

Задача на доказательство и вычисление

1. Задание 16 № 501887. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

2. Задание 16 № 507211. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

- Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

- Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

3. Задание 16 № 507262. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30° . Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120^\circ$.

- Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.
- Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K . Найдите EK , если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

4. Задание 16 № 507510. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

- Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

- Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

5. Задание 16 № 507586. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

- Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

- Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

6. Задание 16 № 507889. Хорды AD , BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

- Докажите, что эти хорды равны.
- Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A , B , C , D , E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

7. Задание 16 № 508235. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .

- Докажите, что угол PAC равен углу PQC .
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.

8. Задание 16 № 508256. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA .

- Докажите, что угол ABK равен углу ANK .
- Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM , если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45^\circ$.

9. Задание 16 № 508974. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.
- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 12$.
10. Задание 16 № 509003. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.
- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 10$.
11. Задание 16 № 509045. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ .
- Докажите, что угол PAC равен углу PQC .
 - Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC , если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60^\circ$.
12. Задание 16 № 509161. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C . Вторая окружность касается катета AC , гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.
- Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC .
 - Найдите радиус второй окружности.
13. Задание 16 № 509182. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH . Из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.
- Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
 - Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен 4.
14. Задание 16 № 509823. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K .
- Докажите, что отрезок BK больше отрезка CK .
 - Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N . Найдите AB , если $BK = 18$ и $BN = 17$.
15. Задание 16 № 512338. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .
- Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
 - Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 1$.
16. Задание 16 № 512359. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.
- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

17. Задание 16 № 512380. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM . Окружность с центром O , построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H , точка Q — середина MN .

- а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.
- б) Найдите KN , если $\angle LKN = 75^\circ$ и $LM = 2$.

18. Задание 16 № 512401. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке M , причём $AM = 5R$ и $CM = 1,5R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 4$.

19. Задание 16 № 503149. Две окружности касаются внешним образом в точке K . Прямая AB касается первой окружности в точке A , а второй — в точке B . Прямая BK пересекает первую окружность в точке D , прямая AK пересекает вторую окружность в точке C .

- а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.
- б) Найдите площадь треугольника AKB , если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

20. Задание 16 № 502296. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

21. Задание 16 № 502316. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R , касающаяся стороны AC в точке D , причём $AD = R$.

- а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
- б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F . Найдите площадь треугольника BEF , если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

22. Задание 16 № 503002. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

- а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
- б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

23. Задание 16 № 503130. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E . В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T .

- а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.
- б) Найдите угол BAD , если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

24. Задание 16 № 504546. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .

- а) Докажите, что точки A , B , K и E лежат на одной окружности.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

25. Задание 16 № 504567. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH . Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE .

- а) Докажите, что точки A , B , K и E лежат на одной окружности.
- б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

26. Задание 16 № 504264. Две окружности пересекаются в точках P и Q . Прямая, проходящая через точку P , второй раз пересекает первую окружность в точке A , а вторую — в точке D . Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD , второй раз пересекает первую окружность в точке B , а вторую — в точке C .

- а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.
- б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

27. Задание 16 № 505155. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

- а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.
- б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60° .

28. Задание 16 № 505176. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

- а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.
- б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 24, а один из его углов равен 45° .

29. Задание 16 № 505239. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC , а вершина E — на отрезке AB .

- а) Докажите, что $FH = 2DH$.
- б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

30. Задание 16 № 505249. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD . В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на стороне BC , а вершина E — на стороне AB .

- а) Докажите, что $FH = 2DH$.
- б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 2$.

31. Задание 16 № 505389. Дан четырёхугольник $ABCD$.

- а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

- б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60^\circ$.

32. Задание 16 № 505410. Дан четырёхугольник $ABCD$.

- а) Докажите, что отрезки LN и KM , соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

- б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $KL = 6$, $KM = 4\sqrt{3}$, $\angle MKL = 30^\circ$.

33. Задание 16 № 505419. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

34. Задание 16 № 505425. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H .

- а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.
- б) Найдите BC , если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60^\circ$.

- 35. Задание 16 № 505473.** В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.
- Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
 - Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.
- 36. Задание 16 № 505495.** В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.
- Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC .
 - Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.
- 37. Задание 16 № 505537.** Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Известно, что $AC = 3MB$.
- Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.
 - Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1 , если известно, что $AC = 10$.
- 38. Задание 16 № 504418.** На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N , причём M — середина AD , а $BN : NC = 1 : 3$.
- Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.
 - Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C , N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.
- 39. Задание 16 № 504439.** Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части.
- Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.
 - Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми BD и BC , если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.
- 40. Задание 16 № 504832.** Окружность с центром O , вписанная в треугольник ABC , касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q . При этом отрезки OC и QP параллельны.
- Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.
 - Найдите площадь треугольника BQP , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.
- 41. Задание 16 № 504853.** Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC . Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q .
- Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.
 - Найдите площадь треугольника OBC , если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2m$.
- 42. Задание 16 № 505431.** Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB . Касательная к окружности, проведённая в точке B , пересекает эту прямую в точке K .
- Докажите, что треугольник BCK — равнобедренный.
 - Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK , если $\cos \angle BAC = \frac{3}{4}$.

43. Задание 16 № 505536. Медианы AA_1 , BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M . Точки A_2 , B_2 и C_2 — середины отрезков MA , MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC .

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.