Окружности и системы окружностей

1. Задание 16 № 501692. Окружности радиусов 2 и 3 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь треугольника BCO_2, если $\angle ABO_1 = 30°$.

Решение.

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_2 = 30°$, откуда

$$AB = 2O_1A\cos 30^\circ = 4\cos 30^\circ,\ AC = 2O_2C\cos 30^\circ = 6\cos 30^\circ.$$

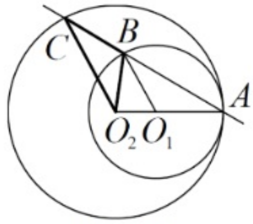


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рис. 1), тогда точка B лежит между точками A и C, откуда $BC = AC - AB = 2\cos 30°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 3\cos 30^\circ \sin 30^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рис. 2), тогда точка A лежит между точками B и C, откуда $BC = AC + AB = 10\cos 30°$.

$$S_{BCO_2} = \frac{BC\cdot CO_2\cdot \sin\angle BCO_2}{2} = 15\cos 30^\circ \sin 30^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}.$$

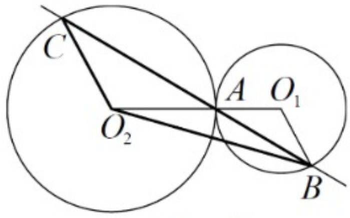


Рис. 2

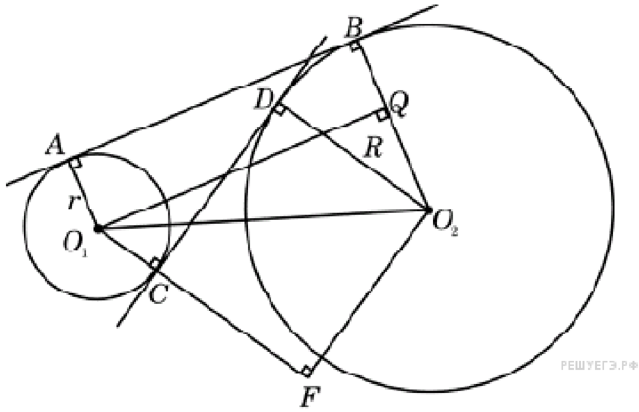
Ответ: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ или $\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

2. Задание 16 № 507379. Расстояние между центрами окружностей радиусов 2 и 8 равно 15. Этих окружностей и их общей внутренней касательной касается третья окружность. Найдите её радиус.

Решение.

Докажем сначала следующее утверждение. Если a — расстояние между центрами окружностей радиусов r и R,, $a \geq r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, общая внутренняя в точках C и D, то

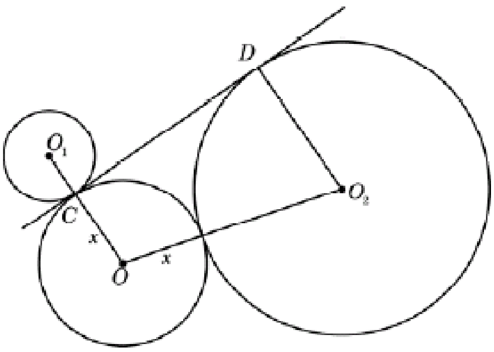
$$AB = \sqrt{a^2-(R-r)^2}, \quad CD = \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

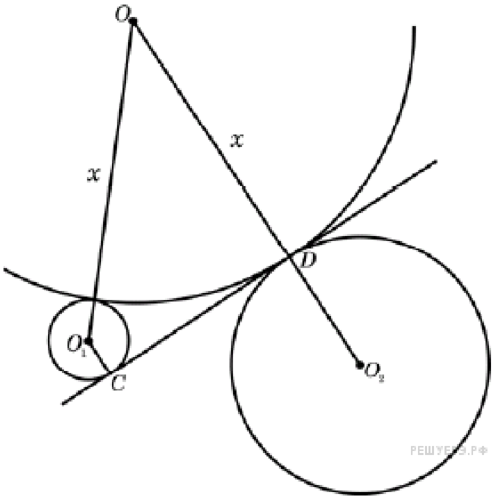


Действительно, пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (см. рис.). Из точек O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B и O_2F на прямую O_1C. Из прямоугольных треугольников O_1QO_2 и O_1FO_2 находим, что

$$O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - QO_2^2} = \sqrt{a^2-(R-r)^2}, \quad O_2F = \sqrt{O_1O_2^2 - FO_1^2} - \sqrt{a^2-(R+r)^2}.$$

Следовательно, $CD = O_2F = \sqrt{a^2-(R+r)^2}$. Пусть x — радиус искомой окружности, O — её центр. Заметим, что прямая CD — либо общая внешняя касательная окружностей с центрами O и O_2 (см. рис.), либо окружностей с центрами O и O_1 (см. рис.). В первом них этих случаев искомая окружность касается прямой CD в точке C, во втором — в точке D.





По доказанному $CD = \sqrt{15^2-(8+2)^2} = 5\sqrt{5}$.

В первом случае CD — общая внешняя касательная к окружности с центрами O и O_2, поэтому $CD = \sqrt{(x+8)^2-(8-x)^2} = 4\sqrt{2x}$, значит, $4\sqrt{2x} = 5\sqrt{5}$, откуда $x = \dfrac{125}{32}$.

Во втором случае CD — общая внешняя касательная к окружностям с центрами O и O_1, поэтому $CD = \sqrt{(x+2)^2-(2-x)^2} = 2\sqrt{2x}$, откуда $x = \dfrac{125}{8}$.

Ответ: $\dfrac{125}{32}$ или $\dfrac{125}{8}$.

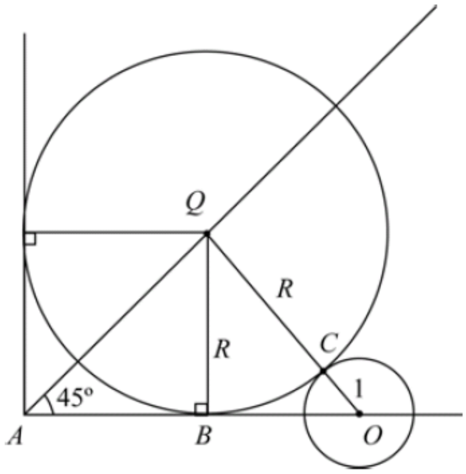
3. Задание 16 № 507380. На стороне прямого угла с вершиной A взята точка O, причём $AO = 7$. С центром в точке O проведена окружность S радиуса 1. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся окружности S.

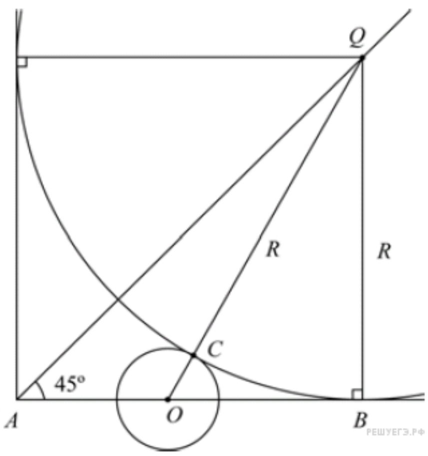
Решение.

Пусть Q — центр искомой окружности радиуса R, B — точка касания этой окружности со стороной AO, C — точка касания окружностей. Центр окружности, вписанной в угол лежит на биссектрисе угла, значит, $\angle BAQ = 45°$. Тогда $AB = QB = R$. Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $OQ = OC + CQ = 1 + R$.

Рассмотрим случай, когда точка B лежит между A и O. (см. рис.). Тогда $R < 7$. По теореме Пифагора $OQ^2 = QB^2 + OB^2$, или $(1 + R)^2 = R^2 + (7 - R)^2$. После очевидных упрощений получим уравнение $R^2 - 16R + 48 = 0$, учитывая, что $R < 7$, находим, что $R = 4$.

Если же точка O лежит между A и B (см. рис.), то аналогично получим, что $R = 12$.

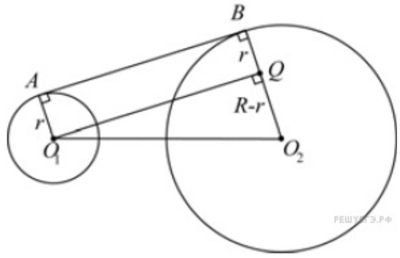




Ответ: 4 или 12.

4. Задание 16 № 507381. Расстояние между центрами окружностей радиусов 1 и 9 равно 17. Обе окружности лежат по одну сторону от общей касательной. Третья окружность касается обеих окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.

Решение.



Докажем сначала следующее утверждение. Если a — расстояние между центрами окружностей радиусов r и R, $a \geq r + R$, общая внешняя касательная касается окружностей в точках A и B, то

$$AB = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}, \quad CD = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}.$$

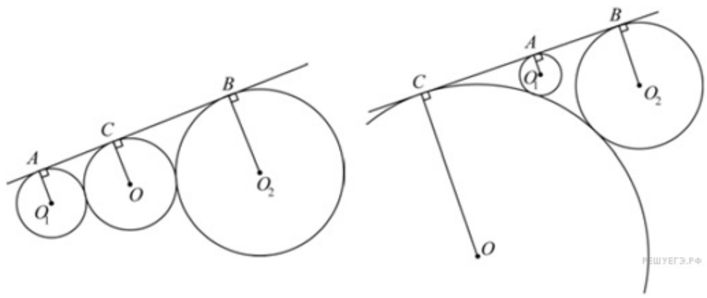
Действительно, пусть O_1 и O_2 — центры окружностей радиусов r и R соответственно (см. рис.). Из точек O_1 и O_2 опустим перпендикуляры O_1Q на прямую O_2B. Из прямоугольного треугольника O_1QO_2 находим, что

$$AB = O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - QO_2^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},$$

Пусть x — радиус третьей окружности, C — её точка касания с прямой AB. по доказанному:

$$AB = \sqrt{17^2 - (9-1)^2} = 15, \quad AC = \sqrt{(x+1)^2 - (x-1)^2} = 2\sqrt{x},$$

$$BC = \sqrt{(x+9)^2 - (x-9)^2} = 2\sqrt{9x} = 6\sqrt{x}.$$



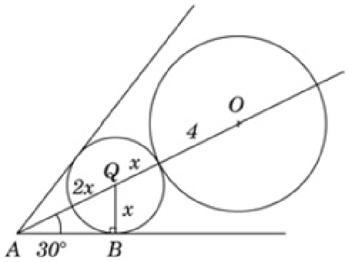
Если точка C лежит между A и B (см. рис.), то $AC + CB = AB$, или $2\sqrt{x} + 6\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{8}$, откуда $x = \frac{225}{64}$. Если точка C лежит на продолжении отрезка AB (см. рис.), то $CB - AC = AB$, или $6\sqrt{x} - 2\sqrt{x} = 15$. Тогда $\sqrt{x} = \frac{15}{4}$, откуда $x = \frac{225}{16}$.

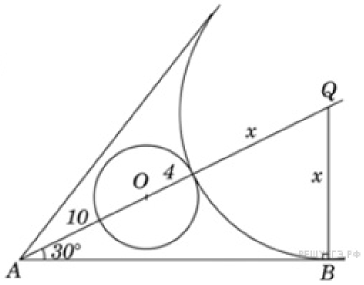
Ответ: $\frac{225}{16}$ или $\frac{225}{64}$.

5. Задание 16 № 507383. Центр O окружности радиуса 4 принадлежит биссектрисе угла величиной 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

Решение.

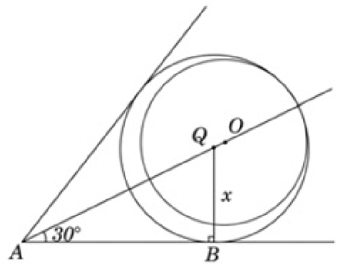
Пусть Q — центр искомой окружности радиуса x, B — точка касания одной из сторон данного угла с вершиной A. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle BAQ = 30°$. Из прямоугольного треугольника BAQ находим, что $AQ = 2QB = 2x$. Рассмотрим случай внешнего касания окружностей. Если точка Q лежит между A и O (см. рис.), то $AO = AQ + QO$, или $10 = 2x + (x + 4)$, откуда находим, что $x = 2$.

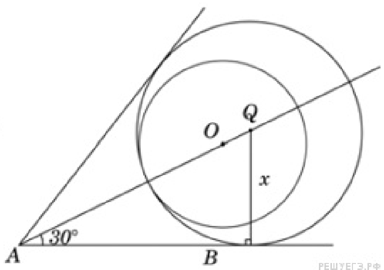




Если точка O лежит между A и Q (см. рис.), то $AQ = AO + OQ$, или $2x = 10 + (4 - x)$, откуда $x = 14$.

Рассмотрим случай внутреннего касания окружностей. Если точка Q лежит между A и O (см. рис.), то $AO = AQ + QO$, или $10 = 2x + (x - 4)$, откуда находим, что $x = \frac{14}{3}$.





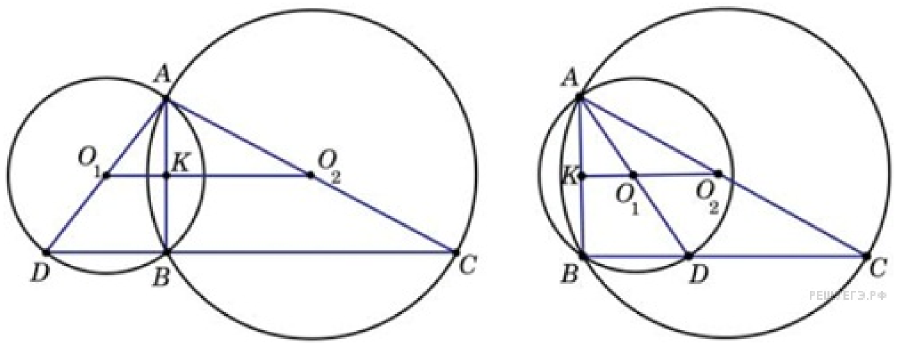
Если точка O лежит между A и Q (см. рис.), то $AQ = AO + OQ$, или $2x = 10 + (x\ \ 4)$, откуда $x = 6$.

Ответ: 2; 14; $\frac{14}{3}$; 6.

6. Задание 16 № 507385. Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку A проведены диаметры AC и AD этих окружностей. Найдите расстояние между центрами окружностей, если $BC = 7$, $BD = 3$.

Решение.

Пусть центры окружностей O_1 и O_2. Ясно, что O_1O_2 — средняя линия треугольника ADC. Проведём отрезок AB. Углы ABC и ABD — вписанные, и каждый из них опирается на диаметр соответствующей окружности. Следовательно, $\angle ABC = \angle ABD = 90°$. Таким образом, точки C, B и D лежат на одной прямой. Возможны два случая: точки C и D лежат по разные стороны от точки B или по одну сторону от точки B (см. рис.).



В первом случае $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{7+3}{2} = 5$. Во втором случае $O_1O_2 = \frac{1}{2}CD = \frac{7-3}{2}$.

Ответ: 5 или 2.

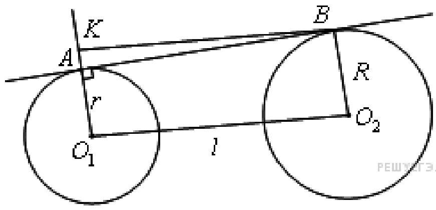
7. Задание 16 № 507653. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 31 и 17, а расстояние между центрами окружностей равно 50.

Решение.

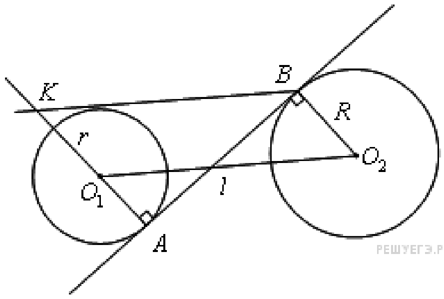
Пусть центры окружностей — точки O_1 и O_2, а A и B — точки касания. Проведем через точку B прямую, параллельную O_1O_2. Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим K. Треугольник KAB — прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

Случай 1. Окружности лежат по одну сторону от касательной.



Случай 2. Окружности лежат по разные стороны от касательной.



Обозначим радиусы окружностей R и r, расстояние между центрами окружностей l. В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$. Из прямоугольного треугольника KAB находим:
в первом случае

$$AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48,$$

во втором случае

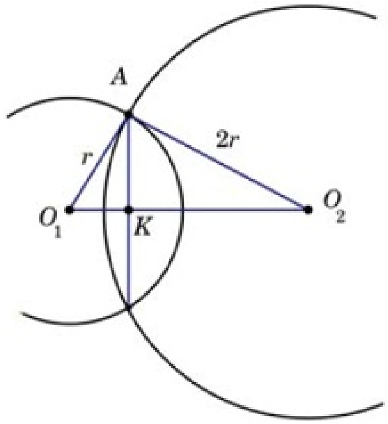
$$AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{50^2 - 48^2} = 14.$$

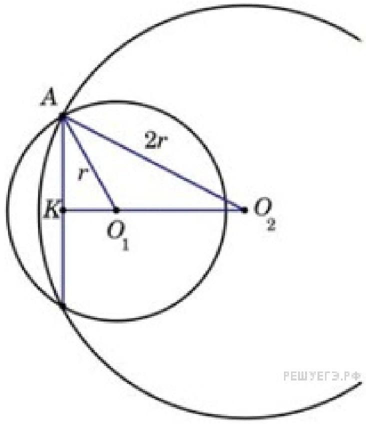
Ответ: 48 или 14.

8. Задание 16 № 507780. Расстояния от общей хорды двух пересекающихся окружностей до их центров относятся как 2 : 5. Общая хорда имеет длину $2\sqrt{3}$, а радиус одной из окружностей в два раза больше радиуса другой окружности. Найдите расстояние между центрами окружностей.

Решение.

Обозначим центры окружностей O_1 и O_2, один из концов общей хорды A, а точку пересечения общей хорды и прямой O_1O_2 обозначим K. Треугольники O_1KA и O_2KA прямоугольные с общим катетом AK, равным $\sqrt{3}$. Обозначим радиусы окружностей r и $2r$. Поскольку числитель в левой части меньше знаменателя, равенство $\frac{\sqrt{r^2-3}}{\sqrt{4r^2-3}}=\frac{5}{2}$ невозможно. Тогда $\frac{\sqrt{r^2-3}}{\sqrt{4r^2-3}}=\frac{2}{5}$. Из этого уравнения находим: $r^2=7$. Тогда $KO_1=\sqrt{7-3}=2$ и, значит, $KO_2=5$.





В зависимости от взаимного расположения окружностей (см. рисунки) $O_1O_2=2+5=7$ или $O_1O_2=5-2=3$.

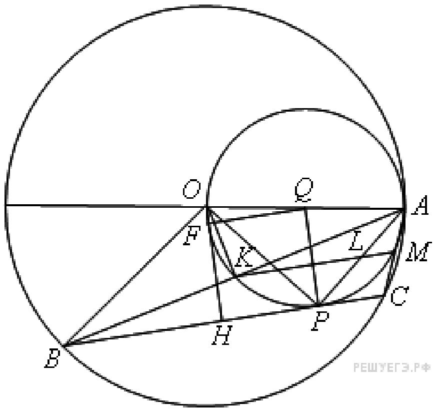
Ответ: 7 или 3.

9. Задание 16 № 510102. Две окружности касаются внутренним образом в точке A, причём меньшая проходит через центр большей. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке P. Хорды AB и AC пересекают меньшую окружность в точках K и M соответственно.

а) Докажите, что прямые KM и BC параллельны.

б) пусть L — точка пересечения отрезков KM и AP. Найдите AL, если радиус большей окружности равен 10, а $BC = 16$.

Решение.



а) Пусть O — центр большей окружности. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку касания, поэтому OA — диаметр меньшей окружности.

Точка K лежит на окружности с диаметром OA, значит, $\angle AKO = 90°$. Отрезок OK — перпендикуляр, опущенный из центра большей окружности на хорду AB. Поэтому K — середина AB. Аналогично, M — середина AC, поэтому KM — средняя линия треугольника ABC. Следовательно. прямые MK и BC параллельны.

б) Отпустим перпендикуляр OH на хорду BC. Тогда H — середина BC. Из прямоугольного треугольника OHB находим, что

$$OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = \sqrt{100 - 64} = 6.$$

Пусть Q — центр меньшей окружности. Тогда прямые QP и OH параллельны. Опустим перпендикуляр QF из центра меньшей окружности на OH. Тогда

$$OF = OH - FH = OH - QP = 6 - 5 = 1;$$
$$PH^2 = QF^2 = QO^2 - OF^2 = 25 - 1 = 24;$$
$$OP^2 = OH^2 + PH^2 = 36 + 24 = 60,$$

а из прямоугольного треугольника APO находим, что

$$AP = \sqrt{OA^2 - OP^2} = \sqrt{100 - 60} = 2\sqrt{10}.$$

Отрезок KM — средняя линия треугольника ABC, поэтому L средняя AP. Следовательно,

$$AL = \frac{1}{2}AP = \sqrt{10}.$$

Ответ: б) $\sqrt{10}$.

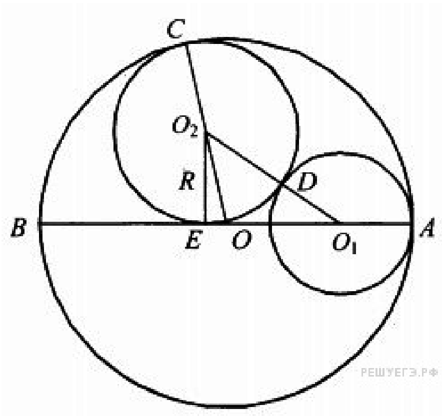
10. Задание 16 № 511108. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей их этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение.

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r, кающийся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 — центр окружности радиуса R, касающийся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 — в точке D, отрезка AB — в точке E. Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$.



Аналогично $OO_1 = OA - O_1A = OA - r$, $O_1O_2 = O_1D + O_2D = r + R$.

Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен

$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда

$$O_2E = R, \quad O_1O_2 = 2 + R,$$
$$OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4, \quad OO_2 = OC - O_2C = 6 - R.$$

Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$O_1E = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$
$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит,что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей изтрёх окружностей, то эта E совпадает с O).

Ответ: 3.

11. Задание 16 № 512885. Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 1 и 3. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 14$.

Решение.

Пусть O — центр третьей окружности, A — точка касания первой и третьей окружностей, B — второй и третьей, C — третьей окружности и прямой O_1O_2. Точки O_1, A и O лежат на одной прямой. Точки O_2, B и O также лежат на одной прямой.

Пусть радиус третьей окружности равен x, тогда $OO_1 = 1 + x,\ OO_2 = 3 + x.$

В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем $O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{1+2x}.$

В прямоугольном треугольнике OCO_2 имеем $O_2C = \sqrt{OO_2^2 - OC^2} = \sqrt{9+6x}.$

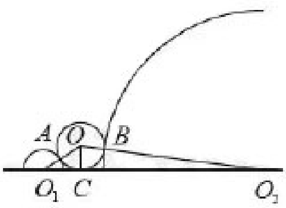


Рис. 1

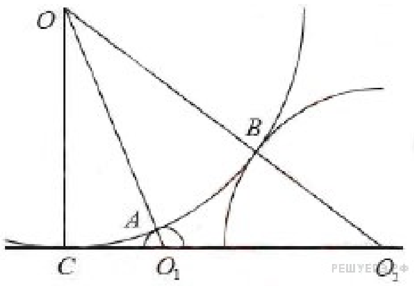


Рис. 2

Возможны два случая. первый случай: точка C лежит между точками O_1 и O_2 (рисунок 1), тогда

$$O_1O_2 = O_1C + O_2C;$$
$$\sqrt{1+2x} + \sqrt{9+6x} = 14;$$
$$\sqrt{(1+2x)(9+6x)} = 93 - 4x,$$

откуда $x = 12$.

Второй случай: точка O_1 лежит между точками C и O_2 (рисунок 2), тогда

$$O_1O_2 = O_2C - O_1C;$$
$$\sqrt{9+6x} - \sqrt{1+2x} = 14;$$
$$\sqrt{(1+2x)(9+6x)} = 4x - 93,$$

откуда $x = 180$.

Ответ: 12 или 180.

12. Задание 16 № 512891. Радиусы окружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно 2 и 10. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных и прямой O_1O_2, если $O_1O_2 = 28$.

Решение.

Пусть O — центр третьей окружности, A — точка касания первой и третьей окружностей, B — второй и третьей, C — третьей окружности и прямой O_1O_2. Точки O_1, A и O лежат на одной прямой. Точки O_2, B и O также лежат на одной прямой.

Пусть радиус третьей окружности равен x, тогда $OO_1 = 2 + x,\ OO_2 = 10 + x.$

В прямоугольном треугольнике OCO_1 имеем $O_1C = \sqrt{OO_1^2 - OC^2} = \sqrt{4+4x}.$

В прямоугольном треугольнике OCO_2 имеем $O_2C = \sqrt{OO_2^2 - OC^2} = \sqrt{100+20x}.$

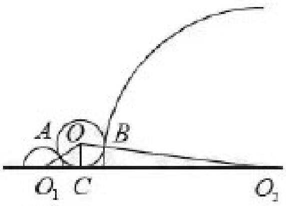


Рис. 1

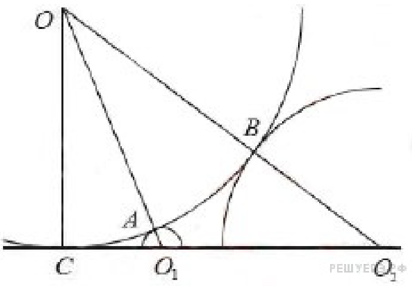


Рис. 2

Возможны два случая. первый случай: точка C лежит между точками O_1 и O_2 (рисунок 1), тогда

$$O_1O_2 = O_1C + O_2C;$$
$$\sqrt{4+4x} + \sqrt{100+20x} = 28;$$
$$\sqrt{(1+x)(25+5x)} = 85 - 3x,$$

откуда $x = 15$.

Второй случай: точка O_1 лежит между точками C и O_2 (рисунок 2), тогда

$$O_1O_2 = O_2C - O_1C;$$
$$\sqrt{100+20x} - \sqrt{4+4x} = 28;$$
$$\sqrt{(1+x)(25+5x)} = 3x - 85,$$

откуда $x = 120$.

Ответ: 15 или 120.

13. Задание 16 № 501712. Окружности радиусов 11 и 21 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются внешним образом в точке C, AO_1 и BO_2 — параллельные радиусы этих окружностей, причём $\angle AO_1O_2 = 60°$. Найдите AB.

Решение.

Точки O_2, O_2 и C лежат на одной прямой.

Возможны два случая. Первый случай: точки A и B лежат по одну сторону от прямой O_1O_2 (рис. 1). Отрезок MA параллелен прямой O_1O_2 (точка M принадлежит радиусу BO_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM = O_1O_2 = 32$, $O_1A = O_2M = 11$, $\angle O_2MA = \angle AO_1O_2 = 60°$.

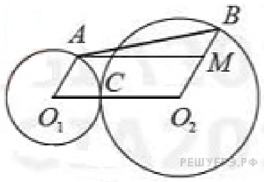


Рис. 1

В треугольнике AMB имеем $MB = 10$, $AM = 32$, $\angle AMB = 120°$, откуда

$$AB = \sqrt{AM^2 + MB^2 - 2 \cdot AM \cdot MB \cdot \cos\angle AMB} = 38.$$

Второй случай: точки A и B лежат по разные стороны от отрезку O_1O_2 (рис. 1). Отрезок AM параллелен прямой O_1O_2 (точка M лежит на продолжении радиуса BO_2 за точку O_2), следовательно, O_1O_2MA — параллелограмм: $AM = O_1O_2 = 32$, $O_1A = O_2M = 11$, $\angle O_2MA = \angle AO_1O_2 = 60°$.

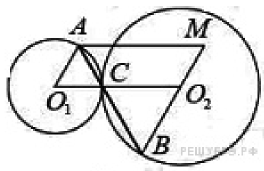


Рис. 2

В треугольнике AMB имеем $MB = 32$, $AM = 32$, $\angle AMB = 60°$, значит, треугольник AMB — правильный, откуда $AB = 32$.

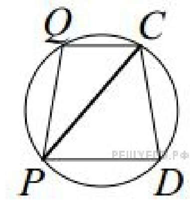
Ответ: 32 или 38.

14. Задание 16 № 502077. В окружности проведены хорды PQ и CD, причём $PQ = PD = CD = 8$, $CQ = 6$. Найдите CP.

Решение.

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда $\angle PQC = 180° - \angle PDC$.

В треугольниках PQC и PDC



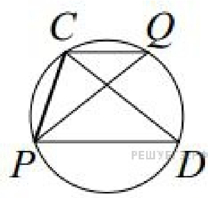
$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 100 + 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 128 - 128 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{1}{8}$; $PC = 4\sqrt{7}$.

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP (рис. 2), тогда $\angle PQC = \angle PDC$.

В треугольниках PQC и PDC



$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 100 - 96 \cdot \cos\angle PDC;$$

$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 128 - 128 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{7}{8}$; $PC = 4$.

Ответ: 4 или $4\sqrt{7}$.

15. Задание 16 № 502097. В окружности проведены хорды PQ и CD, причём $PQ = PD = CD = 10$, $CQ = 6$. Найдите CP.

Решение.

Решение.

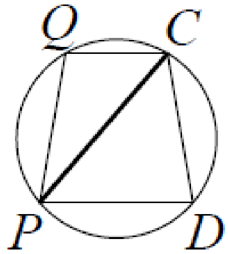


Рис. 1

Возможны два случая. Первый случай: точки D и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CP (рис. 1), тогда $\angle PQC = 180° - \angle PDC$.

В треугольниках PQC и PDC:

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 136 + 120 \cdot \cos\angle PDC;$$
$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 200 - 200 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{1}{5}$; $PC = 4\sqrt{10}$.

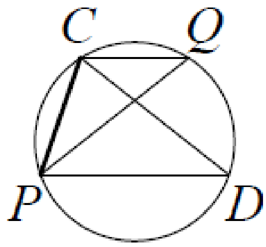


Рис. 2

Второй случай: точки D и Q лежат в одной полуплоскости относительно прямой CP *(рис. 2),* тогда $\angle PQC = \angle PDC$. В треугольниках PQC и PDC

$$PC^2 = PQ^2 + QC^2 - 2 \cdot PQ \cdot QC \cdot \cos\angle PQC = 136 - 120 \cdot \cos\angle PDC;$$
$$PC^2 = PD^2 + DC^2 - 2 \cdot PD \cdot DC \cdot \cos\angle PDC = 200 - 200 \cdot \cos\angle PDC,$$

откуда $\cos\angle PDC = \frac{4}{5}$; $PC = 2\sqrt{10}$.

Ответ: $2\sqrt{10}; 4\sqrt{10}$

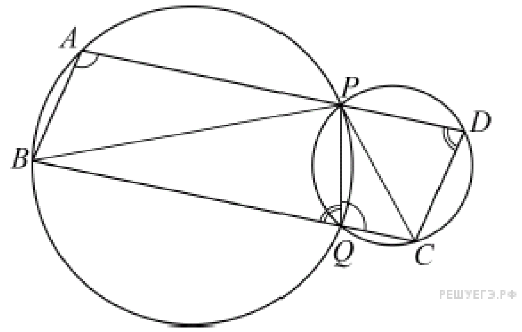
16. Задание 16 № 504243. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $BP : PC$, если радиус первой окружности вдвое больше радиуса второй.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAD = \angle PAB = \alpha$. Поскольку $ABPQ$ и $CDPQ$ — вписанные четырёхугольники.



$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha,$$

$$\angle CQP = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha,$$

$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha.$$

Значит, $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, и поэтому $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.

б) Пусть R — радиус второй (меньшей) окружности. Тогда радиус большей окружности равен 2 R. По теореме синусов:

$$BP = 2 \cdot 2R \sin \angle BQP = 4R \sin(180^\circ - \alpha) = 4R \sin \alpha,$$

$$PC = 2R \sin \angle CQP = 2R \sin \alpha.$$

Следовательно,

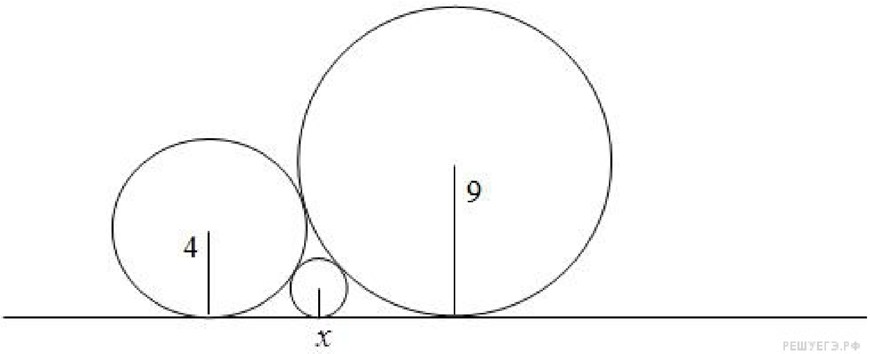
$$\frac{BP}{PC} = \frac{4R \sin \alpha}{2R \sin \alpha} = 2.$$

Ответ: 2.

17. Задание 16 № 484607. Две окружности, радиусы которых равны 9 и 4, касаются внешним образом. Найдите радиус третьей окружности, которая касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной.

Решение.
Возможны два случая взаимного расположения прямой и окружностей.

Первый случай. Пусть окружность с центром O_1 имеет радиус $r = 4$, окружность центром O_2 имеет радиус $R = 9$, а окружность с центром O имеет радиус x и касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной *a.*



Обозначим через A, B и C точки касания окружностей с прямой a, а через K, M и N — точки касания самих окружностей. Отрезки O_1A, O_2B и OC перпендикулярны прямой a как радиусы, проведенные в точки касания.

Опустим перпендикуляр O_1D из центра меньшей из данных окружностей на радиус O_2B большей окружности и перпендикуляры OE и OF из точки O на радиусы O_1A и O_2B. Поскольку $O_1A \parallel O_2B$, точки E, O и F лежат на одной прямой, а так как O_1DFE — прямоугольник, то $O_1D = EF$.

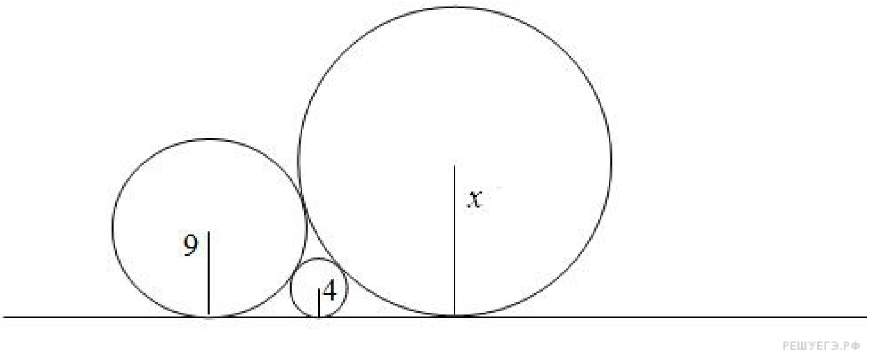
Кроме того,

$$O_1O = r + x,\ O_1O_2 = r + R,\ O_2O = R + x,\ O_1E = r - x,\ O_2F = R - x,\ O_2D = R - r,\ O_1D = EF = EO + OF.$$

Далее имеем:

$$\sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} = \sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2} + \sqrt{(R+x)^2-(R-x)^2} \Leftrightarrow$$
$$2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{rx} + 2\sqrt{Rx} \Leftrightarrow 2\cdot 3 = 2\sqrt{x} + 3\sqrt{x} \Leftrightarrow x = 1{,}44.$$

Второй случай. Пусть теперь окружность с центром O_1 имеет радиус $R = 9$, окружность с центром O имеет радиус $r = 4$, а окружность центром O_2 имеет радиус x и касается двух данных окружностей и их общей внешней касательной *a.*



Аналогично случаю 1 имеем:

$$\sqrt{(x+R)^2-(x-R)^2} = \sqrt{(R+r)^2-(R-r)^2} + \sqrt{(x+r)^2-(x-r)^2} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2\sqrt{Rx} = 2\sqrt{Rr} + 2\sqrt{rx} \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 2\sqrt{x} + 2\cdot 3 \Leftrightarrow x = 36.$$

Ответ: 1,44 или 36.

18. Задание 16 № 484609. Прямая касается окружностей радиусов R и r в точках A и B. Известно, что расстояние между центрами равно a причем $r < R$ и $r + R < a$. Найдите AB.

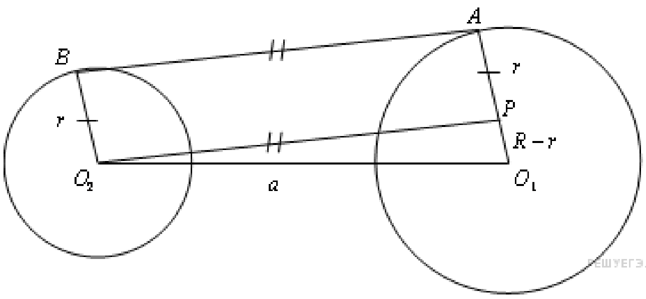
Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса R, O_2 — центр окружности радиуса r, A и B, соответственно, — точки касания окружностей с их общей внешней касательной, C и D, соответственно, — с внутренней, P — основание перпендикуляра, опущенного из O_2 на O_1A.

Из прямоугольного треугольника O_1O_2P находим, что

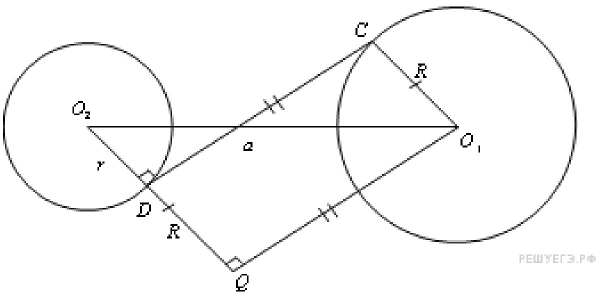
$$O_2P = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1P^2} = \sqrt{a^2 - (R-r)^2},$$

а так как APO_2B — прямоугольник, то $AB = O_2P = \sqrt{a^2 - (R-r)^2}$.



Пусть Q — основание перпендикуляра, опущенного из O_1 на продолжение радиуса O_2D.

Тогда $O_1Q = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2Q^2} = \sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

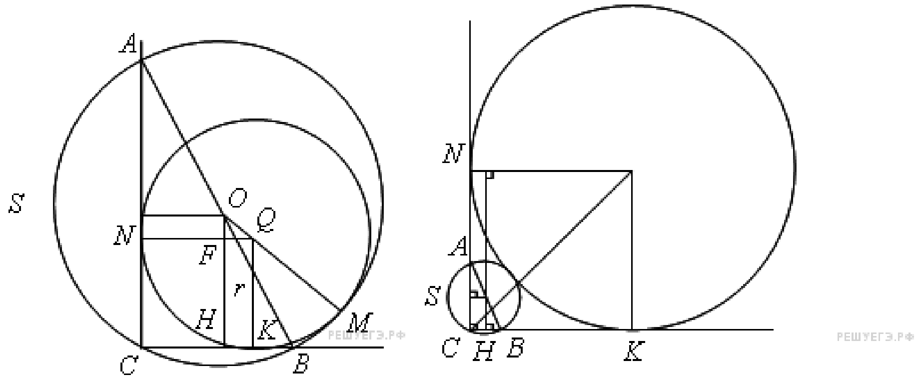


Ответ: $\sqrt{a^2 - (R-r)^2}$ или $\sqrt{a^2 - (R+r)^2}$.

19. Задание 16 № 484616. Окружность S проходит через вершину C прямого угла и пресекает его стороны в точках, удаленных от вершины C на расстояния 6 и 8. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающийся окружности S.

Решение.

Пусть окружность S с центром O и радиусом R пересекает стороны данного прямого угла в точках A и B, $AC = 8$, $BC = 6$, искомая окружность с центром Q касается сторон и BC угла ACB в точках N и K соответственно, а окружности S — в точке M.



Точка O — центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника ABC, поэтому O — середина его гипотенузы AB.

$$R = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5.$$

Линия центров двух касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому точки M, O и Q лежат на одной прямой. Опустим перпендикуляр OH из центра окружности S на прямую BC. Тогда OH — средняя линия треугольника ABC поэтому $OH = \frac{1}{2}AC = 4$ и $CH = \frac{1}{2}BC = 3$, а так как центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, то $\angle QCK = 45°$, поэтому $CK = QK = r$.

Опустим перпендикуляр QF из центра искомой окружности на прямую OH. Тогда

$$OF = |OH - FH| = |OH - QK| = |4 - r|, \quad QF = KH = |r - 3|.$$

Предположим, что искомая окружность и окружность касаются внутренним образом. Тогда

$$OQ = OM - QM = R - r = 5 - r.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник OFQ. По теореме Пифагора $OQ^2 = OF^2 + QF^2$ или

$$(5 - r)^2 = (4 - r)^2 + (r - 3)^2, \text{ откуда находим, что } r = 4.$$

Если же искомая окружность касается данной внешним образом, то

$$OQ = OM + QM = R + r = 5 + r.$$

Тогда из соответствующего уравнения $(5 + r)^2 = (4 - r)^2 + (r - 3)^2$ находим, что $r = 24$.

Ответ: 4 или 24.

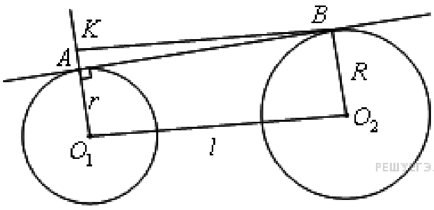
20. Задание 16 № 484619. Найдите длину отрезка общей касательной к двум окружностям, заключенного между точками касания, если радиусы окружностей равны 23 и 7, а расстояние между центрами окружностей равно 34.

Решение.

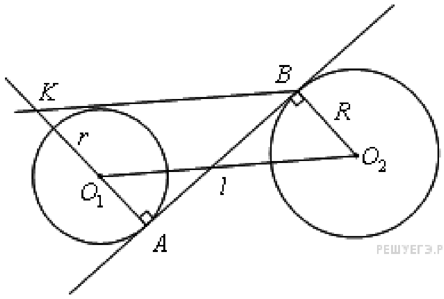
Пусть центры окружностей — точки O_1 и O_2, а A и B — точки касания. Проведем через точку B прямую, параллельную O_1O_2. Точку пересечения этой прямой с O_1A обозначим K. Треугольник KAB — прямоугольный.

Возможны два случая расположения окружностей и общей касательной.

Случай 1. Окружности лежат по одну сторону от касательной.



Случай 2. Окружности лежат по разные стороны от касательной.



Обозначим радиусы окружностей R и r, расстояние между центрами окружностей l. В первом случае $AK = R - r$, во втором случае $AK = R + r$. Из прямоугольного треугольника KAB находим:
в первом случае

$$AB = \sqrt{l^2 - (R-r)^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30,$$

во втором случае

$$AB = \sqrt{l^2 - (R+r)^2} = \sqrt{34^2 - 30^2} = 16.$$

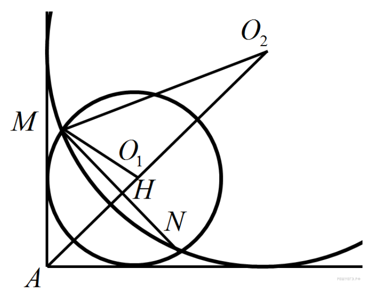
Ответ: 30 или 16.

21. Задание 16 № 501609. Окружность радиуса $6\sqrt{2}$ вписана в прямой угол. Вторая окружность также вписана в этот угол и пересекается с первой в точках M и N. Известно, что расстояние между центрами окружностей равно 8. Найдите MN.

Решение.

Пусть O_1 — центр окружности радиуса $6\sqrt{2}$, O_2 — второй окружности, A — вершина прямого угла, тогда

$$O_1A = \frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}$$



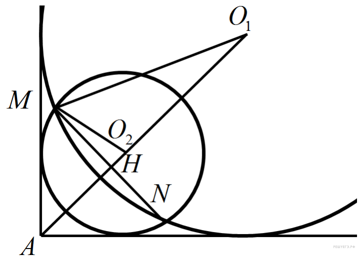
Возможны два случая. Первый случай: точка O_1 лежит между точками A и O_2 (рис.1), тогда $O_2A = O_1A + O_1O_2 = 20$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 10\sqrt{2}$.

В треугольнике O_1MO_2 имеем: $O_1O_2 = 8,\ O_1M = 6\sqrt{2},\ O_2M = 10\sqrt{2}.$ Поскольку общая хорда MN окружностей перпендикулярна линии центров O_1O_2 и делится ею пополам, высота MN треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

Полупериметр треугольника O_1MO_2 равен $p = 4 + 8\sqrt{2}$, тогда для площади треугольника имеем:

$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{14},$$

откуда $MN = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{14}, MN = 2MH = 4\sqrt{14}.$



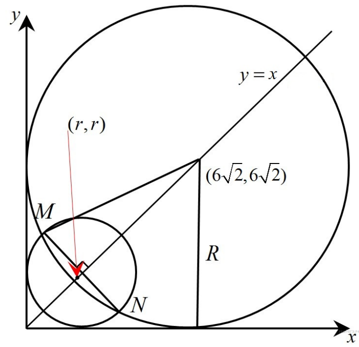
Второй случай: точка O_2 лежит между точками A и O_1 (рис.2), тогда $O_2A = O_1A - O_1O_2 = 4$, откуда радиус второй окружности $O_2M = 2\sqrt{2}$. В треугольнике O_1MO_2 имеем $O_1O_2 = 8$, $O_1M = 6\sqrt{2}$, $O_2M = 2\sqrt{2}$. Аналогично первому случаю, высота MN треугольника O_1MO_2 равна половине MN.

В треугольнике O_1MO_2 полупериметр:

$$p = \frac{O_1O_2 + O_1M + O_2M}{2} = 4 + 4\sqrt{2},$$
$$S_{O_1MO_2} = \sqrt{p(p - O_1O_2)(p - O_1M)(p - O_2M)} = 8\sqrt{2},$$

откуда $MN = \dfrac{2S_{O_1MO_2}}{O_1O_2} = 2\sqrt{2}, MN = 2MH = 4\sqrt{2}.$

Приведём решение задачи методом координат.



Заметим, что центр окружности лежит на биссектрисе прямого угла, поэтому расстояние между центрами окружностей радиусов R и r равно $R\sqrt{2} - r\sqrt{2}$, где $R > r$. По условию это расстояние равно 8, поэтому если радиус большей окружности $R = 6\sqrt{2}$ (случай 1), то:

$$r = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2} - 8}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

а если радиус меньшей окружности $r = 6\sqrt{2}$ (случай 2), то:

$$R = \frac{6\sqrt{2}\sqrt{2} + 8}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}.$$

Поместим начало системы координат в вершине прямого угла, а координатные оси расположим вдоль его сторон. Тогда в случае 1 координаты точек пересечения окружностей можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} (x - 2\sqrt{2})^2 + (y - 2\sqrt{2})^2 = (2\sqrt{2})^2, \\ (x - 6\sqrt{2})^2 + (y - 6\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2, \end{cases}$$

решая которую, находим: $M(2\sqrt{2} - 2;\ 2\sqrt{2} + 2), N(2\sqrt{2} + 2;\ 2\sqrt{2} - 2)$. Тогда по формуле расстояния между двумя точками находим: $MN^2 = (2\sqrt{2} - 2 - 2\sqrt{2} - 2)^2 + (2\sqrt{2} + 2 - 2\sqrt{2} + 2)^2 = 4^2 + 4^2 = 32,$ откуда $MN = 4\sqrt{2}.$

В случае 2 имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (x - 6\sqrt{2})^2 + (y - 6\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2, \\ (x - 10\sqrt{2})^2 + (y - 10\sqrt{2})^2 = (10\sqrt{2})^2, \end{cases}$$

решая которую, находим: $M(4\sqrt{2} - 2\sqrt{7};\ 4\sqrt{2} + 2\sqrt{7}), N(4\sqrt{2} + 2\sqrt{7};\ 4\sqrt{2} - 2\sqrt{7})$. Далее находим

$$MN^2 = (4\sqrt{7})^2 + (-4\sqrt{7})^2 = 122 + 112 = 224,$$

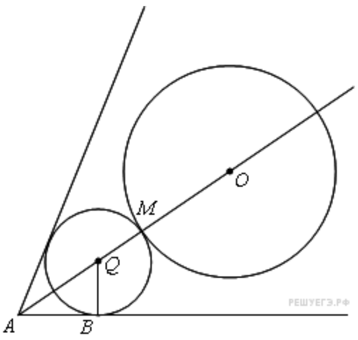
откуда $MN = 4\sqrt{14}.$

Ответ: $4\sqrt{2}$ или $4\sqrt{14}$.

22. Задание 16 № 484626. Дана окружность радиуса 4 с центром в точке O, расположенной на биссектрисе угла, равного 60°. Найдите радиус окружности, вписанной в данный угол и касающейся данной окружности внешним образом, если известно, что расстояние от точки O до вершины угла равно 10.

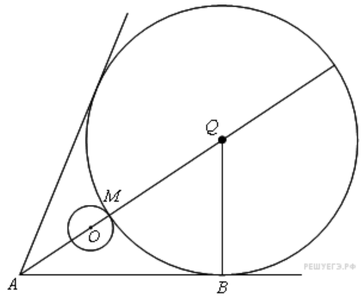
Решение.

Пусть Q — центр искомой окружности радиуса x, M — точка касания с данной окружностью, B — точка касания с одной из сторон данного угла с вершиной A. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на биссектрисе угла, поэтому $\angle BAQ = 30°$. Из прямоугольного треугольника BAQ находим, что $AQ = 2QB = 2x$. Пусть точка Q лежит между A и O (рис. 1).



Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому $AO = AQ + QM + MO$, или $10 = 2x + x + 4$, откуда находим, что $x = 2$.

Пусть точка O лежит между A и Q (рис. 2),



тогда $AQ = AO + OM + MQ$, или $2x = 10 + x + 4$, откуда $x = 14$.

Ответ: 2 или 14.