Тригонометрические уравнения, исследование ОДЗ

1. Задание 13 № 505152. а) Решите уравнение $\dfrac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg}x-3}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi,\,-\dfrac{5\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля:

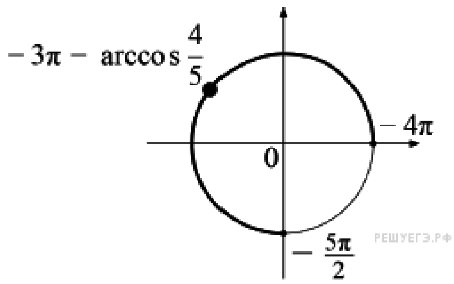
$$\frac{5\cos x+4}{4\operatorname{tg}x-3}=0\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x=-\dfrac{4}{5},\\ \operatorname{tg}x\neq\dfrac{3}{4}.\end{cases}$$

Из уравнения $\cos x=-\dfrac{4}{5}$ получаем

$$x=\pi-\arccos\frac{4}{5}+2\pi n \text{ или } x=\pi+\arccos\frac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Неравенству $\operatorname{tg}x\neq\dfrac{3}{4}$ удовлетворяет только серия $x=\pi-\arccos\dfrac{4}{5}+2\pi n.$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[-4\pi,\,-\dfrac{5\pi}{2}\right]$. Получим $x=-3\pi-\arccos\dfrac{4}{5}.$



Ответ: а) $\pi-\arccos\dfrac{4}{5}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $x=-3\pi-\arccos\dfrac{4}{5}.$

2. Задание 13 № 507430. Решите уравнение: $\dfrac{2\sin^2 x-5\sin x-3}{\sqrt{x+\frac{\pi}{6}}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}2\sin^2 x-5\sin x-3=0,\\ x>-\dfrac{\pi}{6}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-\dfrac{\pi}{6},\\ \left[\begin{array}{l}\sin x=-\dfrac{1}{2},\\ \sin x=3.\end{array}\right.\end{cases}$$

Уравнение $\sin x=3$ решений не имеет. Учитывая, что $x>-\dfrac{\pi}{6}$, получаем: $x=(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{N}$

3. Задание 13 № 507620. Решите уравнение: $\dfrac{4\cos^2 x+8\sin x-7}{\sqrt{-\operatorname{tg} x}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 4\cos^2 x+8\sin x-7=0, \\ \operatorname{tg} x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin^2 x-8\sin x+3=0, \\ \operatorname{tg} x<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x<0, \\ \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{1}{2}, \\ \sin x=\dfrac{3}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$$

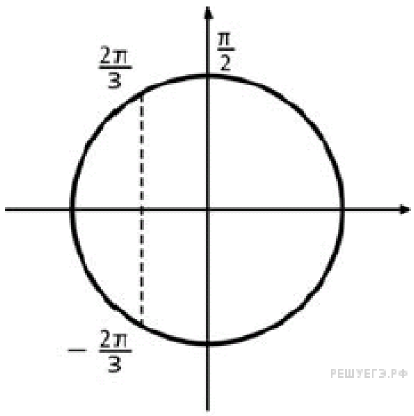
Уравнение $\sin x=\dfrac{3}{2}$ решений не имеет. Учитывая, что $\operatorname{tg} x<0,$ получаем: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

4. Задание 13 № 507633. Решите уравнение $\dfrac{(\sin x-1)(2\cos x+1)}{\sqrt{\operatorname{tg} x}}=0.$

Решение.

Уравнение имеет смысл если $\operatorname{tg} x>0.$ Приравняем числитель к нулю:



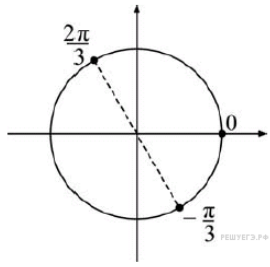
$$(\sin x-1)(2\cos x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=1, \\ \cos x=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая условие $\operatorname{tg} x>0,$ получаем, что серии $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ и $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

5. Задание 13 № 507644. Решите уравнение: $(\cos x-1)(\operatorname{tg}x+\sqrt{3})\sqrt{\cos x}=0.$

Решение.



Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x>0$. Поэтому множитель $\sqrt{\cos x}$ положителен. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $\cos x-1=0,$ тогда $x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Второй случай: $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3},$ тогда $x=-\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Учитывая условие $\cos x>0$, получаем, что числа $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ не являются решениями данного уравнения.

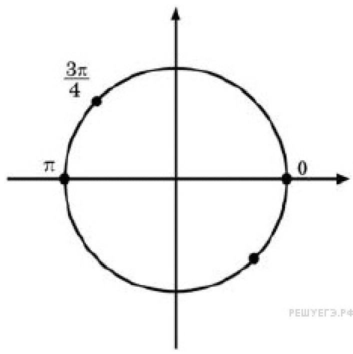
Ответ: $2\pi k,\ -\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

6. Задание 13 № 507656. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x+2\sin^2 x}{\sqrt{-\cos x}}=0.$

Решение.

Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\sin 2x+2\sin^2 x=0,\\ \cos x<0.\end{cases}$$



Решим первое уравнение:

$$\sin 2x+2\sin^2 x=0\Leftrightarrow \sin x(\cos x+\sin x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \operatorname{tg}x=-1.\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $\cos x<0,$ получаем:

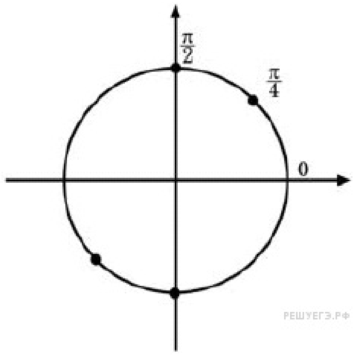
$$\left[\begin{array}{l}x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi+2\pi k,\ \dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

7. Задание 13 № 507659. Решите уравнение $\dfrac{\sin 2x - 2\cos^2 x}{\sqrt{\sin x}} = 0.$

Решение.

Найдем нули числителя:



$$\sin 2x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 2\sin x \cos x - 2\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x(\sin x - \cos x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $\sin x > 0$, получаем:

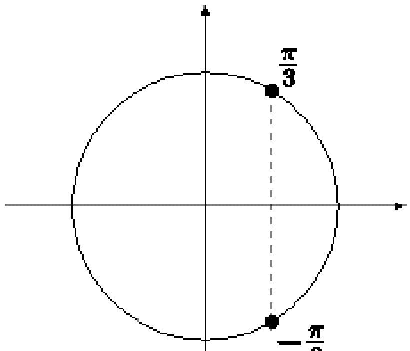
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \\ x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

8. Задание 13 № 507665. Решите уравнение $(\sin 2x - \sin x)(\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}) = 0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{ctg} x \le 0$. Выражение $\sqrt{2} + \sqrt{-2\operatorname{ctg} x}$ положительно при всех допустимых x. Значит,



$$\sin 2x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x(2\cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \cos x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, \ k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

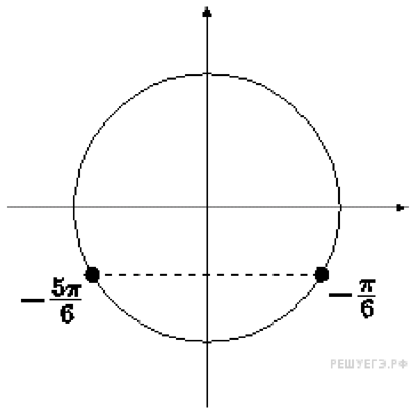
Учитывая, что $\sin x \ne 0$ и $\operatorname{ctg} x \le 0$, получаем, что решениями являются числа $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $-\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}.$

9. Задание 13 № 507668. Решите уравнение $(\sin 2x+\cos x)(\sqrt{3}+\sqrt{3\operatorname{tg} x})=0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\operatorname{tg} x\ge 0$ и $\cos x\ne 0.$ Выражение $\sqrt{3}+\sqrt{3\operatorname{tg} x}$ положительно при всех допустимых x. Значит,



$$\sin 2x+\cos x=0\Leftrightarrow \cos x(2\sin x+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=0,\\ \sin x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\\ x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $\cos x\ne 0$ и $\operatorname{tg} x\ge 0,$ получаем, что решениями являются числа $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

10. Задание 13 № 507689. Решите уравнение: $\frac{2\sin^2 x+3\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}=0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x\ne\frac{\sqrt{3}}{2}$. Преобразуем уравнение:

$$\frac{2\sin^2 x+3\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow\frac{-2\cos^2 x+3\cos x+2}{2\sin x-\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow\frac{(2\cos x+1)(\cos x-2)}{2\sin x-\sqrt{3}}=0.$$

Поскольку $\cos x-2\ne 0$ получаем:

$$2\cos x+1=0\Leftrightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\sin x\ne\frac{\sqrt{3}}{2}$, получаем, $x=-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

11. Задание 13 № 507692. Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-5\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

Преобразуем уравнение:

$$\frac{2\cos^2 x-5\sin x+1}{2\cos x-\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow\frac{-2\sin^2 x-5\sin x+3}{2\cos x-\sqrt{3}}=0\Leftrightarrow\frac{(2\sin x-1)(\sin x+3)}{2\cos x-\sqrt{3}}=0.$$

Поскольку $\sin x+3\neq 0,$ получаем:

$$2\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Учитывая, что $\cos x\neq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, находим: $x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

12. Задание 13 № 508971. а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1}{\operatorname{tg} x-\sqrt{3}}=0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Перейдём к системе:

$$\begin{cases}\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1=0,\\ \operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0,\\ \cos x\neq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение системы:

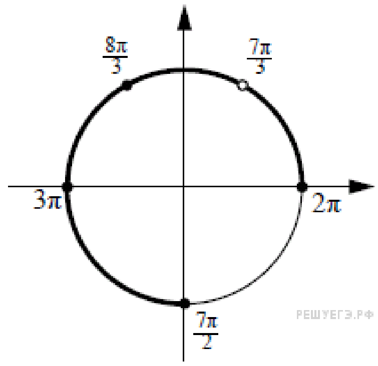
$$\cos 2x+\sqrt{3}\sin x-1=0\Leftrightarrow 1-2\sin^2 x+\sqrt{3}\sin x-1=0\Leftrightarrow\sin x(2\sin x-\sqrt{3})=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi n,\\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Условию $\operatorname{tg} x-\sqrt{3}\neq 0$ удовлетворяют только решения $x=\pi n$ и $x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n.$

б) На отрезке $\left[2\pi;\ \dfrac{7\pi}{2}\right]$ корни отберём с помощью единичной окружности. Получаем: $2\pi;\ \dfrac{8\pi}{3};\ 3\pi.$

Ответ: а) $\pi n,\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z};$ б) $2\pi;\ \dfrac{8\pi}{3};\ 3\pi.$

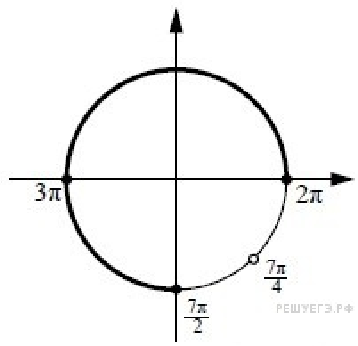


13. Задание 13 № 512398. а) Решите уравнение $\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Получаем:



$$\left(\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}\right)\sqrt{-6\sin x}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\sqrt{2}\sin^2 x+\cos x-\sqrt{2}=0,\\ \sin x\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x-\sqrt{2}\cos^2 x=0,\\ \sin x\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \begin{cases}\cos x(1-\sqrt{2}\cos x)=0,\\ \sin x\le 0,\end{cases}\end{array}\right.$$

откуда $x=\pi n,\ n\in\mathbb{Z},$ или $x=-\frac{\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ или $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}.$

б) Корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi;\frac{7\pi}{2}\right]$, отберём с помощью единичной окружности. Получаем $2\pi, 3\pi$ и $\frac{7\pi}{2}$.

Ответ: а) $\pi n, n\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{4}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}; -\frac{\pi}{2}+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z}$ б) $2\pi, 3\pi$ и $\frac{7\pi}{2}$.

14. Задание 13 № 505173. а) Решите уравнение $\dfrac{5\operatorname{tg}x-12}{13\cos x-5}=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[4\pi,\ \dfrac{11\pi}{2}\right]$.

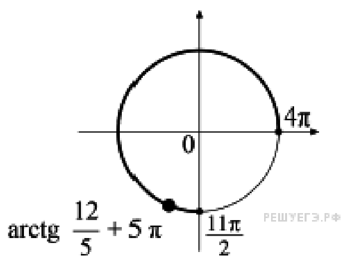
Решение.

а) Решим уравнение:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}x=\dfrac{12}{5},\\ \cos x\neq\dfrac{5}{13}.\end{cases}$$

Из уравнения $\operatorname{tg}x=\dfrac{12}{5}$ получаем $x=\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$ Неравенству $\cos x\neq\dfrac{5}{13}$ удовлетворяют корни, изображаемые точками третьей четверти единичной окружности: $x=\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$

б) При помощи тригонометрической окружности отберём корни уравнения, лежащие на отрезке $\left[4\pi,\ \dfrac{11\pi}{2}\right]$. Получим $x=5\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}.$



Ответ: а) $\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}+\pi+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$; б) $5\pi+\operatorname{arctg}\dfrac{12}{5}.$

15. Задание 13 № 484548. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0.$

Решение.

$$\frac{2\sin^2x+2\sin x\cos 2x-1}{\sqrt{\cos x}}=0\Leftrightarrow\begin{cases}2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0,\\ \cos x>0.\end{cases}$$

Решим уравнение $2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0$:

$$2\sin x\cos 2x-\cos 2x=0\Leftrightarrow\cos 2x(2\sin x-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \sin x=\dfrac{1}{2},\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Из найденный решений условию $\cos x>0$ удовлетворяет только $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

16. Задание 13 № 484549. Решите уравнение $\dfrac{2\cos^2 x-2\cos x\cos 2x-1}{\sqrt{\sin x}}=0.$

Решение.

$$\frac{2\cos^2 x-2\cos x\cos 2x-1}{\sqrt{\sin x}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x-2\cos x\cos 2x=0,\\ \sin x>0.\ (*)\end{cases}$$

Решим уравнение $\cos 2x-2\cos x\cos 2x=0$:

$$\cos 2x-2\cos x\cos 2x=0 \Leftrightarrow \cos 2x(1-2\cos x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0,\\ \cos x=\dfrac{1}{2},\end{array}\right.$$

откуда $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2}, x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

Из найденных решений условию (*) удовлетворяют только $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k,\ x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k$ и $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi k, x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k, x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$

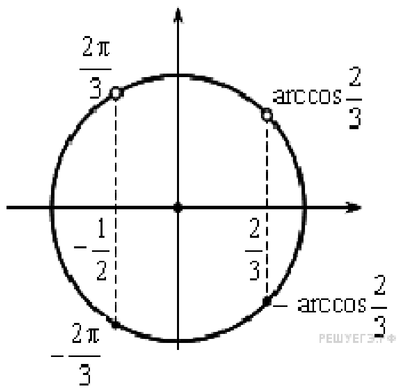
17. Задание 13 № 484551. Решите уравнение $\dfrac{6\cos^2 x-\cos x-2}{\sqrt{-\sin x}}=0.$

Решение.

Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}6\cos^2 x-\cos x-2=0,\\ -\sin x>0.\end{cases}$$

Из неравенства получаем, что $\sin x<0$. В уравнении сделаем замену $\cos x=t$ и решим уравнение $6t^2-t-2=0$, $t=-\dfrac{1}{2}$ или $t=\dfrac{2}{3}$. Равенствам $\cos x=-\dfrac{1}{2}$ и $\cos x=\dfrac{2}{3}$ на тригонометрической окружности соответствует четыре точки. Две из них, находящиеся в верхней полуплоскости, не удовлетворяют условию $\sin x<0$. Получаем решения: $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, x=-\arccos\dfrac{2}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$



Ответ: $x=-\dfrac{2\pi}{3}+2\pi n, x=-\arccos\dfrac{2}{3}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

18. Задание 13 № 484552. Решите уравнение $\dfrac{4\cos 2x-9\sin x-4}{\sqrt{-\cos x}}=0.$

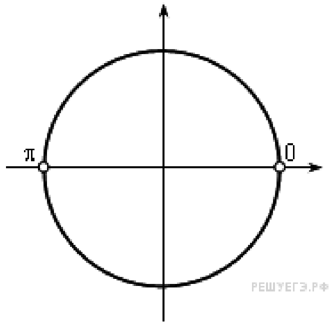
Решение.
Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 4\cos 2x-9\sin x-4=0, \\ \cos x<0. \end{cases}$$

Решим уравнение:

$$4\cos 2x-9\sin x-4=0 \Leftrightarrow 4(1-2\sin^2 x)-9\sin x-4=0 \Leftrightarrow 8\sin^2 x+9\sin x=0.$$

Тогда $\sin x=0$ или $\sin x=-\dfrac{9}{8}$. Последнее уравнение не имеет решений, а из первого, учитывая, что $\cos x<0$, получаем: $x=\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.



Ответ: $x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

19. Задание 13 № 484547. Решите уравнение $\dfrac{26\cos^2 x-23\cos x+5}{13\sin x-12}=0.$

Решение.
Дробь равна нулю, если числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю и не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 26\cos^2 x-23\cos x+5=0, \\ \sin x\neq\dfrac{12}{13}. \end{cases}$$

Решив уравнение системы как квадратное относительно $\cos x$, находим $\cos x=\dfrac{1}{2}$ либо $\cos x=\dfrac{5}{13}$. Если $\cos x=\dfrac{1}{2}$, то $\sin x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ то есть $\sin x\neq\dfrac{12}{13}$. Следовательно, $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. Если $\cos x=\dfrac{5}{13}$, то $\sin x=\pm\dfrac{12}{13}$. В этом случае с учетом условия $\sin x\neq\dfrac{12}{13}$ системы получаем, что из двух точек единичной окружности, соответствующих решениям уравнения $\cos x=\dfrac{5}{13}$, нужно оставить только ту, для которой $\sin x=-\dfrac{12}{13}$. Это точка четвертой четверти, и решение уравнении имеет вид $x=-\arccos\dfrac{5}{13}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}$.

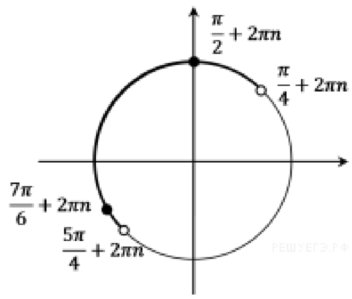
Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k, x=-\arccos\dfrac{5}{13}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

20. Задание 13 № 484540. Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x+\sin x}{\sqrt{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}}=0.$

Решение.
Найдем область определения уравнения:

$$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0 \Leftrightarrow 2\pi n<x-\frac{\pi}{4}<\pi+2\pi n \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}.$$

Найдем корни числителя, используем формулу $\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$:



$$\cos 2x+\sin x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-\sin x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=1,\\ \sin x=-0,5.\end{array}\right.$$

Откуда, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$
С учетом области определения уравнения получаем:

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad x=\frac{7\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\mathbb{Z}.$$

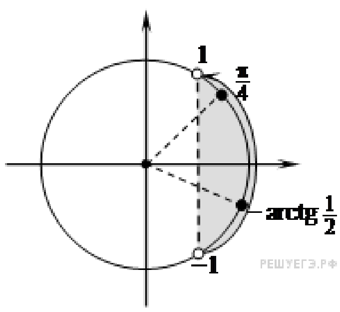
Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ x=\dfrac{7\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

21. Задание 13 № 484541. Решите уравнение $\dfrac{2\sin^2 x-\sin 2x-2\cos 2x}{\sqrt{1-x^2}}=0.$

Решение.
Найдем ОДЗ: $1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1.$
Найдем корни числителя:

$$2\sin^2 x-\sin 2x-2\cos 2x=0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x-2(\cos^2 x-\sin^2 x)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ 2\sin^2 x-\sin x\cos x-\cos^2 x=0 \Leftrightarrow 2\,\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,x=1,\\ \mathrm{tg}\,x=-\dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Отметим корни на тригонометрической окружности:



С учетом ОДЗ (см. рис.) получаем: $x=\dfrac{\pi}{4},\ x=-\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{2}.$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{4},\quad x=-\mathrm{arctg}\dfrac{1}{2}.$

22. Задание 13 № 484546. Решите уравнение $(2\cos^2 x - \cos x)\cdot\sqrt{-11\operatorname{tg} x} = 0.$

Решение.

Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла:

$$(2\cos^2 x - \cos x)\cdot\sqrt{-11\operatorname{tg} x} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2\cos^2 x - \cos x = 0,\\ \operatorname{tg} x \le 0,\end{cases}\\ \operatorname{tg} x = 0.\end{array}\right.$$

Из уравнения $2\cos^2 x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(2\cos x - 1) = 0$ получаем $\cos x = \frac{1}{2}$, так как $\cos x \ne 0$. Решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ является $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. Одно из которых лежит в первой четверти (и значит, для него неравенство $\operatorname{tg} x \le 0$ не выполняется), а другое — в четвертой четверти (для него неравенство $\operatorname{tg} x \le 0$ выполняется), значит решением этой системы является серия $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Осталось решить второе уравнение совокупности $\operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

23. Задание 13 № 484555. Решите уравнение $(6\sin^2 x + 5\sin x - 4)\cdot\sqrt{-7\cos x} = 0.$

Решение.

Если $\cos x > 0$, то решений нет. Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}.$ Если $\cos x < 0$, то $6\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$, откуда $\sin x = -\frac{4}{3}$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Уравнение $\sin x = -\frac{4}{3}$ не имеет решений. Учитывая, что $\cos x < 0$, из уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ получаем:

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

24. Задание 13 № 484557. Решите уравнение $(2\sin x + \sqrt{3})\cdot\sqrt{\cos x} = 0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\cos x \ge 0.$

Если $\cos x = 0$, то $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Если $\cos x > 0$, то $2\sin x + \sqrt{3} = 0$, откуда $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $\cos x > 0$, из уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ получаем: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

25. Задание 13 № 505498. а) Решите уравнение $\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{3}{\sin x} + 2 = 0.$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.

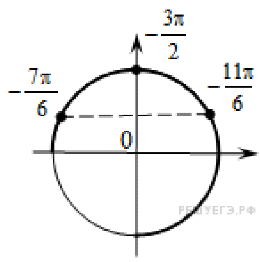
Пусть $t = \frac{1}{\sin x}$, тогда имеем:

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 2, \end{array}\right.$$

откуда:

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sin x} = 1, \\ \frac{1}{\sin x} = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 1, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

С помощью числовой окружности (см. рис.) найдём корни из отрезка $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\pi\right]$. Получим числа: $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.



Ответ: а) $\left\{\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n : n \in \mathbb{Z}\right\}$; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{7\pi}{6}$.

26. Задание 13 № 484556. Решите уравнение $(2\cos^2 x - 5\cos x + 2) \cdot \log_{11}(-\sin x) = 0.$

Решение.

Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x < 0$.

Если $\log_{11}(-\sin x) = 0$, то $\sin x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}$.

Если $\log_{11}(-\sin x) \neq 0$, то $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$, откуда $\cos x = 2$ или $\cos x = \frac{1}{2}$.

Уравнение $\cos x = 2$ не имеет решений.

Уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$ имеет корни $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$. Учитывая, что $\sin x < 0$, получаем: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

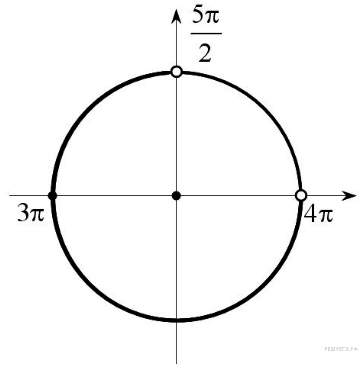
Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z}, x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$.

27. Задание 13 № 500638. а) Решите уравнение $4\operatorname{tg}^2 x+\dfrac{3}{\cos x}+3=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\dfrac{5\pi}{2}, 4\pi\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение:



$$4\operatorname{tg}^2 x+\frac{3}{\cos x}+3=0 \Leftrightarrow 4\cdot\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}+\frac{3}{\cos x}+3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x-3\cos x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x=-1,\\ \cos x=4\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos x=-1 \Leftrightarrow\ x=\pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}.$$

б) Отбор корней. Составим двойное неравенство:

$$\frac{5\pi}{2}\le \pi+2\pi k\le 4\pi \Leftrightarrow \frac{3}{4}\le k\le\frac{3}{2} \Leftrightarrow k=1.$$

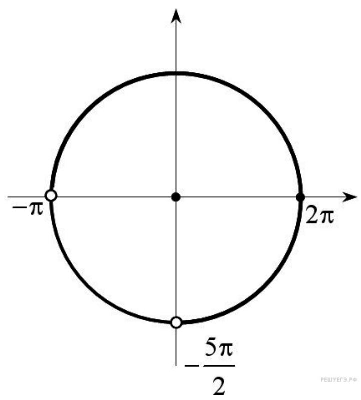
Тогда искомый корень 3π.

Ответ: а) $\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$; б) 3π.

28. Задание 13 № 500897. а) Решите уравнение $7\operatorname{tg}^2 x-\dfrac{1}{\cos x}+1=0.$

б)Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, -\pi\right]$.

Решение.



а) Запишем уравнение в виде $\dfrac{7}{\cos^2 x}-\dfrac{1}{\cos x}-6=0$. Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\dfrac{1}{\cos x}$, получим $\dfrac{1}{\cos x}=1$ или $\dfrac{1}{\cos x}=-\dfrac{6}{7}$. Значит, $\cos x=1$, откуда $x=2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$, или $\cos x=-\dfrac{7}{6}$, что невозможно.

б) Отберем с помощью единичной окружности корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}, -\pi\right]$: это $x=-2\pi$.

Ответ: а) $2\pi n, n\in\mathbb{Z}$; б) -2π.

29. Задание 13 № 501215. а) Решите уравнение $1+\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) $1+\operatorname{ctg} 2x = \dfrac{1}{\cos\left(\frac{3\pi}{2}-2x\right)} \Leftrightarrow 1+\dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = -\dfrac{1}{\sin 2x} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x + \cos 2x = -1, & (1) \\ \sin 2x \neq 0. & (2) \end{cases}$

Из уравнения (1) находим:

$$\sin 2x + \cos 2x = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x = \pi + 2\pi k; & (a) \\ 2x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k. & (b) \end{array}\right.$$

Так как решения уравнения (a) не удовлетворяют условию (2), то окончательно получаем $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

б) Из найденных в пункте а) решений промежутку $\left[-2\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$. принадлежит только одно число: $-\dfrac{5\pi}{4}$.

Ответ: а) $x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{5\pi}{4}$.

30. Задание 13 № 501395. а) Решите уравнение $\sin x(2\sin x - 3\operatorname{ctg} x) = 3$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Решение.

Область определения данного уравнения задается условием $\sin x \neq 0$. $(*)$

При этом условии имеем: $\sin x(2\sin x - 3\operatorname{ctg} x) = 3 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 3\cos x = 3 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$, откуда $\cos x = -1$ или $\cos x = -\dfrac{1}{2}$.

Корни уравнения $\cos x = -1$ не удовлетворяют условию $(*)$, а из уравнения $\cos x = -\dfrac{1}{2}$ получаем $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;

Из найденных решений промежутку $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $-\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}$.

Ответ: а) $x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\dfrac{4\pi}{3}, -\dfrac{2\pi}{3}$.

31. Задание 13 № 501415. а) Решите уравнение $\cos x(2\cos x + \operatorname{tg} x) = 1.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right].$

Решение.

Область определения данного уравнения задается условием $\cos x \neq 0 \ (*).$

При этом условии имеем: $\cos x(2\cos x + \operatorname{tg} x) = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \sin x = 1 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0,$ откуда $\sin x = 1$ или $\sin x = -\frac{1}{2}.$

Корни уравнения $\sin x = 1$ не удовлетворяют условию $(*)$, а из уравнения $\sin x = -\frac{1}{2}$ получаем $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Из найденных решений промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат числа $-\frac{5\pi}{6}, -\frac{13\pi}{6}.$

Ответ: а) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$ б) $-\frac{13\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}.$

32. Задание 13 № 501548. а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right].$

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0$. При этом

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x} - 1.$$

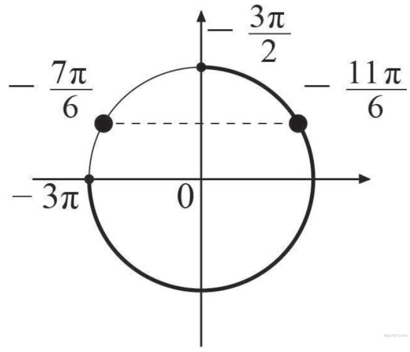
Поэтому уравнение можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 2 = 0.$$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x} = 2$ или $\frac{1}{\sin x} = -1$. Значит, либо $\sin x = \frac{1}{2}$, откуда

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z};$$

либо $\sin x = -1$, что невозможно в силу условия $\cos x \neq 0$.



б) Отберем с помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}$.

Приведём другое решение.

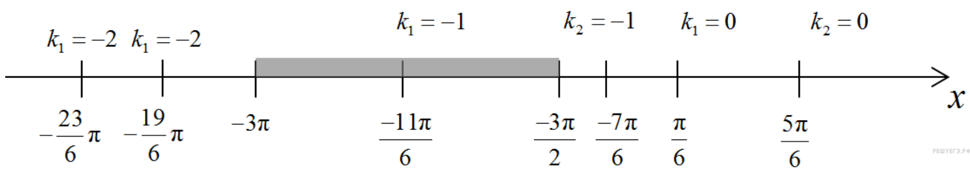
а)

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} - \frac{1}{\sin x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - 1 - \frac{1}{\sin x} = 0,\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - \sin x}{\sin^2 x} = 0,\ \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x - \sin x = 0 \\ \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \\ \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sin x = -1, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \sin x \neq 0, \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}.$$

б)



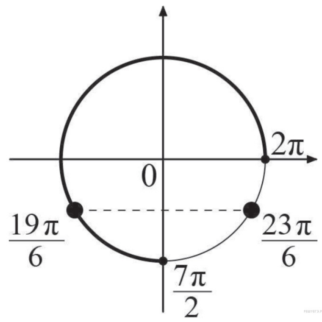
Отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$ принадлежит корень $-\frac{11\pi}{6}$.

33. Задание 13 № 505240. а) Решите уравнение $\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}+\frac{3}{\sin x}+3=0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Левая часть уравнения определена, если $\cos x \neq 0$ и $\sin x \neq 0.$ При этом



$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Поэтому уравнение можно переписать в виде $\frac{1}{\sin^2 x}+\frac{3}{\sin x}+2=0.$

Решив последнее уравнение как квадратное относительно $\frac{1}{\sin x}$, получим $\frac{1}{\sin x}=-2$ или $\frac{1}{\sin x}=-1.$ Значит, либо $\sin x=-\frac{1}{2},$ откуда $x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ x=-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ либо $\sin x=-1,$ что невозможно в силу условия $\cos x\neq 0.$

б) Отберем с помощью единичной окружности отберём корни, принадлежащие промежутку $\left[2\pi, \frac{7\pi}{2}\right]$ (см. рис.): $x=\frac{19\pi}{6}.$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6}+2\pi k,-\frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},$ б) $\frac{19\pi}{6}.$