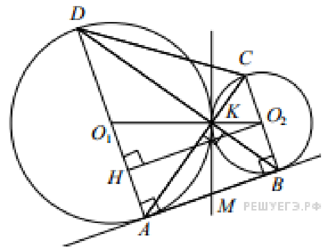
Задача на доказательство и вычисление

1. Задание 16 № 501887. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.



Задание а). Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Задание б). Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\frac{AD}{BC} = \frac{DK}{KB} = 4.$ Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S.$

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\frac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \frac{DK}{KB} = \frac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр $O2H$, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1:

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

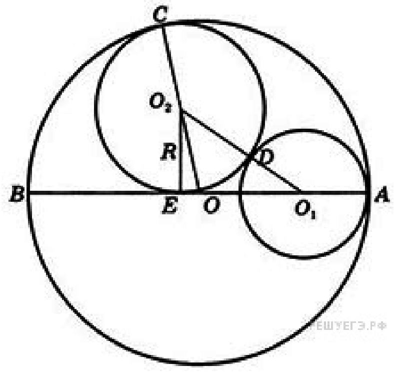
2. Задание 16 № 507211. Две окружности касаются внутренним образом. Третья окружность касается первых двух и их линии центров.

а) Докажите, что периметр треугольника с вершинами в центрах трёх окружностей равен диаметру наибольшей из этих окружностей.

б) Найдите радиус третьей окружности, если известно, что радиусы первых двух равны 6 и 2.

Решение.

а) Пусть AB — диаметр большей из трёх окружностей, O — её центр, O_1 — центр окружности радиуса r у касающейся окружности с диаметром AB в точке A, O_2 — центр окружности радиуса R, касающейся окружности с диаметром AB в точке C, окружности с центром O_1 — в точке D, отрезка AB — в точке E. Точки O, O_2 и C лежат на одной прямой, поэтому $OO_2 = OC - O_2C = OC - R$. Аналогично $OO_1 = OA - O_1A = OA - r$ и $O_1O_2 = O_1D + O2D = r + R$. Следовательно, периметр треугольника OO_1O_2 равен



$$OO_1 + OO_2 + O_1O_2 = OA - r + OC - R + r + R = OA + OC = 2OA = AB.$$

б) Пусть $OA = 6$, $r = 2$. Тогда $O_2E = R$, $O_1O_2 = 2 + \mathrm{R}$, $OO_1 = OA - O_1A = 6 - 2 = 4$, $OO_2 = OC - O_2C = 6 - R$. Из прямоугольных треугольников O_1O_2E и OO_2E находим, что

$$\mathrm{O_1E} = \sqrt{O_1O_2^2 - O_2\mathrm{E}^2} = \sqrt{(2+R)^2 - R^2} = \sqrt{4+4R},$$
$$OE = \sqrt{OO_2^2 - O_2E^2} = \sqrt{(6-R)^2 - R^2} = \sqrt{36-12R},$$

а так как $O_1E = OO_1 + OE$, то $\sqrt{4+4R} = 4 + \sqrt{36-12R}$. Из этого уравнения находим, что $R = 3$ (это значит, что диаметр искомой окружности равен радиусу наибольшей из трёх окружностей, то есть точка E совпадает с O).

Ответ: 3.

3. Задание 16 № 507262. Диагональ AC прямоугольника $ABCD$ с центром O образует со стороной AB угол 30°. Точка E лежит вне прямоугольника, причём $\angle BEC = 120°$.

а) Докажите, что $\angle CBE = \angle COE$.

б) Прямая OE пересекает сторону AD прямоугольника в точке K. Найдите EK, если известно, что $BE = 40$ и $CE = 24$.

Решение.

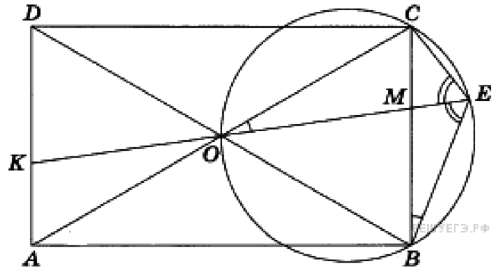
а) По теореме о внешнем угле треугольника $\angle BOC = 2$, $\angle BAO = 2 \cdot 30° = 60°$. Поэтому

$$\angle BEC + \angle BOC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ.$$

Значит, точки B, E, C, O лежат на одной окружности. Вписанные в эту окружность углы CBE и COE опираются на одну и ту же дугу, следовательно, $\angle CBE = \angle COE$.

б) По теореме косинусов

$$BC = \sqrt{BE^2 + CE^2 - 2BE \cdot CE \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{40^2 + 24^2 - 2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 8\sqrt{25+9+15} = 8 \cdot 7 = 56.$$



Вписанные углы BEO и CEO опираются на равные хорды BO и CO, значит, EO — биссектриса угла BEC. Пусть M — точка её пересечения со стороной BC. По формуле для биссектрисы треугольника получаем:

$$EM = \frac{2BE \cdot CE \cdot \cos\frac{\angle BEC}{2}}{BE + CE} = \frac{2 \cdot 40 \cdot 24 \cdot \cos 60^\circ}{40 + 24} = 15$$

По свойству биссектрисы треугольника $\frac{CM}{BM} = \frac{CE}{BE} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$, значит, $CM = \frac{3}{8}BC = \frac{3}{8} \cdot 56 = 21$, $BM = 35$.

По теореме о произведении пересекающихся хорд $EM \cdot MO = BM \cdot CM$, откуда находим, что $MO = \frac{BM \cdot CM}{EM} = \frac{35 \cdot 21}{15} = 49.$ Треугольники COM и AOK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам, поэтому $OK = OM$. Следовательно, $EK = EM + 2OM = 15 + 98 = 113$.

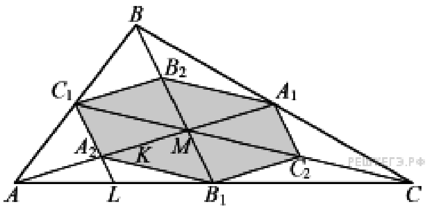
Ответ: 113.

4. Задание 16 № 507510. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 5$, $BC = 8$ и $AC = 10$.

Решение.



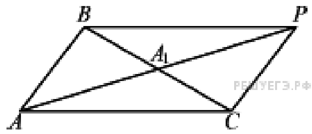
а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая:

$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_1}.$$

Аналогично получаем ещё 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2},\ S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2},\ S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2},\ S_{C_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \text{ и } S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем



$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$

б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через *a, b, c.*

Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $2b^2+2c^2 = a^2+4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$. Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$.

Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_2 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника

$$ABC : B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1,\ A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot(B_1C_2^2+A_1C_2^2+A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2) =$$
$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2) =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 3\cdot(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{6}\cdot(a^2+b^2+c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем $\frac{63}{2}$.

Ответ: $\frac{63}{2}$.

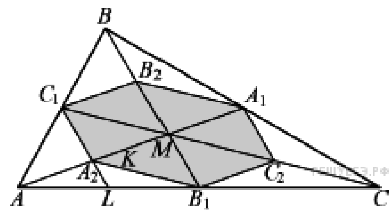
5. Задание 16 № 507586. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

Решение.

а) Площадь треугольника A_1MB_2 в два раза меньше площади треугольника A_1MB, поскольку $MB = 2MB_2$, а высота, проведённая из вершины A_1, у этих треугольников общая:



$$S_{A_1MB} = 2S_{A_1MB_2}.$$

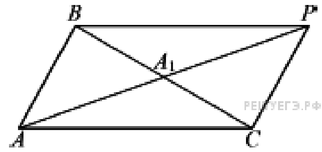
Аналогично получаем еще 5 равенств:

$$S_{A_1MC} = 2S_{A_1MC_2},\ S_{B_1MC} = 2S_{B_1MC_2},\ S_{B_1MA} = 2S_{B_1MA_2},\ S_{C_1MA} = 2S_{B_1MA} = 2S_{C_1MA_2} \quad \text{и} \quad S_{C_1MB} = 2S_{C_1MB_2}.$$

Складывая эти равенства почленно, получаем

$$S_{ABC} = 2S_{A_1C_2B_1A_2C_1B_2}.$$

б) Обозначим длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC через a, b, c.



Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P = AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC = PB = b$ и $AB = CP = c$ и диагоналями $BC = a$ и $AP = 2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон: $2b^2+2c^2 = a^2+4AA_1^2$, откуда $AA_1^2 = \frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$. Аналогично доказывается, что $BB_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$, а $CC_1^2 = \frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$. Отрезок C_1A_2 — средняя линия треугольника ABM, значит,

$$C_1A_1 = \frac{1}{2}BM = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}BB_1 = \frac{1}{3}BB_1.$$

Рассуждая аналогично, мы получим, что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника

$$ABC: B_2C_1 = B_1C_2 = \frac{1}{3}AA_1,\ A_2B_1 = A_1B_2 = \frac{1}{3}CC_1.$$

Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна

$$2\cdot(B_1C_2^2+A_1C_2^2+A_1B_2^2) = \frac{2}{9}(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2) =$$
$$= \frac{1}{18}\cdot 3\cdot(a^2+b^2+c^2) = \frac{1}{6}\cdot(a^2+b^2+c^2).$$

Подставляя в эту формулу длины сторон треугольника ABC, получаем ответ: сумма квадратов сторон шестиугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: $\frac{43}{2}$.

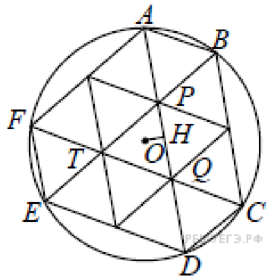
6. Задание 16 № 507889. Хорды AD, BE и CF окружности делят друг друга на три равные части.

а) Докажите, что эти хорды равны.

б) Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$, если точки A, B, C, D, E последовательно расположены на окружности, а радиус окружности равен $2\sqrt{21}$.

Решение.

а) Пусть две хорды равны $3x$ и $3y$. По теореме о произведении пересекающихся хорд $2x \cdot x = 2y \cdot y$. Отсюда находим, что $x = y$, значит, эти хорды равны. Аналогично докажем, что третья хорда равна каждой из первых двух.



б) Равные хорды равноудалены от центра окружности, поэтому центр равностороннего треугольника с вершинами в точках попарного пересечения хорд совпадает с центром данной окружности. Пусть хорды BE и CF пересекают хорду AD в точках P и Q соответственно, хорды BE и FC пересекаются в точке T, а H — проекция центра O на хорду AD. Тогда H — общая середина отрезков AD и PQ, а OH — радиус вписанной окружности равностороннего треугольника PQT со стороной PQ.

Через точку T проведём прямую, параллельную AD, через точку P — прямую, параллельную CF, а через точку Q — прямую, параллельную BE. Эти прямые и хорды AD, BE и CF разбивают шестиугольник $ABCDEF$ на 13 одинаковых равносторонних треугольников.

Обозначим $PQ = 2a$. Тогда

$$OH = \frac{2a\sqrt{3}}{6} = \frac{a\sqrt{3}}{3},\ 2\sqrt{21} = OA = \sqrt{OH^2 + AH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{3} + 9a^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда находим, что $a = 3$, значит, $PQ = 2a = 6$, $S_{PQT} = a^2\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Следовательно,

$$S_{ABCDEF} = 13S_{PQT} = 13 \cdot 9\sqrt{3} = 117\sqrt{3}.$$

Ответ: $117\sqrt{3}$.

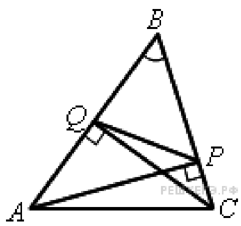
7. Задание 16 № 508235. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ.

а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.

а) Углы PC и AQC, опирающиеся на отрезок AC, равны, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности, а, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC, что и требовалось доказать.



б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC, следовательно, они подобны, откуда $\frac{BQ}{BP} = \frac{BC}{BA}$ или $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \cos\angle ABC$, откуда $AC = \frac{PQ}{\cos\angle ABC} = \frac{8}{\cos 60°} = 16$. Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{16}{2\sin 60°} = \frac{16}{\sqrt{3}}$.

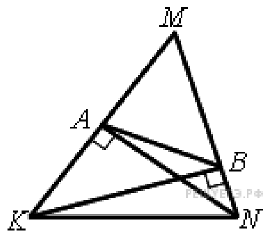
Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

8. Задание 16 № 508256. В остроугольном треугольнике KMN проведены высоты KB и NA.

а) Докажите, что угол ABK равен углу ANK.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABM, если известно, что $KN = 8\sqrt{2}$ и $\angle KMN = 45°$.

Решение.



а) Углы NAK и NBK, опирающиеся на отрезок KN, равны, значит, точки A, B, N и K лежат на одной окружности, а, следовательно, равны и вписанные углы ABK и ANK этой окружности, опирающиеся на дугу AK, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники KMB и NMA имеют общий угол KMN, следовательно, они подобны, откуда $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{MN}{MK}$ или $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{BM}{MK}$, но тогда и треугольники KMN и BMA также подобны, причем коэффициент подобия равен $\dfrac{AM}{MN} = \dfrac{BM}{MK} = \cos\angle KMN$, откуда

$$AB = KN\cos\angle KMN = 8\sqrt{2}\cos 45° = 8.$$

Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABM равен

$$R = \frac{AB}{2\sin\angle AMB} = \frac{8}{2\sin 45°} = 4\sqrt{2}.$$

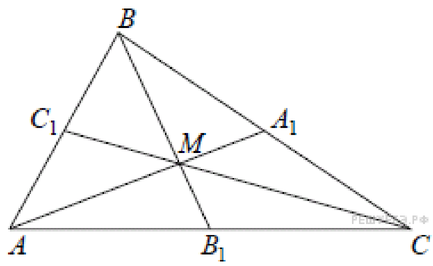
Ответ: $4\sqrt{2}$.

9. Задание 16 № 508974. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 12$.

Решение.



а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника C_1BC находим:

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 180.$$

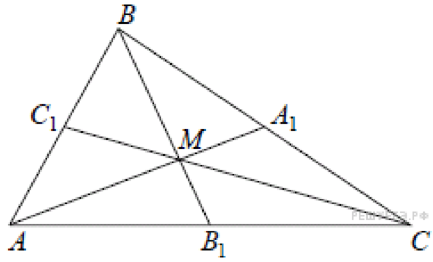
Ответ: 180.

10. Задание 16 № 509003. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Решение.



а) Известно, что медианы треугольника точкой пересечения делятся в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Отсюда следует, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично, из прямоугольного треугольника C_1BC находим:

$$CC_1^2 = C_1B^2 + BC^2 = \frac{1}{4}AB^2 + BC^2.$$

Сложим полученные равенства:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}\left(AB^2 + BC^2\right) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

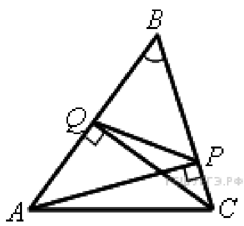
Ответ: 125.

11. Задание 16 № 509045. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AP и CQ.

а) Докажите, что угол PAC равен углу PQC.

б) Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если известно, что $PQ = 8$ и $\angle ABC = 60°$.

Решение.



а) Углы APC и AQC, опирающиеся на отрезок AC, равны, значит, точки A, Q, P и C лежат на одной окружности, а, следовательно, равны и вписанные углы PAC и PQC этой окружности, опирающиеся на дугу PC, что и требовалось доказать.

б) Прямоугольные треугольники ABP и CBQ имеют общий угол ABC, следовательно, они подобны, откуда $\frac{BQ}{BP} = \frac{BC}{BA}$ или $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA}$, но тогда и треугольники BAC и BPQ также подобны, причем коэффициент подобия равен $\frac{BQ}{BC} = \frac{BP}{BA} = \cos\angle ABC$, откуда $AC = \frac{PQ}{\cos\angle ABC} = \frac{8}{\cos 60°} = 16$. Тогда радиус R окружности, описанной около треугольника ABC равен $R = \frac{AC}{2\sin\angle ABC} = \frac{16}{2\sin 60°} = \frac{16}{\sqrt{3}}$.

Ответ: $\frac{16}{\sqrt{3}}$.

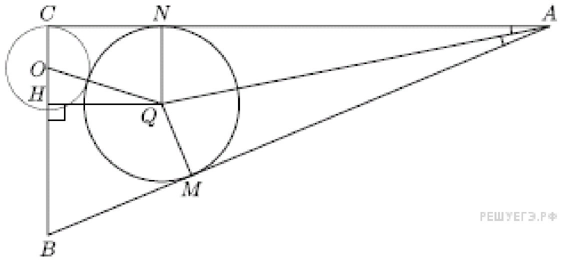
12. Задание 16 № 509161. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника, а также внешним образом касается первой окружности.

а) Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б) Найдите радиус второй окружности.

Решение.

а) Пусть Q — центр второй окружности, M и N — её точки касания со сторонами AB и AC соответственно, а точка H — проекция точки Q на BC. Имеем: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 13$, следовательно, $\cos\angle A = \frac{12}{13}$, $\sin\angle A = \frac{5}{13}$. Тогда $\operatorname{tg}\angle NAQ = \operatorname{tg}\frac{\angle A}{2} = \frac{\sin\angle A}{1+\cos\angle A} = \frac{1}{5}$. Поэтому $AC > AN = 5NQ$, что и требовалось доказать.



б) Пусть x — радиус второй окружности. Рассмотрим прямоугольный треугольник OHQ:

$$QH = CN = 12 - 5x > 0,\ OQ = x + \frac{1}{2},\ OH = |OC - CH| = \left|\frac{1}{2} - x\right|.$$

По теореме Пифагора $OH^2 + QH^2 = OQ^2$, откуда:

$$(12-5x)^2 + \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \left(\frac{1}{2} + x\right)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 122x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 2,88. \end{array}\right.$$

Условию $12 - 5x > 0$ удовлетворяет только $x = 2$.

Ответ: 2.

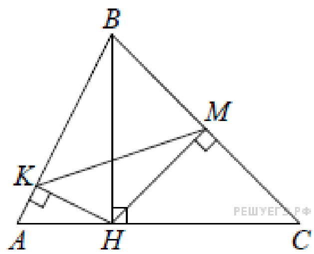
13. Задание 16 № 509182. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH. Из точки H на стороны AB и BC отпустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 3$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4.

Решение.

а) В четырёхугольнике $KBMH$ углы K и M — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём BH — её диаметр. Вписанные углы BKM и BHM опираются на одну дугу, следовательно,



$$\angle BKM = \angle BHM = 90° - \angle HBM = \angle BCA,$$

Треугольники MBK и ABC имею общий угол B и $\angle BKM = \angle BCA$. Значит, эти треугольники подобны.

б) Радиус окружности, описанной около треугольника MBK, равен $\frac{1}{2}BH = \frac{3}{2}$. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен 4. Значит, треугольники MBK и ABC подобны с коэффициентом подобия $\frac{3}{8}$. Получаем, что

$$\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}} = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Следовательно, искомое отношение равно

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AKMC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{\frac{S_{MBK}}{S_{ABC}}}{1 - \frac{S_{MBK}}{S_{ABC}}} = \frac{\frac{9}{64}}{1 - \frac{9}{64}} = \frac{9}{55}.$$

Ответ: $\frac{9}{55}$.

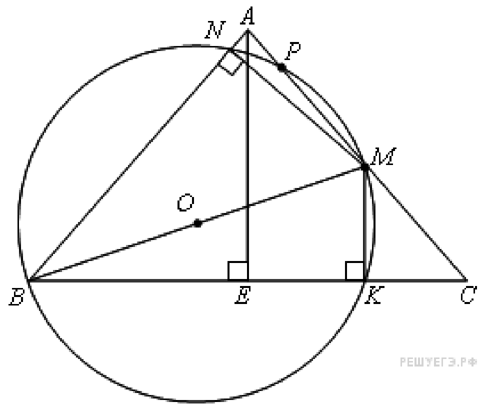
14. Задание 16 № 509823. Окружность, построенная на медиане BM равнобедренного треугольника ABC как на диаметре, второй раз пересекает основание BC в точке K.

а) Докажите, что отрезок BK больше отрезка CK.

б) Пусть указанная окружность пересекает сторону AB в точке N. Найдите AB, если $BK = 18$ и $BN = 17$.

Решение.

а) Проведём медиану AE к основанию BC, поскольку треугольник ABC — равнобедренный, медиана AE является биссектрисой и высотой. Проведём MK, заметим, что $\angle BKM = 90°$, т. к. он вписанный и опирается на диаметр окружности. Поэтому MK перпендикуляр к BC. Тогда MK — средняя линия AEC, и тогда $KC = EK$. Поскольку $CE = 2CK$, имеем: $BK = 3CK$, что и требовалось доказать.



б) Заметим, что $\angle BKM = \angle BNM = 90°$, т. к. эти углы вписанные и опираются на диаметр. Тогда $BM^2 = BN^2 + NM^2 = BK^2 + MK^2$ (*), причём:

$$NM^2 = AM^2 - AN^2, \quad MK^2 = MC^2 - CK^2,$$
$$CK = \frac{BK}{3} = 6, \quad BN = 17, \quad AM = MC.$$

Подставляя в (*), получаем:

$$17^2 + AM^2 - AN^2 = 18^2 + MC^2 - 6^2 \Leftrightarrow AN^2 = 289 + 36 - 324 \Leftrightarrow AN = 1.$$

Тогда $AB = BN + AN = 17 + 1 = 18.$

Ответ: а) доказано, б) 18.

Приведём другое решение.

Пусть $AB = AC = x,\ x > 17.$ Тогда $AM = MC = \frac{x}{2},\ AN = x - 17,$ и пусть $PM = y,$ тогда $AP = \frac{x}{2} - y.$ По свойству секущих имеем:

$$\begin{cases} (x-17)x = \left(\frac{x}{2} - y\right) \cdot \frac{x}{2}, \\ \frac{x}{2}\left(\frac{x}{2} + y\right) = 6 \cdot 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 68 - 3x, \\ x(x+2y) = 24^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 34x + 288 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 16, \\ x = 18 \end{array}\right. \underset{x>17}{\Leftrightarrow} x = 18.$$

Приведём другое решение.

Пусть угол при вершине треугольника равен α. Тогда из треугольника ANM находим: $\cos 2\alpha = \frac{x-17}{\frac{x}{2}} = \frac{2(x-17)}{x}.$ Поскольку из треугольника MKC: $\sin\alpha = \frac{6}{\frac{x}{2}} = \frac{12}{x},$ и $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha,$ получаем уравнение:

$$\frac{2(x-17)}{x} = 1 - 2\left(\frac{12}{x}\right)^2,$$

откуда $x = 16$ (постороннее решение) или $x = 18$.

Приведём другое решение.

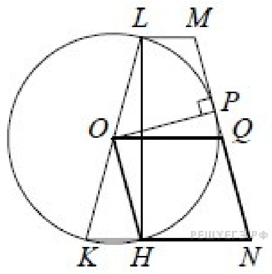
Из $\Delta ANM:\ \cos A = \frac{x-17}{\frac{x}{2}},$ из $\Delta ABC:\ \cos A = \frac{x^2 + x^2 - 24^2}{2x^2},$ тогда из уравнения: $\frac{x-17}{\frac{x}{2}} = \frac{2x^2 - 24^2}{2x^2}$ находим: $x = 16$ (постороннее решение) или $x = 18$.

15. Задание 16 № 512338. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75°$ и $LM = 1$.

Решение.



а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$. Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN. Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.

б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin OPQ} = \frac{R}{\sin 75°}, \quad KH = KL\cos\angle LKH = 2R\cos 75°.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R\cos 75°}{\frac{R}{\sin 75°}} = 2\sin 75° \cdot \cos 75° = \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная, $KN = 2KH + LM$; $NH = KH + LM = x + 1$. Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 1$. Значит, $KN = 2x + 1 = 3$.

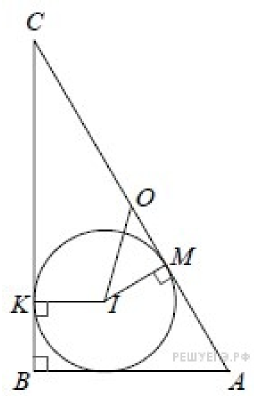
Ответ: б) 3.

16. Задание 16 № 512359. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 2R$ и $CM = 3R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 2$.

Решение.



а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда

$$p = 2R + 3R + x = 5R + x, \qquad S = pR = R(5R + x).$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(5R+x)\cdot 2R\cdot 3R\cdot x} = R\sqrt{6x(5R+x)}.$$

Из уравнения $R(5R+x) = R\sqrt{6x(5R+x)}$ получаем, что $R = x$. Стороны треугольника ABC равны $5R$, $4R$ и $3R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC = 5R = 10$, и $OM = AO - AM = 5 - 2R = 1$.

Тогда

$$IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{1^2 + R^2} = \sqrt{5}.$$

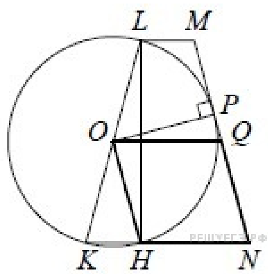
Ответ: б) $\sqrt{5}$.

17. Задание 16 № 512380. Дана равнобедренная трапеция $KLMN$ с основаниями KN и LM. Окружность с центром O, построенная на боковой стороне KL как на диаметре, касается боковой стороны MN и второй раз пересекает большее основание KN в точке H, точка Q — середина MN.

а) Докажите, что четырёхугольник $NQOH$ — параллелограмм.

б) Найдите KN, если $\angle LKN = 75°$ и $LM = 2$.

Решение.



а) Треугольник KOH равнобедренный и трапеция $KLMN$ равнобедренная, поэтому $\angle KHO = \angle OKH = \angle MNK$. Значит, прямые OH и MN параллельны, а так как OQ — средняя линия трапеции, то параллельны прямые OQ и KN. Противоположные стороны четырёхугольника $NQOH$ попарно параллельны, следовательно, $NQOH$ — параллелограмм.

б) Пусть окружность с центром в точке O радиуса R касается стороны MN в точке P. В прямоугольных треугольниках OPQ и KHL имеем

$$OQ = \frac{OP}{\sin OPQ} = \frac{R}{\sin 75°}, \quad KH = KL\cos\angle LKH = 2R\cos 75°.$$

Поэтому

$$\frac{KH}{NH} = \frac{KH}{OQ} = \frac{2R\cos 75°}{\frac{R}{\sin 75°}} = 2\sin 75° \cdot \cos 75° = \sin 150° = \frac{1}{2}.$$

Пусть $KH = x$. Поскольку трапеция $KLMN$ равнобедренная, $KN = 2KH + LM$; $NH = KH + LM = x + 2$. Тогда

$$\frac{KH}{NH} = \frac{x}{x+2} = \frac{1}{2},$$

откуда $x = 2$. Значит, $KN = 2x + 2 = 6$.

Ответ: б) 6.

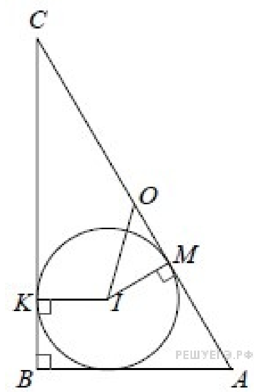
18. Задание 16 № 512401. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке M, причём $AM = 5R$ и $CM = 1,5R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите расстояние между центрами его вписанной и описанной окружностей, если известно, что $R = 4$.

Решение.

а) Пусть вписанная окружность касается стороны BC в точке K. Обозначим $BK = x$. Пусть S — площадь треугольника, p — полупериметр. Тогда



$$p = 5R + 1,5R + x = 6,5R + x, \qquad S = pR = R(6,5R + x).$$

С другой стороны, по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)} = \sqrt{(6,5R+x)\cdot 5R\cdot 1,5R\cdot x} = R\sqrt{7,5x(6,5R+x)}.$$

Из уравнения $R(6,5R+x) = R\sqrt{7,5x(6,5R+x)}$ получаем, что $R = x$. Стороны треугольника ABC равны $6,5R$, $6R$ и $2,5R$, следовательно, этот треугольник прямоугольный с прямым углом при вершине B.

б) Пусть I и O — центры соответственно вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Точка O — середина гипотенузы $AC = 6,5R = 26$, и $OM = CO - CM = 13 - 1,5R = 7$.

Тогда

$$IO = \sqrt{OM^2 + MI^2} = \sqrt{7^2 + R^2} = \sqrt{65}.$$

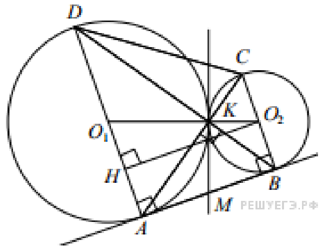
Ответ: б) $\sqrt{65}$.

19. Задание 16 № 503149. Две окружности касаются внешним образом в точке K. Прямая AB касается первой окружности в точке A, а второй — в точке B. Прямая BK пересекает первую окружность в точке D, прямая AK пересекает вторую окружность в точке C.

а) Докажите, что прямые AD и BC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника AKB, если известно, что радиусы окружностей равны 4 и 1.

Решение.



Задание а). Обозначим центры окружностей O_1 и O_2 соответственно. Пусть общая касательная, проведённая к окружностям в точке K, пересекает AB в точке M. По свойству касательных, проведённых из одной точки, $AM = KM$ и . $KM = BM$. Треугольник AKB, у которого медиана равна половине стороны, к которой она проведена, — прямоугольный.

Вписанный угол AKD прямой, поэтому он опирается на диаметр AD. Значит, $AD \perp AB$. Аналогично получаем, что $BC \perp AB$. Следовательно, прямые AD и BC параллельны.

Задание б). Пусть, для определенности, первая окружность имеет радиус 4, а радиус второй равен 1.

Треугольники BKC и AKD подобны, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DK}{KB} = 4$. Пусть $S_{BKC} = S$, тогда $S_{AKD} = 16S$.

У треугольников AKD и AKB общая высота, следовательно, $\dfrac{S_{AKD}}{S_{AKB}} = \dfrac{DK}{KB} = \dfrac{AD}{BC}$, то есть $S_{AKB} = 4S$. Аналогично, $S_{CKD} = 4S$. Площадь трапеции $ABCD$ равна $25S$.

Вычислим площадь трапеции $ABCD$. Проведём к AD перпендикуляр O_2H, равный высоте трапеции, и найдём его из прямоугольного треугольника O_2HO_1 :

$$O_2H = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1H^2} = 4.$$

Тогда

$$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 20.$$

Следовательно, $25S = 20$, откуда $S = 0,8$ и $S_{AKB} = 4S = 3,2$.

Ответ: 3,2.

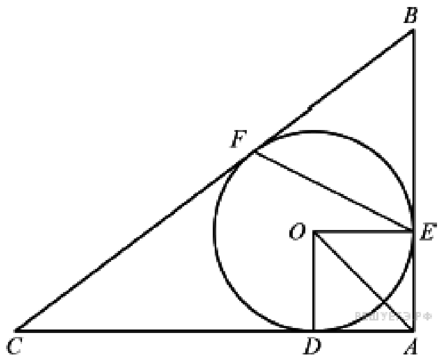
20. Задание 16 № 502296. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 5$ и $CD = 15$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC.



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC. Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45^\circ$. Следовательно, $\angle BAC = 90^\circ$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 5, CF = CD = 15$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(15 + x)^2 = 20^2 + (5 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 10$. Тогда

$$BC = 25,\ \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{20}{25} = \frac{4}{5}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2} BE \cdot BF \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 10 \cdot \frac{4}{5} = 40.$$

Ответ: 40.

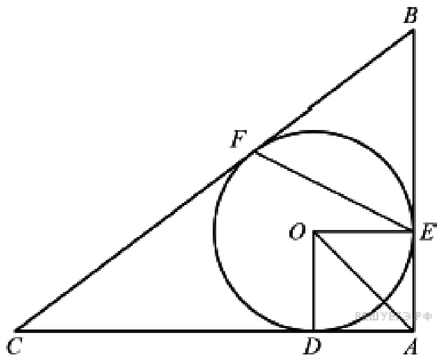
21. Задание 16 № 502316. В треугольник ABC вписана окружность радиуса R, касающаяся стороны AC в точке D, причём $AD = R$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Вписанная окружность касается сторон AB и BC в точках E и F. Найдите площадь треугольника BEF, если известно, что $R = 2$ и $CD = 10$.

Решение.

а) Пусть O — центр вписанной окружности треугольника ABC.



Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит, AO — биссектриса угла BAC. Треугольник AOD прямоугольный и равнобедренный, поэтому $\angle OAD = 45°$. Следовательно, $\angle BAC = 90°$.

б) Обозначим $BF = x$. По теореме о равенстве отрезков касательных, проведённых к окружности из одной точки, $AE = AD = 2$, $CF = CD = 10$ и $BE = BF = x$. По теореме Пифагора $BC^2 = AC^2 + AB^2$, или $(10 + x)^2 = 12^2 + (2 + x)^2$. Из этого уравнения находим, что $x = 3$. Тогда

$$BC = 13,\ \sin\angle ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{12}{13}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta BEF} = \frac{1}{2}BE \cdot BF \cdot \sin\angle ABC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{12}{13} = \frac{54}{13}.$$

Ответ: $\frac{54}{13}$.

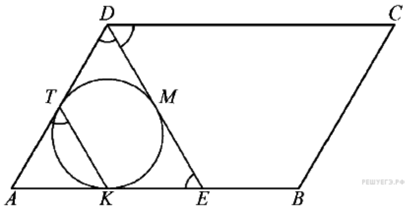
22. Задание 16 № 503002. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 6$ и $KT = 3$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.



б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 6 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\frac{AT}{AD} = \frac{TK}{DE}$, или $\frac{6-x}{6} = \frac{3}{2x}$. Отсюда находим, что $x = 3$. Тогда $DE = 2x = 6$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60°$.

Ответ: 60°.

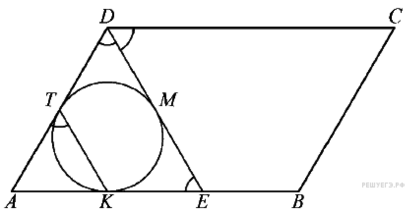
23. Задание 16 № 503130. Биссектриса угла ADC параллелограмма $ABCD$ пересекает прямую AB в точке E. В треугольник ADE вписана окружность, касающаяся стороны AE в точке K и стороны AD в точке T.

а) Докажите, что прямые KT и DE параллельны.

б) Найдите угол BAD, если известно, что $AD = 8$ и $KT = 4$.

Решение.

а) Прямые AE и CD параллельны, а DE — биссектриса угла ADC, поэтому $\angle AED = \angle CDE = \angle ADE$. Значит, треугольник ADE равнобедренный, $AD = AE$. Отрезки AK и AT касательных, проведённых к окружности из точки A, равны, значит, треугольник ATK также равнобедренный, причём угол при вершине A у этих треугольников общий. Поэтому $\angle ATK = \angle ADE$. Следовательно, $KT \parallel DE$.



б) Пусть окружность касается основания DE равнобедренного треугольника ADE в точке M. Тогда M — середина DE. Обозначим $DM = x$. Тогда $DT = DM = x$, $AT = AD - DT = 8 - x$. Треугольник ATK подобен треугольнику ADE, поэтому $\frac{AT}{AD} = \frac{TK}{DE}$, или $\frac{8-x}{8} = \frac{4}{2x}$. Отсюда находим, что $x = 4$. Тогда $DE = 2x = 8$, значит, треугольник ADE равносторонний. Следовательно, $\angle BAD = \angle EAD = 60°$.

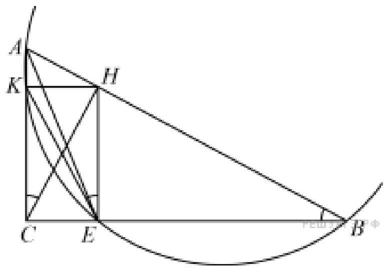
Ответ: 60°.

24. Задание 16 № 504546. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 12$, $CH = 5$.

Решение.



а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$ то

$$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha \text{ , а } \angle KAB = 90^\circ - \alpha.$$

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{13}{2}.$$

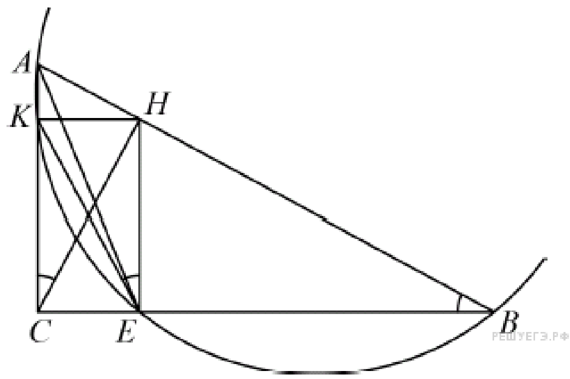
Ответ: $\frac{13}{2}$.

25. Задание 16 № 504567. На гипотенузу AB прямоугольного треугольника ABC опустили высоту CH. Из точки H на катеты опустили перпендикуляры HK и HE.

а) Докажите, что точки A, B, K и E лежат на одной окружности.

б) Найдите радиус этой окружности, если $AB = 24$, $CH = 7$.

Решение.



а) Предположим для определённости, что точка E лежит на катете BC, а точка K — на катете AC. Проведём отрезок KE и заметим, что он является гипотенузой прямоугольного треугольника KCE, подобного треугольнику BCA.

Рассмотрим углы четырёхугольника $ABEK$. Если $\angle ABE = \alpha$, то

$\angle BEK = \angle BEH + \angle HEK = 90^\circ + \alpha$, а $\angle KAB = 90^\circ - \alpha$.

Значит,

$$\angle BEK + \angle KAB = 90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha = 180^\circ.$$

Сумма двух противоположных углов в четырёхугольнике 180°, следовательно, четырёхугольник вписан в окружность.

б) Радиус окружности, проходящей через точки A, B и E, равен

$$\frac{AB}{2\sin\angle BEA} = \frac{AB}{2\sin\angle AEC}.$$

Из подобия треугольников находим

$$\frac{CE}{CH} = \frac{AC}{AB}, \text{ откуда } CE = \frac{CH \cdot AC}{AB}.$$

Тогда

$$AE = \sqrt{CE^2 + AC^2} = AC \cdot \sqrt{\frac{CH^2 + AB^2}{AB^2}} = \frac{AC}{AB}\sqrt{CH^2 + AB^2}.$$

Поэтому

$$\sin\angle AEC = \frac{AC}{AE} = \frac{AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}}.$$

Следовательно, искомый радиус равен

$$AB : \frac{2AB}{\sqrt{CH^2 + AB^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{CH^2 + AB^2} = \frac{25}{2}.$$

Ответ: $\frac{25}{2}$.

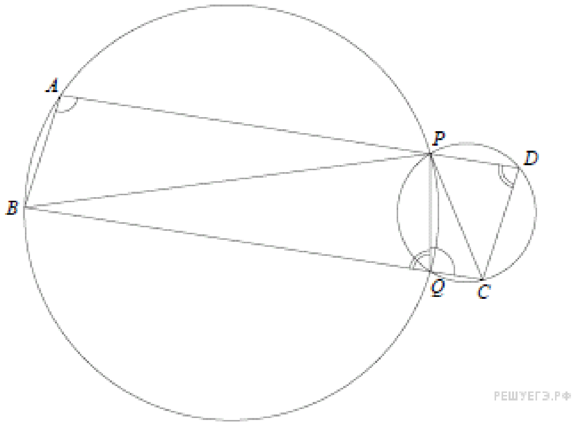
26. Задание 16 № 504264. Две окружности пересекаются в точках P и Q. Прямая, проходящая через точку P, второй раз пересекает первую окружность в точке A, а вторую — в точке D. Прямая, проходящая через точку Q параллельно AD, второй раз пересекает первую окружность в точке B, а вторую — в точке C.

а) Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

б) Найдите отношение $CP : PB$, если радиус первой окружности втрое больше радиуса второй.

Решение.

а) Обозначим $\angle BAD = \angle PAB = \alpha$. Поскольку $ABQP$ и $CDPQ$ — вписанные четырёхугольники:



$$\angle BQP = 180^\circ - \alpha$$

$$\angle CQP = 180^\circ - \angle BQP = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) = \alpha$$

$$\angle ADC = \angle PDC = 180^\circ - \angle PQC = 180^\circ - \alpha$$

Значит, $\angle BAD + \angle ADC = 180^\circ$, и поэтому $AB \parallel CD$. Противоположные стороны четырёхугольника $ABCD$ попарно параллельны, следовательно, это параллелограмм.

б) Пусть R — радиус второй (меньшей) окружности. Тогда радиус большей окружности равен $3R$. По теореме синусов:

$$BP = 2 \cdot 3R \sin \angle BQP = 6R \sin(180^\circ - \alpha) = 6R \sin \alpha$$

$$PC = 2R \sin \angle CQP = 2R \sin \alpha$$

Следовательно,

$$\frac{CP}{PB} = \frac{2R \sin \alpha}{6R \sin \alpha} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $CP : PB = 1 : 3$.

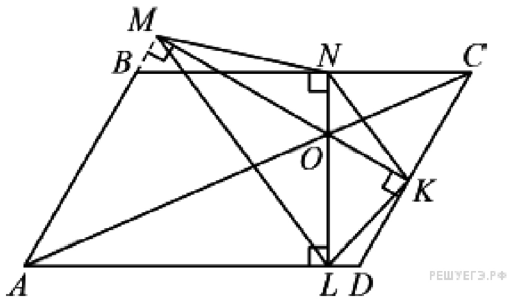
27. Задание 16 № 505155. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 16, а один из его углов равен 60°.

Решение.

а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O (не посередине) и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (см. рис.). Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны.



Точно так же подобны треугольники CNO и ALO:

$$OK:OM = OC:OA = ON:OL.$$

Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM. Тогда накрест лежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм или трапеция.

Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ — параллелограмм, то $ON = OL$.

В этом случае $OC = OA$, то есть O – середина AC. Противоречие. Значит, $KLMN$ — трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол – α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналям прямыми BC и CD, то есть этот угол равен α.

Поэтому площадь трапеции равна:

$$\frac{1}{2}\cdot NL\cdot KM\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{S}{AD}\cdot\frac{S}{AB}\cdot\sin\alpha = \frac{S\cdot AD\cdot AB\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot AD\cdot AB} = \frac{S\cdot\sin^2\alpha}{2}$$

Подставляя α = 60° и $S = 16$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{16\sin^2 60^\circ}{2} = \frac{16\cdot 3}{8} = 6.$$

Ответ: 6.

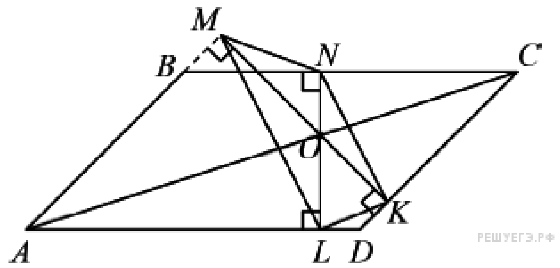
28. Задание 16 № 505176. На диагонали параллелограмма взяли точку, отличную от её середины. Из неё на все стороны параллелограмма (или их продолжения) опустили перпендикуляры.

а) Докажите, что четырёхугольник, образованный основаниями этих перпендикуляров, является трапецией.

б) Найдите площадь полученной трапеции, если площадь параллелограмма равна 24, а один из его углов равен 45°.

Решение.

а) Возьмём на диагонали AC параллелограмма $ABCD$ точку O (не посередине) и проведём через неё перпендикуляры NL и KM к сторонам параллелограмма (см. рис.). Прямоугольные треугольники CKO и AMO подобны.



Точно так же подобны треугольники CNO и ALO:

$$OK : OM = OC : OA = ON : OL.$$

Отсюда следует подобие треугольников ONK и OLM. Тогда накрестлежащие углы OML и OKN равны, а поэтому прямые NK и ML параллельны. Следовательно, четырёхугольник $KLMN$ — параллелограмм или трапеция.

Докажем, что это трапеция. Если $KLMN$ — параллелограмм, то $ON = OL$.

В этом случае $OC = OA$, то есть O — середина AC. Противоречие. Значит, $KLMN$ — трапеция.

б) Обозначим площадь параллелограмма S, а его острый угол — α. Угол между диагоналями NL и KM трапеции $KLMN$ равен углу между перпендикулярными диагоналям прямыми BC и CD, то есть этот угол равен α.

Поэтому площадь трапеции равна:

$$\frac{1}{2}\cdot NL\cdot KM\cdot\sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot\frac{S}{AD}\cdot\frac{S}{AB}\cdot\sin\alpha=\frac{S\cdot AD\cdot AB\cdot\sin^2\alpha}{2\cdot AD\cdot AB}=\frac{S\cdot\sin^2\alpha}{2}$$

Подставляя α = 45° и $S = 24$, получаем, что площадь трапеции равна

$$\frac{24\sin^2 45^\circ}{2}=\frac{24}{4}=6.$$

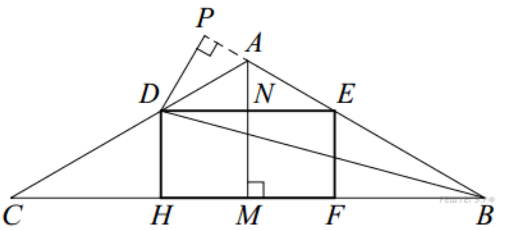
Ответ: 6.

29. Задание 16 № 505239. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на отрезке BC, а вершина E — на отрезке AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 4$.

Решение.



а) Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, тогда $DH = DP$.

В равнобедренном треугольнике EAD, $\angle AED = 30°$.

В прямоугольном треугольнике EPD, $DP = \frac{1}{2}DE$, откуда получаем, что FH = $2DH$.

б) Пусть AM — высота треугольника ABC — пересекает ED в точке N. Тогда

$$AM = AB \cdot \sin\angle ABC = 2,\ BC = 2AB \cdot \cos\angle ABC = 4\sqrt{3}.$$

Пусть $DH = EF = x$, тогда $FH = ED = 2x$. Треугольники ABC и AED подобны, следовательно

$$\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC} \Leftrightarrow \frac{2-x}{2} = \frac{2x}{4\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{3}.$$

Значит, площадь прямоугольника $DEFH$ равна

$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2(3-\sqrt{3})^2 = 24 - 12\sqrt{3}$$

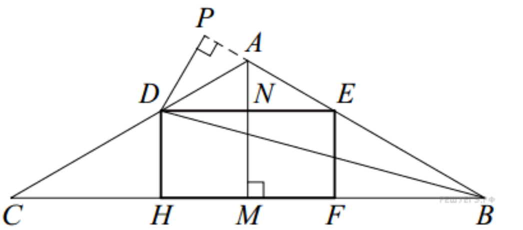
Ответ: $24 - 12\sqrt{3}$.

30. Задание 16 № 505249. В равнобедренном треугольнике ABC с углом 120° при вершине A проведена биссектриса BD. В треугольник ABC вписан прямоугольник $DEFH$ так, что сторона FH лежит на стороне BC, а вершина E — на стороне AB.

а) Докажите, что $FH = 2DH$.

б) Найдите площадь прямоугольника $DEFH$, если $AB = 2$.

Решение.



а) Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на прямую AB, тогда $DH = DP$.

В равнобедренном треугольнике EAD: $\angle AED = 30°$.

В прямоугольном треугольнике EPD: $DP = \frac{1}{2}DE$, откуда получаем, что $FH = 2DH$.

б) Пусть AM — высота треугольника ABC — пересекает ED в точке N. Тогда

$$AM = AB \cdot \sin\angle ABC = 1, BC = 2AB \cdot \cos\angle ABC = 2\sqrt{3}.$$

Пусть $DH = EF = x$, тогда $FH = ED = 2x$. Треугольники ABC и AED подобны, следовательно

$$\frac{AN}{AM} = \frac{ED}{BC} \Leftrightarrow \frac{1-x}{1} = \frac{2x}{2\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}.$$

Значит, площадь прямоугольника $DEFH$ равна

$$DE \cdot DH = 2x \cdot x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)^2 = \frac{2 \cdot 3}{4+2\sqrt{3}} = \frac{3}{2+\sqrt{3}} = 6 - 3\sqrt{3}.$$

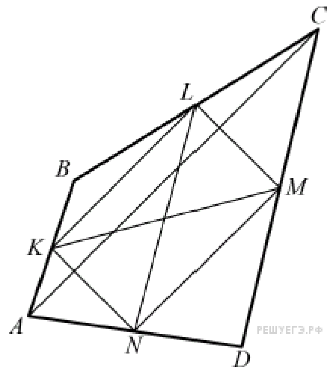
Ответ: $6 - 3\sqrt{3}$.

31. Задание 16 № 505389. Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $LM = 3\sqrt{3}$, $KM = 6\sqrt{3}$, $\angle KML = 60°$.

Решение.



а) Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = MN$ и KL || AC || MN, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.

б) В треугольнике KLM имеем:

$$KL^2 = KM^2 + ML^2 - 2KM \cdot ML \cdot cos60° = 81.$$

Значит, KL = 9. Тогда $KM^2 = KL^2 + LM^2$, поэтому треугольник KLM прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине L. Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = 9 \cdot 3\sqrt{3} = 27\sqrt{3}.$$

Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Тогда, имеем:

$$S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Где S — искомая площадь четырёхугольника $ABCD$. Аналогично $S_{CML} + S_{AKN} = \frac{1}{4}S$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно,

$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 27\sqrt{3} = 54\sqrt{3}.$$

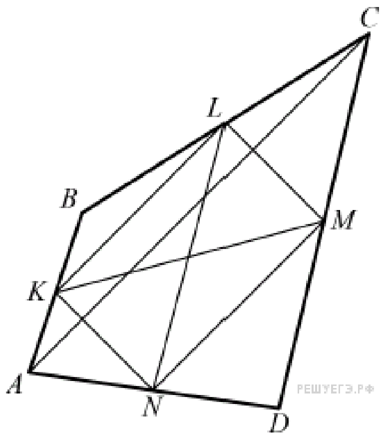
Ответ: $54\sqrt{3}$.

32. Задание 16 № 505410. Дан четырёхугольник $ABCD$.

а) Докажите, что отрезки LN и KM, соединяющие середины его противоположных сторон, делят друг друга пополам.

б) Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если $KL = 6$, $KM = 4\sqrt{3}$, $\angle MKL = 30^\circ$.

Решение.



а) Пусть K, L, M и N — середины сторон AB, BC, CD и AD четырёхугольника $ABCD$ соответственно. Тогда KL и MN — средние линии треугольников ABC и ADC. Значит, $KL = \frac{1}{2}AC = MN$ и $KL \parallel AC \parallel MN$, поэтому $KLMN$ — параллелограмм. Его диагонали KM и LN делят друг друга пополам, что и требовалось доказать.

б) В треугольнике KLM имеем:

$$ML^2 = KM^2 + KL^2 - 2KM \cdot KL \cdot \cos 30^\circ = 12.$$

Значит, $ML = 2\sqrt{3}$. Тогда $KM^2 = KL^2 + LM^2$, поэтому треугольник KLM прямоугольный треугольник с прямым углом при вершине L. Четырёхугольник $KLMN$ — прямоугольник, поэтому

$$S_{KLMN} = KL \cdot LM = 6 \cdot 2\sqrt{3} = 12\sqrt{3}.$$

Пусть искомая площадь четырёхугольника $ABCD$ равна S. Отрезок KL является средней линией треугольника ABC, поэтому $S_{KBL} = \frac{1}{4}S_{ABC}$. Аналогично $S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ADC}$. Тогда, имеем:

$$S_{KBL} + S_{MDN} = \frac{1}{4}S_{ABC} + \frac{1}{4}S_{ADC} = \frac{1}{4}(S_{ABC} + S_{ADC}) = \frac{1}{4}S.$$

Где S — искомая площадь четырёхугольника $ABCD$. Аналогично $S_{CML} + S_{AKN} = \frac{1}{4}S$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S - \frac{1}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S.$$

Следовательно,

$$S = 2S_{KLMN} = 2 \cdot 12\sqrt{3} = 24\sqrt{3}.$$

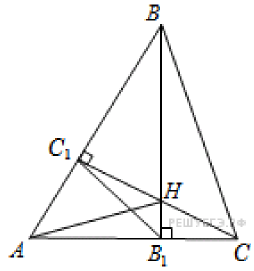
Ответ: $24\sqrt{3}$.

33. Задание 16 № 505419. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 8\sqrt{3}$ и $\angle BAC = 60°$.

Решение.



а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$.

Углы BC_1C и BB_1C — прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180° - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 8\sqrt{3}$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin\angle BAC = AH \cdot \sin 60° = 12.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB\cos\angle BAB_1 = AB\cos 60° = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

$$AC_1 = AC\cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60° = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\frac{AB}{AB_1} = \frac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{AC_1} = 2$. Значит, $BC = 2B_1C_1 = 24$.

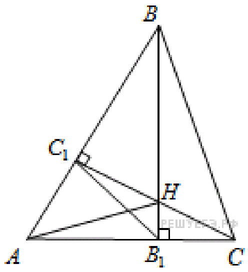
Ответ: 24.

34. Задание 16 № 505425. Высоты BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H.

а) Докажите, что $\angle AHB_1 = \angle ACB$.

б) Найдите BC, если $AH = 4$ и $\angle BAC = 60°$.

Решение.



а) В четырёхугольнике AC_1HB_1 углы C_1 и B_1 — прямые, следовательно, около этого четырёхугольника можно описать окружность, причём AH — её диаметр. Вписанные углы AC_1B_1 и AHB_1 опираются на одну дугу, следовательно, $\angle AHB_1 = \angle AC_1B_1$.

Углы BC_1C и BB_1C — прямые, значит, точки B, C, B_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром BC. Следовательно,

$$\angle AC_1B_1 = 180^\circ - \angle BC_1B_1 = \angle BCB_1.$$

Получаем, что $\angle ACB = \angle AHB_1$.

б) В треугольнике AB_1C_1 диаметр описанной окружности $AH = 4$, откуда

$$B_1C_1 = AH \cdot \sin\angle BAC = AH \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

В прямоугольном треугольнике BB_1A имеем:

$$AB_1 = AB\cos\angle BAB_1 = AB\cos 60^\circ = \frac{1}{2}AB.$$

В прямоугольном треугольнике CC_1A имеем:

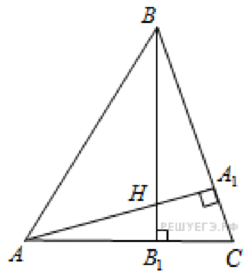
$$AC_1 = AC\cos\angle CAC_1 = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}AC.$$

Получаем, что $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$. Треугольники ABC и AB_1C_1 имеют общий угол A и $\dfrac{AB}{AB_1} = \dfrac{AC}{AC_1}$, следовательно, они подобны. Тогда $\dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{AC_1} = 2.$ Значит,

$$BC = 2B_1C_1 = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: $4\sqrt{3}$.

Приведём другое решение.



а) Поскольку AA_1 — перпендикуляр к BC, а BB_1 — перпендикуляр к AC (см. рис.), углы AHB_1 и ACB равны как углы со взаимно перпендикулярными сторонами.

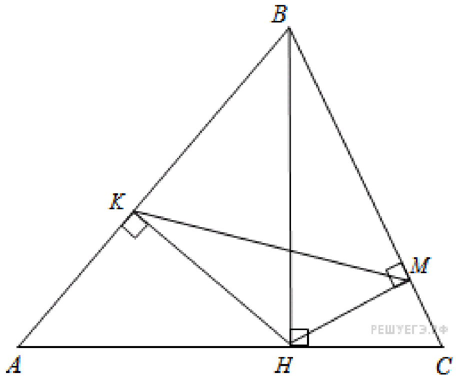
б) Сторона треугольника, величина противолежащего ей угла и отрезок высоты, проведённой из вершины этого угла в точку пересечения высот треугольника, связаны соотношением: $BC = AH\,\mathrm{tg}A$, откуда $BC = 4\,\mathrm{tg}\,60^\circ = 4\sqrt{3}$.

35. Задание 16 № 505473. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 2$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

Решение.



а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$ $\angle BKH + \angle BMH = 90° + 90° = 180°$, следовательно, четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит, углы KHB и KMB — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, $\angle BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B и $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BH = \dfrac{BK}{\sin\angle KHB}$. Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$. Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$ получаем: $\dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH}$. Стороны BC и BK — сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK, следовательно, их коэффициент подобия $k = \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH} = 4$. Найдём отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{16 - 1} = \frac{1}{15}.$$

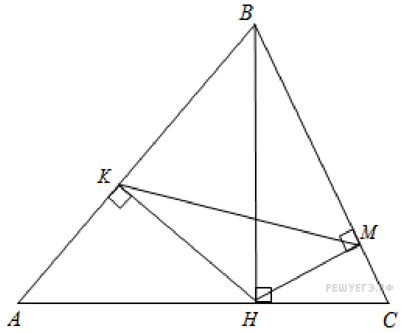
Ответ: $\dfrac{1}{15}$.

36. Задание 16 № 505495. В остроугольном треугольнике ABC провели высоту BH из точки H на стороны AB и BC опустили перпендикуляры HK и HM соответственно.

а) Докажите, что треугольник MBK подобен треугольнику ABC.

б) Найдите отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$, если $BH = 1$, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC равен 4.

Решение.



а) Пусть угол $BAC = \alpha$. Углы BAC и KHB равны, как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Рассмотрим четырёхугольник $BKHM$ $\angle BKH + \angle BMH = 90° + 90° = 180°$, следовательно, четырёхугольник $BKHM$ вписан в окружность. Значит, углы KHB и KBM — вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, следовательно, они равны. Таким образом, &ang$BAC = \angle KHB = \angle KMB$. Треугольники ABC и MBK имеют общий угол B и $\angle BAC = \angle KMB$, значит, эти треугольники подобны по двум углам.

б) Из прямоугольного треугольника BKH находим, что $BH = \dfrac{BK}{\sin\angle KHB}$. Для треугольника ABC справедливо равенство $2R = \dfrac{BC}{\sin\angle BAC}$. Учитывая, что $\angle KHB = \angle BAC$ получаем: $\dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH}$. Стороны BC и BK — сходственные в подобных треугольниках ABC и MBK, следовательно, их коэффициент подобия $k = \dfrac{BC}{BK} = \dfrac{2R}{BH} = 8$. Найдём отношение площади треугольника MBK к площади четырёхугольника $AKMC$:

$$\frac{S_{MBK}}{S_{AMKC}} = \frac{S_{MBK}}{S_{ABC} - S_{MBK}} = \frac{S_{MBK}}{k^2 S_{MBK} - S_{MBK}} = \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{64 - 1} = \frac{1}{63}.$$

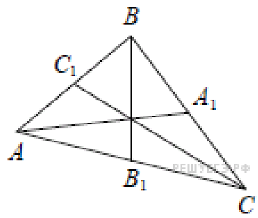
Ответ: $\dfrac{1}{63}$.

37. Задание 16 № 505537. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3MB$.

а) Докажите, что треугольник ABC прямоугольный.

б) Найдите сумму квадратов медиан AA_1 и CC_1, если известно, что $AC = 10$.

Решение.



Известно, что медианы делятся точкой пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Значит,

$$BB_1 = \frac{3}{2}BM = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}AC = \frac{1}{2}AC.$$

Поэтому треугольники AB_1B и CB_1B равнобедренные, причём $\angle B_1AB = \angle ABB_1$ и $\angle B_1CB = \angle CBB_1$. Сумма всех этих четырёх углов равна 180°. Тогда $\angle ABC = \angle ABB_1 + \angle CBB_1 = 90°$. Следовательно, треугольник ABC — прямоугольный.

б) Треугольник A_1BA прямоугольный. Поэтому

$$AA_1^2 = A_1B^2 + BA^2 = \frac{1}{4}CB^2 + BA^2.$$

Аналогично из прямоугольного треугольника C_1BC находим:

$$AA_1^2 + CC_1^2 = \frac{5}{4}AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 = \frac{5}{4}(AB^2 + BC^2) = \frac{5}{4}AC^2 = 125.$$

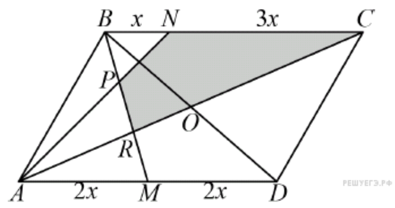
Ответ: 125.

38. Задание 16 № 504418. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M и N, причём M — середина AD, а $BN : NC = 1 : 3$.

а) Докажите, что прямые AN и AC делят отрезок BM на три равные части.

б) Найдите площадь четырёхугольника, вершины которого находятся в точках C, N и точках пересечения прямой BM с прямыми AN и AC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 48.

Решение.



а) Обозначим точки пересечения прямой BM с прямыми AN и AC буквами P и R соответственно.

Пусть O – точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда AO и BM — медианы треугольника ABD, значит,

$$MR = \frac{1}{3}BM.$$

Из подобия треугольников BPN и MPA находим, что

$$\frac{BP}{PM} = \frac{BN}{AM} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $BP = \frac{1}{3}BM.$ Из доказанного следует, что $BP = PR = RM$

б) Пусть площадь параллелограмма равна S. Из подобия треугольников MRA и BRC с коэффициентом $\frac{1}{2}$ следует, что высота треугольника BRC, проведённая к стороне BC, составляет $\frac{2}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к той же стороне. Следовательно, площадь треугольника BRC равна

$$S_{BRC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot S = \frac{S}{3}.$$

Аналогично найдём площадь треугольника BNP. Его высота, проведённая к BN, составляет $\frac{1}{3}$ высоты параллелограмма, проведённой к стороне BC, а сама сторона BN в четыре раза меньше стороны параллелограмма BC. Поэтому

$$S_{BNP} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}S = \frac{1}{24}S.$$

Следовательно, площадь четырёхугольника $PRCN$ равна

$$\frac{1}{3}S - \frac{1}{24}S = \frac{7}{24}S = \frac{7}{24} \cdot 48 = 14$$

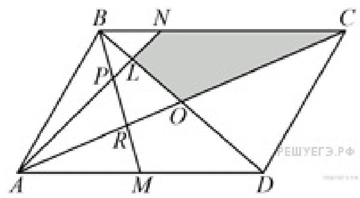
Ответ: 14.

39. Задание 16 № 504439. Точка M — середина стороны AD параллелограмма $ABCD$. Из вершины A проведены два луча, которые разбивают отрезок BM на три равные части.

а) Докажите, что один из лучей содержит диагональ параллелограмма.

б) Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного двумя проведёнными лучами и прямыми BD и BC, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 40.

Решение.



а) Обозначим точки пересечения лучей с отрезком BM — буквами P и R (см. рисунок), и пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма, а N — точка пересечения луча AP и прямой ВС.

Точка R делит медиану BM треугольника ABD в отношении 2 :1 считая от B. Следовательно, R лежит на медиане AO этого треугольника, то есть луч AR содержит диагональ AC.

б) Пусть L — точка пересечения AN и BD. Нужно найти площадь четырёхугольника $LNCO$. Пусть площадь параллелограмма равна S. Площадь треугольника BOC равна $S_{BOC}=\frac{S}{4}\cdot$ Найдём площадь треугольника BNL. Из подобия треугольников BPN и MPA следует, что

$$\frac{BN}{AM}=\frac{BP}{PM}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$BN=\frac{1}{2}AM=\frac{1}{4}AD.$$

Теперь из подобия треугольников BNL и DAL следует, что их соответствующие высоты относятся как 1:4 , а поэтому высота треугольника BNL, проведённая к BN, составляет $\frac{1}{5}$ высоты параллелограмма, проведённой к стороне BC.

Поэтому

$$S_{BLN}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}S=\frac{1}{40}S.$$

Следовательно, площадь четырёхугольника $LNCO$ равна

$$S_{BOC}-S_{BNL}=\frac{1}{4}S-\frac{1}{40}S=\frac{9}{40}S=\frac{9}{40}\cdot 40=9.$$

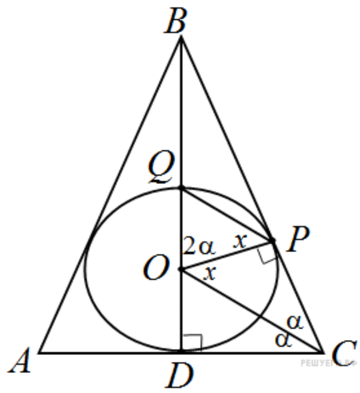
Ответ: 9.

40. Задание 16 № 504832. Окружность с центром O, вписанная в треугольник ABC, касается стороны BC в точке P и пересекает отрезок BO в точке Q. При этом отрезки OC и QP параллельны.

а) Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник.

б) Найдите площадь треугольника BQP, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2a$.

Решение.



Пусть луч BO пересекает сторону AC в точке D. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$. Прямые OC и QP параллельны, а углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP, следовательно $\angle OPQ = x$. Далее, из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а из равнобедренного треугольника OPQ находим $\angle POQ = \pi - 2x = 2\alpha$. Таким образом, треугольники BOP и BCD подобны, и, значит, биссектриса BD треугольника ABC является его высотой, откуда следует, что треугольник ABC — равнобедренный треугольник, что и требовалось доказать.

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD, следовательно:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3},$$

откуда $BC = 3DC = 3a$.

Далее $CP = DC = a$, значит, $BP = 2a$ и, следовательно, $S_{\Delta BPO} = 2S_{\Delta CPO} = S_{CPOD}$. Откуда

$$S_{\Delta BOP} = \frac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}. \; BQ = \frac{2}{3}BO,$$

следовательно $S_{\Delta BQP} = \frac{2}{3}S_{\Delta BOP} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}$.

По формуле Герона находим:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{4a \cdot 2a \cdot a \cdot a} = 2\sqrt{2}a^2.$$

Значит, $S_{\Delta BQP} = \frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

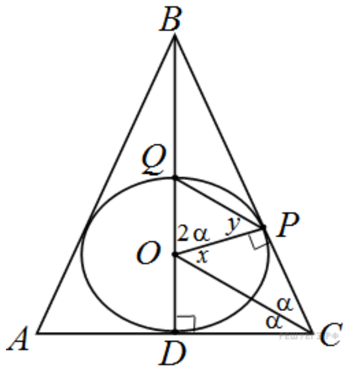
Ответ: $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$.

41. Задание 16 № 504853. Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Вписанная в него окружность с центром O касается боковой стороны BC в точке P и пересекает биссектрису угла B в точке Q.

а) Докажите, что отрезки PQ и OC параллельны.

б) Найдите площадь треугольника OBC, если точка O делит высоту BD треугольника в отношении $BO : OD = 3 : 1$ и $AC = 2m$.

Решение.



Пусть отрезок BD — высота данного треугольника. Тогда $O \in BD$ в силу того, что ABC — равнобедренный треугольник. Введем следующие обозначения: $\angle BCO = \angle DCO = \alpha$, $\angle COP = x$, $\angle OPQ = y$, Прямоугольные треугольники BOP и BCD подобны, следовательно $\angle BOP = 2\alpha$. Из прямоугольного треугольника OPC находим $x = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а из равнобедренного треугольника OPQ находим $y = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Углы COP и OPQ — накрест лежащие при пересечении прямых PQ и OC секущей OP, значит, отрезки PQ и OC параллельны, что и требовалось доказать.

б) Отрезок CO — биссектриса треугольника BCD, следовательно:

$$\frac{DC}{BC} = \frac{OD}{OB} = \frac{1}{3}.$$

Откуда $BC = 3DC = 3m$.
$CP = DC = m$, значит, $BP = 2m$ и, следовательно:

$$S_{\Delta BPO} = 2S_{\Delta CPO} = 2S_{\Delta CDO},$$

Откуда $S_{\Delta OBC} = \frac{3}{4}S_{\Delta BCD} = \frac{3}{8}S_{\Delta ABC}$. По формуле Герона находим:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{4m \cdot 2m \cdot m \cdot m} = 2m^2\sqrt{2},$$

откуда $S_{\Delta OBC} = \frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.

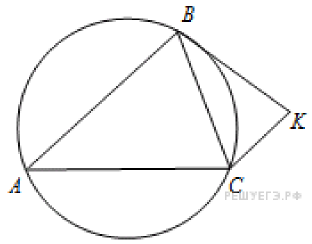
Ответ: $\frac{3m^2\sqrt{2}}{4}$.

42. Задание 16 № 505431. Около равнобедренного треугольника ABC с основанием BC описана окружность. Через точку C провели прямую, параллельную стороне AB. Касательная к окружности, проведённая в точке B, пересекает эту прямую в точке K.

а) Докажите, что треугольник BCK — равнобедренный.

б) Найдите отношение площади треугольника ABC к площади треугольника BCK, если $\cos\angle BAC = \frac{3}{4}$.

Решение.



а) Угол KBC равен углу BAC как угол между касательной и хордой. Прямые AB и CK параллельны. Следовательно, $\angle ABC = \angle BCK$. Получаем, что треугольники ABC и BCK подобны. Следовательно,

$$\angle BKC = \angle ACB = \angle ABC = \angle BCK.$$

Значит, треугольник BCK — равнобедренный.

б) Треугольники ABC и BCK подобны, коэффициент подобия равен $\frac{AB}{BC}$. Отношение площадей $\frac{S_{ABC}}{S_{BCK}} = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2$. В треугольнике ABC имеем:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC = 2AB^2(1-\cos\angle BAC).$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{BCK}} = \frac{1}{2(1-\cos\angle BAC)} = 2.$$

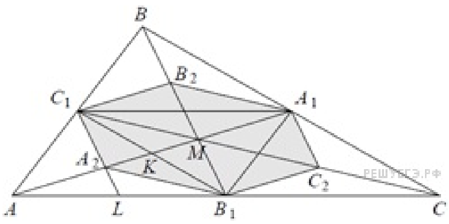
Ответ: 2.

43. Задание 16 № 505536. Медианы AA_1, BB_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке M. Точки A_2, B_2 и C_2 — середины отрезков MA, MB и MC соответственно.

а) Докажите, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ вдвое меньше площади треугольника ABC.

б) Найдите сумму квадратов всех сторон этого шестиугольника, если известно, что $AB = 4$, $BC = 7$ и $AC = 8$.

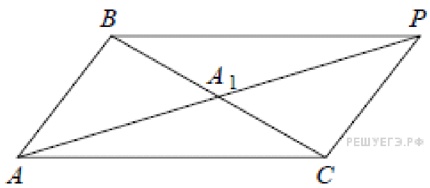
Решение.



а) Обозначим площадь треугольника ABC через S. Из рисунка видно, что площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ равна $S_{A_1B_1C_1}+S_{B_1C_1A_2}+S_{A_1C_1B_2}+S_{A_1B_1C_2}$. Поскольку треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом 0,5, его площадь равна $\frac{1}{4}S.$ Пусть K — точка пересечения медианы AA_1 и средней линии B_1C_1. Медиана и средняя линия делят друг друга пополам, поскольку они являются диагоналями параллелограмма $AB_1A_1C_1$. Откуда $AK=\frac{1}{2}AA_1$, AK — медиана треугольника AB_1C_1. Заметим, что

$$AA_2:AK=\frac{1}{2}AM:\frac{1}{2}AA_1=AM:AA_1=2:3,$$

то есть точка A_2 делит медиану AK треугольника AB_1C_1 в отношении 2 : 1. Значит, это точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1. Площадь треугольника $B_1C_1A_2$ равна трети площади треугольника AB_1C_1, то есть равна $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}S=\frac{S}{12}$. Аналогично площади треугольников $A_1C_1B_2$ и $A_1B_1C_2$ равны $\frac{S}{12}$. Откуда площадь шестиугольника $A_1B_2C_1A_2B_1C_2$ равна $\frac{1}{4}S+3\cdot\frac{1}{12}=\frac{1}{2}S.$



б) Пусть длины сторон BC, AC, AB треугольника ABC равны a, b, c. Докажем, что квадрат медианы AA_1 равен $\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2)$. Для доказательства на продолжении отрезка AA_1 за точку A_1 отложим отрезок $A_1P=AA_1$. Получим параллелограмм $ACPB$ со сторонами $AC=PB=b$ и $AB=CP=c$ и диагоналями $BC=a$ и $AP=2AA_1$. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон:

$$2b^2+2c^2=a^2+4AA_1^2\Leftrightarrow AA_1^2=\frac{1}{4}(2b^2+2c^2-a^2).$$

Аналогично $BB_1^2=\frac{1}{4}(2a^2+2c^2-b^2)$, а $CC_1^2=\frac{1}{4}(2a^2+2b^2-c^2)$. Пусть L — середина отрезка AB_1. Поскольку A_2 — точка пересечения медиан треугольника AB_1C_1, она лежит на отрезке C_2L и делит его в отношении 2 : 1, считая от точки C_1. Значит, $C_1A_2=\frac{2}{3}C_1L.$ Но треугольники AB_1C_1 и ABC подобны с коэффициентом 1/2, поэтому $C_1L=\frac{1}{2}BB_1$ и $C_1A_2=\frac{1}{3}BB_1$. Повторяя те же рассуждения для треугольника A_1B_1C получаем, что отрезок A_1C_2 равен $\frac{1}{3}BB_1$. Применяя аналогичные рассуждения, получим что стороны шестиугольника втрое меньше медиан треугольника ABC: $B_2C_1=B_1C_2=\frac{1}{3}AA_1$, $A_2B_1=A_1B_2=\frac{1}{3}CC_1$. Следовательно, сумма квадратов сторон шестиугольника равна:

$$2(B_1C_2^2+A_1C_2^2+A_1B_2^2)=\frac{2}{9}(AA_1^2+BB_1^2+CC_1^2)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{4}\cdot(2b^2+2c^2-a^2+2a^2+2c^2-b^2+2a^2+2b^2-c^2)=$$
$$=\frac{1}{18}\cdot 3(a^2+b^2+c^2)=\frac{1}{6}(a^2+b^2+c^2).$$

Подставляя числовые значения получаем, что сумма квадратов шести сторон треугольника равна $\frac{43}{2}$.

Ответ: 21,5.