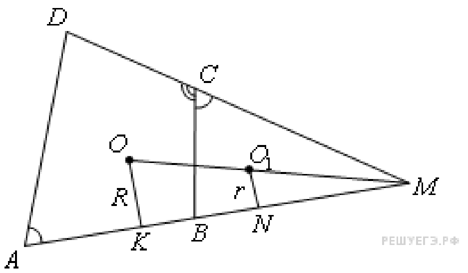
Окружности и четырёхугольники

1. Задание 16 № 484617. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые AB и DC пересекаются в точке M. Найдите площадь четырехугольника, если известно, что $\angle AMD = \alpha$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники BCM и AMD равны соответственно r и R.

Решение.

Первый случай.

Центры O_1 и O окружностей, вписанных в треугольники BMC и AMD соответственно, лежат на биссектрисе MO угла AMD. Окружность, вписанная в четырехугольник $ABCD$, является также окружностью, вписанной в треугольник AMD и вневписанной окружностью треугольника BMC. Будем искать площадь четырехугольника $ABCD$, как разность площадей треугольников AMD и BMC.



Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, следовательно, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, но $\angle BCM + \angle BCD = 180°$, откуда $\angle BCM = \angle BAD$. Так как треугольники BCM и AMD имеют еще общий угол AMD, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{ABCD} = S_{\Delta ADM} - S_{\Delta BCM} = \dfrac{R^2}{r^2} S_{\Delta BCM} - S_{\Delta BCM} = \left(\dfrac{R^2}{r^2} - 1\right) S_{\Delta BCM}.$

2) $S_{\Delta BCM} = pr$, где p — полупериметр треугольника BCM, равный по свойству вневписанной окружности длине отрезка KM.

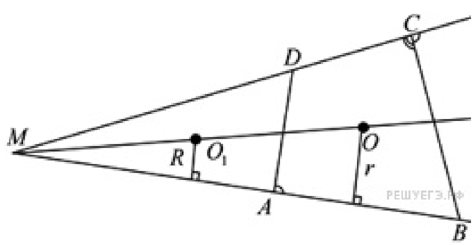
3) Из прямоугольного треугольника OKM, находим $KM = OK \operatorname{ctg} \angle OMK = R,\ \operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, откуда $S_{\Delta BCM} = Rr,\ \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}.$

Подставляя найденное значение $S_{\Delta BCM}$ в формулу S_{ABCD}, окончательно получаем

$$S_{ABCD} = \left(\frac{R^2}{r^2} - 1\right) Rr \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{R(R^2 - r^2)}{r} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Второй случай.

Отличается от первого положением точки M левее точек D и A. В этом случае $R < r$ и в рассуждении они и треугольники BCM и ADM должны быть поменяны местами. Таким образом, в этом случае

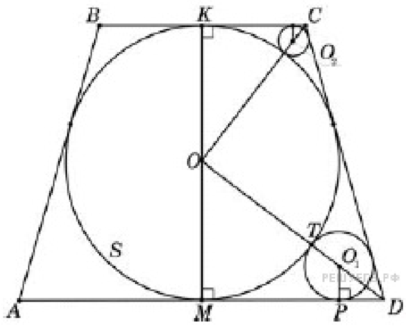


$$S_{ABCD} = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) S_{\Delta ADM} = \left(\frac{r^2}{R^2} - 1\right) Rr \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r(r^2 - R^2)}{R} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Ответ: $S_{ABCD} = \dfrac{R(R^2 - r^2)}{r} \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$ или $S_{ABCD} = \dfrac{r(r^2 - R^2)}{R} \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$.

2. Задание 16 № 507492. Окружность S радиуса 24 вписана в равнобедренную трапецию с основаниями 36 и 64. Найдите радиус окружности, которая касается основания, боковой стороны и окружности S.

Решение.



Пусть $ABCD$ — трапеция с боковыми сторонами AB и CD, а окружность S с центром O, вписанная в трапецию, касается оснований $BC = 36$ и $AD = 64$ в точках K и M соответственно.

Точки K и M — середины оснований, поэтому $CK = 18$ и $DM = 32$. Из прямоугольных треугольников ODM и OCK находим, что

$$OD = \sqrt{OM^2 + DM^2} = \sqrt{24^2 + 32^2} = 8\sqrt{9+16} = 40.$$

$$OC = \sqrt{OK^2 + CK^2} = \sqrt{24^2 + 18^2} = 6\sqrt{16+9} = 30.$$

Рассмотрим случай, когда окружность радиуса r с центром O_1 вписана в угол ADC, касается окружности S в точке T, а стороны AD — в точке P. Линия центров касающихся окружностей проходит через точку их касания, поэтому:

$$OO_1 = OT + TO_1 = 24 + r,$$

а так как точки D, O_1 и O лежат на одной прямой (биссектрисе угла CAD), то

$$DO_1 = OD - OO_1 = 40 - (24 + r) = 16 - r.$$

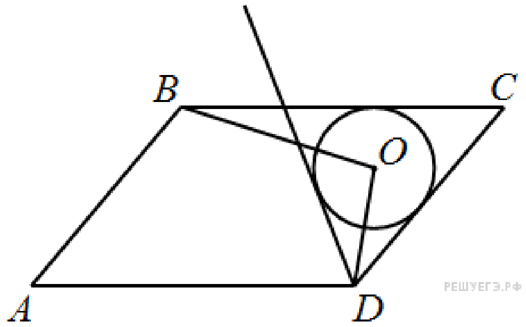
Треугольники O_1PD и OMD подобны, поэтому $\dfrac{O_1P}{OM} = \dfrac{O_1D}{OD}$, или $\dfrac{r}{24} = \dfrac{16-r}{40}$, откуда находим, что $r = 6$.

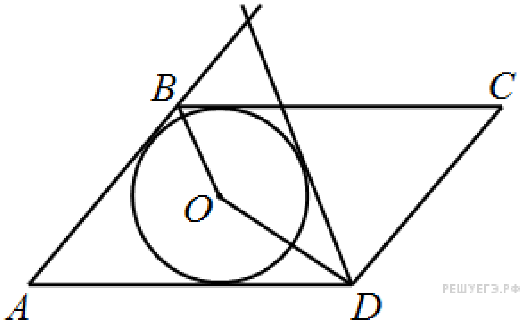
Если же окружность радиуса r_1 с центром O_2 вписана в угол BCD и касается окружности S, то аналогично получим уравнение $\dfrac{r_1}{24} = \dfrac{6-r}{30}$, из которого найдём, что $r_1 = \dfrac{8}{3}$.

Ответ: 6 или $\dfrac{8}{3}$.

3. Задание 16 № 507617. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.





Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 — соответственно. Поэтому радиусы окружностей равны третьей части высоты правильного треугольника.

Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \dfrac{5 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{5\sqrt{3}}{6}$.

Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \dfrac{3 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

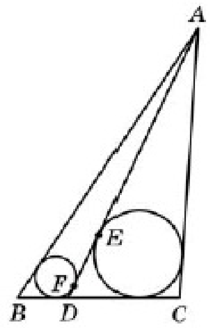
Ответ: $\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\dfrac{11\sqrt{3}}{2}$.

4. Задание 16 № 507623. В треугольнике ABC $AB = 13$, $BC = 10$, $CA = 7$. Точка D лежит на прямой BC так, что $BD : DC = 1 : 4$. Окружности, вписанные в каждый из треугольников ADC и ADB, касаются стороны AD в точках E и F. Найдите длину отрезка EF.

Решение.

Пусть $AD = d$, $BD = x$, $DC = y$. Возможны два случая.

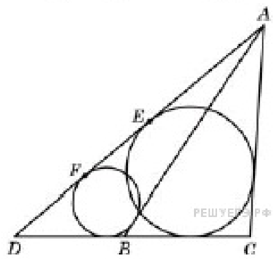
Первый случай. Точка D лежит на отрезке BC (верхний рисунок):



$$x = 2,\ y = 8,\ DE = \frac{d + y - 7}{2},\ DF = \frac{d + x - 13}{2}.$$

Значит, $EF = \dfrac{6 + y - x}{2} = 6.$

Второй случай. Точка D лежит вне отрезка BC (нижний рисунок):



$$x = \frac{10}{3},\ y = \frac{40}{3},\ DE = \frac{d + y - 7}{2},\ DF = \frac{d + x - 13}{2}.$$

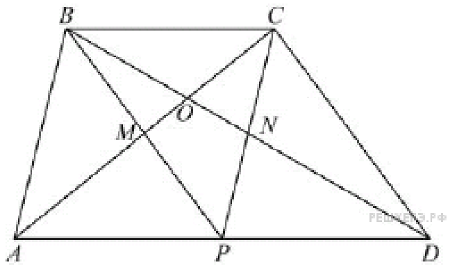
Значит, $EF = \dfrac{6 + y - x}{2} = 8.$

Ответ: 6 или 8.

5. Задание 16 № 507647. Площадь трапеции $ABCD$ равна 72, а одно из оснований трапеции вдвое больше другого. Диагонали пересекаются в точке O; отрезки, соединяющие середину P основания AD с вершинами B и C, пересекаются с диагоналями трапеции в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырёхугольника $OMPN$.

Решение.

Пусть h — высота трапеции, а основания равны a и $2a$. Тогда

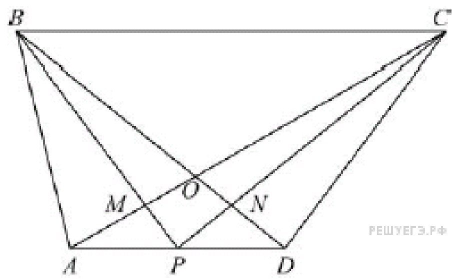


$$S_{ABCD}=\frac{a+2a}{2}h=\frac{3}{2}ah=72.$$

Откуда $ah=48$. Пусть $AD=2a$, $BC=a$. Четырёхугольники $ABCP$ и $BCDP$ — параллелограммы, поэтому M и N — середины BP и CP соответственно, значит, CM и BN — медианы треугольника BPC. Следовательно:

$$S_{OMPN}=\frac{1}{3}S_{\Delta BPC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}ah=\frac{1}{6}\cdot 48=8.$$

Пусть теперь $BC=2a$, $AD=a$. Пусть $AM=3t$. Треугольник AOD подобен треугольнику COB с коэффициентом подобия 2, а треугольник AMP — треугольнику CMB с коэффициентом $\frac{AP}{BC}=\frac{1}{4}$. Тогда



$$MC=4AM=12t,\ AC=AM+MC=3t+12t=15t,$$

$$AO=\frac{1}{3}AC=5t,\ \frac{AM}{AO}=\frac{3t}{5t}=\frac{3}{5}.$$

Аналогично, $\frac{DN}{DO}=\frac{3}{5}$. Высота треугольника AOD, проведённая из вершины O, равна $\frac{1}{3}h$, значит:

$$S_{\Delta AOD}=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{3}h=\frac{1}{6}\cdot 48=8.$$

$$S_{\Delta DNP}=S_{\Delta AMP}=\frac{AM}{AO}\cdot\frac{AP}{AD}S_{\Delta AOD}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot 8=2,4.$$

Следовательно,

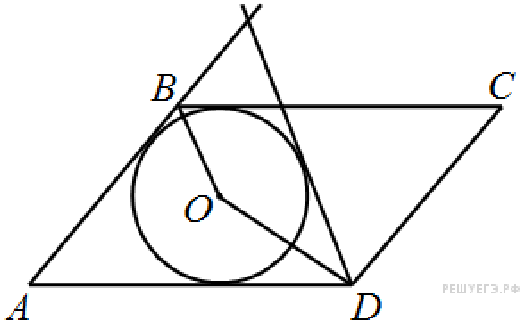
$$S_{OMPN}=S_{\Delta AOD}-S_{\Delta AMP}-S_{\Delta DNP}=8-2,4-2,4=3,2.$$

Ответ: 8 или 3,2.

6. Задание 16 № 507662. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 7$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.

Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 7 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 7 радиус равен $r = \dfrac{7 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{7\sqrt{3}}{6}$.



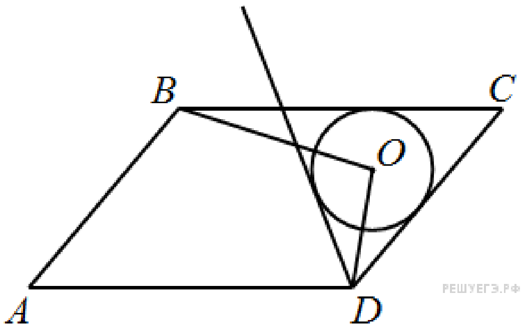
Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{7\sqrt{3}}{6} = \frac{35\sqrt{3}}{6}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен $r = \dfrac{3 \cdot \sin 60°}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:

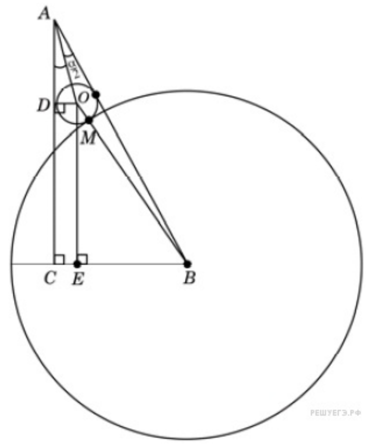
$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = 8\sqrt{3}.$$



Ответ: $\dfrac{35\sqrt{3}}{6}$ или $8\sqrt{3}$.

7. Задание 16 № 507677. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 12$ и $BC = 5$. С центром в вершине B проведена окружность S радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S.

Решение.



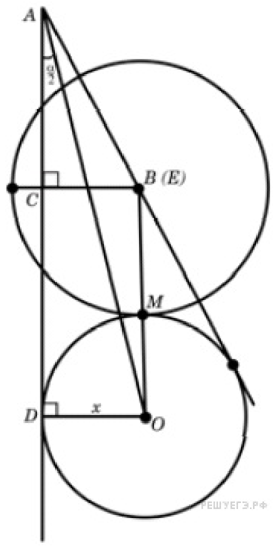
Обозначим $\angle BAC = \alpha$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{12}$, $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$.

Пусть x — радиус искомой окружности, O — ее центр, D — точка касания с лучом AC, M — точка касания с окружностью S, E — проекция точки O на прямую BC. Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, значит,

$$\operatorname{ctg}\angle OAD = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1+\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = 5.$$

Из прямоугольного треугольника OAD находим, что

$$AD = OD\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = 5x.$$



Заметим, что условию задачи удовлетворяют две окружности: центр одной расположен внутри треугольника ABC, а центр второй — вне, причём искомая окружность касается окружности S внешним образом, значит, $BO = BM + MO = 8 + x$. В первом случае точка D лежит на катете AC, поэтому

$$OE = CD = AC - AD = 12 - 5x, \quad BE = BC - CE = BC - OD = 5 - x.$$

Причём $AD < AC$, то есть $5x < 12$, откуда $x < \frac{12}{5}$. По теореме Пифагора:

$$BO^2 = OE^2 + BE^2 \Leftrightarrow (8+x)^2 = (12-5x)^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 146x + 105 = 0.$$

Учитывая, что $x < \frac{12}{5}$, находим, что $x = \frac{21}{25}$.

Во втором случае точка D лежит на продолжении катета AC за точку C, поэтому $OE = CD = AD - AC = 5x - 12$, причём $AD > AC$, то есть $x > \frac{12}{5}$.

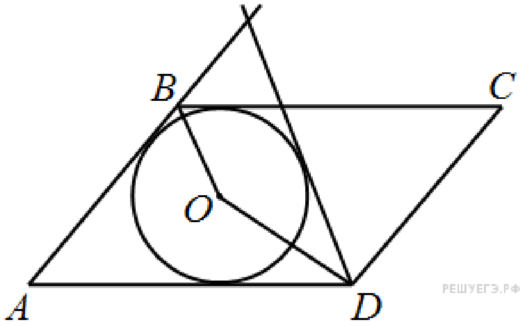
Тогда $(8+x)^2 = (5x-12)^2 + (5-x)^2 \Leftrightarrow 25x^2 - 146x + 105 = 0.$

Учитывая, что $x > \frac{12}{5}$, находим, что $x = 5$ (это значит, что $OD = BC$, то есть точка E совпадает с вершиной B).

Ответ: $\frac{21}{25}$ или 5.

8. Задание 16 № 507812. Дан параллелограмм $ABCD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $\angle A = 60°$. Окружность с центром в точке O касается биссектрисы угла D и двух сторон параллелограмма, исходящих из вершины одного его острого угла. Найдите площадь четырёхугольника $ABOD$.

Решение.



Окружностей две: каждая из них вписанная в правильный треугольник. Эти треугольники имеют стороны равные 5 и 3 соответственно. Для треугольника со стороной 5 радиус равен $r = \frac{5 \cdot \sin 60°}{3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

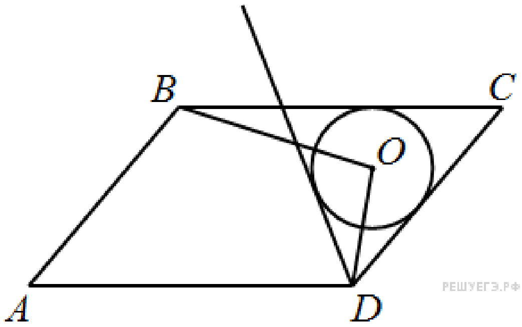
Найдем площадь невыпуклого четырехугольника как сумму площадей треугольников AOB и AOD:

$$S_{ABOD} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AD \cdot r = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{10\sqrt{3}}{3}.$$

Для треугольника со стороной 3 радиус равен

$$r = \frac{3 \cdot \sin 60°}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Чтобы найти площадь четырехугольника $ABOD$, вычтем из площади параллелограмма площади треугольников BOC и DOC:



$$S_{ABOD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60° - \frac{1}{2}BC \cdot r - \frac{1}{2}CD \cdot r = \frac{11\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ или $\frac{11\sqrt{3}}{2}$.

9. Задание 16 № 507824. В параллелограмме $ABCD$ известны стороны $AB = a$, $BC = b$ и $\angle BAD = \alpha$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников BCD и DAB.

Решение.

Пусть O_1 и O_2 — центры описанных окружностей треугольников DAB и BCD соответственно, O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Поскольку треугольники DAB и BCD равны, то радиусы окружностей также равны. По условию $\angle BAD = \alpha$. Пусть $\alpha < 90°$. По теореме косинусов $BD = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}$. Вписанный в окружность с центром O_1 угол BAD равен половине центрального угла BO_1D, значит, $\angle BO_1O_2 = \frac{1}{2}\angle BO_1D = \angle BAD = \alpha$. Прямая O_1O_2 — серединный перпендикуляр к диагонали BD, Поэтому

$$O_1O_2 = 2O_1O = 2 \cdot BO \cdot \operatorname{ctg} \angle BO_1O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \operatorname{ctg} \angle BO_1O = BD \cdot \operatorname{ctg} \alpha = \\ = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Если же $\alpha \geq 90°$, то аналогично получим, что

$$O_1O_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg}(180° - \alpha) = -\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot \operatorname{ctg} \alpha.$$

Ответ: $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \cdot |\operatorname{ctg} \alpha|$.

10. Задание 16 № 512873. Окружности радиусов 3 и 5 с центрами O_1 и O_2 соответственно касаются в точке A. Прямая, проходящая через точку A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а большую — в точке C. Найдите площадь выпуклого четырёхугольника, вершинами которого являются точки O_1, $O2$, B и C, если $\angle ABO_1 = 15°$.

Решение.

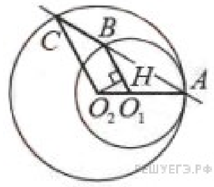


Рис. 1

Точки O_1, O_2 и A лежат на одной прямой. Поскольку треугольники BO_1A и CO_2A равнобедренные, $\angle ABO_1 = \angle BAO_1 = \angle CAO_2 = \angle ACO_1 = 15°$.

Возможны два случая. Первый случай: окружности касаются внутренним образом (рисунок 1), тогда точка B лежит между точками A и C, а $O_1O_2 = O_2A - O_1A = 2$. Поскольку $\angle ABO_1 = \angle ACO_2$, прямые O_1B и O_2C параллельны, следовательно, искомый четырёхугольник — трапеция O_1BCO_2.

Пусть O_2H — перпендикуляр, проведённый из точки O_2 к прямой O_1B. В прямоугольном треугольнике O_2O_1H имеем $\angle O_2O_1H = 30°$, откуда $O_2H = \dfrac{O_1O_2}{2} = 1.$

$$S_{O_1BCO_2} = \frac{1}{2}(O_2C + O_1B) \cdot O_2H = 4.$$

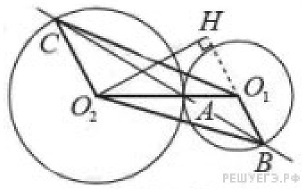


Рис. 2

Второй случай: окружности касаются внешним образом (рисунок 2), тогда точка A лежит между точками B и C, а $O_1O_2 = O_2A + O_1A = 8$. Поскольку $\angle ABO_1 = \angle ACO_2$, прямые O_1B и CO_2 параллельны. следовательно, искомый четырёхугольник — трапеция O_1BO_2C.

Пусть O_2H — перпендикуляр, проведённый из точки O_2 к прямой O_1B. В прямоугольном треугольнике O_2O_1H имеем $\angle O_2O_1H = 30°$, откуда $O_2H = \dfrac{O_1O_2}{2} = 4.$

$$S_{O_1BO_2C} = \frac{1}{2}(O_2C + O_1B) \cdot O_2H = 16.$$

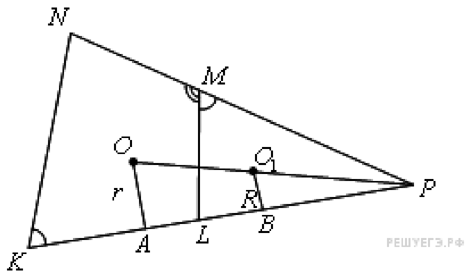
Ответ: 4 или 16.

11. Задание 16 № 484618. Четырехугольник $KLMN$ описан около окружности и вписан в окружность. Прямые KL и NM пересекаются в точке P. Найдите площадь треугольника KPN, если известно, что $\angle KPN = \varphi$ и радиусы окружностей, вписанных в треугольники KPN и LMP равны соответственно r и R.

Решение.

Первый случай.

Центры O_1 и O окружностей, вписанных в треугольники KPN и LMP соответственно, лежат на биссектрисе PO угла KPN. Окружность, вписанная в четырехугольник $KLMN$, является также окружностью, вписанной в треугольник KPN и вневписанной окружностью треугольника LMP.



Четырехугольник $KLMN$ вписан в окружность, следовательно $\angle LKN + \angle LMN = 180°$. Но $\angle LMP + \angle LMN = 180°$, откуда $\angle LKN = \angle LMP$. Так как треугольники KPN и LMP имеют еще общий угол KPN, они подобны, причем коэффициент подобия равен отношению радиусов окружностей, вписанных в эти треугольники.

Далее имеем:

1) $S_{\Delta KPN} = \dfrac{r^2}{R^2} S_{\Delta LPM}$.

2) $S_{\Delta LPM} = pR$, где p — полупериметр треугольника LPM равный длине отрезка AP, как сумма отрезков касательных проведенных из одной точки.

3) из прямоугольного треугольника OAP находим $AP = OA\operatorname{ctg}\angle OPA = r\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$, откуда $S_{\Delta LPM} = Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Подставляя найденное $S_{\Delta LPM}$ в формулу площади треугольника KPN, окончательно получаем

$$S_{KPN} = \frac{r^2}{R^2} Rr\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \frac{r^3}{R}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}.$$

Второй случай.

Отличается от первого расположением точки P левее точек N и K. В этом случае $R > r$ и в рассуждении они и треугольники LMP и KPN должны быть поменяны местами. Таким образом, в этом случае KPN — меньший из двух треугольников, а радиус вписанной в него окружности r. Значит

$S_{\text{KPN}} = rp$, где p — полупериметр треугольника KPN равный отрезку PB. При этом, как и в первом случае, $PB = R\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Таким образом $S_{KPN} = Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

Ответ: $S_{KPN} = \dfrac{r^3}{R}\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$ или $S_{KPN} = Rr\operatorname{ctg}\dfrac{\varphi}{2}$.

12. Задание 16 № 500015. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ равны 6 и 8 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 5, средняя линия трапеции равна 25. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник BMC.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 5, а полусумма оснований равна 25, поэтому основания трапеции равны 20 и 30.

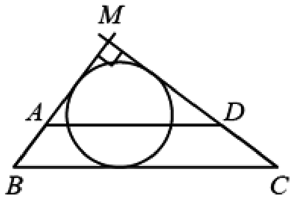


Рис. 1

Предположим что $BC = 30$, $AD = 20$ (рис. 1). Стороны BC и AD треугольников MBC и MAD параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}\cdot$ Значит,

$$MB = \frac{AB}{1-k} = 18,\ MC = \frac{CD}{1-k} = 24.$$

Заметим, что $MB^2 + MC^2 = BC^2$, поэтому треугольник MBC — прямоугольный с гипотенузой BC. Радиус его вписанной окружности равен: $r = \frac{MB + MC - BC}{2} = 6$.

Пусть теперь $AD = 30$, $BC = 20$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника MAD равен 6. Треугольник MAD и MBC подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{3}\cdot$ Значит, радиус вписанной окружности треугольника MBC равен $r = 6k = 4$.

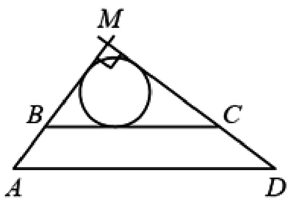


Рис. 2

Ответ: 4; 6.

13. Задание 16 № 500021. Боковые стороны KL и MN трапеции $KLMN$ равны 8 и 17 соответственно. Отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен 7,5, средняя линия трапеции равна 17,5. Прямые KL и MN пересекаются в точке A. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник ALM.

Решение.

В любой трапеции отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, равен полуразности оснований трапеции, а средняя линия — полусумме оснований трапеции. В нашем случае полуразность оснований равна 7,5, а полусумма оснований равна 17,5, поэтому основания трапеции равны 10 и 25.

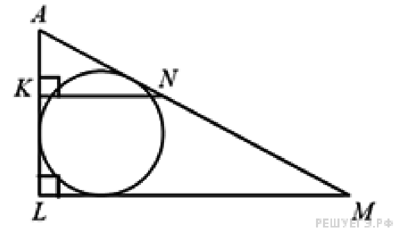


Рис. 1

Предположим что $LM = 25$, $KN = 10$ (рис. 1). Стороны LM и KN треугольников ALM и AKN параллельны, поэтому эти треугольники подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит,

$$AL = \frac{KL}{1-k} = \frac{40}{3},\ AM = \frac{MN}{1-k} = \frac{85}{3}.$$

Заметим, что $AL^2 + LM^2 = AM^2$, поэтому треугольник ALM — прямоугольный с гипотенузой AM. (Поэтому трапеция прямоугольная, как и изображено на рисунке.) Радиус вписанной в треугольник ALM окружности равен

$$r = \frac{AL + LM - AM}{2} = 5.$$

Пусть теперь $KN = 25$, $LM = 10$ (рис. 2). Аналогично предыдущему случаю можно показать, что радиус вписанной окружности треугольника AKN равен 5. Треугольник AKN и ALM подобны с коэффициентом $k = \frac{2}{5}$. Значит, радиус вписанной окружности треугольника ALM равен $r = 5k = 2$.

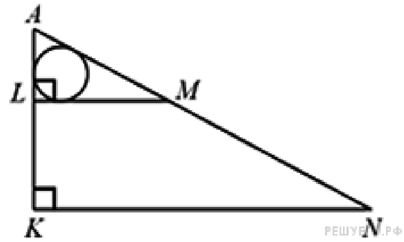


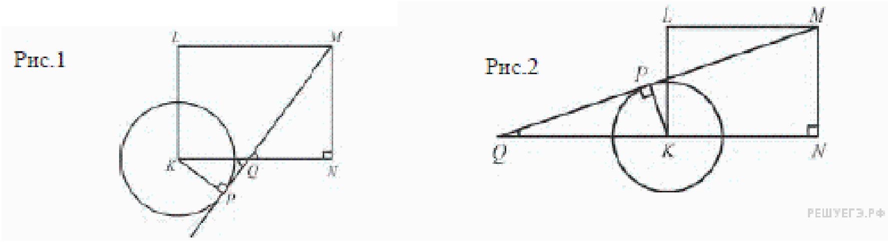
Рис. 2

Ответ: 2; 5.

14. Задание 16 № 500644. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.



Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 16}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{MN}{QN}$, откуда $\dfrac{4}{\sqrt{x^2-16}} = \dfrac{8}{11-x}$.

$$(11-x)^2 = 4\left(x^2 - 16\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 22x - 185 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

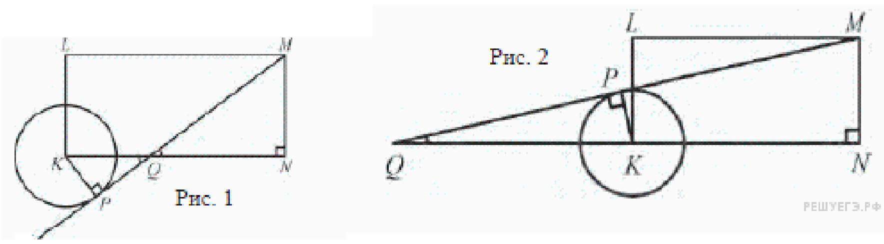
Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 22x - 185 = 0$, из которого $x = \dfrac{37}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{37}{3}$.

15. Задание 16 № 500642. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 13$, $MN = 6$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 3 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.



Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2} = \sqrt{x^2 - 9}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\dfrac{PK}{PQ} = \dfrac{MN}{QN}$, откуда $\dfrac{3}{\sqrt{x^2-9}} = \dfrac{6}{13-x}$.

Тогда

$$(13-x)^2 = 4\left(x^2 - 9\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 26x - 205 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 26x - 205 = 0$, из которого $x = \dfrac{41}{3}$.

Ответ: 5 или $\dfrac{41}{3}$.

16. Задание 16 № 500900. Дан прямоугольник $KLMN$ со сторонами: $KN = 11$, $MN = 8$. Прямая, проходящая через вершину M, касается окружности с центром K радиуса 4 и пересекается с прямой KN в точке Q. Найдите QK.

Решение.

Пусть точка Q лежит между K и N (рис.1), P — точка касания прямой MQ с данной окружностью. Обозначим $KQ = x$.

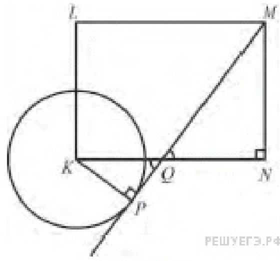


Рис.1

Из прямоугольного треугольника QPK по теореме Пифагора находим

$$PQ = \sqrt{QK^2 - PK^2}.$$

Прямоугольные треугольники QPK и QNM подобны, поэтому $\frac{PK}{PQ} = \frac{MN}{QN}$, откуда

$$\frac{4}{\sqrt{x^2-16}} = \frac{8}{11-x} \Leftrightarrow (11-x)^2 = 4\left(x^2-16\right) \Leftrightarrow 3x^2 + 22x - 185 = 0 \Rightarrow x = 5.$$

Если точка Q лежит на продолжении стороны NK за точку K (рис.2), то, рассуждая аналогично, получим уравнение $3x^2 - 22x - 185 = 0$, из которого $x = \frac{37}{3}$.

Ответ: 5 или $\frac{37}{3}$.

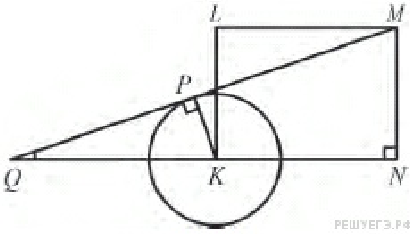
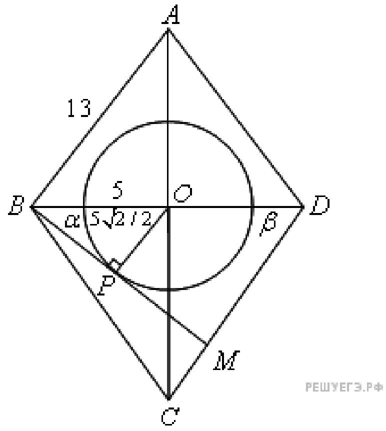


Рис.2

17. Задание 16 № 484615. Дан ромб $ABCD$ с диагоналями $AC = 24$ и $BD = 10$. Проведена окружность радиуса $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ с центром в точке пересечения диагоналей ромба. Прямая, проходящая через вершину B касается этой окружности и пересекает прямую CD в точке M. Найдите CM.

Решение.

Пусть точка M лежит между C и D, P, — точка касания прямой BM с данной окружностью, O — центр ромба.



По теореме Пифагора $CD=\sqrt{OD^2+OC^2}=\sqrt{12^2+5^2}=13.$ Обозначим $\angle OBM=\alpha, \angle BDC=\beta.$ Из прямоугольных треугольников и находим, что

$$\sin\alpha=\frac{OP}{OB}=\frac{5\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}, \alpha=45^\circ, \cos\beta=\frac{OD}{CD}=\frac{5}{13}, \sin\beta=\frac{12}{13}.$$

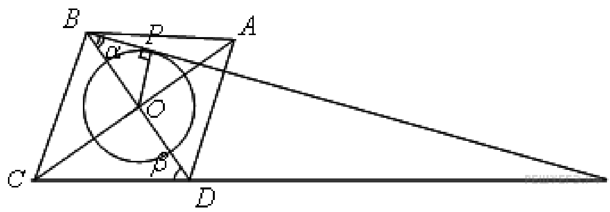
Применяя теорему синусов к треугольнику BMD получим, что $\frac{DM}{\sin\angle MBD}=\frac{BD}{\sin\angle BMD}$, поэтому

$$MD=\frac{BD\sin\angle MBD}{\sin\angle BMD}=\frac{10\sin 45^\circ}{\sin(180^\circ-45^\circ-\beta)}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(45^\circ+\beta)}=$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{\sin 45^\circ\cos\beta+\cos 45^\circ\sin\beta}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13}}=\frac{130}{17}.$$

Следовательно, $CM=CD-MD=13-\frac{130}{17}=\frac{91}{17}.$

Пусть теперь точка лежит на продолжении стороны за точку Тогда по теореме о внешнем угле треугольника

$$\angle BMD=\angle BDC-\angle MBD=\beta-\alpha.$$



Далее, рассуждая аналогично, получим, что

$$MD=\frac{5\sqrt{2}}{\sin(\beta-45^\circ)}=\frac{5\sqrt{2}}{\sin\beta\cos 45^\circ-\sin 45^\circ\cos\beta}=\frac{5\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{12}{13}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5}{13}}=\frac{130}{7}.$$

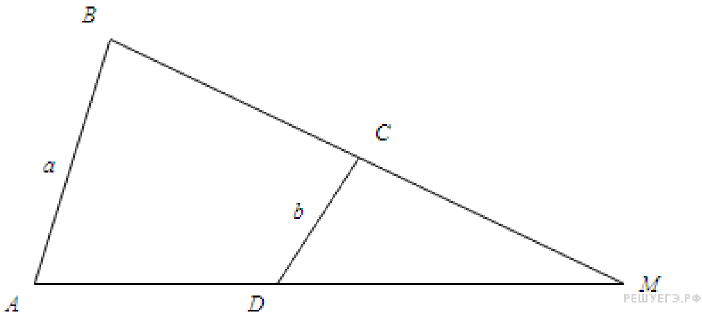
Следовательно, $CM=CD+MD=13+\frac{130}{7}=\frac{221}{7}.$

Ответ: $\frac{91}{17}$ или $\frac{221}{7}$.

18. Задание 16 № 484606. Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности и вписан в другую окружность. Прямые AD и BC пересекаются в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если известно, что $AB = a$ и $CD = b$.

Решение.

Возможны два случая $a > b$ и $a < b$.

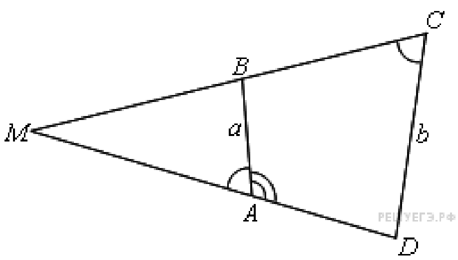


Первый случай. Четырехугольник описан около окружности, следовательно, $AD + BC = AB + CD = a + b$. Четырехугольник вписан в окружность, значит, $\angle BAD + \angle BCD = 180°$, но $\angle MCD + \angle BCD = 180°$, откуда $\angle BAD = \angle MCD$, следовательно, $\Delta ABM \sim \Delta CDM$ с коэффициентом подобия $k = \dfrac{AB}{CD} = \dfrac{a}{b}$.

Обозначим через P периметр треугольника ABM, тогда если P_1 — периметр треугольника CDM,

$$P_1 = P - AD - AB - BC + CD = P - a - (a+b) + b = P - 2a.$$

Поскольку $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{a}{b}$, получаем: $\dfrac{P}{P-2a} = \dfrac{a}{b} = aP - 2a^2 \Leftrightarrow P = \dfrac{2a^2}{a-b}$.



Второй случай. Аналогично случаю 1 имеем:

$$P_1 = P - a + b + (a+b) = P + 2b \Leftrightarrow \frac{P}{P+2b} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow bP = aP + 2ab \Leftrightarrow P = \frac{2ab}{b-a}.$$

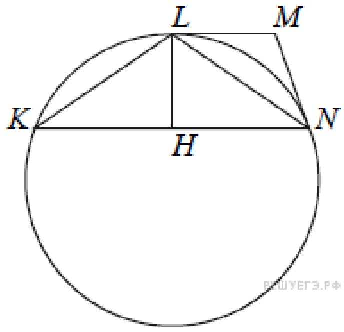
Ответ: $\dfrac{2a^2}{a-b}$ или $\dfrac{2ab}{b-a}$.

19. Задание 16 № 513430. Стороны KN и LM трапеции $KLMN$ параллельны, прямые LM и MN — касательные к окружности, описанной около треугольника KLN.

а) Докажите, что треугольники LMN и KLN подобны.

б) Найдите площадь треугольника KLN, если известно, что $KN = 3$, а $\angle LMN = 120°$.

Решение.



а) Касательная LM параллельна хорде KN, значит, $\angle KNL = \angle MLN$, а так как $\angle MLN = \angle LKN$ как угол между касательной и хордой, треугольник KLN равнобедренный с основанием KN.

Поскольку $ML = MN$ как отрезки касательных, проведённых к окружности из одной точки,
треугольник LMN также равнобедренный с основанием LN.

Углы при основаниях равнобедренных треугольников LMN и LKN равны, следовательно, эти треугольники подобны.

б) Угол при вершине равнобедренного треугольника KLN равен 120°, значит, его высота LH вдвое меньше боковой стороны $LN = \frac{KN}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, то есть $LH = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$S_{KLN} = \frac{1}{2}KN \cdot LN = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Ответ: б) $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.