Логарифмические и показательные уравнения

1. Задание 13 № 502053. а) Решите уравнение $1+\log_2(9x^2+5)=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{8x^4+14}.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-1,\ \frac{8}{9}\right].$

Решение.

а) Заметим, что уравнение определено при любом x. Запишем исходное уравнение в виде:

$$\log_2(9x^2+5)=\log_2(8x^4+14)-\log_2 2 \Leftrightarrow \log_2(9x^2+5)=\log_2(4x^4+7)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9x^2+5=4x^4+7\Leftrightarrow 4x^4-9x^2+2=0\Leftrightarrow (4x^2-1)(x^2-2)=0.$$

Значит, либо $4x^2-1=0$, откуда $x=\frac{1}{2}$ или $x=-\frac{1}{2}$, либо $x^2-2=0$, откуда $x=\sqrt{2}$ или $x=-\sqrt{2}$.

б) Поскольку $-\sqrt{2}<-1<-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}<\frac{8}{9}<\sqrt{2}$, отрезку $\left[-1,\ \frac{8}{9}\right]$ принадлежат корни $x=\frac{1}{2}$ и $x=-\frac{1}{2}$.

Ответ: а) $x=\pm\sqrt{2}, x=\pm\frac{1}{2}$; б) $\pm\frac{1}{2}$.

2. Задание 13 № 502094. а) Решите уравнение $9^{x-\frac{1}{2}}-8\cdot 3^{x-1}+5=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right).$

Решение.

а) Преобразуем исходное уравнение: $3\cdot 9^{(x-1)}—8\cdot 3^{(x-1)}+5=0.$

Пусть $t=3^{x-1}$, тогда уравнение запишется в виде $3t^2—8t+5=0$, откуда $t=1$ или $t=\frac{5}{3}$.

При $t=1$ получим: $3^{x-1}=1$ откуда $x=1$.

При $t=\frac{5}{3}$ получим: $3^{x-1}=\frac{5}{3}$ откуда $x=\log_3 5$.

б) Корень $x=1$ не принадлежит промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$. Поскольку $1<\log_3 5$ и $\log_3 5<\log_3 9=2<\frac{7}{3}$, корень $x=\log_3 5$ принадлежит промежутку $\left(1,\ \frac{7}{3}\right)$.

Ответ: а) $1, \log_3 5$; б) $\log_3 5$.

3. Задание 13 № 503127. а) Решите уравнение $4^{x^2-2x+1}+4^{x^2-2x}=20.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-1;\ 2]$.

Решение.

а) Преобразуем уравнение:

$$4\cdot 4^{x^2-2x}+4^{x^2-2x}=20\Leftrightarrow 4^{x^2-2x}=4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-2x=1\Leftrightarrow x^2-2x-1=0.$$

Откуда $x=1\pm\sqrt{2}$.

б) Оценим $\sqrt{2}$ сверху целыми числами: $1<\sqrt{2}<2$. Тогда

$$2<1+\sqrt{2}<3 \text{ и } -1<1-\sqrt{2}<0.$$

Значит, отрезку $[-1,2]$ принадлежит только $x=1-\sqrt{2}$.

Ответ а) $x=1\pm\sqrt{2}$; б) $x=1-\sqrt{2}$.