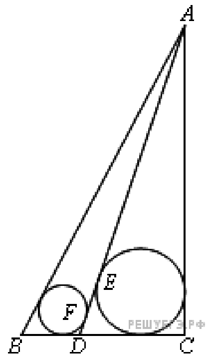
Окружности и треугольники

1. Задание 16 № 484610. В треугольнике ABC, $AB = 15$, $BC = 7$, $CA = 9$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 5 : 7$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Используя свойства касательных, подсчитаем разными способами периметры треугольников



$$P_{ADC} = AE + ED + DC + AC = d + y + 9 = 2DE + 2 \cdot 9.$$

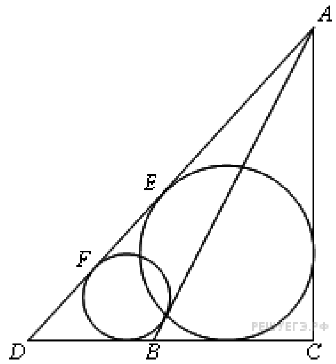
Откуда получаем: $DE = \dfrac{d + y - 9}{2}$. Аналогично, $DF = \dfrac{d + x - 15}{2}$.

Тогда , $EF = |DE - DF| = \left| \dfrac{6 + y - x}{2} \right|$.

Возможны два случая:

1. Точка D лежит на отрезке BC. Тогда $x = \dfrac{35}{12}$, $y = \dfrac{49}{12}$, значит $EF = \dfrac{43}{12}$.

2. Точка D лежит вне отрезка BC. Тогда $y - x = BC = 7$, значит $EF = \dfrac{6+7}{2} = \dfrac{13}{2}$.



Ответ: $\dfrac{43}{12}$ или $\dfrac{13}{2}$.

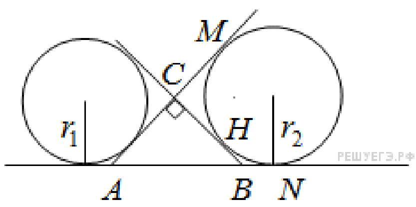
2. Задание 16 № 505568. Прямые, содержащие катеты AC и CB прямоугольного треугольника ACB, являются общими внутренними касательными к окружностям радиусов 2 и 4. Прямая, содержащая гипотенузу AB, является их общей внешней касательной.

а) Докажите, что длина отрезка внутренней касательной, проведенной из вершины острого угла треугольника до одной из окружностей, равна половине периметра треугольника ACB.

б) Найдите площадь треугольника ACB.

Решение.

а) Введём обозначения, как показано на рисунке, пусть M, H, N — точки касания. Касательные, проведённые к окружности из одной точки равны: $AM = AN$, $CM = CH$, $HB = BN$. Поэтому:



$$P = AC + CH + HB + AB = AN + AM = 2AM,$$

откуда $p = AM$.

б) Для определения площади треугольника используем формулу, связывающую её с полупериметром, стороной и радиусом вневписанной окружности, касающейся этой стороны и продолжений двух других сторон треугольника:

$$S = (p - AC) \cdot r_1 = (AM - AC)r_1 = CMr_1 = r_2 r_1 = 8.$$

3. Задание 16 № 507176. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AB = BC$ (или $AB = AC$).

Первый случай (рис. 1). $AC = BC = 5$. Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 3 \cdot 4 = 12,$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 8r_1.$$

Из равенства $8r_1 = 12$ находим, что $r_1 = 1{,}5$.

Второй случай. (рис. 2) Пусть $AB = BC = 5$, CH — высота треугольника ABC, r_2 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

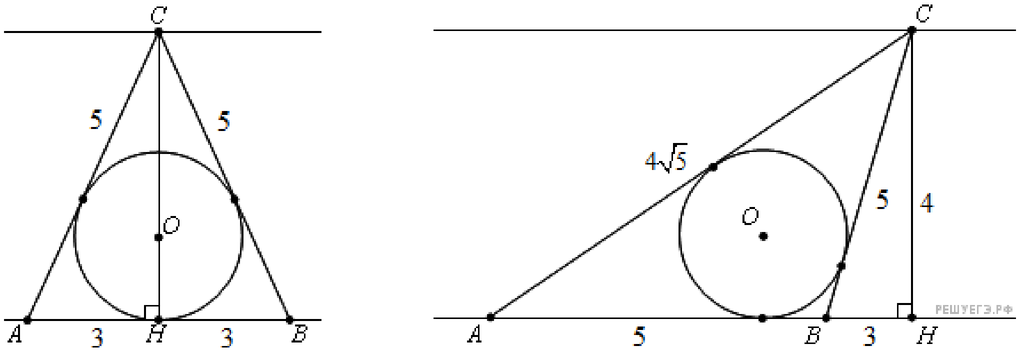
Тогда

$$BH = 3,\ AH = AB + BH = 5 + 3 = 8.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4 = 10,\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r_2 = (5 + 2\sqrt{5})r_2.$$

Из равенства $(5 + 2\sqrt{5})r_2 = 10$ получаем, что $r_2 = \dfrac{10}{5 + 2\sqrt{5}} = \dfrac{10(5 - 2\sqrt{5})}{25 - 4 \cdot 5} = 10 - 4\sqrt{5}.$



Рассмотрим третий случай.

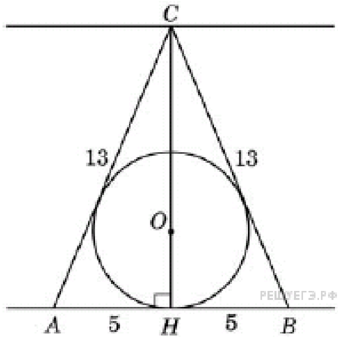
Третий случай состоит в том, что $BC = AB$ и эти стороны образуют острый угол. Тогда высота CH будет лежать внутри треугольника ABC и $AC = 2\sqrt{5}$. В этом случаем радиус будет равен $r_3 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$.

Ответ: $1{,}5,\ 10 - 4\sqrt{5},\ \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$.

4. Задание 16 № 507494. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AB = BC$ (или $AB = AC$).



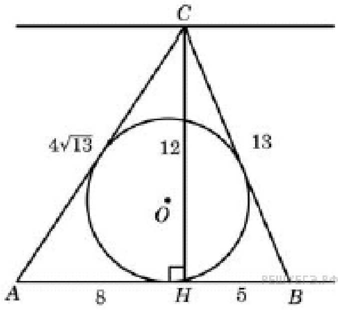
Первый случай (рис. 1). $AC = BC = 13$. Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 5 \cdot 12 = 60,$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 18r_1.$$

Из равенства $18r_1 = 60$ находим, что $r_1 = \frac{10}{3}$.



Второй случай. Вершина равнобедренного треугольника — одна из точек A или B. Пусть, для определённости, вершина в точке B. Проведём высоту CH. Если H находится на продолжении стороны AB, то треугольник ABC — тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB, то из прямоугольного треугольника BHC находим:

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5,\ AH = 13 - 5 = 8.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{12^2 + 8^2} = 4\sqrt{13}.$$

Тогда

$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{13 \cdot 6}{\frac{1}{2}(26 + 4\sqrt{13})} = \frac{13 \cdot 6}{13 + 2\sqrt{13}} = \frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}.$$

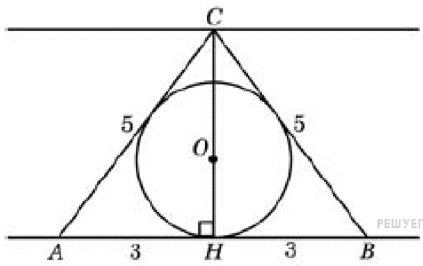
Ответ: $\frac{26 - 4\sqrt{13}}{3}$ или $\frac{10}{3}$.

5. Задание 16 № 507498. Расстояние между параллельными прямыми равно 4. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — остроугольный равнобедренный, и его боковая сторона равна 5. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AB = BC$ (или $AB = AC$).

Первый случай (рис. 1). $AC = BC = 5$. Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что



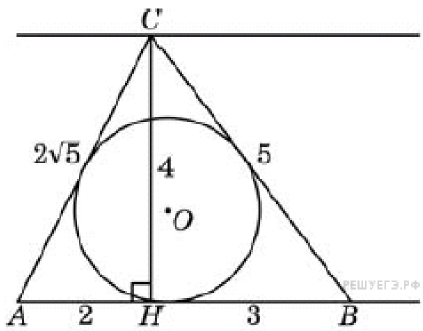
$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 3 \cdot 4 = 12,$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 8r_1.$$

Из равенства $8r_1 = 12$ находим, что $r_1 = \frac{3}{2}$.

Второй случай. Вершина равнобедренного треугольника — одна из точек A или B. Пусть, для определённости, вершина в точке B. Проведём высоту CH. Если H находится на продолжении стороны AB, то треугольник ABC — тупоугольный. Этот случай противоречит условию. Если H лежит на стороне AB, то из прямоугольного треугольника BHC находим:



$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, \; AH = 5 - 3 = 2.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим:

$$AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}.$$

Тогда

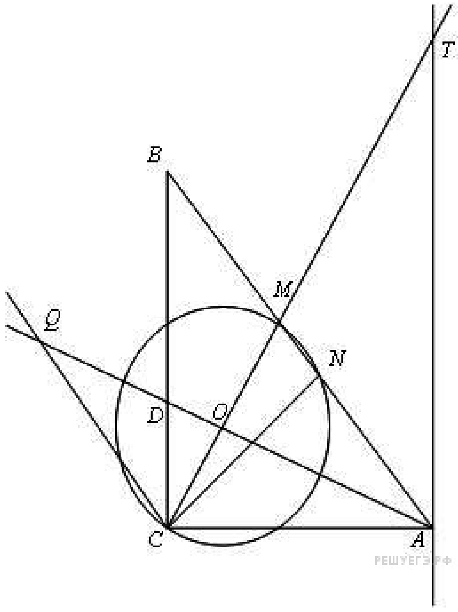
$$r = \frac{S_{ABC}}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot CH}{\frac{1}{2}(AB + BC + CA)} = \frac{5 \cdot 2}{\frac{1}{2}(10 + 2\sqrt{5})} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}.$$

Ответ: $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$ или $\frac{3}{2}$.

6. Задание 16 № 507504. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 13$, $AC = 5$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD = 4$ и $AO = 3\,OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.

Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\dfrac{AO}{OD} = 3$, поэтому $AT = 3CD = 12$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы, значит $CM = \dfrac{1}{2}AB = 6,5.$



Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q — точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{1}{2}$, поэтому $CQ = \dfrac{1}{2}AB = 6,5 = AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM = \dfrac{1}{2}AB = 6,5,$ а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

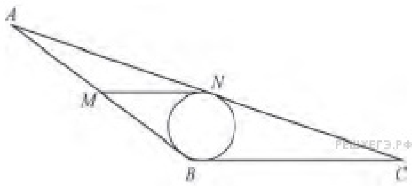
Отсюда $CN = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{5 \cdot 12}{13} = \dfrac{60}{13}.$

Ответ: 6,5 или $\dfrac{60}{13}$.

7. Задание 16 № 507598. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 114, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 19$. Найдите сторону AB.

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$ пусть p — полупериметр треугольника ABC Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{19}{2}$.



В трапецию $BMNC$ вписана окружность поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 19 + \frac{19}{2} = \frac{57}{2};$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2(BC + MN) = 2 \cdot \frac{57}{2} = 57,$$
$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 19}{2} = \frac{57 + 19}{2} = 38.$$

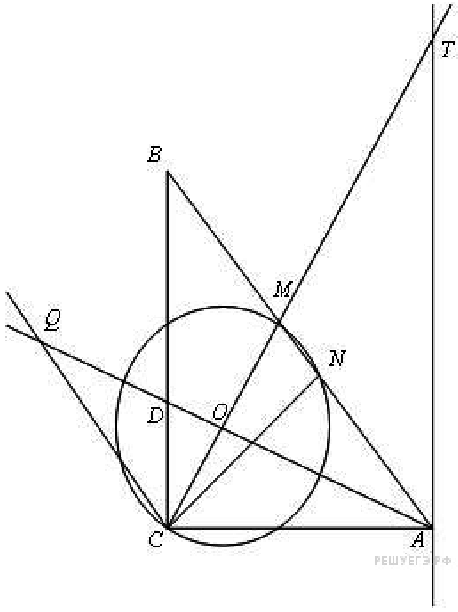
По формуле Герона

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{38(38 - x)(38 - y)(38 - 19)} = 19\sqrt{2(38 - x)(38 - y)} = 114;$$
$$\sqrt{2(38 - x)(38 - y)} = 6;\ (38 - x)(38 - y) = 18;$$
$$(38 - x)(38 - 57 + x) = 18;\ x^2 - 57x + 740 = 0$$

Отсюда находим, что $x = 20$ или $x = 37$.

8. Задание 16 № 507632. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 25$, $AC = 7$ и $BC = 24$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD = 8$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.



Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\dfrac{AO}{OD} = 3,$ поэтому $AT = 3CD = 24$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC.

Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q — точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\dfrac{CD}{DB} = \dfrac{1}{2},$ поэтому $CQ = \dfrac{1}{2}AB = 12,5 = AM.$ Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM = \dfrac{1}{2}AB = 12,5,$ а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

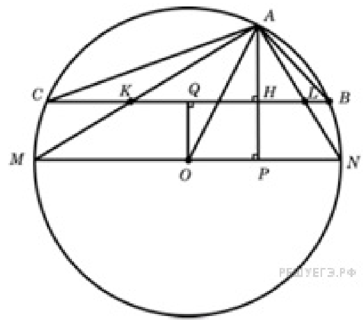
Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN = \dfrac{AC \cdot BC}{AB} = \dfrac{24 \cdot 7}{25} = 6,72.$

Ответ: 12,5 или 6,72.

9. Задание 16 № 507771. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 13, $\cos\angle BAC=-\frac{5}{13}$, высота, проведённая к стороне BC, равна 5. Найдите длину той хорды AM описанной окружности, которая делится пополам стороной BC.

Решение.



Пусть K — середина искомой хорды AM. Через точку M проведём хорду MN, параллельную стороне BC. Тогда точка L пересечения отрезков AN и BC — середина AN, значит задача имеет два решения. Кроме того, высота AP треугольника AMN вдвое больше высоты AH треугольника ABC, значит $AP=10$ и $PH=5$. Пусть $R=13$ — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. По теореме синусов

$$BC=2R\sin\angle BAC=26\sqrt{1-\frac{25}{169}}=26\cdot\frac{12}{13}=24.$$

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, Q — середина BC. Из прямоугольного треугольника OQB находим, что

$$OQ=\sqrt{OB^2-BQ^2}=\sqrt{169-144}=5,$$

а так как расстояние между параллельными хордами BC и MN также равно 5, то точка O лежит на отрезке MN. Следовательно, MN — диаметр окружности.

Из прямоугольного треугольника AOP находим, что $OP=\sqrt{13^2-10^2}=\sqrt{69}$. Следовательно,

$$AN=\sqrt{AP^2+PN^2}=\sqrt{AP^2+(R-OP)^2}=\sqrt{100+169-2\cdot 13\cdot\sqrt{69}+69}=\sqrt{26(13-\sqrt{69})}.$$

Аналогично находим, что $AM=\sqrt{26(13+\sqrt{69})}$.

Ответ: $\sqrt{26(13-\sqrt{69})}$, $\sqrt{26(13+\sqrt{69})}$.

10. Задание 16 № 507818. Точки D и E — основания высот непрямоугольного треугольника ABC, проведённых из вершин A и C соответсвенно. Известно, что $\frac{DE}{AC}=k$, $BC = a$ и $AB = b$. Найдите сторону AC.

Решение.

1. Решим эту задачу для случая, когда ABC — остроугольный треугольник.

В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники. Поэтому, треугольник ABC подобен треугольнику BDE. Коэффициентом подобия этих треугольников является $\frac{DE}{AC}=k$. По теореме Пифагора из треугольника BEC

$$\cos\angle B=\frac{BE}{BC}=\frac{k\cdot BC}{BC}=k.$$

По теореме косинусов из треугольника ABC

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos B}=\sqrt{a^2+b^2-2abk}$$

2. Решим эту задачу для случая, когда ABC — тупоугольный треугольник. Пусть H — точка пересечения его высот.

В остроугольном треугольнике ACH прямые AE и CD являются высотами, следовательно, по свойствам высоты остроугольного треугольника, треугольники ACH и EDH являются подобными с коэффициентом подобия $\frac{DE}{AC}=k$. Из прямоугольного треугольника AEH

$$\cos\angle H=\frac{EH}{HA}=\frac{k\cdot HA}{HA}=k.$$

Треугольники AEH и ABD подобны по двум углам, потому что они имеют общий угол A и оба прямоугольные. Следовательно $\angle H = \angle ABD$, $\angle ABC = 180° - \angle ABD$.

$$\cos ABC=\cos(180^\circ-\angle ABD)=-\cos\angle H=-k.$$

По теореме косинусов из треугольника ABC

$$AC=\sqrt{AB^2+BC^2-2\cdot AB\cdot BC\cdot\cos ABC}=\sqrt{a^2+b^2+2abk}.$$

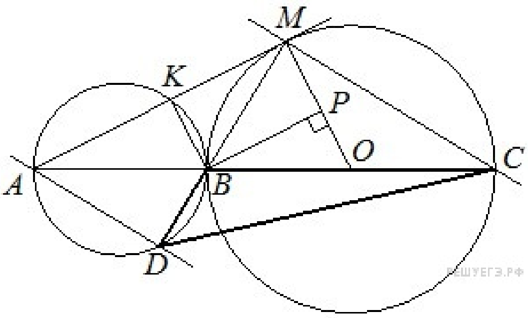
Ответ: $\sqrt{a^2+b^2-2abk}$, $\sqrt{a^2+b^2+2abk}$.

11. Задание 16 № 513103. Точка B лежит на отрезке AC. Прямая, проходящая через точку A, касается окружности с диаметром BC в точке M и второй раз пересекает окружность с диаметром AB в точке K. Продолжение отрезка MB пересекает окружность с диаметром AB в точке D.

а) Докажите, что прямые AD и MC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника DBC, если $AK = 3$ и $MK = 12$.

Решение.



а) Точки M и D лежат на окружностях с диаметрами BC и AB соответственно, поэтому

$$\angle BMC = \angle BDA = 90^\circ.$$

Прямые AD и MC перпендикулярны одной и той же прямой MD, следовательно, прямые AD и MC параллельны.

б) Пусть O — центр окружности с диаметром BC. Тогда прямые OM и AM перпендикулярны. Учитывая, что прямые BK и AM перпендикулярны, получаем, что прямые OM и BK параллельны. Обозначим BK через x. Треугольник AMO подобен треугольнику AKB с коэффициентом 5, поэтому $OB = OM = 5x$. Опустим перпендикуляр BP из точки B на прямую OM. Так как четырёхугольник $BKMP$ — прямоугольник,

$$BP = KM = 12,$$
$$OP = OM - MP = OM - BK = 5x - x = 4x.$$

По теореме Пифагора $OB^2 = BP^2 + OP^2$, откуда $25x^2 = 144 + 16x^2$. Получаем, что $x = 4$.
Поскольку прямые AD и MC параллельны,

$$S_{DBC} = S_{MDC} - S_{MBC} = S_{MAC} - S_{MBC} = S_{ABM}.$$

Значит, треугольники DBC и AMB равновелики. Следовательно,

$$S_{DBC} = S_{AMB} = \frac{1}{2}AM \cdot BK = \frac{1}{2} \cdot 15x = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 4 = 30.$$

Ответ: 30.

12. Задание 16 № 484611. В треугольнике ABC, $AB = 7$, $BC = 9$, $CA = 4$. Точка D лежит на прямой BC причем $BD : DC = 1 : 5$. Окружности, вписанные в треугольники ADC и ADB касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $CD = y$. Используя свойства касательных, подсчитаем разными способами периметры треугольников

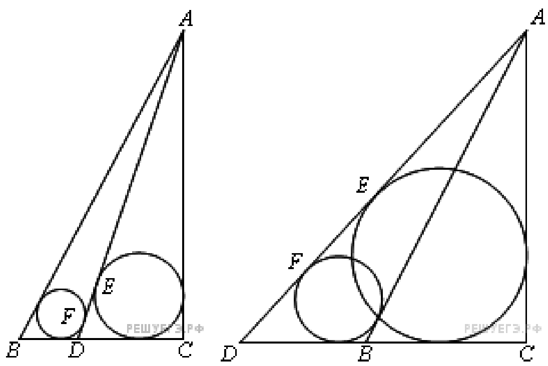
$$P_{ADC} = AE + ED + DC + AC = d + y + 4 = 2DE + 2\cdot 4.$$

Откуда получаем: $DE = \dfrac{d+y-4}{2}$. Аналогично, $DF = \dfrac{d+x-7}{2}$.

Тогда $EF = |DE - DF| = \left|\dfrac{3+y-x}{2}\right|$.

Возможны два случая:

1. Точка D лежит на отрезке BC. Тогда $x = 1{,}5$, $y = 7{,}5$, значит, $EF = 4{,}5$.
2. Точка D лежит вне отрезка BC. Тогда $y - x = BC = 9$, значит, $EF = 6$.



Ответ: 4,5 или 6.

13. Задание 16 № 501438. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит вершина C, на другой — основание AB равнобедренного треугольника ABC. Известно, что $AB = 10$. Найдите расстояние между центрами окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABC, а вторая касается данных параллельных прямых и боковой стороны треугольника ABC.

Решение.

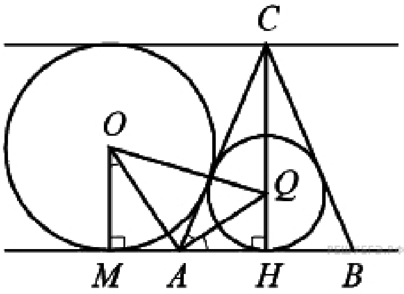
Пусть CH — высота треугольника ABC, r и Q — радиус и центр вписанной окружности, $CH = 12$, $AH = 5$, поэтому $AC = 13$. Найдем площадь, полупериметр и радиус вписанной окружности треугольника ABC:

$$S=\frac{CH\cdot AB}{2}=\frac{12\cdot 10}{2}=60,\quad p=\frac{1}{2}(AC+AB+CB)=AC+AH=18.$$

Тогда $r=\frac{S}{p}=\frac{10}{3}$. Кроме того, по теореме Пифагора

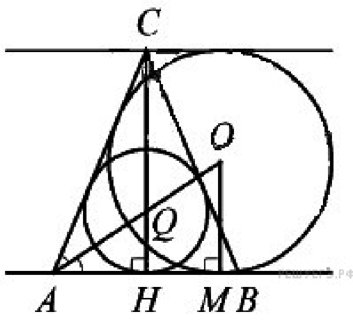
$$AQ=\sqrt{AH^2+QH^2}=\sqrt{25+\frac{100}{9}}=\frac{5\sqrt{13}}{3}.$$

Пусть окружность с центром в точке O касается боковой стороны AC равнобедренного треугольника ABC и данных параллельных прямых. Радиус этой окружности равен 6, поскольку он вдвое меньше расстояния между прямыми. Точку касания окружности с прямой AB обозначим M.



Пусть точки B и M лежат по разные стороны от точки A (см. рис.). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO и AQ — биссектрисы смежных углов $\angle MAC$ и $\angle CAB$ соответственно. Значит, $\angle OAQ = 90°$, и $\angle MOA = \angle QAH$, поскольку эти углы образованы парами соответственно перпендикулярных прямых. Следовательно, прямоугольные треугольники OMA и AHQ подобны с коэффициентом $\frac{OM}{AH}=\frac{6}{5}$. Поэтому

$$OQ=\sqrt{OA^2+AQ^2}=\sqrt{\left(\frac{6}{5}AQ\right)^2+AQ^2}=AQ\sqrt{\frac{36}{25}+1}=\frac{\sqrt{61}}{5}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{3}=\frac{\sqrt{793}}{3}.$$



Пусть точки B и M лежат по одну сторону от точки A (см. рис.). Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому лучи AO и AQ совпадают и являются биссектрисой угла MAC. Значит, прямоугольные треугольники AOM и AQH подобны с коэффициентом $\frac{OM}{QH}=\frac{6}{\frac{10}{3}}=\frac{9}{5}$. Тогда

$$OQ=AO-AQ=\frac{9}{5}AQ-AQ=\frac{4}{5}AQ=\frac{4}{5}\cdot\frac{5\sqrt{13}}{3}=\frac{4\sqrt{13}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{793}}{3}$, $\frac{4\sqrt{13}}{3}$.

14. Задание 16 № 484620. Расстояние между параллельными прямыми равно 12. На одной из них лежит точка C, а на другой — точки A и B, причем треугольник ABC — равнобедренный и его боковая сторона равна 13. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

Решение.

Заметим, что либо $AC = BC$, либо $AB = BC$ (или $AB = AC$).

Первый случай (рис. 1). $AC = BC = 13$. Пусть H — точка касания вписанной окружности треугольника ABC с основанием AB, r_1 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC. Тогда CH — высота и медиана треугольника ABC. Из прямоугольного треугольника AHC находим, что

$$AH = \sqrt{AC^2 - CH^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5.$$

Тогда

$$S_{\Delta ABC} = AH \cdot HC = 5 \cdot 12 = 60,$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + BC + AC) \cdot r_1 = 18r_1.$$

Из равенства $18r_1 = 60$ находим, что $r_1 = \frac{10}{3}$.

Второй случай. (рис. 2). Пусть $AB = BC = 13$, CH — высота треугольника ABC, r_2 — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC.

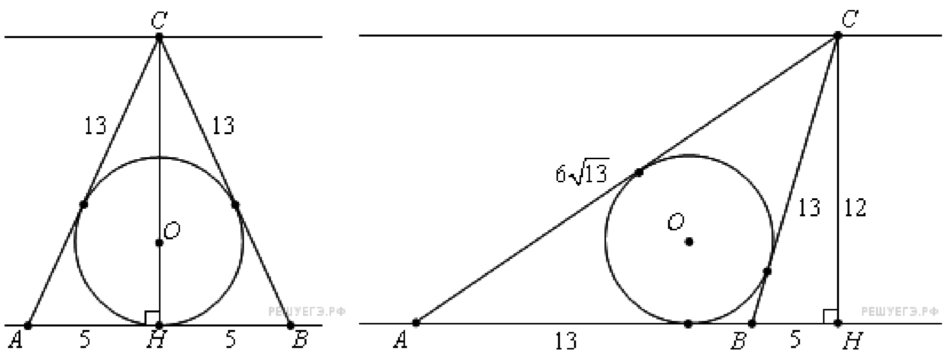
Тогда

$$BH = 5,\ AH = AB + BH = 13 + 5 = 18.$$

Из прямоугольного треугольника ACH находим, что

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 = 78,\ S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}(AB + AC + BC) \cdot r_2 = (13 + 3\sqrt{13})r_2.$$

Из равенства $(13 + 3\sqrt{13})r_2 = 78$ получаем, что $r_2 = \frac{3(13 - 3\sqrt{13})}{2}$.



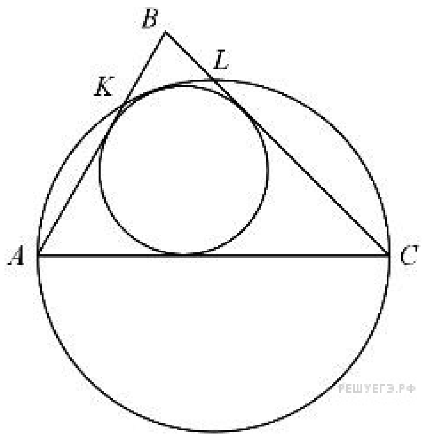
Рассмотрим третий случай.

Третий случай состоит в том, что $BC = AB$ и эти стороны образуют острый угол. Тогда высота CH будет лежать внутри треугольника ABC и $AC = 4\sqrt{13}$. В этом случаем радиус будет равен $r_3 = \frac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13})$.

Ответ: $\frac{10}{3}$, $\frac{3}{2}(13 - 3\sqrt{13})$, $\frac{2}{3}(13 - 2\sqrt{13})$.

15. Задание 16 № 500134. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 7$, $BC = 8$, $AC = 9$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые BA и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.



Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

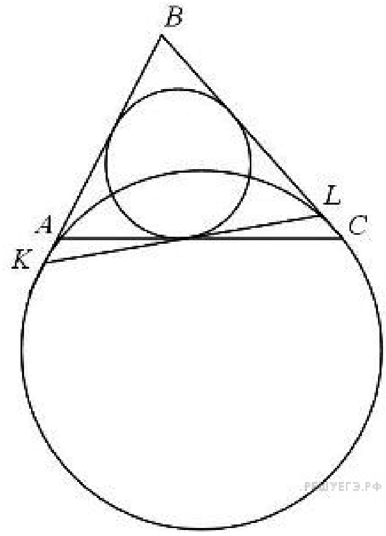
Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC;$$

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k) \Leftrightarrow k = \frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$



Подставляя известные значения сторон, находим $k = \frac{7+8-9}{7+8+9} = \frac{1}{4}$. Следовательно, $KL = \frac{1}{4}AC = \frac{9}{4}$.

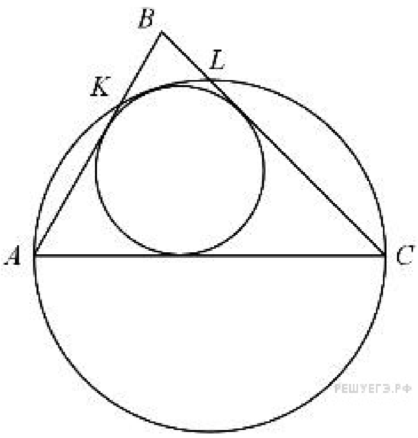
Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB. Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен 1, то есть, треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 9$. Заметим, что $BK = BC >$ AB и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но, аналогично предыдущему случаю, получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{9}{4}$; 9.

16. Задание 16 № 500369. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 6$, $AC = 7$. Окружность, проходящая через точки A и C, пересекает прямые AB и BC соответственно в точках K и L, отличных от вершин треугольника. Отрезок KL касается окружности, вписанной в треугольник ABC. Найдите длину отрезка KL.

Решение.



Обе точки K и L не могут лежать вне треугольника, поскольку в этом случае отрезок KL не может касаться вписанной окружности. Значит, по крайней мере одна из этих точек лежит на стороне треугольника.

Пусть обе точки K и L лежат на сторонах треугольника. Четырехугольник $AKLC$ — вписанный, следовательно,

$$\angle KAC = 180^\circ - \angle KLC = \angle BLK.$$

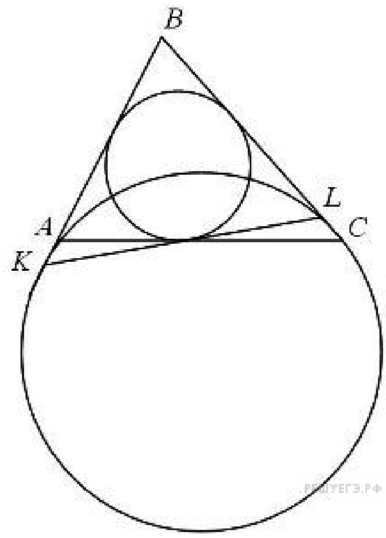
Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Пусть коэффициент подобия равен k, тогда $BL = kAB$, $BK = kBC$, $KL = kAC$. Суммы противоположных сторон описанного четырехугольника $AKLC$ равны:

$$AK + LC = KL + AC,$$

Подставляя известные значения сторон, находим

$$AB(1-k) + BC(1-k) = AC(1+k) \Leftrightarrow k = \frac{AB+BC-AC}{AC+AB+BC}.$$

$k = \frac{5+6-7}{5+6+7} = \frac{2}{9}$. Следовательно, $KL = \frac{2}{9}AC = \frac{14}{9}$.



Пусть точка K лежит на продолжении стороны AB. Углы AKL и ACL равны, поскольку опираются на одну дугу. Значит, треугольник ABC подобен треугольнику LBK, так как угол ABC — общий. Более того, они описаны около одной и той же окружности. Следовательно, коэффициент подобия равен $k = 1$, то есть, треугольники LBK и ABC равны, поэтому $KL = AC = 7$. Заметим, что $BK = BC > AB$ и точка K действительно лежит на продолжении стороны AB.

Если точка L лежит на продолжении стороны BC, то $BL > BC$, но, аналогично предыдущему случаю, получаем $BL = AB < BC$. Значит, этот случай не достигается.

Ответ: $\frac{14}{9}$, 7.

17. Задание 16 № 484624. Прямая, перпендикулярная боковой стороне равнобедренного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок прямой, заключённый внутри треугольника, равен 6, а отношение боковой стороны треугольника к его основанию равно $\frac{5}{6}$.

Решение.

Обозначим данный треугольник ABC, $BC=6x$ — основание, $AB=AC=5x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть O — её центр, а E — точка касания с основанием BC.

Обозначим $\angle ABC=\alpha$. $\cos\alpha=\frac{BE}{AB}=\frac{BC}{2AB}=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $AE=AB\cdot\sin\alpha=4x$.

Так как BO — биссектриса треугольника ABE, то $\frac{OE}{AE-OE}=\frac{OE}{4x-OE}=\frac{BE}{AB}=\frac{3}{5}$, следовательно, $OE=\frac{3x}{2}$.

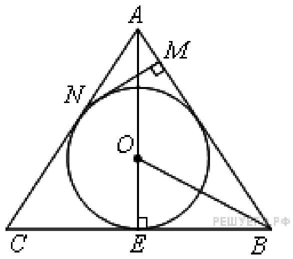


Рис. 1

Первый случай. Пусть прямая MN перпендикулярная AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а AC в точке N (рис. 1). Тогда $\angle MAN=180^\circ-2\alpha$, $\sin\angle MAN=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\cos\angle MAN=\frac{7}{25}$.

В треугольнике AMN, имеем $MN=6$, $AN=\frac{25}{4}$, $AM=\frac{7}{4}$.

У описанного четырехугольника суммы противоположных сторон равны:

$$BC+MN=BM+CN,\ 6x+6=\left(5x-\frac{7}{4}\right)+\left(5x-\frac{25}{4}\right),$$

откуда находим: $x=\frac{7}{2}$, $OE=\frac{21}{4}$.

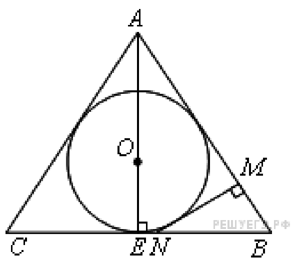


Рис. 2

Второй случай. Пусть прямая MN перпендикулярная AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а BC в точке N (рис. 2). В прямоугольном треугольнике AMN имеем $\angle NBM=\alpha$, $BN=\frac{15}{2}$, $BM=\frac{9}{2}$.

У описанного четырёхугольника $ACNM$ суммы противоположных сторон равны:

$$AC+MN=AM+CN,\ 5x+6=\left(5x-\frac{9}{2}\right)+\left(6x-\frac{15}{2}\right),$$

откуда находим: $x=3$, $OE=\frac{9}{2}$.

Ответ: $\frac{9}{2}$ или $\frac{21}{4}$.

18. Задание 16 № 484625. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырехугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 12, а косинус острого угла равен $\frac{3}{5}$.

Решение.

Обозначим данный треугольник ABC, $\cos\angle ABC = \frac{3}{5}$, $AB = 5x$, — гипотенуза, $BC = 3x$, $AC = 4x$. Заметим, что окружность, о которой говорится в условии, — окружность, вписанная в треугольник ABC. Пусть O — её центр, а D и E — точки касания с катетами AC и BC соответственно. Тогда, так как $ODCE$ — квадрат, радиус этой окружности

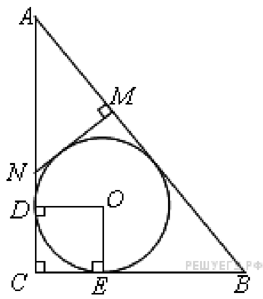
$$OD = EC = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{4x + 3x - 5x}{2} = x.$$

Пусть прямая MN перпендикулярна AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а AC в точке N (рис. 1). Прямоугольный треугольник ANM подобен треугольнику ABC. В нём $MN = 12$, $AM = 16$, $AN = 20$.

У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$$BC + MN = BM + CN, \quad 3x + 12 = (5x - 16) + (4x - 20),$$

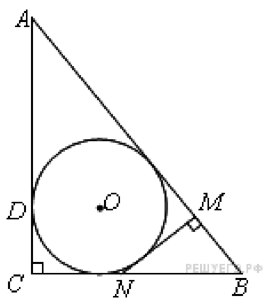
откуда находим: $x = 8$.



Пусть прямая MN перпендикулярна AB, касается окружности, пересекает AB в точке M, а BC в точке N (рис. 2). Прямоугольный треугольник NBM подобен треугольнику ABC. В нём $MN = 12$, $BM = 9$, $BN = 15$. У описанного четырёхугольника суммы противоположных сторон равны:

$$AC + MN = AM + CN, \quad 4x + 12 = (5x - 9) + (3x - 15),$$

откуда находим: $x = 9$.



Ответ: 8 или 9.

19. Задание 16 № 485949. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 14, а отношение катетов треугольника равно $\frac{7}{24}$.

Решение.

Введем обозначения как показано на рисунке: предположим, что отрезок отсекает от треугольника *ABC* треугольник *ANM*, обозначим точки касания окружности и прямых *P, Q, R, S* (см. рис. 1). Так как *OQMR* и *OPCS* — квадраты, $MQ = PC = r$, где r — радиус окружности. Кроме того, $NQ = NP$. Значит, $NM = NC$. Поскольку *BN* – биссектриса угла, треугольники *NMB* и *NCB* равны по гипотенузе и острому углу.

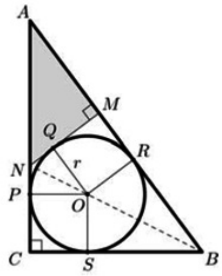


Рис. 1

Пусть $CB = 7x$, а $CA = 24x$, тогда по теореме Пифагора находим гипотенузу $AB = 25x$, откуда $AM = AB - BM = 25x - 7x = 18x$.

Из подобия треугольников *AMN* и *ACB* получаем: $\frac{CB}{NM} = \frac{CA}{AM}$, тогда $\frac{7x}{14} = \frac{24x}{18x}$, откуда $x = \frac{8}{3}$.

Найдём радиус окружности:

$$r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6x}{2} = 3x = 8.$$

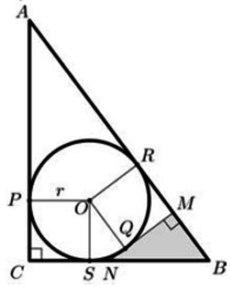


Рис. 2

Если отрезок отсекает треугольник *BMN* (рис. 2), то, рассуждая аналогично, находим, что $BM = 25x - 24x = x$.

Из подобия треугольников *ACB* и *NMB* следует $\frac{CA}{NM} = \frac{CB}{BM}$, откуда получаем $\frac{24x}{14} = \frac{7x}{x}$ и $x = \frac{49}{12}$.

В этом случае $r = 3x = \frac{49}{4} = 12,25.$

Ответ: 8 или 12,25.

20. Задание 16 № 485957. Прямая, перпендикулярная гипотенузе прямоугольного треугольника, отсекает от него четырёхугольник, в который можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, если отрезок этой прямой, заключённый внутри треугольника, равен 40, а отношение катетов треугольника равно $\frac{15}{8}$.

Решение.

Обозначим треугольник *ABC*. Предположим, что отрезок *NM* отсекает от треугольника *ABC* треугольник *ANM.*

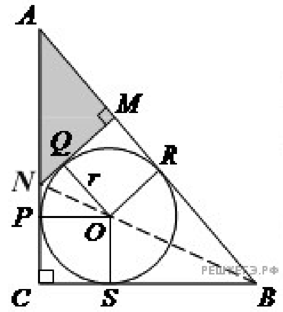
Обозначим точки касания окружности и прямых *P, Q, R, S.* Так как *OQMR* и *OPCS* — квадраты, $MQ = PC = r$, где r — радиус окружности. Кроме того, $NQ = NP$. Значит, $NM = NC$. *BN* — биссектриса угла *ABC.*

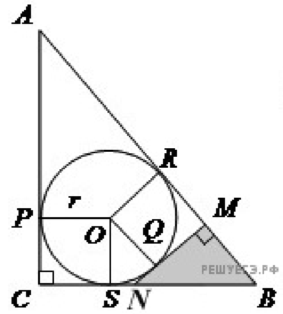
Треугольники *NMB* и *NCB* равны по гипотенузе и катету. Пусть $CB = 8x$, а $CA = 15x$. По теореме Пифагора $AB = 17x$. Тогда $AM = AB - BM = 17x - 8x = 9x$. Из подобия треугольников *AMN* и *ACB* получаем: $\frac{CB}{NM} = \frac{CA}{AM}$, откуда $\frac{8x}{40} = \frac{15x}{9x}$. Следовательно, $x = \frac{25}{3}$.

Найдём радиус окружности: $r = \frac{AC + BC - AB}{2} = \frac{6x}{2} = 3x = 25.$

Если отрезок отсекает треугольник *BNM,* то, рассуждая аналогично, находим, что $BM = 17x - 15x = 2x$. Из подобия треугольников *ACB* и *NMB* получаем: $\frac{CA}{NM} = \frac{CB}{BM}$, откуда $\frac{15x}{40} = \frac{8x}{2x}$, $x = \frac{32}{3}$. Тогда $r = 3x = 32$.

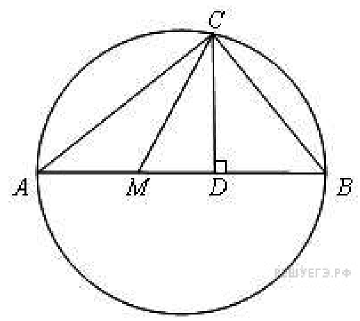
Ответ: 25 или 32.





21. Задание 16 № 485937. Точка M лежит на отрезке AB. На окружности с диаметром AB взята точка C, удаленная от точек A, M и B на расстояния 20, 14 и 15 соответственно. Найдите площадь треугольника BMC.

Решение.



Точка C лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle ACB = 90°$. По теореме Пифагора

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25.$$

Пусть CD — высота треугольника ABC. Тогда:

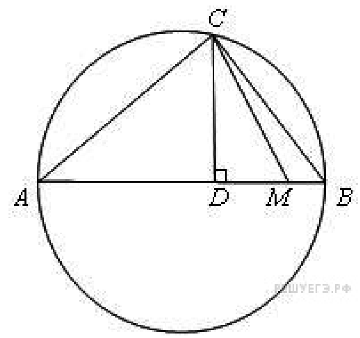
$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

Отсюда

$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{225 - 144} = 9.$$

Из прямоугольного треугольника находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{14^2 - 12^2} = 2\sqrt{13}.$$



Если точка M лежит между точками A и D, то $MB = MD + BD = 9 + 2\sqrt{13}$. Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 + 2\sqrt{13}) = 54 + 12\sqrt{13}.$$

Если точка M лежит между B и D, то $MB = BD - MD = 9 - 2\sqrt{13}$. Следовательно,

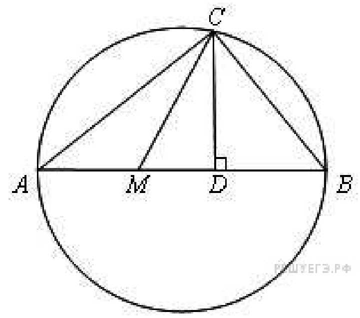
$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (9 - 2\sqrt{13}) = 54 - 12\sqrt{13}.$$

Ответ: $54 \pm 12\sqrt{13}$.

22. Задание 16 № 485945. Точка M лежит на отрезке $AB.$ На окружности с диаметром AB взята точка $C,$ удаленная от точек $A,$ M и B на расстояния 40, 29 и 30 соответственно. Найдите площадь треугольника $BMC.$

Решение.

Точка C лежит на окружности с диаметром $AB,$ поэтому $\angle ACB = 90°.$



По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50.$ Пусть CD — высота треугольника $ABC.$ Тогда:

$$CD = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{40 \cdot 30}{50} = 24,$$

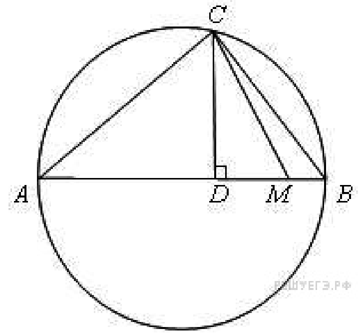
$$BD = \sqrt{BC^2 - CD^2} = \sqrt{900 - 576} = 18.$$

Из прямоугольного треугольника находим:

$$DM = \sqrt{CM^2 - CD^2} = \sqrt{29^2 - 24^2} = \sqrt{265}.$$

Если точка M лежит между точками A и $D,$ то $MB = MD + BD = 18 + \sqrt{265}.$ Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 + \sqrt{265}) = 216 + 12\sqrt{265}.$$



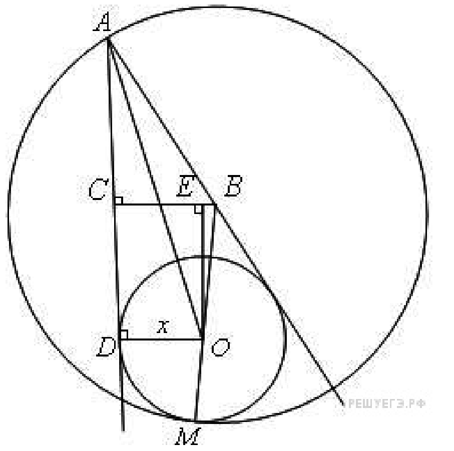
Если точка M лежит между B и D, то $MB = BD - MD = 18 - \sqrt{265}.$ Следовательно,

$$S_{BMC} = \frac{1}{2} MB \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot (18 - \sqrt{265}) = 216 - 12\sqrt{265}.$$

Ответ: $216 \pm 12\sqrt{265}.$

23. Задание 16 № 485985. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 15$ и $BC = 8.$ С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 17. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности $S.$

Решение.



Пусть $\angle BAC$ = α. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{8}{15}$, $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\sin\alpha = \frac{8}{17}$. Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

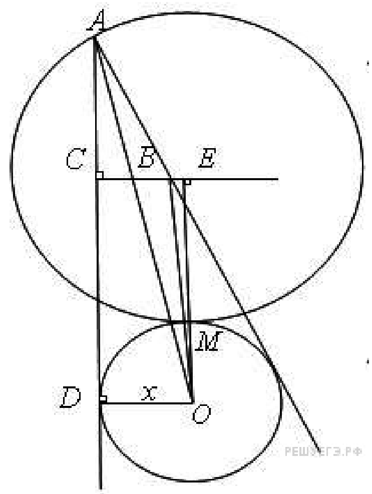
$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}} = 4.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что $AD = 4OD$, и тогда $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 4$.

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом, а вторая — внешним.

В первом случае:

$$BO = BM - OM = 17 - x,$$
$$OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$$
$$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |8 - x|.$$



По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$:

$$(17-x)^2 = (4x-15)^2 + (8-x)^2,\ 16x^2 - 102x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{51}{8}$.

Во втором случае:

$$BO = BM + MO = 17 + x,$$
$$OE = CD = |AD - AC| = |4x - 15|,$$
$$BE = |CE - BC| = |OD - BC| = |x - 8|.$$

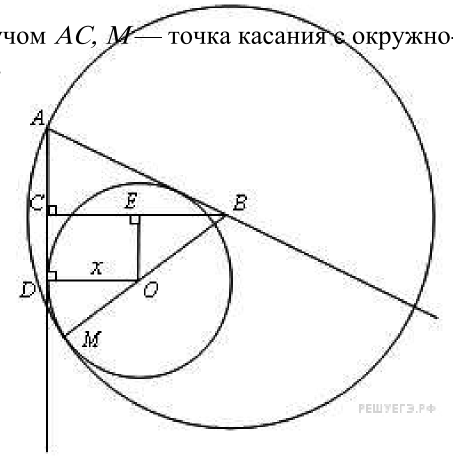
Тогда $(17+x)^2 = (4x-15)^2 + (x-8)^2$, $16x^2 - 170x = 0$, откуда находим, что $x = \frac{85}{8}$.

Ответ: $\frac{51}{8}$ или $\frac{85}{8}$.

24. Задание 16 № 485999. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 5$ и $BC = 12$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 13. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.

Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{5}$, $\cos\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.



Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{5}{13}}{\frac{12}{13}} = \frac{3}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

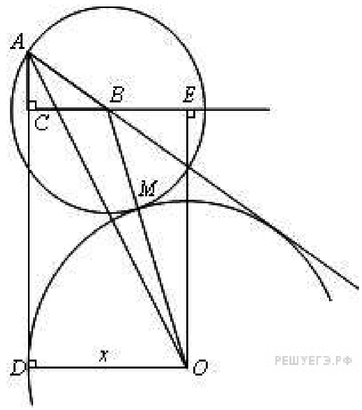
$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}x.$$

Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: одна из них касается окружности S внутренним образом, а вторая — внешним.

В первом случае

$$BO = BM - OM = 13 - x,\quad OE = CD = |AD - AC| = \left|\frac{3}{2}x - 5\right|,$$
$$BE = |BC - CE| = |BC - OD| = |12 - x|.$$

По теореме Пифагора $BO^2 = OE^2 + BE^2$, или



$$(13-x)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + (12-x)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 - 13x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{52}{9}$.

Во втором случае

$$BO = BM + MO = 13 + x,\quad OE = CD = |AD - AC| = |\frac{3}{2}x - 5|,$$

$$BE = |CE - BC| = |OD - BC| = |12 - x|.$$

Тогда

$$(13+x)^2 = \left(\frac{3}{2}x - 5\right)^2 + (12-x)^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 - 65x = 0,$$

откуда находим, что $x = \frac{260}{9}$.

Ответ: $\frac{52}{9}$ или $\frac{260}{9}$.

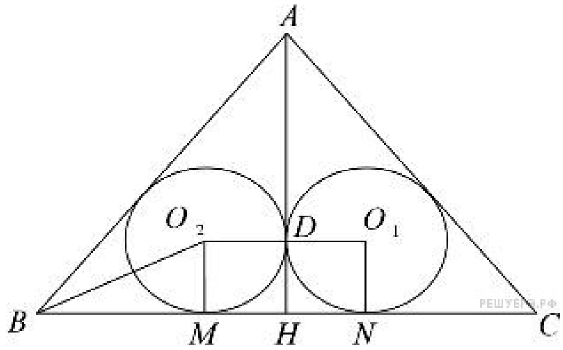
25. Задание 16 № 500349. Дан треугольник со сторонами 115, 115 и 184. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = AC = 115$, $BC = 184$. Пусть AH — высота треугольника ABC. Тогда H — середина BC.

Обозначим $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{4}{5}, \sin\alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}.$$

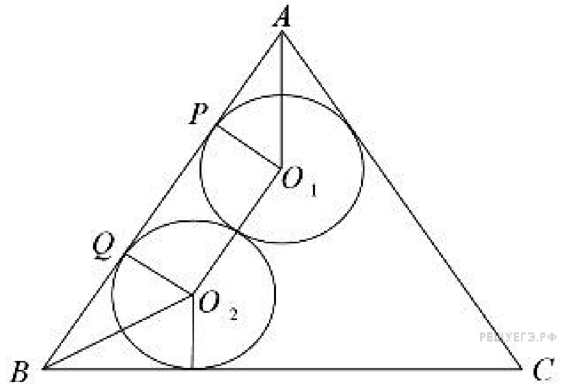


Предположим, что окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ACB и касается основания BC в точке N, а окружность того же радиуса с центром O_2, вписана в угол ABC, касается основания BC в точке M, а первой окружности — в точке D. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM = \frac{\alpha}{2}, \text{ а } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1}{3}.$$

Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$$BM = O_2M \cdot \operatorname{ctg}\angle MBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = 3r.$$



Тогда $CN = BM = 3r$.

Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$$184 = BC = BM + MN + CN = 3r + 2r + 3r = 8r,$$

откуда находим $r = 23$.

Пусть теперь окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол BAC и касается боковой стороны AB в точке P, вторая окружность радиуса r с центром O_2 вписана в угол ABC, касается боковой стороны AB в точке Q, а также касается первой окружности.

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$$AP = O_1P \cdot \operatorname{ctg}\angle PAO_1 = r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}r,$$
$$BQ = O_2Q \cdot \operatorname{ctg}\angle QBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 3r.$$

Следовательно,

$$115 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB = \frac{3}{4}r + 2r + 3r = \frac{23}{4}r,$$

откуда находим $r = 20$.

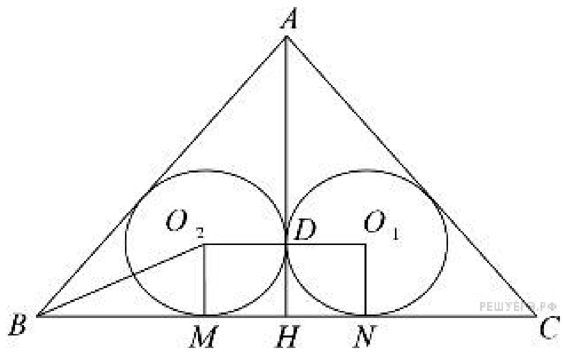
В случае, когда окружности вписаны в углы BAC и ACB, получим тот же результат.

Ответ: 23 или 20.

26. Задание 16 № 500066. Дан треугольник со сторонами 26, 26 и 20. Внутри него расположены две равные касающиеся окружности, каждая из которых касается двух сторон треугольника. Найдите радиусы окружностей.

Решение.

Рассмотрим равнобедренный треугольник *ABC*, в котором $AB = AC = 26$, $BC = 20$. Пусть *AH* — высота треугольника *ABC*. Тогда *H* — середина *BC*.

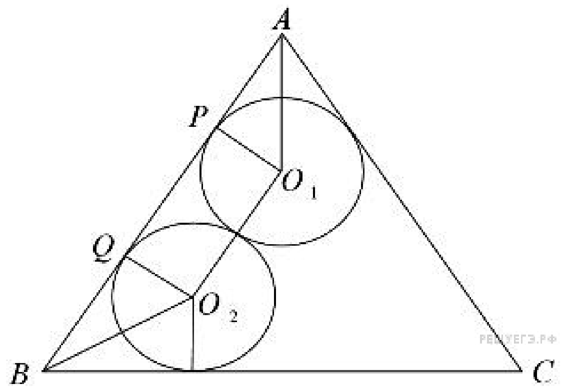


Обозначим $\angle ABC = \angle ACB = \alpha$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{BH}{AB} = \frac{5}{13}, \sin\alpha = \frac{12}{13}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}.$$

Предположим, что окружность радиуса *r* с центром O_1 вписана в угол *ACB* и касается основания *BC* в точке *N*, а окружность того же радиуса с центром O_2 вписана в угол *ABC*, касается основания *BC* в точке *M*, а первой окружности — в точке *D*. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому

$$\angle O_2BM = \frac{\alpha}{2}, \text{ а } \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{2}{3}.$$



Из прямоугольного треугольника BMO_2 находим:

$$BM = O_2M \cdot \operatorname{ctg}\angle MBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{a}{2} = \frac{3}{2}r.$$

Тогда $CN = BM = \frac{3}{2}r.$ Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $O_1O_2 = 2r$, значит, $MN = O_1O_2 = 2r$, поскольку O_1O_2MN — прямоугольник. Следовательно,

$$20 = BC = BM + MN + CN = \frac{3}{2}r + 2r + \frac{3}{2}r = 5r,$$

откуда находим $r = 4$.

Пусть теперь окружность радиуса *r* с центром O_1 вписана в угол *BAC* и касается боковой стороны *AB* в точке *P*, вторая окружность радиуса *r* с центром O_2 вписана в угол *ABC*, касается боковой стороны *AB* в точке *Q*, а также касается первой окружности.

Из прямоугольных треугольников APO_1 и BQO_2 находим:

$$AP = O_1P \cdot \operatorname{ctg}\angle PAO_1 = r \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}r,$$
$$BQ = O_2Q \cdot \operatorname{ctg}\angle QBO_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{2}r,$$

Следовательно, $26 = AB = AP + PQ + QB = AP + O_1O_2 + QB = \frac{12}{5}r + 2r + \frac{3}{2}r = \frac{59}{10}r,$
откуда находим $r = \frac{260}{59}.$

В случае, когда окружности вписаны в углы *BAC* и *ACB*, получим тот же результат.

Ответ: 4 или $\frac{260}{59}$.

27. Задание 16 № 500195. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$ со стороной 7. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников BOD, DOF и BOF.

Решение.

Заметим, что $CB = CO = CD$, поэтому вершина C — центр окружности, описанной около треугольника BOD. Аналогично, точки A и E — центры окружностей, описанных около треугольников BOF и DOF соответственно.

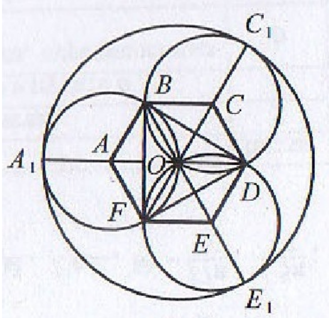


Рис. 1

Возможны два случая: либо искомая окружность касается всех трех данных внутренним образом (рис. 1), либо одной из данных — внутренним образом, а двух других — внешним (рис. 2).

Рассмотрим первый случай. Продолжим отрезки OA, OC и OE за точки A, C и E до пересечения с соответствующими окружностями в точках A_1, C_1, E_1. Тогда $OA_1 = OC_1 = OE_1 = 14$ — диаметры данных окружностей. Окружность S, проходящая через точки A_1, C_1 и E_1, касается внутренним образом окружности, описанной около треугольника BOF, так как расстояние между центрами этих окружностей равно разности их радиусов. Аналогично, окружность S касается остальных двух окружностей.

Рассмотрим второй случай. Пусть Q — центр окружности радиуса x, касающейся внутренним образом описанной окружности треугольника BOD и внешним образом — описанных окружностей треугольников BOF и DOF. Пусть M — основание перпендикуляра, опущенного из центра A описанной окружности треугольника BOF на хорду OF. Тогда AM — высота равностороннего треугольника AOF, поэтому $AM=\dfrac{7\sqrt{3}}{2}$. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому

$$QM=OM+OQ=OM+OC_1-QC_1=\frac{7}{2}+14-x=\frac{35}{2}-x, AQ=7+x.$$

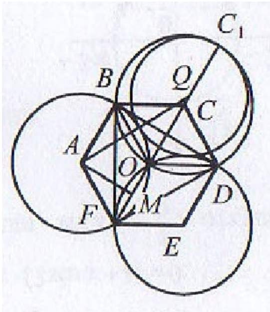


Рис. 2

По теореме Пифагора $AQ^2=AM^2+QM^2$, или

$$(x+7)^2=\left(\frac{35}{2}-x\right)^2+\frac{49\cdot 3}{4}\Leftrightarrow (x+7)^2-\left(\frac{35}{2}-x\right)^2=\frac{49\cdot 3}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(x+7-\frac{35}{2}+x\right)\left(x+7+\frac{35}{2}-x\right)=\frac{49\cdot 3}{4}\Leftrightarrow\left(2x-\frac{21}{2}\right)\cdot\frac{49}{2}=\frac{49\cdot 3}{4}\Leftrightarrow x=6.$$

Ответ: 14, 6.

28. Задание 16 № 500476. Точка O — центр правильного шестиугольника $ABCDEF$, в котором $AC = 10{,}5$. Найдите радиус окружности, касающейся окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF.

Решение.

Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 120°, а основание $AC = 10{,}5$, значит,

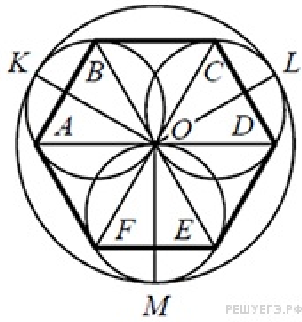


Рис. 1

$$AB = \frac{AC}{\sqrt{3}} = \frac{21}{2\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{2}$$

Треугольники AOB, COD, и EOF — равносторонние со стороной $\frac{7\sqrt{3}}{2}$, поэтому радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны

$$\frac{7\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{7}{2}.$$

Возможны два случая: либо искомая окружность касается всех трех данных внутренним образом (рис. 1), либо одной из данных — внутренним образом, а двух других — внешним (рис. 2).

Рассмотрим первый случай. Пусть OK, OL и OM — диаметры описанных окружностей треугольников AOB, COD и EOF соответственно, $OK = OL = OM = 7$. Окружность S с центром O, проходящая через точки K, L и M, касается внутренним образом окружностей, описанных около треугольников AOB, COD и EOF, так как расстояние между центрами этих окружностей равно разности их радиусов.

Рассмотрим второй случай. Пусть Q — центр окружности радиуса x, касающейся внутренним образом описанной окружности треугольника COD и внешним образом — описанных окружностей треугольников AOB и EOF. Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из центра N описанной окружности треугольника AOB на прямую OL. Тогда

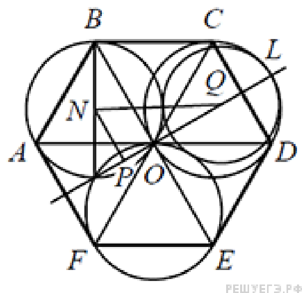


Рис. 2

$$NP = \frac{1}{2}OB = \frac{7\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow OP = ON \cdot \sin\angle ONP = ON\sin 30^\circ = \frac{1}{2}ON = \frac{7}{4};$$
$$OQ = OL - QL = 7 - x \Leftrightarrow PQ = OP + OQ = \frac{7}{4} + 7 - x = \frac{35}{4} - x.$$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $QN = x + \frac{7}{2}$. По теореме Пифагора $QN^2 = PQ^2 + NP^2$, или

$$\left(x+\frac{7}{2}\right)^2 = \left(\frac{35}{4}-x\right)^2 + \frac{49\cdot 3}{16} \Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{35}{4}-x\right)^2 = \frac{49\cdot 3}{16} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{7}{2}-\frac{35}{4}+x\right)\left(x+\frac{7}{2}+\frac{35}{4}-x\right) = \frac{49\cdot 3}{16} \Leftrightarrow \left(2x-\frac{21}{4}\right)\cdot\frac{49}{4} = \frac{49\cdot 3}{16},$$

откуда находим $x = 3$.

Ответ: 7; 3.

29. Задание 16 № 500215. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 4$, $AF = 2$, $\angle BAC = 60°$.

Решение.

Возможны два случая:

1) точка F лежит между A и C (рис. 1);

2) точка A лежит между F и C (рис. 2).

Рассмотрим первый случай.

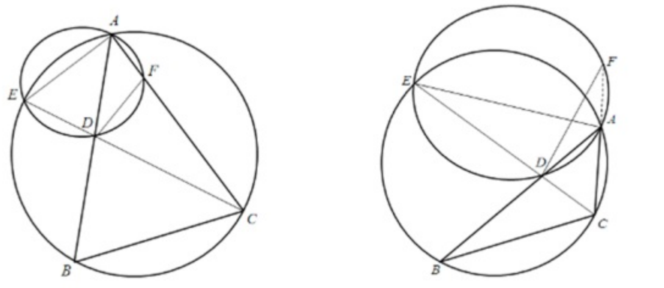


рис.1 рис. 2

$$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFD = \angle AED = \angle ABC,$$

поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC - AF = 2$.

Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Рассмотрим второй случай.

$\angle AFD = \angle AED = \angle ABC$, поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC + AF = 6$. Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $2\sqrt{3}$.

Замечание: на самом деле при внимательном рассмотрении оказывается, что первый случай невозможен, так как оказывается, что $R = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} < 2 = \dfrac{AC}{2}$ — самой длинной из сторон треугольника, а такого быть не может. Ошибка была допущена составителями задачи. При проверке, полный балл выставлялся, либо в случае, когда были разобраны оба случая и верно получены оба ответа, либо в случае, когда была объяснена невозможность первого случая и дан только один ответ.

30. Задание 16 № 500389. Продолжение биссектрисы CD неравнобедренного треугольника ABC пересекает окружность, описанную около этого треугольника, в точке E. Окружность, описанная около треугольника ADE, пересекает прямую AC в точке F, отличной от A. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $AC = 6$, $AF = 3$, угол BAC равен 45°.

Решение.

Возможны два случая:

1) точка F лежит между A и C (рис. 1);

2) точка A лежит между F и C (рис. 2).

Рассмотрим первый случай.

$$\angle DFC = 180^\circ - \angle AFD = \angle AED = \angle ABC,$$

поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC - AF = 3$.

Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

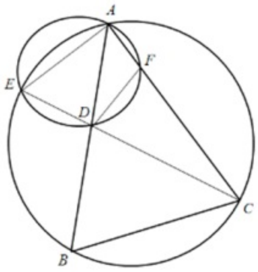


рис.1

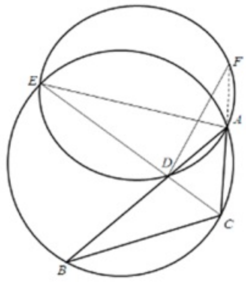


рис. 2

Рассмотрим второй случай.

$\angle AFD = \angle AED = \angle ABC$, поэтому треугольники CDF и CDB равны. Значит, $BC = FC = AC + AF = 9$. Тогда искомый радиус равен $\dfrac{BC}{2\sin\angle BAC} = \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \dfrac{9\sqrt{2}}{2}$.

Замечание: на самом деле при внимательном рассмотрении оказывается, что первый случай невозможен, так как оказывается, что $R = \dfrac{3\sqrt{2}}{2} < 3 = \dfrac{AC}{2}$ — самой длинной из сторон треугольника, а такого быть не может. Ошибка была допущена составителями задачи. При проверке, полный балл выставлялся, либо в случае, когда были разобраны оба случая и верно получены оба ответа, либо в случае, когда была объяснена невозможность первого случая и дан только один ответ.

31. Задание 16 № 500410. Угол C треугольника ABC равен 60°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 1 : 3$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle CDA = 90°$. Аналогично, $\angle BDA = 90°$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

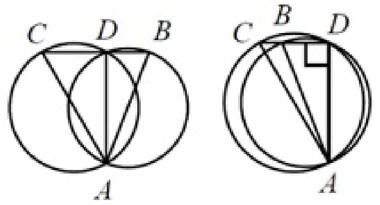


Рис. 1 Рис. 2

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис. 1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис. 2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB — острый.

Положим $DB = t$, $DC = 3t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ADB находим:

$$AD = CD\sqrt{3} = 3t\sqrt{3},$$
$$AB = \sqrt{AD^2 + BD^2} = \sqrt{27t^2 + t^2} = 2t\sqrt{7}.$$

Рассмотрим первый случай. По теореме синусов $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$, то есть $\frac{\sin A}{4t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2t\sqrt{7}}$, откуда $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

Во втором случае $\frac{\sin A}{2t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{2t\sqrt{7}}$, откуда $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$.

Поскольку $BC < AC$, получаем: $\angle BAC < \angle ABC$, значит, $\angle BAC$ — острый и равен $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$.

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{21}}{7}, \arcsin\frac{\sqrt{21}}{14}$.

32. Задание 16 № 500430. Угол C треугольника ABC равен 60°, D — отличная от A точка пересечения окружностей, построенных на сторонах AB и AC как на диаметрах. Известно, что $DB : DC = 2 : 3$. Найдите угол A.

Решение.

Точка D лежит на окружности с диаметром AB, поэтому $\angle CDA = 90°$. Аналогично, $\angle BDA = 90°$. Следовательно, точка D лежит на прямой BC.

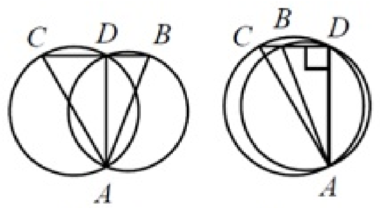


Рис. 1 Рис. 2

Возможны два случая: точка D лежит либо на отрезке BC (рис. 1), либо на продолжении отрезка BC за точку B (рис. 2). Точка D не может лежать на продолжении отрезка BC за точку C, так как угол ACB — острый.

Положим $DB = 2t$, $DC = 3t$. Из прямоугольных треугольников ADC и ADB находим:

$$AD = CD\sqrt{3} = 3t \cdot \sqrt{3},$$
$$AB = \sqrt{AD_2 + BD_2} = \sqrt{27t^2 + 4t^2} = t \cdot \sqrt{31}.$$

Рассмотрим первый случай. По теореме синусов $\frac{\sin A}{BC} = \frac{\sin C}{AB}$, то есть $\frac{\sin A}{5t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t \cdot \sqrt{31}}$, откуда $\sin A = \frac{5\sqrt{93}}{62}$.

Во втором случае $\frac{\sin A}{t} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t \cdot \sqrt{31}}$, откуда $\sin A = \frac{\sqrt{93}}{62}$.

Поскольку $BC < AC$, получаем: $\angle BAC < \angle ABC$, значит, $\angle BAC$ — острый и равен $\arcsin 5\frac{\sqrt{93}}{62}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{93}}{62}$.

Ответ: $\arcsin\frac{5\sqrt{93}}{62}, \arcsin\frac{\sqrt{93}}{62}$.

33. Задание 16 № 500964. Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной стороны треугольника и продолжений двух других его сторон. Радиусы двух вневписанных окружностей прямоугольного треугольника равны 7 и 17. Найдите расстояние между их центрами.

Решение.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = b$, $BC = a$ и гипотенузой $AB = c$. Пусть окружность с центром O_c радиуса r_c касается гипотенузы в точке T, продолжений катетов BC и AC − в точках M и N соответственно, а p — полупериметр треугольника ABC. Из равенства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки, следует, что $CM = CB + BM = CB + BT$ и $CN = CA + AN = CA + AT$, поэтому

$$CM + CN = CB + BT + CA + AT = CB + CA + (BT + AT) =$$
$$= CB + CA + AB = a + b + c = 2p,$$

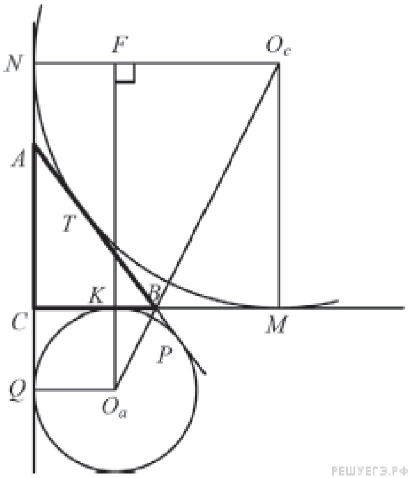


Рис. 1

а так как $CM = CN$, то $CM = p$. Далее, пусть окружность с центром O_a радиуса r_a касается катета BC в точке K, а продолжений сторон AB и AC — в точка P и Q соответственно. Рассуждая аналогично, получаем $AQ = AP = p$. Четырехугольники NO_cMC и KO_aQC — квадраты, поэтому

$$r_c = O_cM = CM = p,$$
$$r_a = CQ = AQ - AC = p - b,$$

значит, $r_a < r_c$.

Следовательно, радиус вневписанной окружности, касающейся гипотенузы данного прямоугольного треугольника, не может быть равен 7.

Таким образом, возможны только такие случаи: Либо радиус окружности, касающейся гипотенузы, равен 17, а радиус окружности, касающейся одного из катетов, равен 7, либо радиусы окружностей, касающихся катетов, равны 7 и 17.

Предположим, что $r_c = 17$ и $r_a = 7$ (рис. 1).

Опустим перпендикуляр O_aF из центра меньшей окружности на O_cN. Тогда

$$O_aF = QN = QC + CN = O_aK + O_cM = r_a + r_c = 7 + 17 = 24,$$

$$O_cF = MK = CM - CK = r_c - r_a = 17 - 7 = 10,$$

Следовательно,

$$O_aO_c = \sqrt{O_aF^2 + O_cF^2} = \sqrt{24^2 + 10^2} = 26.$$

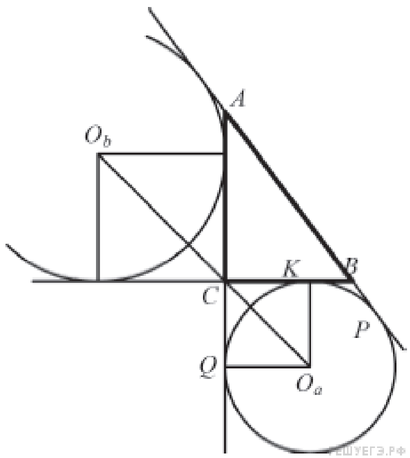


Рис. 2

Пусть теперь $r_b = 17$ и $r_a = 7$. (рис 2)

Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому точки O_a, C и O_b лежат на оной прямой. Следовательно,

$$O_aO_b = O_aC + CO_b = r_a\sqrt{2} + r_b\sqrt{2} = 7\sqrt{2} + 17\sqrt{(2)} = 24\sqrt{2}.$$

Ответ: 26 или $24\sqrt{2}$.

34. Задание 16 № 501398. Стороны AB и BC треугольника ABC равны соответственно 26 и 14,5, а его высота BD равна 10. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD.

Решение.

Пусть точки O и P — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и BCD соответственно, R и r — радиусы этих окружностей, а точки E и F — точки, в которых окружности касаются отрезка BD. Из прямоугольных треугольников ABD и BCD находим:

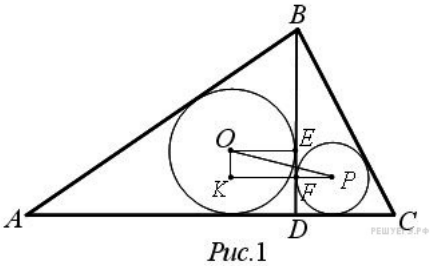


Рис.1

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = 24,\ R = \frac{AD + BD - AB}{2} = \frac{24 + 10 - 26}{2} = 4,$$

$$CD = \sqrt{BC^2 - BD^2} = 10,5,\ r = \frac{CD + BD - BC}{2} = \frac{10,5 + 10 - 14,5}{2} = 3.$$

Опустим из точки O перпендикуляр OK на прямую FP (см. рис. 1, 2). Искомое расстояние OP находим из прямоугольного треугольника $OKP:\ OP = \sqrt{OK^2 + PK^2}$.

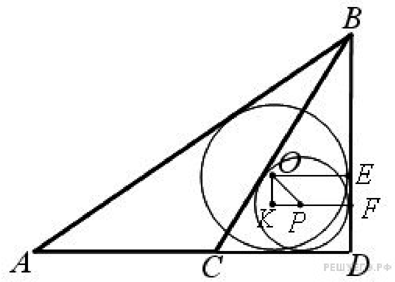


Рис.2

Первый случай (точка D лежит между точками A и C, см. рис. 1):

$$OK = EF = DE - EF = R - r,$$

$$PK = PF + FK = PF + EO = R + r,$$

$$OP = \sqrt{(R - r)^2 + (R + r)^2} = 5\sqrt{2}.$$

Второй случай (точка C лежит между точками A и D, см. рис. 2):

$$OK = EF = DE - EF = R - r,$$

$$PK = FK - PF = EO - PF = R - r,$$

$$OP = \sqrt{(R - r)^2 + (R - r)^2} = \sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$ или $\sqrt{2}$.

35. Задание 16 № 501418. Стороны KM и MN треугольника KMN равны соответственно 30 и 25, а его высота MH равна 24. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники KMH и MNH.

Решение.

Пусть точки O и P — центры окружностей, вписанных в треугольники KMH и MNH соответственно, R и r — радиусы этих окружностей, а точки E и F — точки, в которых окружности касаются отрезка MH. Из прямоугольных треугольников KMH и MNH находим:

$$KH=\sqrt{KM^2-MH^2}=18,\ R=\frac{MH+KH-KM}{2}=\frac{24+18-30}{2}=6,$$

$$HN=\sqrt{MN^2-MH^2}=7,\ r=\frac{MH+HN-MN}{2}=\frac{24+7-25}{2}=3.$$

Опустим из точки O перпендикуляр OQ на прямую FP (см. рис. 1, 2). Искомое расстояние OP находим из прямоугольного треугольника $OQP:\ OP=\sqrt{OQ^2+PQ^2}.$

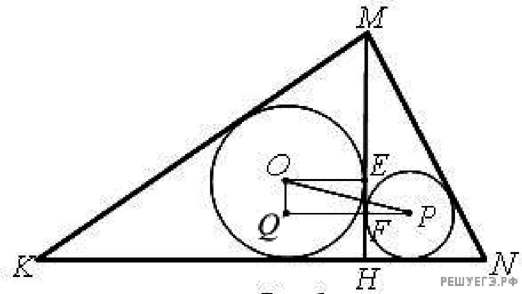


Рис.1

Первый случай. Точка H лежит между точками K и N, см. рис. 1.

$$OQ=EF=HE-HF=R-r,$$

$$PQ=PF+FQ=PF+EO=R+r,$$

$$OP=\sqrt{(R-r)^2+(R+r)^2}=3\sqrt{10}.$$

Второй случай. Точка N лежит между точками K и H, см. рис. 2.

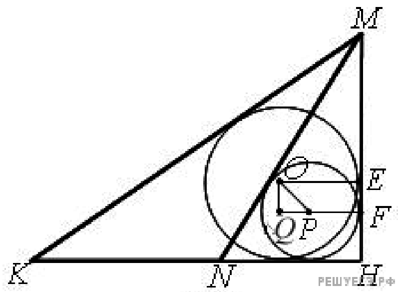


Рис.2

$$OQ=EF=HE-FH=R-r,$$

$$PQ=FQ-PF=EO-PF=R-r,$$

$$OP=\sqrt{(R-r)^2+(R-r)^2}=3\sqrt{2}.$$

Ответ: $3\sqrt{10}$ или $3\sqrt{2}$.

36. Задание 16 № 502117. Окружность радиуса $8\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 12. Найдите MN.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $8\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A = \frac{8\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 16.$$

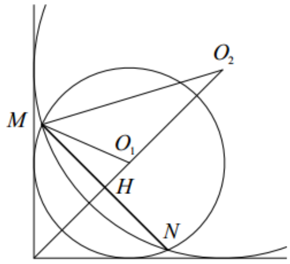


Рис. 1

Возможны два случая.

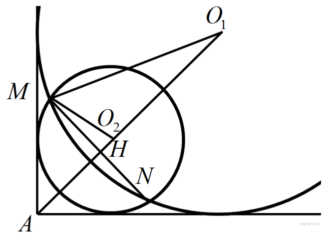
Первый случай: точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис. 1), тогда $O_2A = O_1A + O_1O_2 = 28$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 14\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO имеем $O_1O_2 = 12$, $O_1M = 8\sqrt{2}$, $O_2M = 14\sqrt{2}$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 6 + 11\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_1M)} = 6\sqrt{103},$$

откуда $MH = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \sqrt{103}$, $MN = 2MH = 2\sqrt{103}$.



Второй случай: точка O_2 лежит между точками A и O_1 (рис. 2), тогда $O_2A = O_1A - O_1O_2$ откуда радиус второй окружности $O_2M = 2\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 12$, $O_1M = 8\sqrt{2}$, $O_2M = 2\sqrt{2}$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 6 + 5\sqrt{2}$.

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 6\sqrt{7},$$

откуда $MH = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \sqrt{7}$; $\quad MN = 2MH = 2\sqrt{7}$.

Ответ: $2\sqrt{7}$ или $2\sqrt{103}$.

37. Задание 16 № 502137. Окружность радиуса $12\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 16. Найдите MN.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $12\sqrt{2}$, O_2 — центр второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда $O_1A = \dfrac{12\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 24.$

Возможны два случая.

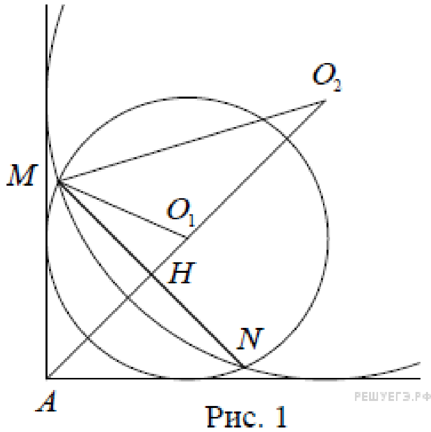


Рис. 1

Первый случай.

Точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис. 1), тогда

$$O_2A = O_1A + O_1O_2 = 40,$$

откуда радиус второй окружности $O_2M = 20\sqrt{2}.$ В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 16$, $O_1M = 12\sqrt{2}$, $O_2M = 20\sqrt{2}.$

Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2, равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2, полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 8 + 16\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 32\sqrt{14},$$

откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 4\sqrt{14}, MN = 2MH = 8\sqrt{14}.$$

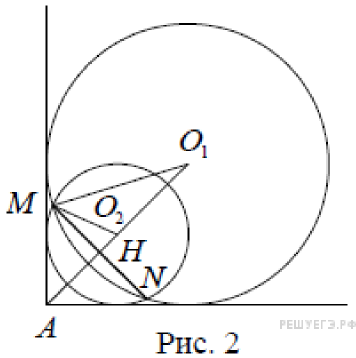


Рис. 2

Второй случай.

Точка O_2, лежит между точками A и O_1 (рис. 2), тогда $O_2A = O_1A - O_1O_2 = 8$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 4\sqrt{2}.$

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 16$, $O_1M = 12\sqrt{2}$, $O_2\mathrm{M} = 4\sqrt{2}.$

Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2, равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2, полупериметр

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 8 + 8\sqrt{2}.$$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 32\sqrt{2},$$

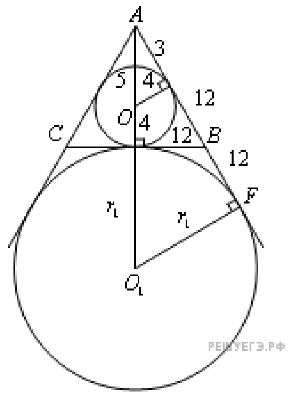
откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1\mathrm{MO}_2}}{O_1O_2} = 4\sqrt{2}, MN = 2MH = 8\sqrt{2}.$$

Ответ: $8\sqrt{2}, 8\sqrt{14}.$

38. Задание 16 № 484614. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на основание, равна 9, а радиус вписанной в треугольник окружности равен 4. Найдите радиус окружности, касающейся стороны треугольника и продолжении двух его сторон.

Решение.



Пусть AD — высота равнобедренного треугольника ABC, опущенная на его основание BC, O — центр вписанной окружности, P — точка ее касания с боковой стороной AB.

Тогда

$$AO = AP - OP = 9 - 4 = 5.$$

Обозначим $\angle BAD = \alpha$. Из прямоугольного треугольника находим, что

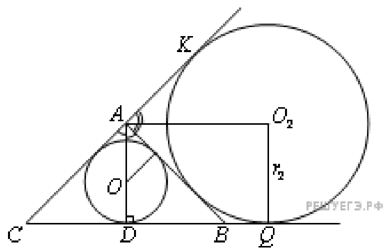
$$\sin\alpha = \frac{OP}{OA} = \frac{4}{5}.$$

Тогда $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3}$, $AP = AO\cos\alpha = 5\cdot\dfrac{3}{5} = 3$, $BP = BD = AD$, $\operatorname{tg}\alpha = 9\cdot\dfrac{4}{3} = 12$.

Пусть окружность с центром O_1 и радиусом r_1 касается продолжения боковых сторон AB и AC в точках F и G соответственно, а также основания BC. Тогда D — точка касания, поэтому

$$BF = BD = 12,\ AF = AP + PB + BF = 3 + 12 + 12 = 27.$$

Следовательно, $r_1 = O_1F = AF\operatorname{tg}\alpha = 27\cdot\dfrac{4}{3} = 36.$

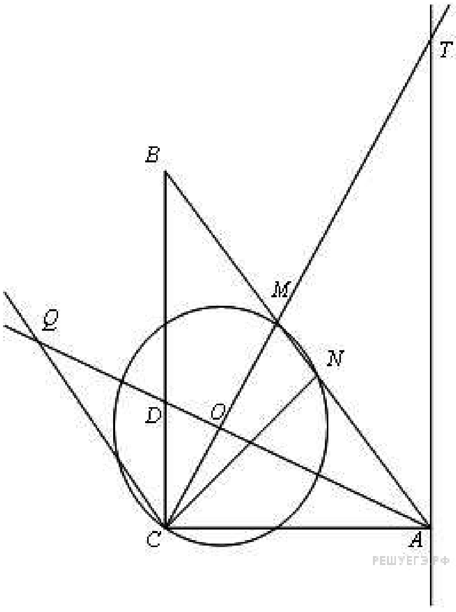


Пусть теперь окружность с центром O_2 радиуса r_2 касается боковой стороны AB, продолжения основания BC в точке Q и продолжения боковой стороны AC в точке K. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому AO_2 и AD — биссектрисы смежных углов BAK и CAB значит, $\angle DAO_2 = 90°$. Тогда $ADQO_2$ — прямоугольник. Следовательно, $r_2 = O_2Q = AD = 9$. Радиус окружности, касающейся боковой стороны AC и продолжений основания BC и боковой стороны AB также равен 9.

Ответ: 9 или 36.

39. Задание 16 № 485990. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 15$, $AC = 9$ и $BC = 12$. На стороне BC взята точка D, а на отрезке AD — точка O, причем $CD = 4$ и $AO = 3OD$. Окружность с центром O проходит через точку C. Найдите расстояние от точки C до точки пересечения этой окружности с прямой AB.

Решение.



Проведем через вершину A прямую, параллельную BC. Пусть T — точка ее пересечения с прямой CO, а M — точка пересечения AB и CT. Треугольник AOT подобен треугольнику DOC с коэффициентом $\dfrac{AO}{OD}=3$, поэтому $AT = 3CD = 12$. Значит, треугольник AMT равен треугольнику BMC по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда M — середина стороны AB. Следовательно, CM — медиана треугольника ABC. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из прямого угла равна половине гипотенузы, значит $CM=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5.$

Через вершину C проведем прямую, параллельную AB. Пусть Q— точка ее пересечения с прямой AO. Треугольник CDQ подобен треугольнику BDA с коэффициентом $\dfrac{CD}{DB}=\dfrac{1}{2}$, поэтому $CQ=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5=AM$. Тогда треугольники AMO и QCO равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Поэтому O — середина CM.

Окружность с центром O проходит через точку C, и при этом $OM = OC$. Следовательно, OM — радиус этой окружности. Треугольник ABC прямоугольный, $CM=\dfrac{1}{2}AB=7{,}5$, а точка M — одна из точек пересечения прямой AB и окружности.

Пусть N — вторая точка пересечения окружности с прямой AB. Тогда угол CNM — вписанный и опирающийся на диаметр CM, так что $CN \perp AB$, то есть CN — высота треугольника ABC.

Отсюда $CN=\dfrac{AC\cdot BC}{AB}=\dfrac{9\cdot 12}{15}=\dfrac{36}{5}=7{,}2.$

Ответ: 7,5 или 7,2.

40. Задание 16 № 500450. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 5, а полусумма оснований равна 25, поэтому основания трапеции равны 20 и 30.

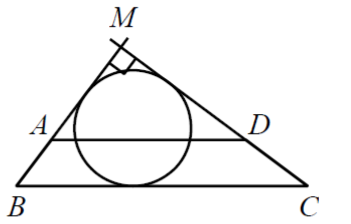


Рис. 1

Предположим, что $BC = 30$, $AD = 20$ (рис. 1). Стороны BC и AD треугольников MBC и MAD параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит,

$$MB = \frac{AB}{1-k} = 18, MC = \frac{CD}{1-k} = 24.$$

Заметим, что $MB^2 + MC^2 = BC^2$, поэтому треугольник прямоугольный с гипотенузой MBC. Радиус его вписанной окружности равен:

$$r = \frac{MB + MC - BC}{2} = 6.$$

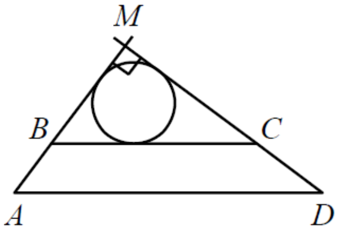


Рис. 2

Пусть теперь $AD = 30$, $BC = 20$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника MAD равен 6. Треугольники MAD и MBC подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника MBC равен $r = 6k = 4$.

Ответ: 4; 6.

41. Задание 16 № 500818. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и D и касающейся прямой BC.

Решение.

Центр O искомой окружности принадлежит серединному перпендикуляру отрезка AD. Обозначим P середину отрезка AD, Q — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на прямую BC, E — точку пересечения серединного перпендикуляра с прямой BC (см. рис. а). Из условия касания окружности и прямой BC следует, что отрезки OA, OD и OQ равны радиусу R окружности.

Заметим, что точка O не может лежать по ту же чторону от прямой AB, что и точка E, так как в этом случае расстояние от точки O до прямой BC меньше, чем расстояние от нее до точки A.

Из прямоугольного треугольника BPE с катетом $BP = 2$ и $\angle B = 30°$ находим, что $PE = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Так как $OA = R$ и $AP = 1$, получаем: $OP = \sqrt{R^2 - 1}$, следовательно, $OE = \sqrt{R^2 - 1} + \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

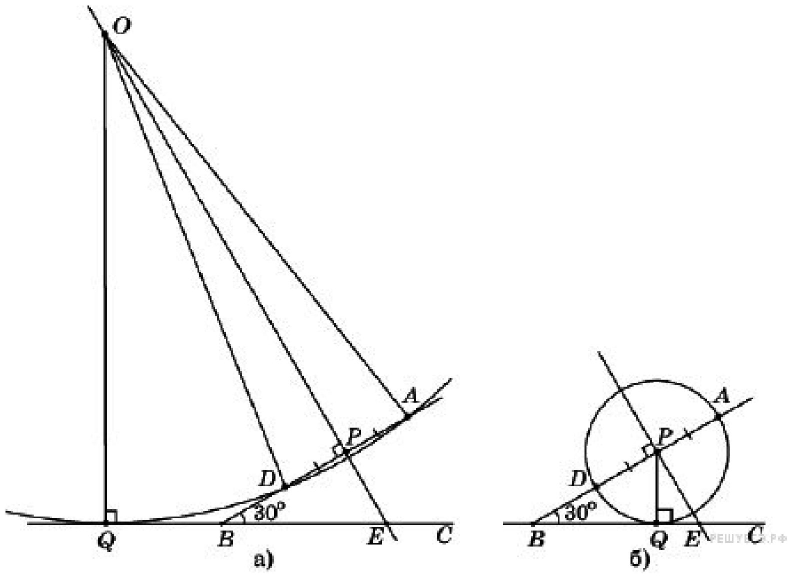
Из прямоугольного треугольника OQE, в котором $\angle E = 60°$, находим:

$$R = OQ = \frac{\sqrt{3}}{2} OE = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} + 1.$$

В результате получаем уравнение:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{R^2 - 1} = R - 1.$$

Возведем в квадрат обе части этого уравнения и приведем подобные члены. Получим уравнение $R_1 = 1$, $R_2 = 7$. Если радиус равен 1, то центром окружности является точка P (см. рис.).

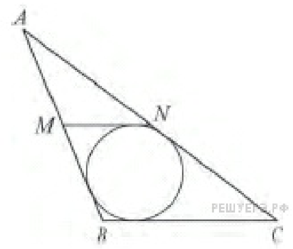


Ответ: 1 или 7.

42. Задание 16 № 500920. Окружность, вписанная в треугольник ABC, площадь которого равна 66, касается средней линии, параллельной стороне BC. Известно, что $BC = 11$. Найдите сторону AB.

Решение.

Обозначим $AB = x$, $AC = y$, пусть p — полупериметр треугольника ABC. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно. Тогда $MN = \frac{1}{2}BC = \frac{11}{2}$.



В трапеции $BMNC$ вписана окружность, поэтому

$$BM + CN = BC + MN = 11 + \frac{11}{2} = \frac{33}{2},$$

значит,

$$x + y = AB + AC = 2BM + 2CN = 2(BM + CN) = 2(BC + MN) = 2 \cdot \frac{33}{2} = 33.$$

$$p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{x + y + 11}{2} = \frac{33 + 11}{2} = 22.$$

По формуле Герона:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{22(22 - x)(22 - y)(22 - 11)} = 11\sqrt{2(22 - x)(22 - y)} = 66;$$

$$\sqrt{2(22 - x)(22 - y)} = 6;\ (22 - x)(22 - y) = 18;\ (22 - x)(22 - 33 + x) = 18;\ x^2 - 33x + 260 = 0.$$

Отсюда находим, что $x = 13$ или 20.

Ответ: 13 или 20.

43. Задание 16 № 503255. Окружность радиуса 6 вписана в угол, равный 60°. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 4. Найдите MN.

Решение.

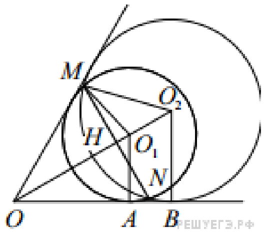


Рис. 1

Пусть O_1 — центр окружности радиуса 6, O_2 — центр второй окружности, O — вершина угла, в который вписаны окружности, A и B — точки касания соответственно первой и второй окружностей с одной из сторон угла, тогда $OO_1 = 2O_1A = 12$.

Возможны два случая. Первый случай: точка O_1 лежит между точками O и O_2 (рис. 1), тогда $OO_2 = OO_1 + O_1O_2 = 16$, откуда радиус второй окружности

$$O_2M = O_2B = \frac{OO_2}{2} = 8.$$

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 4$, $O_1M = 6$, $O_2M = 8$. Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 9.$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p\,(p - O_1O_2)\,(p - O_1M)\,(p - O_2M)} = 3\sqrt{15},$$

откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{15}}{2};\; MN = 2MH = 3\sqrt{15}.$$

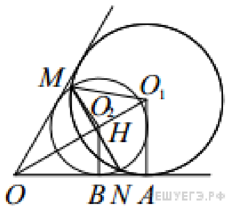


Рис. 2

Второй случай: точка O_2 лежит между точками O и O_1 (рис. 2), тогда $OO_2 = OO_1 - O_1O_2 = 8$, откуда радиус второй окружности

$$O_2M = O_2B = \frac{OO_2}{2} = 4.$$

В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_1 = 4$, $O_1M = 6$, $O_2M = 4$. Аналогично первому случаю, высота MH треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр $p = \dfrac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 7.$

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p\,(p - O_1O_2)\,(p - O_1M)\,(p - O_2M)} = 3\sqrt{7},$$

откуда

$$MH = \frac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = \frac{3\sqrt{15}}{2};\; MN = 2MH = 3\sqrt{7}.$$

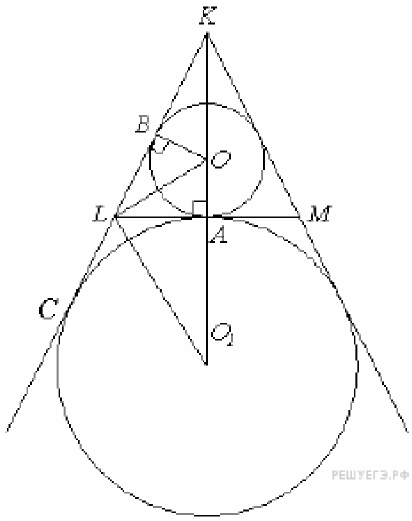
Ответ: $3\sqrt{7}$ или $3\sqrt{15}$.

44. Задание 16 № 513349. Первая окружность с центром O, вписанная в равнобедренный треугольник KLM, касается боковой стороны KL в точке B, а основания ML — в точке А. Вторая окружность с центром O_1 касается основания ML и продолжений боковых сторон.

а) Докажите, что треугольник OLO_1 прямоугольный.

б) Найдите радиус второй окружности, если известно, что радиус первой равен 6 и $AK = 16$.

Решение.



а) Пусть окружность с центром O_1 касается продолжения боковой стороны KL в точке C. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому LO и LO_1 — биссектрисы смежных углов KLM и CLM. Следовательно, $\angle OLO_1 = 90°$.

б) Прямоугольные треугольники KBO и KAL подобны, поэтому

$$\frac{AL}{OB} = \frac{AK}{KB}.$$

Значит,

$$AL = \frac{AK \cdot OB}{KB} = \frac{AK \cdot OB}{\sqrt{OK^2 - OB^2}} = \frac{16 \cdot 6}{\sqrt{10^2 - 6^2}} = \frac{16 \cdot 6}{8} = 12.$$

Пусть радиус окружности с центром O_1 равен r_1. Треугольник KLM равнобедренный, поэтому окружности с центрами O и O_1 касаются основания ML в одной и той же точке A. Значит, точка A лежит на отрезке OO_1, причём LA — высота прямоугольного треугольника OLO_1, проведённая из вершины прямого угла. Следовательно,

$$r_1 = O_1A = \frac{AL^2}{OA} = \frac{12^2}{6} = 24.$$

Ответ: б) 24.