ не имеет решений, а из уравнения $\cos x=-\frac{1}{2}$ находим искомые корни:

$$x=\frac{2\pi}{3}+2\pi k \text{ или } x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ k,n\in\mathbb{Z}.$$

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi;2\pi]$. Решим неравенства:

$$-\pi\le-\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{1}{6}\le n\le 1\frac{1}{3}\Leftrightarrow n=0 \text{ или } n=1;$$

$$-\pi\le\frac{2\pi}{3}+2\pi k\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{5}{6}\le k\le\frac{2}{3}\Leftrightarrow k=0.$$

Соответствующие найденным значениям параметров корни: $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

Ответ: $\frac{2\pi}{3}+2\pi k, -\frac{2\pi}{3}+2\pi n, k,n\in\mathbb{Z}$. Заданному отрезку принадлежат корни $-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$.

41. Задание 13 № 485940. *а)* Решите уравнение $4\sin^2 x-12\sin x+5=0$.
б) Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

Решение.

Сделаем замену $\sin x=y$ и получим квадратное уравнение $4y^2-12y+5=0$, откуда, $y=\frac{1}{2}, y=\frac{5}{2}$. Уравнение $\sin x=\frac{5}{2}$ не имеет решений, а из уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ находим $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, \in\mathbb{Z}$.

Найдем корни, принадлежащие отрезку $[-\pi, 2\pi]$.

$$-\pi\le\frac{\pi}{6}+2\pi n\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{7}{12}\le n\le\frac{11}{12}\Leftrightarrow n=0,\ x=\frac{\pi}{6};$$
$$-\pi\le\frac{5\pi}{6}+2\pi k\le 2\pi\Leftrightarrow-\frac{11}{12}\le k\le\frac{7}{12}\Leftrightarrow k=0, x=\frac{5\pi}{6}.$$

Отрезку $[-\pi, 2\pi]$ принадлежат корни $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

Ответ: *а)* $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$; *б)* $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$.

42. Задание 13 № 500000. Дано уравнение $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$.

а) Решите данное уравнение.

б) Укажите корни данного уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}\right]$.

Решение.
Сведем уравнение к квадратному относительно тангенса:

$$2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 4\sin x\cos x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 3\,\mathrm{tg}^2 x - 4\,\mathrm{tg}\, x + 1 = 0.$

Отсюда $\mathrm{tg}\, x = 1$ или $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$. Если $\mathrm{tg}\, x = 1$, то $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; если $\mathrm{tg}\, x = \frac{1}{3}$, то $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Из найденных решений промежутку принадлежат числа $-\frac{3\pi}{4}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{3} - \pi$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{4} + \pi k, \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{3\pi}{4}, \mathrm{arctg}\,\frac{1}{3} - \pi$.

43. Задание 13 № 485964. а) Решите уравнение $\sin x + \left(\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right)\left(\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}\right) = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $\sin x + \left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 0$. Если $\cos x = 0$, то из уравнения следует $\sin x = 0$, что невозможно. Значит, на множестве корней уравнения $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos x$:

$$\mathrm{tg}\, x + 1 = 0 \Leftrightarrow \mathrm{tg}\, x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Составим двойное неравенство: $\pi \le -\frac{\pi}{4} + \pi k \le \frac{5\pi}{2}$, откуда $\frac{5}{4} \le k \le 2\frac{3}{4}$. Следовательно, $k = 2$. Поэтому на данном отрезке получаем единственный корень $-\frac{\pi}{4} + 2\pi = \frac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{4}$.

44. Задание 13 № 485965. а) Решите уравнение $\cos x = \left(\cos\dfrac{x}{2} - \sin\dfrac{x}{2}\right)^2 - 1.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right].$

Решение.
а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 - 2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} - 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \Leftrightarrow \cos x = -\sin x \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Найдем корни, лежащие на заданном отрезке. Составим двойное неравенство:

$$\frac{\pi}{2} \le -\frac{\pi}{4} + \pi k \le 2\pi,$$

откуда

$$\frac{3}{4} \le k \le 2\frac{1}{4}.$$

Следовательно, $k = 1$ или $k = 2$, тогда искомые корни $-\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3\pi}{4}$ и $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: а) $-\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $\dfrac{3\pi}{4}$ и $\dfrac{7\pi}{4}$.

45. Задание 13 № 485977. а) Решите уравнение $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin x(\cos x - 2) - \sqrt{3}\cos x(\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\cos x - 2)\left(\sin x - \sqrt{3}\cos x\right) = 0.$$

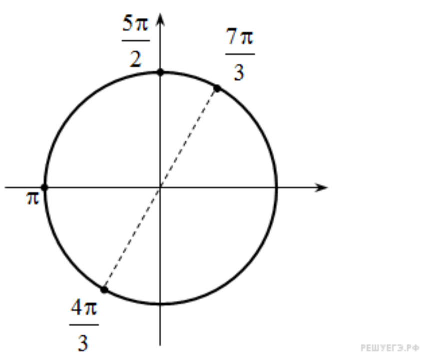
Уравнение $\cos x - 2 = 0$, не имеет корней. Имеем

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0.$$

Если $\cos x = 0$, то $\sin x = 0$, это невозможно. Это однородное уравнение первой степени, разделим обе его части на $\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отрезку $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{7\pi}{3}$. (см. рис.)



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$, б) $\dfrac{4\pi}{3}$ и $\dfrac{7\pi}{3}$.

46. Задание 13 № 485986. а) Решите уравнение $\sin 2x-2\sqrt{3}\sin^2 x+4\cos x-4\sqrt{3}\sin x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

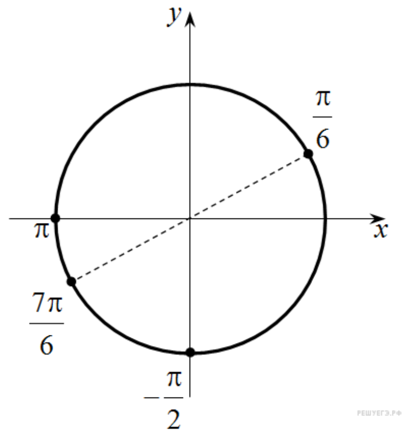
Решение.
а) Преобразуем уравнение и разложим левую часть на множители:

$$2\sin x\cos x-2\sqrt{3}\sin^2 x+4\cos x-4\sqrt{3}\sin x=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+2)-\sqrt{3}\sin x(\sin x+2)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\sin x+2)\left(\cos x-\sqrt{3}\sin x\right)=0.$$

Уравнение $\sin x+2=0$, не имеет корней. Уравнение $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0.$ является однородным тригонометрическим уравнением первой степени. Разделим обе части уравнения на $\sqrt{3}\cos x$. Получаем:

$$\operatorname{tg} x-\frac{1}{\sqrt{3}}=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отрезку $\left[-\frac{\pi}{2},\pi\right]$ принадлежит только корень $\frac{\pi}{6}$.



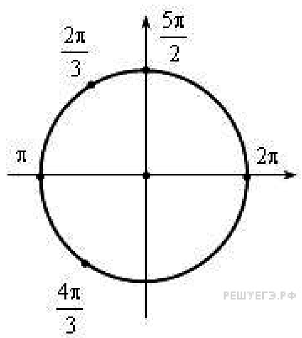
Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, б) $\frac{\pi}{6}$.

47. Задание 13 № 485991. а) Решите уравнение $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.
а) Преобразуем уравнение, получаем $\cos x=\cos 2x$. Значит, $x=2x+2\pi k$ или $x=-2x+2\pi k$, где $k\in\mathbb{Z}$. В первом случае $x=2\pi k$, во втором случае $x=\frac{2\pi k}{3}$, где $k\in\mathbb{Z}$. Первая серия решений входит во вторую.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности. Отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\frac{4\pi}{3}$ и 2π.



Ответ: а) $x=\frac{2\pi k}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.

б) $\frac{4\pi}{3}$, 2π.

48. Задание 13 № 485987. а) Решите уравнение $\sin^2\dfrac{x}{2}-\cos^2\dfrac{x}{2}=\cos 2x.$

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2},\,2\pi\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:$-\cos x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos(x+\pi)=\cos 2x.$

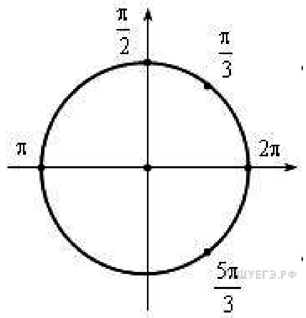
Значит, $x+\pi=2x+2\pi k$ или $x+\pi=-2x+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

В первом случае $x=\pi+2\pi k,$ во втором случае $x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}.$

Первая серия решений входит во вторую.

б) Отметим решения на тригонометрической окружности.

Отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2},\,2\pi\right]$ принадлежат корни π и $\dfrac{5\pi}{3}$.



Ответ: а) $x=-\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z};$

б) $\pi,\ \dfrac{5\pi}{3}$.

49. Задание 13 № 500366. а) Решите уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=0,5.$

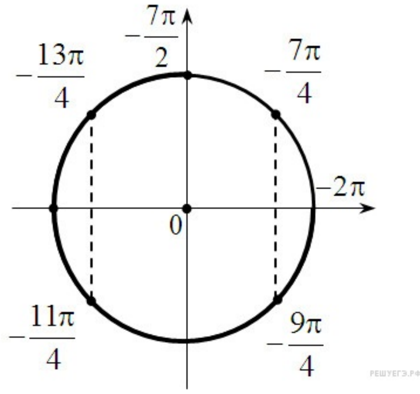
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\,-2\pi\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x=0,5 \Leftrightarrow \cos^2 x=\frac{1}{2}.$$

Значит, $\cos x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\,-2\pi\right]$.

Получим числа: $-\dfrac{13\pi}{4},\ -\dfrac{11\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{4}.$

Ответ: а) $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in Z;$

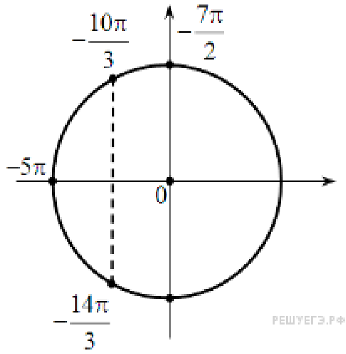
б)$-\dfrac{13\pi}{4},\ -\dfrac{11\pi}{4},\ -\dfrac{9\pi}{4}.$

50. Задание 13 № 500212. а) Решите уравнение $6\sin^2 x+5\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-2=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi,-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде



$$6-6\cos^2 x+5\cos x-2=0\Leftrightarrow 6\cos^2 x-5\cos x-4=0\Leftrightarrow$$
$$(3\cos x-4)(2\cos x+1)=0$$

Значит, или $\cos x=\frac{4}{3}$ — уравнение не имеет корней, или $\cos x=-\frac{1}{2}$, откуда $x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-5\pi,-\frac{7\pi}{2}\right]$.

Получим число $-\frac{14\pi}{3}$.

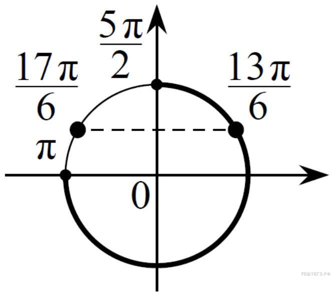
Ответ: а) $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{14\pi}{3}$.

51. Задание 13 № 500386. а) Решите уравнение $4\cos^2 x+4\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-1=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде



$$4-4\sin^2 x-4\sin x-1=0\Leftrightarrow$$
$$4\sin^2 x+4\sin x-3=0\Leftrightarrow(2\sin x+3)(2\sin x-1)=0$$

Значит, или $\sin x=-\frac{3}{2}$ — уравнение не имеет корней, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n, x=\frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберем корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi,\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим число $\frac{13\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6}+2\pi n,\ \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{13\pi}{6}$.

52. Задание 13 № 501482. а) Решите уравнение: $\cos 2x + \sin^2 x = 0,25.$

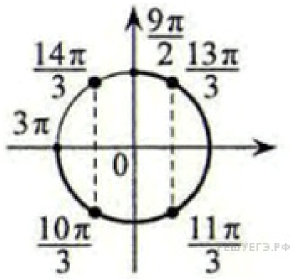
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[3\pi, \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x = 0.25 \Leftrightarrow \cos^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\cos x = \pm\dfrac{1}{2}$, откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[3\pi, \dfrac{9\pi}{2}\right]$.

Получим числа $\dfrac{10\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{3}.$

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$

б) $\dfrac{10\pi}{3}, \dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{13\pi}{3}.$

53. Задание 13 № 500592. а) Решите уравнение $\cos 2x + 3\sin^2 x = 1,25$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sin^2 x = 1,25 \Leftrightarrow 1 + \sin^2 x = 1,25$$

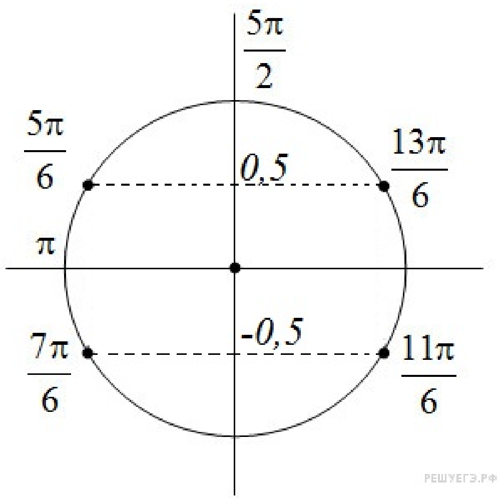
В результате получим:

$$\sin^2 x = 0,25 \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{1}{2}$$

Значит

$$x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

.



б) Отметим решения на тригонометрической окружности.

Отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}.$

Ответ:

а) $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}, \dfrac{13\pi}{6}.$

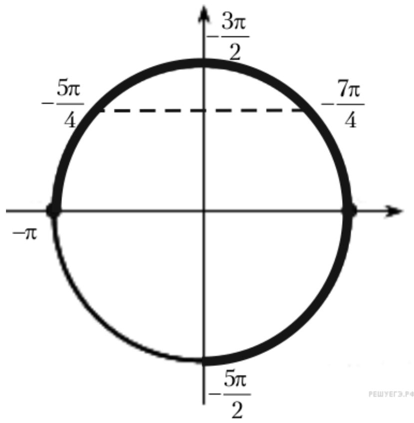
54. Задание 13 № 501486. а) Решите уравнение: $\sqrt{2}\sin^3 x-\sqrt{2}\sin x+\cos^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2},-\pi\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{2}\sin x(\sin^2 x-1)+\cos^2 x=0\Leftrightarrow\cos^2 x(1-\sqrt{2}\sin x)=0.$$

Значит, или $\cos x=0$, откуда $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ или $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ x=\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

Получим числа $-\frac{5\pi}{2},-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{4}.$

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \frac{\pi}{4}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

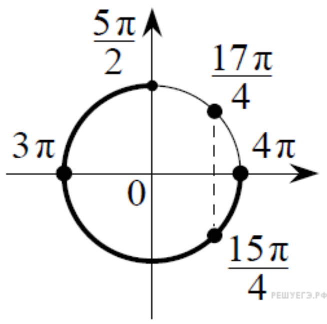
б) $-\frac{5\pi}{2},-\frac{7\pi}{4},-\frac{3\pi}{2},-\frac{5\pi}{4}.$

55. Задание 13 № 500427. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^3 x-\sqrt{2}\cos x+\sin^2 x=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2},4\pi\right]$.

Решение.
а) Запишем уравнение в виде:

$$\sqrt{2}\cos x(\cos^2 x-1)+\sin^2 x=0\Leftrightarrow\sin^2 x(1-\sqrt{2}\cos x)=0.$$



Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, откуда $x=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2},4\pi\right]$. Получим числа: $3\pi,\ \frac{15\pi}{4},\ 4\pi.$

Ответ: а) $\pi k,\ \pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $3\pi,\ \frac{15\pi}{4},\ 4\pi.$

56. Задание 13 № 501709. а) Решите уравнение $\sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$.

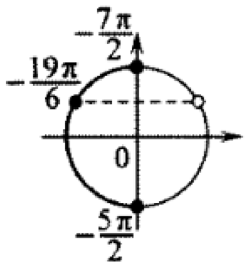
Решение.

а) Запишем исходное уравнение в виде:

$$2\sin x\cos x = \cos x \Leftrightarrow \cos x\cdot(2\sin x - 1) = 0.$$

Значит, либо $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{6}+2\pi k,\ x = \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}\right]$. Получим числа: $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{5\pi}{2}$.



Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{6}+2\pi k, \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) $-\frac{7\pi}{2}, -\frac{19\pi}{6}, -\frac{5\pi}{2}$.

57. Задание 13 № 500917. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$.

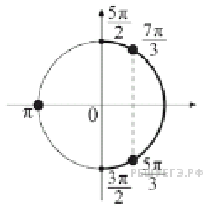
б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение: $2\cos^2 x - 1 = -\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0.$

Значит, либо $\cos x = -1$, откуда $x = \pi + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$, либо $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие заданному промежутку: $x = \frac{5\pi}{3}; x = \frac{7\pi}{3}$.



Ответ:

а) $\pi + 2\pi k, \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$;

б) $\frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}$.

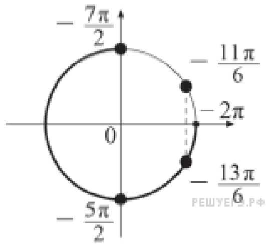
58. Задание 13 № 500961. а) Решите уравнение $2\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\sqrt{3}\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\,-2\pi\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^2 x.$ Поэтому уравнение можно переписать в виде $2\cos^2 x-\sqrt{3}\cos x=0,$ откуда $2\cos x\left(\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=0.$ Значит, либо $\cos x=0,$ откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ либо $\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{2},$ откуда $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{7\pi}{2},\,-2\pi\right]$: $x=-\dfrac{7\pi}{2},\ x=-\dfrac{5\pi}{2},\ x=-\dfrac{13\pi}{6}.$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $-\dfrac{7\pi}{2},\ -\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{13\pi}{6}.$

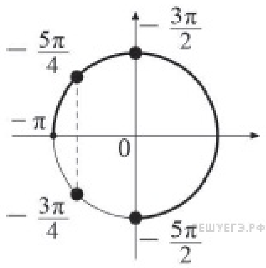
59. Задание 13 № 500967. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-\cos x.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2},\,-\pi\right]$.

Решение.

а) Заметим, что $\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=\cos^2 x.$ Поэтому уравнение можно переписать в виде $\sqrt{2}\cos^2 x+\cos x=0,$ откуда $\cos x\left(\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0.$ Значит, либо $\cos x=0,$ откуда $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ либо $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},$ откуда $x=\pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2},\,-\pi\right]$: $x=-\dfrac{5\pi}{2},\ x=-\dfrac{3\pi}{2},\ x=-\dfrac{5\pi}{4}.$



Ответ: а) $\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};$ б) $-\dfrac{5\pi}{2},\ -\dfrac{3\pi}{2},\ -\dfrac{5\pi}{4}.$

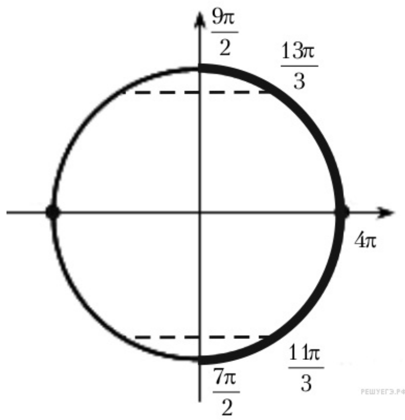
60. Задание 13 № 500346. а) Решите уравнение $4\sin^3 x = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4\sin^3 x - 3\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(4\sin^2 x - 3) = 0.$$



Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, или $\sin^2 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ или $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{7\pi}{2}, \frac{9\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$.

Ответ: а) $\pi k, \frac{\pi}{3} + \pi k, \frac{2\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $\frac{11\pi}{3}, 4\pi, \frac{13\pi}{3}$.

Примечание.

Внимательный читатель, конечно, узнал формулу синуса тройного угла:

$$3\sin x - 4\sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

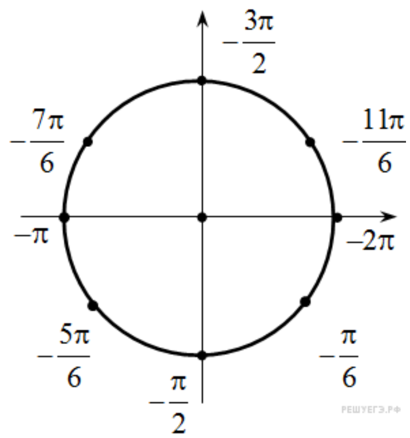
61. Задание 13 № 500063. а) Решите уравнение $4\cos^3 x + 3\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$4\cos^3 x - 3\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(4\cos^2 x - 3) = 0.$$



Значит, или $\cos x = 0$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$, или $\cos^2 x = \frac{3}{4}$, $\cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни, принадлежащие отрезку $[-2\pi; -\pi]$. Получим числа: $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

62. Задание 13 № 504261. а) Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x}{2\cos x+1}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

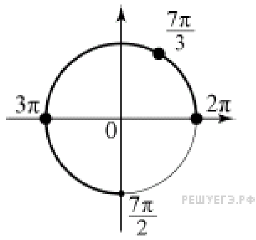
Решение.

а) Левая часть уравнения определена при $\cos x\neq-\dfrac{1}{2}$, то есть при $x\neq\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Числитель дроби должен быть равен 0:

$$2\sin^2 x-\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Серию $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$ нужно отбросить. Получаем ответ: $\pi n;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни, лежащие на отрезке $\left[2\pi;\dfrac{7\pi}{2}\right]: x=2\pi; x=\dfrac{7\pi}{3}; x=3\pi.$



Ответ: а) $\left\{\pi n, \dfrac{\pi}{3}+2\pi n, \middle|\ n\in\mathbb{Z}\right\}$, б) $2\pi, \dfrac{7\pi}{3}, 3\pi.$

63. Задание 13 № 500111. а) Решите уравнение $\sin 2x+\sqrt{3}\sin x=0.$

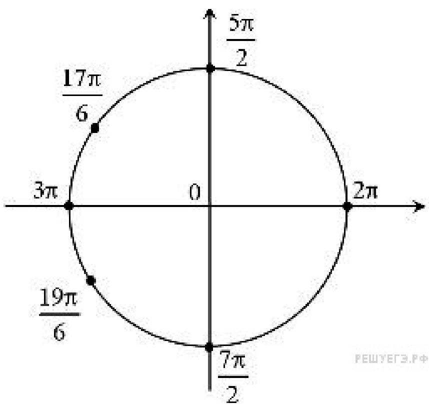
б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде

$$2\sin x\cos x+\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow\sin x\cdot\left(2\cos x+\sqrt{3}\right).$$

Значит, или $\sin x=0$, откуда $x=\pi n, n\in Z$, или $\cos x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $x=\pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z.$



б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2};\dfrac{7\pi}{2}\right]$. Получим числа: $\dfrac{17\pi}{6}; 3\pi; \dfrac{19\pi}{6}.$

Ответ: а) $\pi n, n\in Z; \pm\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k, k\in Z$; б) $\dfrac{17\pi}{6}; 3\pi; \dfrac{19\pi}{6}.$

64. Задание 13 № 485996. а) Решите уравнение $\sin 2x = 2\sin x - \cos x + 1$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$.

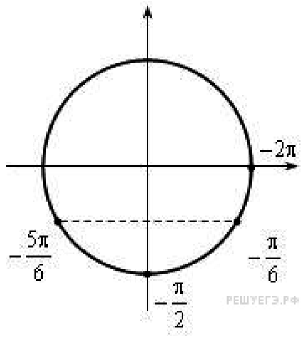
Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$2\sin x\cos x - 2\sin x + \cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\cos x - 1)(2\sin x + 1) = 0.$$

Получаем: $\cos x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}$. Отсюда $x = 2\pi k$, $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$ или $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[-2\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$. Это числа $-2\pi, -\frac{5\pi}{6}$.



Ответ: а) $2\pi k, -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) $-2\pi, -\frac{5\pi}{6}$.

65. Задание 13 № 500407. а) Решите уравнение $2\cos^3 x - 2\cos x + \sin^2 x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$.

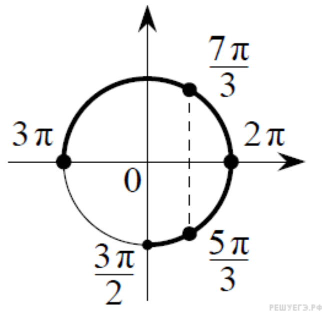
Решение.

а) Запишем уравнение в виде:

$$2\cos x(\cos^2 x - 1) + \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x(1 - 2\cos x) = 0.$$

Значит, или $\sin x = 0$, откуда $x = \pi k$, $k \in Z$, или $\cos x = \frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

б) С помощью числовой окружности (см. рис.) отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}, 3\pi\right]$. Находим числа $\frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$.



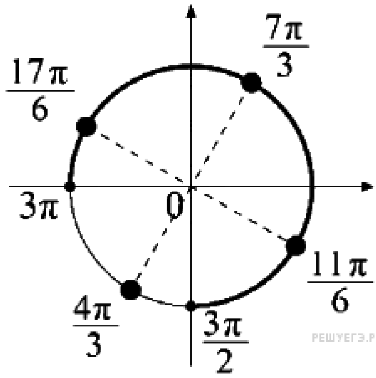
Ответ: а) $\pi k, \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$; б) $\frac{5\pi}{3}, 2\pi, \frac{7\pi}{3}, 3\pi$.

66. Задание 13 № 501044. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение.

а) Если $\cos 2x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin 2x = 0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поэтому $cos 2x$ отличен от 0, и на него можно поделить обе части уравнения:



$$\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x + 3 = 0; \quad \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3};$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; \quad x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$:

$$x = \frac{11\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{3}, x = \frac{17\pi}{6}.$$

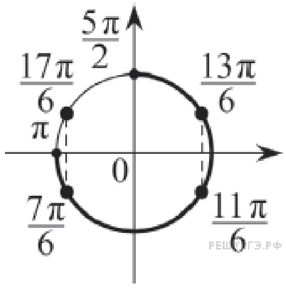
Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}$.

67. Задание 13 № 501066. а) Решите уравнение $\cos 2x - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -0,25$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Запишем уравнение в виде:



$$\cos^2 x - \sin^2 x - \cos^2 x = -0,25 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Значит, $\sin x = \pm\frac{1}{2}$, откуда $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) С помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Получим числа: $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

Замечание. Отбор корней может быть обоснован и любым другим способом: с помощью графика, решения двойных неравенств и т.п.

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}$.

68. Задание 13 № 500815. а) Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, -\pi\right)$.

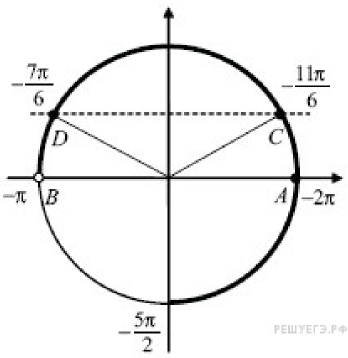
Решение.

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ и $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, имеем:

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Корни уравнения: $x = \pi k,\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ — точками C и D, промежуток $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, -\pi\right)$ изображается жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения: -2π, $-2\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{11\pi}{6}$ и $-\pi - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{7\pi}{6}$.



Ответ:а) $x = \pi k,\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

б) $-2\pi,\ -\dfrac{11\pi}{6},\ -\dfrac{7\pi}{6}.$

69. Задание 13 № 484543. Решите уравнение $\sqrt{9 - x^2}\cos x = 0$.

Решение.

$$\sqrt{9-x^2}\cos x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{9-x^2} = 0, \\ \begin{cases} \cos x = 0, \\ 9 - x^2 \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3, \\ \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ -3 \le x \le 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\pm 3;\ \pm\dfrac{\pi}{2}.$

70. Задание 13 № 484545. Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x$.

Решение.

Имеем:

$$|\cos x + \sin x| = \sqrt{2}\sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x = 2\sin^2 2x, \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 1; \\ \sin 2x = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \\ \sin 2x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$

71. Задание 13 № 505428. а) Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x + (1+\sqrt{3})\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$

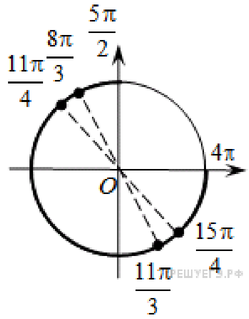
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$.

Решение.

а) Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда уравнение запишется в виде:

$$t^2+(1+\sqrt{3})t+\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-\sqrt{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x=-1, \\ \operatorname{tg} x=-\sqrt{3}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}, \\ x=-\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\ 4\pi\right]$. Получим числа $\frac{8\pi}{3};\frac{11\pi}{4};\frac{11\pi}{3};\frac{15\pi}{4}$.



Ответ: а) $-\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{3}+\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) $\frac{8\pi}{3};\frac{11\pi}{4};\frac{11\pi}{3};\frac{15\pi}{4}$.

72. Задание 13 № 484544. Решите уравнение $\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0.$

Решение.

Произведение двух выражений равно нулю, если хотя бы одно из них равно нулю, а другое при этом не теряет смысла:

$$\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\sqrt{3x^2-7x+4}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} \sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}, \\ 3x^2-7x+4\ge 0, \end{array}\right. \\ 3x^2-7x+4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}, \\ (x-1)\left(x-\frac{4}{3}\right)\ge 0, \end{array}\right. \\ x=1, \\ x=\frac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Поскольку $3<\pi<4$, то $1<\frac{\pi}{3}<\frac{4}{3}$. Поэтому $n\ne 0$.

Ответ: $\left\{1,\ \frac{4}{3}\right\}\cup\left\{(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z},\ n\ne 0\right\}$.

73. Задание 13 № 485973. а) Решите уравнение $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

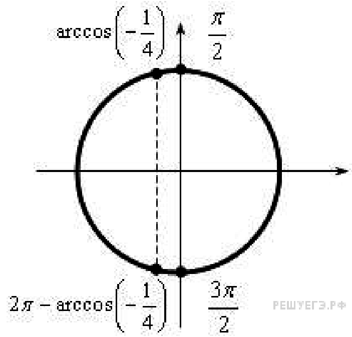
$$4\sin x\cos x - 4\cos x + \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\sin x - 1)(4\cos x + 1) = 0.$$

Получаем: $\sin x = 1$ или $\cos x = -\frac{1}{4}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \quad \text{или} \quad x = \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

б) С помощью числовой окружности отберем корни на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$:

$$\frac{\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right).$$



Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pm\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

б) $\frac{\pi}{2}, \arccos\left(-\frac{1}{4}\right), 2\pi - \arccos\left(-\frac{1}{4}\right)$.