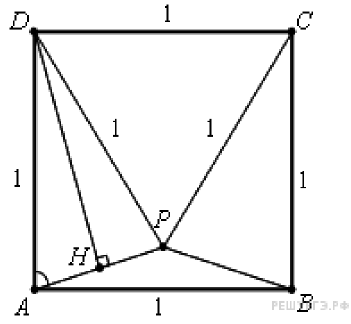
Многоугольники и их свойства

1. Задание 16 № 484621. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ADP, проведённую из вершины D, если известно, что сторона квадрата равна 1.

Решение.

Пусть точки P и A лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 1). Треугольник ADP — равнобедренный ($AD = DC = DP = 1$), поэтому

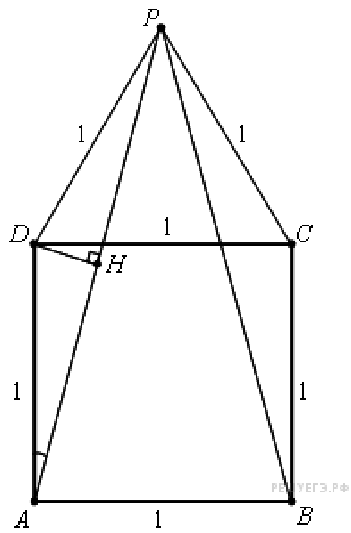


$$\angle DAP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ADP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)) = 75^\circ.$$

Пусть DH — высота треугольника ADP. Из прямоугольного треугольника ADH находим, что

$$DH = AD\sin\angle DAH = 1\cdot\sin 75^\circ = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Пусть теперь точки P и A лежат но разные стороны от прямой CD (рис. 2). Треугольник ADP — равнобедренный ($AD = DC = DP = 1$), поэтому



$$\angle DAP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle PDA) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)) = 15^\circ.$$

Из прямоугольного треугольника ADH находим, что

$$DH = AD\sin\angle DAH = 1\cdot\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ или $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Примечание.

На наш взгляд, в ответе можно было оставить выражения $\cos 15^\circ$ и $\sin 15^\circ$. Тем не менее, на примере вычисления значения $\sin 15^\circ$ укажем два способа нахождения этих величин:

$$\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

или, используя формулу половинного угла:

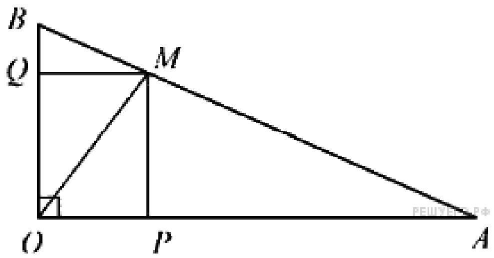
$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

Заметим, кстати, что одно из возможных доказательств равенства полученных выражения сводится к выделению полного квадрата из-под знака корня:

$$\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} = \sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2}} = \frac{|1-\sqrt{3}|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}.$$

2. Задание 16 № 507353. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 4 и 3. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 32. Найдите длину отрезка этой прямой, заключённого внутри угла.

Решение.



Пусть O — вершина данного угла, P и Q — проекции точки M на стороны угла, $MP = 4$, $MQ = 3$, A и B — точки, в которых прямая, проходящая через точку M, пересекает стороны соответственно OP и OQ данного прямого угла. Обозначим $OA = x$, $OB = y$. Тогда

$$S_{AOB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}xy = 32.$$

С другой стороны,

$$S_{AOB} = S_{AOM} + S_{BOM} = \frac{1}{2}OA \cdot MP + \frac{1}{2}OB \cdot MQ = \frac{1}{2}x \cdot 4 + \frac{1}{2}y \cdot 3 = 2x + \frac{3}{2}y = 32$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{1}{2}xy = 32, \\ 2x + \frac{3}{2}y = 32 \end{cases}$$

находим, что $x = 4$, $y = 16$ или $x = 12$, $y = \frac{16}{3}$. Следовательно,

$$AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4^2 + 16^2} = 4\sqrt{17}$$

или

$$AB = \sqrt{12^2 + \left(\frac{16}{3}\right)^2} = \frac{4}{3}\sqrt{97}.$$

Ответ: $4\sqrt{17}$ или $\frac{4\sqrt{97}}{3}$.

3. Задание 16 № 507368. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 4. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

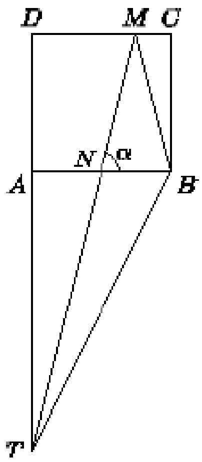
Решение.

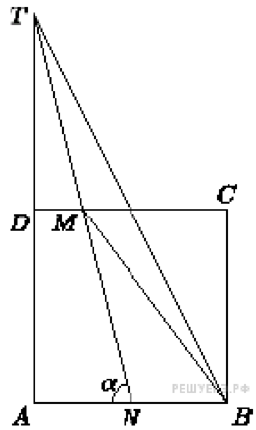
Возможны два случая: точка T лежит на продолжении стороны AD за точку A или на продолжении стороны AD за точку D. Пусть α — угол между прямыми MT и AB.

Рассмотрим первый случай. Заметим, что $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BMN}$. Отрезок $AN = 4$, поэтому $AT = AN \operatorname{tg} \alpha = 16$. Значит, $S_{BNT} = \frac{1}{2} \cdot BN \cdot AT = 32$. Кроме того, $S_{BMN} = \frac{1}{2}BN \cdot BC = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 32 + 16 = 48$.

Во втором случае $S_{BMT} = S_{BNT} - S_{BMN}$. По-прежнему $AT = 16$, $S_{BNT} = 32$, $S_{BMN} = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 32 - 16 = 16$.

Ответ: 16 или 48.

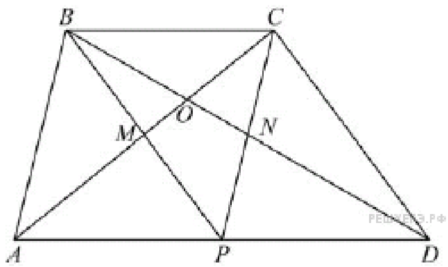




4. Задание 16 № 507369. Площадь трапеции $ABCD$ равна 90, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Решение.

Пусть h — высота трапеции, а основания равны a и $2a$. Тогда

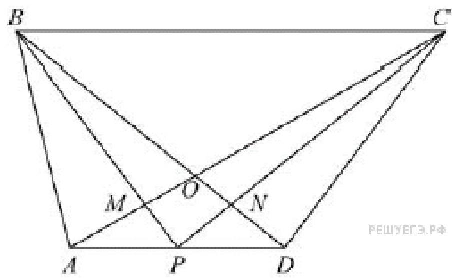


$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=90.$$

Откуда $ah=60$. Пусть $AD=2a$, $BC=a$. Четырёхугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP соответственно, значит, CM и BN — медианы треугольника BPC. Следовательно:

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\Delta BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

Пусть теперь $BC=2a$, $AD=a$. Пусть $AM=3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом подобия 2, а тереугольник AMP — треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC}=\frac{1}{4}$. Тогда



$$MC=4AM=12t,\ AC=AM+MC=3t+12t=15t,$$

$$AO=\frac{1}{3}AC=5t,\ \frac{AM}{AO}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO}=\frac{3}{5}$. Высота треугольника AOD, проведённая из вершины O, равна $\frac{1}{3}h$, значит:

$$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}\cdot 60=10.$$

$$S_{\Delta DNP}=S_{\Delta AMP}=\frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{\Delta AOD}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 10=3.$$

Следовательно,

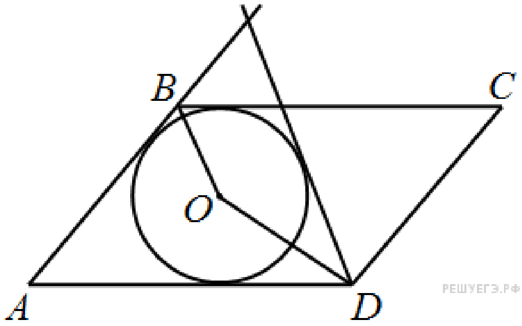
$$S_{OMPN}=S_{\Delta AOD}-S_{\Delta AMP}-S_{\Delta DNP}=10-3-3=4.$$

Ответ: 10 или 4.

5. Задание 16 № 507370. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 2$, $BC = 3$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 3 и 2 соответственно. Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \dfrac{3 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



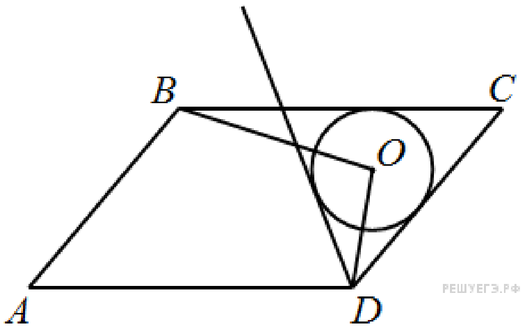
Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4}.$$

Для треугольника со стороной 2 радиус равен $r = \dfrac{2 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{13\sqrt{3}}{6}.$$



Ответ: $\dfrac{5\sqrt{3}}{4}$ или $\dfrac{13\sqrt{3}}{6}$.

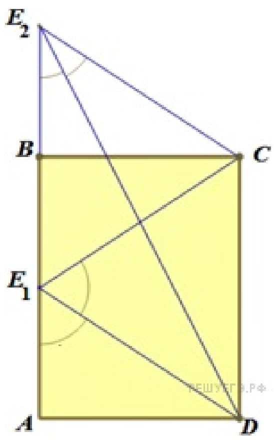
6. Задание 16 № 507386. В прямоугольнике $ABCD$ $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка E на прямой AB выбрана так, что $\angle AED = \angle DEC$. Найдите AE.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. По свойству параллельных прямых $\angle AED = \angle EDC$. Следовательно, треугольник DEC равнобедренный, и $EC = CD = 2$. Получаем, что треугольник EBC — прямоугольный с гипотенузой $EC = 2$ и катетом $BC = \sqrt{3}$. По теореме Пифагора $BE = 1$. Точка E может лежать как по одну, так и по другую сторону от точки B.

Если точка E лежит между A и B (точка E_1 на рисунке), то $AE = 1$.

Если точка B лежит между A и E (точка E_2 на рисунке), то $AE = 3$.

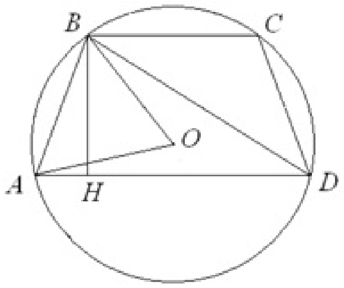


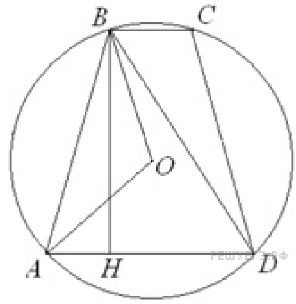
Ответ: 1 или 3.

7. Задание 16 № 507387. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность с центром O. Найдите высоту трапеции, если её средняя линия равна 3 и $\sin\angle AOB = \frac{3}{5}$.

Решение.

Пусть $\angle\alpha = \angle AOB$. Изобразим две ситуации: когда угол α, острый и когда α — тупой.





Проведём высоту BH и диагональ BD. Отрезок HD равен средней линии. Из прямоугольного треугольника BHD найдём высоту: $BH = HD \cdot \operatorname{tg}\angle BDA = 3\operatorname{tg}\frac{\angle\alpha}{2}$. Последнее равенство верно, поскольку вписанный угол BDA в два раза меньше центрального угла AOB. Воспользуемся формулой тангенса половинного угла: $BH = 3\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$.

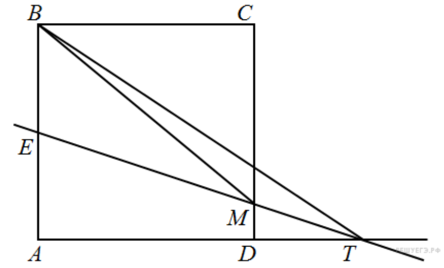
Если $\angle\alpha < 90^\circ$, то $\cos\angle\alpha = \frac{4}{5}$, и $BH = 3\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1+\frac{4}{5}} = 1$.

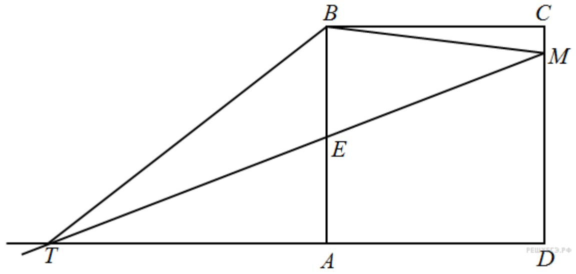
Если $\angle\alpha > 90^\circ$, то $\cos\angle\alpha = -\frac{4}{5}$, и $BH = 3\cdot\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{4}{5}} = 9$.

Ответ: 1 или 9.

8. Задание 16 № 507392. Через середину стороны AB квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образующая с прямой AB угол α, tg $\alpha = 3$. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 4.

Решение.





Рассмотрим два случая (см. рис. 1 и рис. 2):

1) $S_{\triangle BMT} = S_{\triangle BTE} - S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT - \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha - AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 - 4) = 2.$

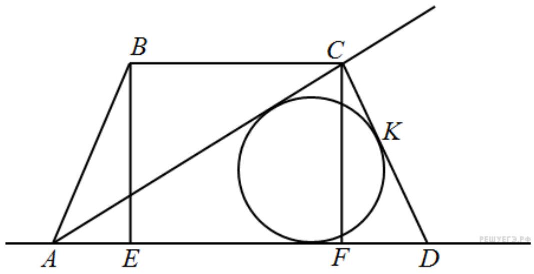
2) $S_{\triangle BMT} = S_{\triangle BTE} + S_{\triangle BME} = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AT + \frac{1}{2} \cdot BE \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot BE \cdot (AE \cdot \operatorname{tg} \alpha + AD) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (2 \cdot 3 + 4) = 10.$

Ответ: 2 или 10.

9. Задание 16 № 507393. Дана трапеция $ABCD$, основания которой $BC = 44$, $AD = 100$; $AB = CD = 35$. Окружность, касающаяся прямых AD и AC, касается стороны CD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Решение.

Найдем диагональ AC. Опустим из вершин B и C на сторону AD перпендикуляры BE и CF соответственно. $AE = FD$, так как трапеция равнобедренная. $BCFE$ — прямоугольник.



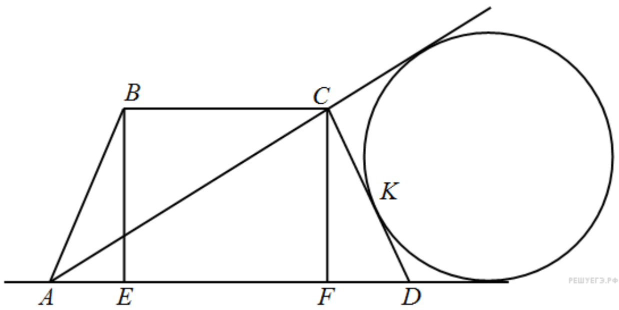
$$AE = \frac{100-44}{2} = 28, \quad BE = \sqrt{35^2 - 28^2} = 21,$$
$$AC = \sqrt{AF^2 + CF^2} = \sqrt{72^2 + 21^2} = 75.$$

Возможны две геометрические конфигурации.

Первый вариант: окружность вписана в треугольник ACD:

$$CK = \frac{AC + CD - AD}{2} = \frac{75 + 35 - 100}{2} = 5.$$

Второй вариант: окружность касается продолжения сторон AC и AD за точками C и D соответственно и отрезка CD:



$$CK = \frac{AD + CD - AC}{2} = \frac{100 + 35 - 75}{2} = 30.$$

Ответ: 5 или 30.

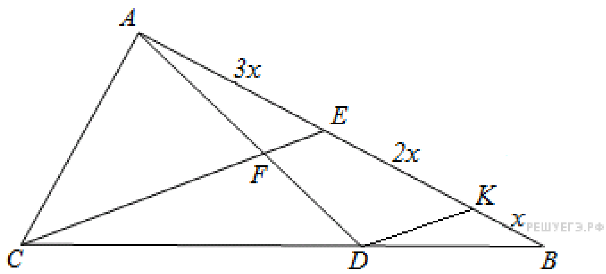
Примечание.

Решение опирается на известную теорему: расстояние от вершины треугольника до точки касания исходящей из этой вершины стороны со вписанной в треугольник окружностью, равно разности полупериметра треугольника и стороны, противолежащей этой вершине.

10. Задание 16 № 507394. В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что $BD : DC = 1 : 2$. Медиана CE пересекает отрезок AD в точке F. Какую часть площади треугольника ABC составляет площадь треугольника AEF?

Решение.

Возьмем точку K на AB так, что $DK \parallel EC$. Если $BK = x$, то $KE = 2x$ и $EA = EB = 3x$. Значит,

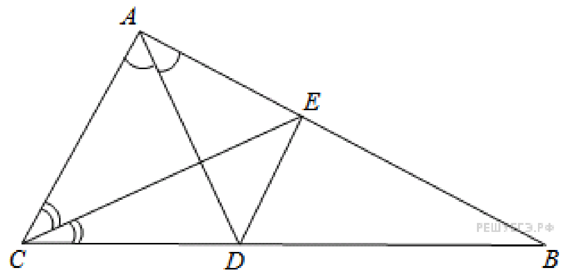


$$S_{AEF} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \cdot S_{ADK} = \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot S_{ABD} =$$
$$= \frac{9}{25} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{10} \cdot S_{ABC}.$$

Ответ: $\frac{1}{10}$.

11. Задание 16 № 507395. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CE. Найдите длину отрезка DE, если $AC = 6$, $AE = 2$, $CD = 3$.

Решение.



Обозначим $BD = y, BE = z$. Тогда по свойству биссектрисы: $\frac{3+y}{6} = \frac{z}{2}$ и $\frac{z+2}{6} = \frac{y}{3}$, откуда

$$\begin{cases} y+3=3z, \\ z+2=2y; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=1,6, \\ y=1,8. \end{cases}$$

Получаем:

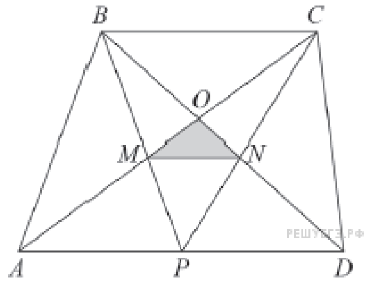
$$AB = 3,6, BC = 4,8; \quad \cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{3,6^2+4,8^2-6^2}{2\cdot 3,6\cdot 4,8} = 0.$$

Значит, $\angle B = 90^\circ$. Тогда $ED^2 = y^2+z^2 = 1,6^2+1,8^2 = 5,8$.

Ответ: $\sqrt{5,8}$.

12. Задание 16 № 507641. Площадь трапеции $ABCD$ равна 560. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции в полтора раза больше другого.

Решение.



Пусть $AD=\frac{3}{2}BC$ (рис. 1). Положим $BC=2a,\ AD=3a,\ OC=x.$ Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD}=\frac{2}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP}=\frac{2a}{\frac{3a}{2}}=\frac{4}{3}$, поэтому

$$OA=\frac{2}{3}x;\ AC=OA+OC=\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x;\ MC=\frac{4}{7}AC=\frac{10}{7}x;$$
$$OM=MC-OC=\frac{10}{7}x-x=\frac{3}{7}x,$$

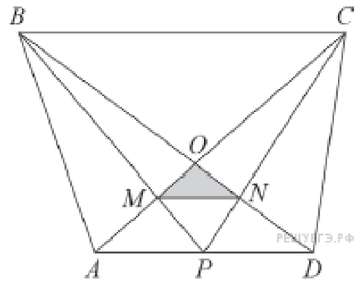
значит, $\frac{OM}{OA}=\frac{3}{7}x:\left(\frac{3}{2}x\right)=\frac{2}{7}$. Аналогично $\frac{ON}{OD}=\frac{2}{7}$.

Пусть h — высота трапеции. Тогда площадь трапеции

$$\frac{2a+3a}{2}h=\frac{5}{2}ah=560,\ ah=224,$$
$$S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}AD\cdot\frac{3}{5}h=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{5}h=\frac{9}{10}ah=\frac{9}{10}\cdot 224=\frac{9\cdot 112}{5},$$

а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{2}{7}$, то

$$S_{\triangle MON}=\left(\frac{2}{7}\right)^2 S_{\triangle AOD}=\frac{4}{7\cdot 7}\cdot\frac{9\cdot 112}{5}=\frac{576}{35}.$$



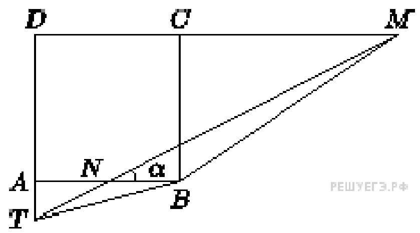
Рассмотрим случай, когда $BC=\frac{3}{2}AD$ (рис. 2). Аналогично предыдущему получим, что $\frac{OM}{OA}=\frac{3}{8}$ и $S_{\triangle AOD}=\frac{448}{5}$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON}=\left(\frac{3}{8}\right)^2 S_{\triangle AOD}=\frac{9}{64}\cdot\frac{448}{5}=\frac{63}{5}.$$

Ответ: $\frac{576}{35}$ или $\frac{63}{5}$.

13. Задание 16 № 507671. Прямая, проведённая через середину N стороны AB квадрата $ABCD$, пересекает прямые CD и AD в точках M и T соответственно и образует с прямой AB угол, тангенс которого равен 0,5. Найдите площадь треугольника BMT, если сторона квадрата $ABCD$ равна 8.

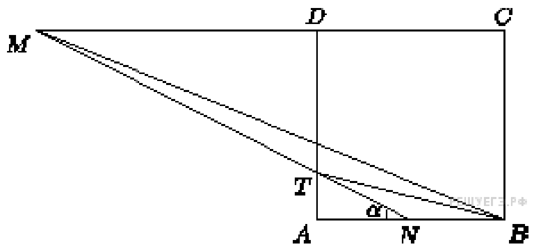
Решение.



Возможны два случая: точка T лежит на продолжении стороны AD за точку A или на продолжении стороны AD за точку D. Пусть α — угол между прямыми MT и AB.

Рассмотрим первый случай. Заметим, что $S_{BMT} = S_{BNT} + S_{BMN}$. Отрезок $AN = 4$, поэтому $AT = AN\operatorname{tg}\alpha = 2$. Значит, $S_{BNT} = \frac{1}{2}\cdot BN\cdot AT = 4$. Кроме того, $S_{BMN} = \frac{1}{2}BN\cdot BC = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 4 + 16 = 20$.

Во втором случае $S_{BMT} = S_{BNT} - S_{BMN}$. По-прежнему $AT = 2$, $S_{BNT} = 4$, $S_{BMN} = 16$. Следовательно, $S_{BMT} = 16 - 4 = 12$.



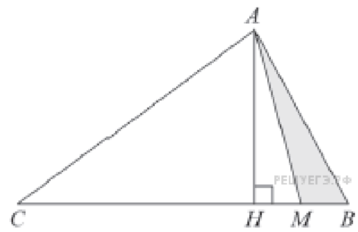
Ответ: 12 или 20.

14. Задание 16 № 507697. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 17$, $AC = 25$ и $BC = 28$. На стороне BC взята точка M, причём $AM = \sqrt{241}$. Найдите площадь треугольника AMB.

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC, AH — высота треугольника. Тогда

$$p = \frac{17+25+28}{2} = \frac{70}{2} = 35.$$



По формуле Герона

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p\,(p-AB)\,(p-AC)\,(p-BC)} = \sqrt{35\,(35-17)\,(35-25)\,(35-28)} = \sqrt{35\cdot 18\cdot 10\cdot 7} = 210.$$

Тогда $AH = \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \frac{2\cdot 210}{28} = 15.$

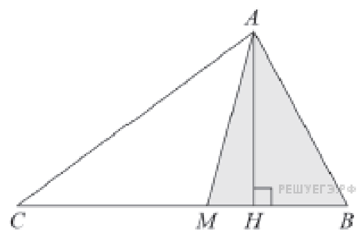
Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{241 - 15^2} = 4,$$
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{17^2 - 15^2} = 8.$$

Если точка M лежит между точками B и H (рис. 1), то

$$BM = BH - MH = 8 - 4 = 4.$$

Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}BM\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 4 = 30.$ Если же точка M лежит между точками C и H (рис. 2), то



$$BM = BH + MH = 8 + 4 = 12.$$

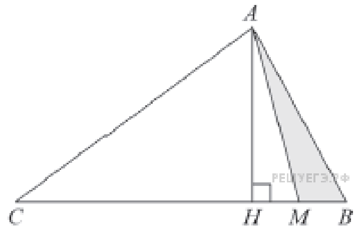
Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \frac{1}{2}BM\cdot AH = \frac{1}{2}\cdot 15\cdot 12 = 90.$

Ответ: 30 или 90.

15. Задание 16 № 507701. Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 34$, $AC = 65$ и ВС = 93. На стороне BC взята точка M, причём $AM = 20$. Найдите площадь треугольника AMB.

Решение.

Пусть p — полупериметр треугольника ABC, AH — высота треугольника. Тогда



$$p = \frac{34+65+93}{2} = \frac{192}{2} = 96.$$

По формуле Герона

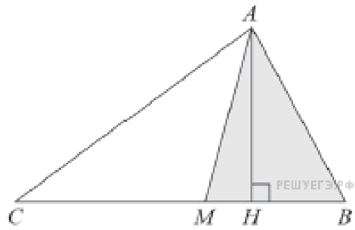
$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p\,(p-AB)\,(p-AC)\,(p-BC)} =$$
$$= \sqrt{96\,(96-34)\,(96-65)\,(96-93)} = \sqrt{96\cdot 62\cdot 31\cdot 3} = 31\cdot 4\cdot 6 = 31\cdot 24.$$

Тогда $AH = \dfrac{2S_{\triangle ABC}}{BC} = \dfrac{2\cdot 31\cdot 24}{93} = 16.$

Из прямоугольных треугольников AHM и AHB находим, что

$$MH = \sqrt{AM^2 - AH^2} = \sqrt{20^2 - 16^2} = 12,$$
$$BH = \sqrt{AB^2 - AH^2} = \sqrt{34^2 - 16^2} = 30.$$

Если точка M лежит между точками B и H (рис. 1), то



$$BM = BH - MH = 30 - 12 = 18.$$

Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \dfrac{1}{2}BM\cdot AH = \dfrac{1}{2}\cdot 18\cdot 16 = 144.$ Если же точка М лежит между точками C и H (рис. 2), то

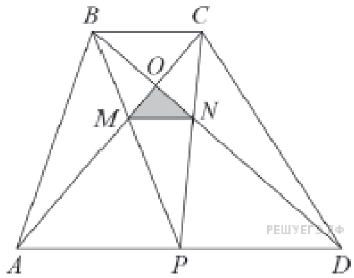
$$BM = BH + MH = 30 + 12 = 42.$$

Следовательно, $S_{\triangle AMB} = \dfrac{1}{2}BM\cdot AH = \dfrac{1}{2}\cdot 42\cdot 16 = 336.$

Ответ: 144 или 336.

16. Задание 16 № 507707. Площадь трапеции $ABCD$ равна 240. Диагонали пересекаются в точке O. Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N. Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции втрое больше другого.

Решение.



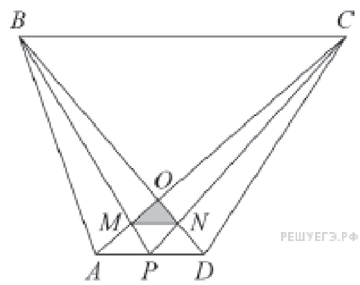
Пусть $AD = 3BC$ (рис. 1). Положим $BC = a,\ AD = 3a,\ OC = x.$ Треугольник COB подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{BC}{AD} = \frac{1}{3}$, а треугольник CMB подобен треугольнику AMP с коэффициентом $\frac{BC}{AP} = \frac{a}{\frac{3a}{2}} = \frac{2}{3}$, поэтому

$$OA = 3x;\ AC = OA + OC = 3x + x = 4x;\ MC = \frac{2}{5}AC = \frac{8}{5}x;$$
$$OM = MC - OC = \frac{8}{5}x - x = \frac{3}{5}x,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{5}x : 3x = \frac{1}{5}$. Аналогично $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{5}$.

Пусть h — высота трапеции. Тогда площадь трапеции

$$\frac{a+3a}{2}h = 2ah = 240,\ ah = 120,$$
$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2}AD \cdot \frac{3}{4}h = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot \frac{3}{4}h = \frac{9}{8}ah = \frac{9}{8} \cdot 120 = 135,$$



а так как треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{5}$, то

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{1}{25} \cdot 135 = \frac{27}{5}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 3AD$ (рис. 2). Аналогично предыдущему получим, что $\frac{OM}{OA} = \frac{3}{7}$ и $S_{\triangle AOD} = 15$. Следовательно,

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{3}{7}\right)^2 S_{\triangle AOD} = \frac{9}{49} \cdot 15 = \frac{135}{49}.$$

Ответ: $\frac{27}{5}$ или $\frac{135}{49}$.

17. Задание 16 № 484623. На стороне CD квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник CPD. Найдите высоту треугольника ABP, проведённую из вершины A, если известно, что сторона квадрата равна 1.

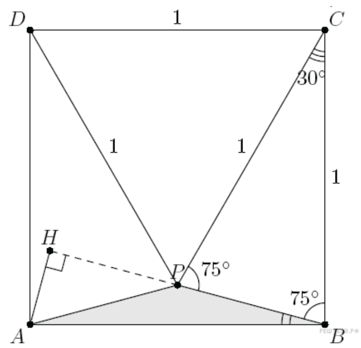
Решение.

Пусть точки P и A лежат по одну сторону от прямой CD (рис. 1). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC = CD = CP = 1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ - 60^\circ)) = 75^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ.$$



Пусть AH — высота треугольника ABP. Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

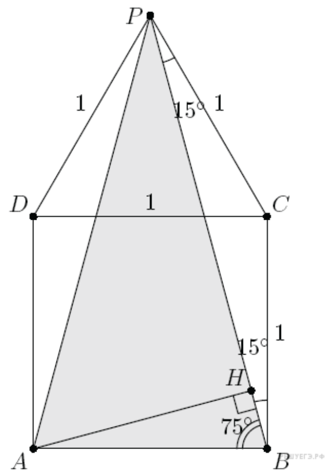
$$AH = AB\sin\angle ABH = AB\sin\angle ABP = 1\cdot\sin 15^\circ = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Пусть теперь точки P и A лежат по разные стороны от прямой CD (рис.2). Треугольник BCP — равнобедренный ($BC = CD = CP = 1$), поэтому

$$\angle CBP = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCP) = \frac{1}{2}(180^\circ - (90^\circ + 60^\circ)) = 15^\circ,$$

значит,

$$\angle ABP = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ$$



Из прямоугольного треугольника ABH находим, что

$$AH = AB\sin\angle ABH = AB\sin\angle ABP = 1\cdot\sin 75^\circ = \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ или $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

18. Задание 16 № 500009. Дан треугольник ABC, площадь которого равна 55. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABE, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$.

Решение.

Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$.

1 случай (точка E лежит между точками A и C, см. рис. 1).

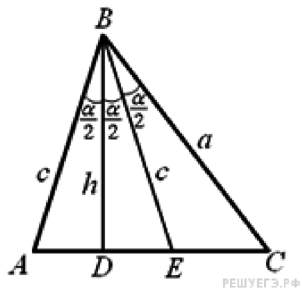


Рис.1

Треугольник ABE равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а значит, $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны, значит,

$$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos\alpha,$$

откуда $S_{\Delta DBE} = S_{\Delta CBE}\cos\alpha$.

Поскольку $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{3}{5}$, получаем

$$S_{\Delta DBE} = \frac{3}{5} S_{\Delta CBE},$$

откуда

$$S_{\Delta ABE} = \frac{6}{5} S_{\Delta CBE},$$

значит,

$$S_{\Delta ABE} = \frac{6}{11} S_{\Delta ABC} = \frac{6}{11}\cdot 55 = 30.$$

2 случай (точка A лежит между точками E и C, см. рис. 2).

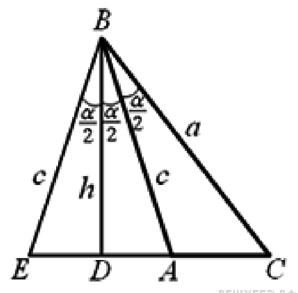


Рис. 2

Аналогично случаю 1 находим

$$S_{\Delta ABE} = \frac{6}{5} S_{\Delta ABC} = \frac{6}{5}\cdot 55 = 66.$$

Ответ: 30 или 66.

19. Задание 16 № 500003. Дан треугольник ABC. Точка E на прямой AC выбрана так, что треугольник ABE, площадь которого равна 14, — равнобедренный с основанием AE и высотой BD. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABE = \angle CBD = \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$.

Решение.

Введем следующие обозначения: $AB = BE = c$, $BC = a$, $BD = h$.

1 случай (точка E лежит между точками A и C, см. рис. 1).

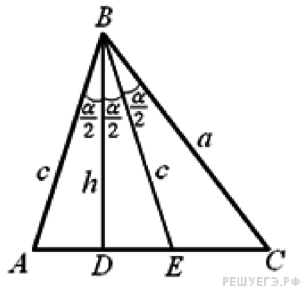


Рис.1

1. Треугольник ABE — равнобедренный, поэтому $\angle ABD = \angle DBE = \frac{\alpha}{2}$, а значит, $\angle CBE = \frac{\alpha}{2}$.

2. Углы ABE и CBD треугольников ABE и CBD равны. Следовательно,

$$\frac{S_{\Delta DBE}}{S_{\Delta CBE}} = \frac{hc}{ac} = \frac{h}{a} = \cos\alpha,$$

откуда

$$S_{\Delta CBE} = \frac{S_{\Delta DBE}}{\cos\alpha}.$$

3. Поскольку

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \frac{7}{25},$$

получаем:

$$S_{\Delta CBE} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7} \cdot 7 = 25.$$

4. Окончательно находим:

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABE} + S_{\Delta CBE} = 14 + 25 = 39.$$

2 случай (точка A лежит между точками E и C (см. рис. 2).

Аналогично случаю 1 находим

$$S_{\Delta ABC} = \frac{25}{7} S_{\Delta DBE} = \frac{25}{7} \cdot 7 = 25.$$

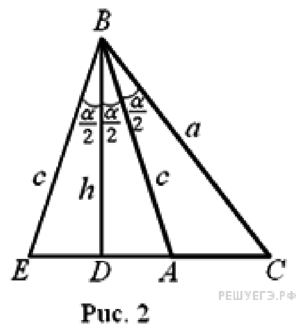


Рис. 2

Ответ: 25 или 39.

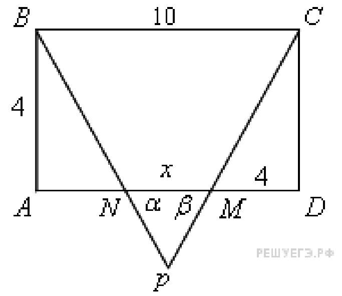
20. Задание 16 № 484608. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами $AB = 4$ и $BC = 10$ на стороне AD расположены точки M и N таким образом, что $DM = 4$, при этом P — точка пересечения прямых BN и CM. Площадь треугольника MNP равна 1. Найдите длину отрезка, соединяющего точки M и N.

Решение.

В зависимости от порядка расположения точек M и N на AD есть 2 случая:

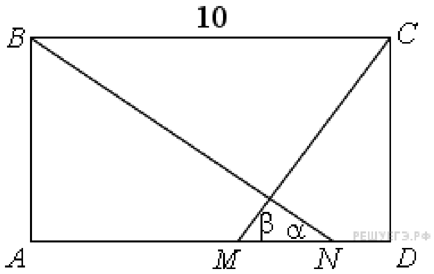
Первый случай. $S_{MNP} = \dfrac{MN^2}{2(\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta)} = 1$, где $\text{ctg}\alpha = \dfrac{6-x}{4}$, $\text{ctg}\beta = 1$.

Тогда $2x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.



Второй случай. $S_{MNP} = \dfrac{MN^2}{2(\text{ctg}\alpha + \text{ctg}\beta)} = 1$, где $\text{ctg}\alpha = \dfrac{6+x}{4}$, $\text{ctg}\beta = 1$.

Тогда $2x^2 - x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 2,5$.



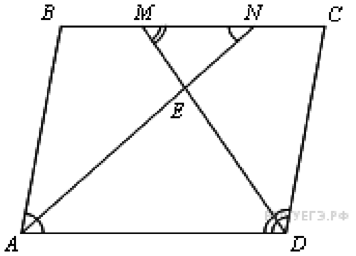
Ответ: 2 или 2,5.

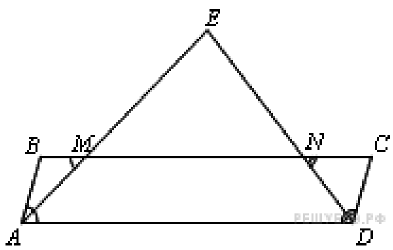
21. Задание 16 № 484612. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы углов при стороне AD делят сторону BC точками M и N так, что $BM : MN = 1 : 2$. Найдите BC если $AB = 12$.

Решение.

Пусть E — точка пересечения биссектрис, $BM = x, MN = y, NC = z$. Так как $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} < 1$, то точка M лежит между точками B и N возможны два случая.

1. Точка E — внутри параллелограмма. Треугольники ABN и DMC равнобедренные, $x + y = 12 = y + z$, следовательно, $x = z$, откуда, учитывая, что $y = 2x$, получаем $z = x = 4, y = 8, BC = 2x + y = 16$.





2. Точка E — вне параллелограмма. Тогда $x = z = 12$, откуда учитывая, что $y = 2x$, получаем $y = 24, BC = 2x + y = 48$.

Ответ: 16 или 48.

22. Задание 16 № 484613. Основание равнобедренного треугольника равно 40, косинус угла при вершине равен $\frac{15}{17}$. Две вершины прямоугольника лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Найдите площадь прямоугольника, если известно, что одна из его сторон вдвое больше другой.

Решение.

Пусть вершины K и L прямоугольника $KLMN$ лежат на основании BC равнобедренного треугольника (точка K — между B и L), а вершины M и N — на боковых сторонах M и N соответственно.

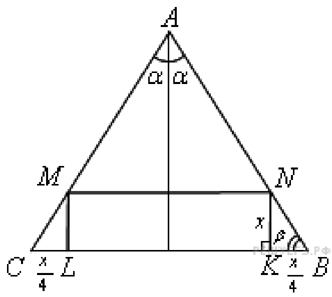
Обозначим $\angle BAC=\alpha, \angle ABC=\angle ACB=\beta$.

Тогда $\cos\alpha=\frac{15}{17}, \sin\alpha=\frac{8}{17}, \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1+\frac{15}{17}}{\frac{8}{17}}=4.$

Предположим, что сторона KL прямоугольника вдвое больше его стороны KN Положим $KN=x, KL=2x.$ Из прямоугольного треугольника BKN находим, что $BK=KN\operatorname{ctg}\beta=\frac{x}{4}.$ Тогда $LC=BK=\frac{x}{4},$ а так как $KL=MN=2x,$ то $BC=BK+KL+LC=\frac{x}{4}+2x+\frac{x}{4}=\frac{5}{2}x=40,$

Откуда $x=16.$ Тогда $KL=2x=32.$

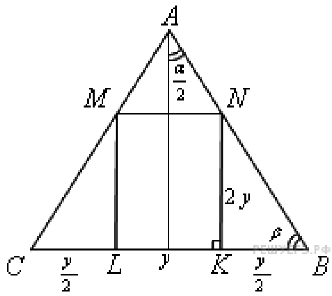
Следовательно, $S_{KLMN}=KL\cdot KN=16\cdot 32=512.$



Пусть теперь сторона KN прямоугольника вдвое больше его стороны $KL.$ Положим $KL=y, KN=2y.$ Из прямоугольного треугольника находим, что $BK=KN\operatorname{ctg}\beta=\frac{y}{2}.$ Тогда $LC=BK=\frac{y}{2},$ а так как $KN=MN=y,$ то

$$BC=BK+KL+LC=\frac{y}{2}+y+\frac{y}{2}=2y=40,$$

откуда $y=20.$ Тогда $KN=2y=40.$ Следовательно, $S_{KLMN}=KL\cdot KN=20\cdot 40=800.$



Ответ: 512 или 800.

23. Задание 16 № 486002. Площадь трапеции $ABCD$ равна 810. Диагонали пересекаются в точке $O.$ Отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и $N.$ Найдите площадь треугольника MON, если одно из оснований трапеции вдвое больше другого.

Решение.

Пусть $AD = 2BC$ (рис. 1). Четырехугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP, значит, CM и BN — медианы треугольника BPC. Пусть h — высота трапеции. Положим $BC = a,\ AD = 2a,\ OM = x$. Тогда

$$\frac{a+2a}{2}h = \frac{3}{2}ah = 810, ah = 540,$$

а $OC = 2x$, т. к. O — точка пересечения медиан треугольника BPC, поэтому

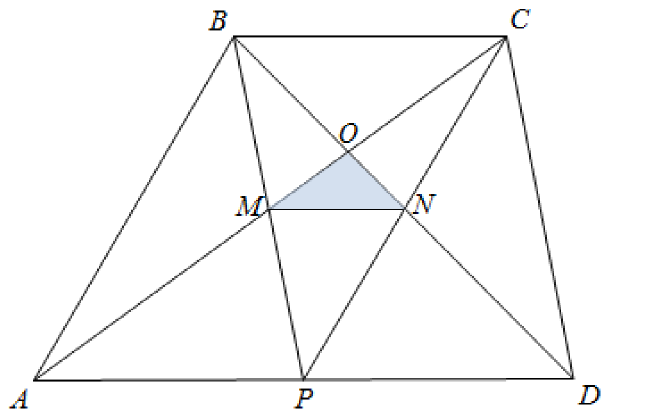


Рис. 1

$$AM = MC = 3x,\quad OA = AM + OM = 3x + x = 4x,\quad \frac{OM}{OA} = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}.$$

Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{1}{4}$, значит, треугольник MON подобен треугольнику AOD с коэффициентом $\frac{1}{4}$. Заметим, что поскольку треугольники AOD и BOC подобны с коэффициентом 2, высота треугольника AOD вдвое больше высоты треугольника BOC и составляет две трети высоты трапеции. Имеем:

$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{1}{16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}h = \frac{1}{24}ah = \frac{1}{24}\cdot 540 = \frac{45}{2}.$$

Рассмотрим случай, когда $BC = 2AD$ (рис. 2) Пусть h — высота трапеции. Положим $AD = a, BC = 2a, AM = 3t$. Тогда $ah = 540$.

Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом $\frac{1}{2}$, а треугольник AMP – треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC} = \frac{1}{4}$. Тогда

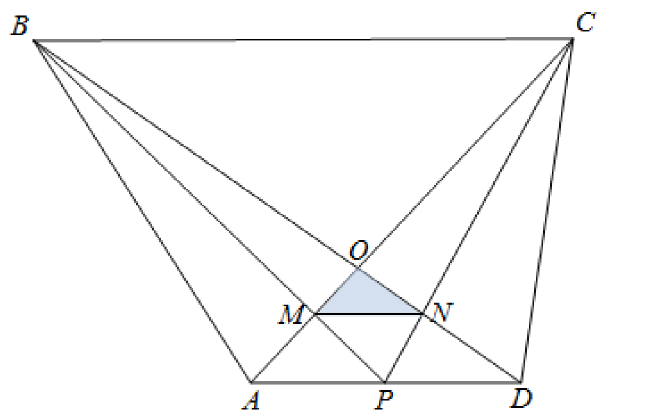


Рис. 2

$$\frac{AM}{MC} = \frac{1}{4},\quad \frac{PM}{PB} = \frac{1}{5},\quad MC = 12t,\quad AC = AM + MC = 15t,\quad AO = 5t,\quad MO = 2t,$$

значит, $\frac{OM}{OA} = \frac{2t}{5t} = \frac{2}{5}$. Аналогично, $\frac{ON}{OD} = \frac{2}{5}$. Следовательно,

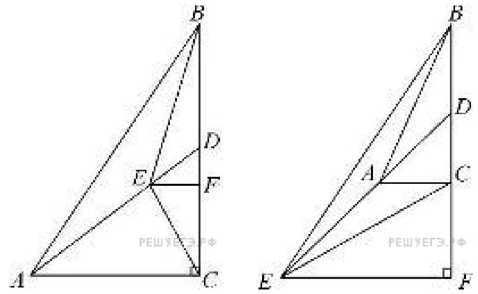
$$S_{\triangle MON} = \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot S_{\triangle AOD} = \frac{4}{25}\cdot\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h = \frac{2}{75}ah = \frac{2}{75}\cdot 540 = \frac{72}{5}.$$

Ответ: $\frac{45}{2}$ или $\frac{72}{5}$.

24. Задание 16 № 500114. На прямой, содержащей медиану AD прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C, взята точка E, удаленная от вершины A на расстояние, равное 4. Найдите площадь треугольника BCE, если $BC = 6$, $AC = 4$.

Решение.

По теореме Пифагора $AD = 5$.



Пусть точка E лежит на луче AD. Медиана AD длиннее AE, и точка E лежит внутри треугольника ABC. Тогда $ED = 1$.

Опустим из точки E перпендикуляр EF на прямую BC и рассмотрим подобные прямоугольные треугольники DEF и DAC. Из подобия треугольников находим:

$$EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{4}{5}$$

Следовательно, $S_{BCE} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \frac{4}{5} = 2,4.$

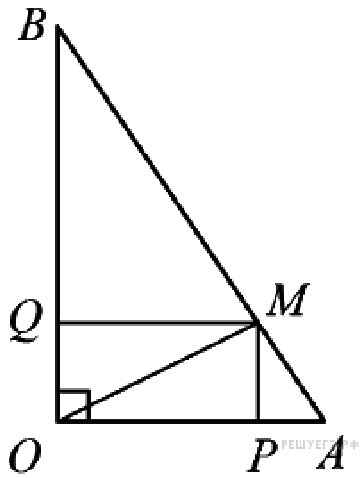
Пусть теперь точка A лежит между E и D. В этом случае $ED = 9$ и $EF = \frac{AC \cdot ED}{AD} = \frac{36}{5}$. Тогда $S_{BCE} = 21,6.$

Ответ: $2,4; 21,6.$

25. Задание 16 № 501047. Расстояния от точки M, расположенной внутри прямого угла, до сторон угла равны 3 и 6. Через точку M проведена прямая, отсекающая от угла треугольник, площадь которого равна 48. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного внутри угла.

Решение.

Пусть O — вершина данного угла, P и Q — проекции точки M на стороны угла, $MP=3,$ $MQ=6,$ A и B — точки, в которых прямая, проходящая через точку M, пересекает стороны соответственно OP и OQ данного прямого угла. Обозначим $OA=x,$ $OB=y.$ Тогда $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}xy=48.$



С другой стороны,

$$S_{\Delta AOB}=S_{\Delta AOM}+S_{\Delta BOM}=\frac{1}{2}OA\cdot MP+\frac{1}{2}OB\cdot MQ=\frac{1}{2}x\cdot 3+\frac{1}{2}y\cdot 6=\frac{3}{2}x+3y=48.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases}\frac{1}{2}xy=48,\\ \frac{3}{2}x+3y=48.\end{cases}$$

Находим, что $x=8, y=12$ или $x=24, y=4.$ Следовательно,

$$AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8^2+12^2}=4\sqrt{13}$$

или

$$AB=\sqrt{24^2+4^2}=4\sqrt{37}.$$

Ответ: $4\sqrt{13}$ или $4\sqrt{37}.$

26. Задание 16 № 501218. Из вершин острых углов B и C треугольника ABC проведены две его высоты — BM и CN, причем прямые BM и CN пересекаются в точке H. Найдите угол BHC, если известно, что $MN=\frac{1}{3}BC$.

Решение.

Случай 1. Угол A — острый (см. рисунок 1).

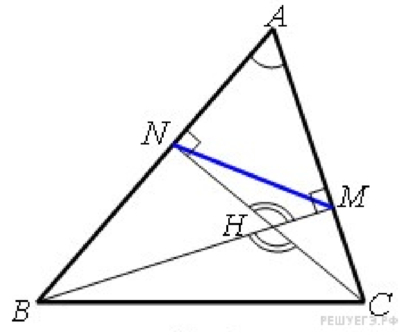


*Рис.***1**

Имеем: $\Delta ABM\sim\Delta ACN\Rightarrow\frac{AM}{AN}=\frac{AB}{AC}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, откуда $\Delta AMN\sim\Delta ABC\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{MN}{BC}=\frac{1}{3}$. Далее находим:

а) из прямоугольного треугольника ABM: $\angle BAM=\arccos\frac{1}{3}$;

б) из четырехугольника $AMHN$: $\angle MHN=\angle BHC=\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

Случай 2. Угол A — тупой (см. рисунок 2).

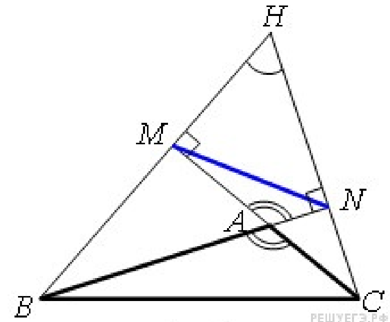


Рис.2

Аналогично случаю 1 имеем:

а) $\Delta HNB\sim\Delta HMC$;
б) $\Delta HNM\sim\Delta HBC$;
в) $\angle BHC=\arccos\frac{1}{3}$.

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}$ или $\pi-\arccos\frac{1}{3}$.

27. Задание 16 № 507204. Медианы AA_1 и BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

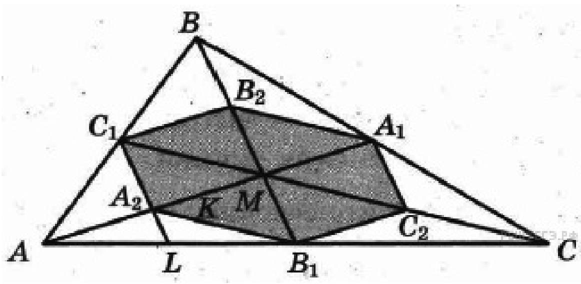
а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1 у этих треугольников общая:

$S_{A_1MB} = 2SA_1MB_1$.

Аналогично получаем еще 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2}, S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2}, S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2}, S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2}, S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем $S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}$.

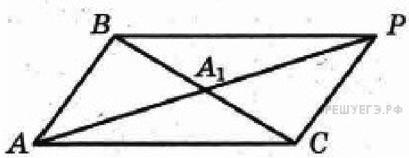


б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями BC& a и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2 + 2c^2 = a^2 + 4AA_1^2 \Leftrightarrow AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$



Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$. Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1, A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2 \cdot (B_1C_2^2 + A_1C_2^2 + A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2 + BB_1^2 + CC_1^2) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2) = \frac{1}{18} \cdot 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{1}{6} \cdot (a^2 + b^2 + c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.