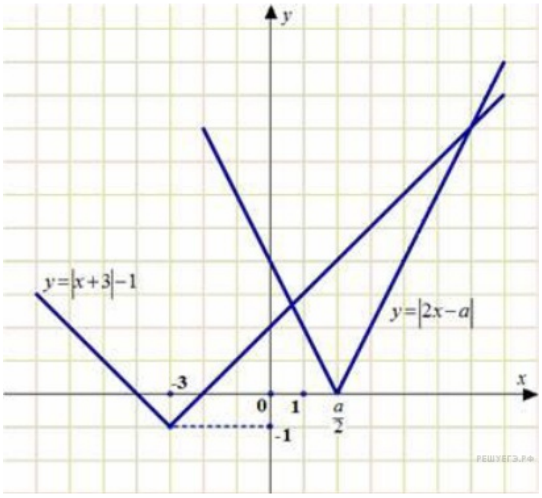
Неравенства с параметром

1. Задание 18 № 507589. Найдите все значения *a*, при каждом из которых решения неравенства $|2x-a|+1 \le |x+3|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем единицу: $|2x-a| \le |x+3|$.

Построим схематично графики функций $y=|2x-a|$ и $y=|x+3|-1$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\dfrac{a}{2} \le -4$ или $\dfrac{a}{2} \ge -2$.

1) $\begin{cases} a \le -8, \\ |2x-a| \le -x-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8, \\ 2x-a \le -x-4, \\ 2x-a \ge x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -8, \\ x \le \dfrac{a-4}{3}, \\ x \ge a+4. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\dfrac{a-4}{3}-(a+4)=1$, откуда $a=-\dfrac{19}{2}$.

2) $\begin{cases} a \ge -4, \\ |2x-a| \le x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4, \\ 2x-a \le x+2, \\ 2x-a \ge -x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \ge -4, \\ x \le a+2, \\ x \ge \dfrac{a-2}{3}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $a+2-\dfrac{a-2}{3}=1$, откуда $a=-\dfrac{5}{2}$.

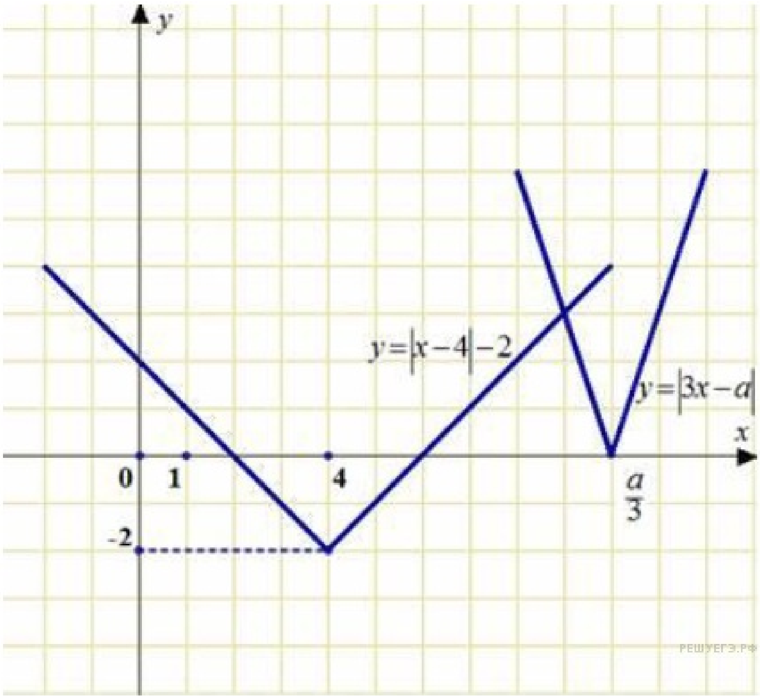
Ответ: $a=-\dfrac{5}{2}, a=-\dfrac{19}{2}$.

2. Задание 18 № 507594. Найдите все значения *a*, при каждом из которых решения неравенства $|3x-a|+2\le|x-4|$ образуют отрезок длины 1.

Решение.

Перенесем двойку: $|3x-a|\le|x-4|-2$.

Построим схематично графики функций $y=|3x-a|$ и $y=|x-4|-2$.



На рисунке видно, что неравенство имеет решения только при $\frac{a}{3}\le 2$ или $\frac{a}{3}\ge 6$.

1) $\begin{cases} a\le 6 \\ |3x-a|\le -x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 6, \\ 3x-a\le -x+2, \\ 3x-a\ge x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\le 6, \\ x\le \dfrac{a+2}{4}, \\ x\ge \dfrac{a-2}{2}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a+2}{4}-\frac{a-2}{2}=1$, откуда $a=2$.

2) $\begin{cases} a\ge 18, \\ |3x-a|\le x-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 18, \\ 3x-a\le x-6, \\ 3x-a\ge -x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 18, \\ x\le \dfrac{a-6}{2}, \\ x\ge \dfrac{a+6}{4}. \end{cases}$

Решения образуют отрезок длины 1, если $\frac{a-6}{2}-\frac{a+6}{4}=1$, откуда $a=22$.

Ответ: $a=2, a=22$.

3. Задание 18 № 510547. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства

$$\sqrt{3-x}+|x-a|\leq 2$$

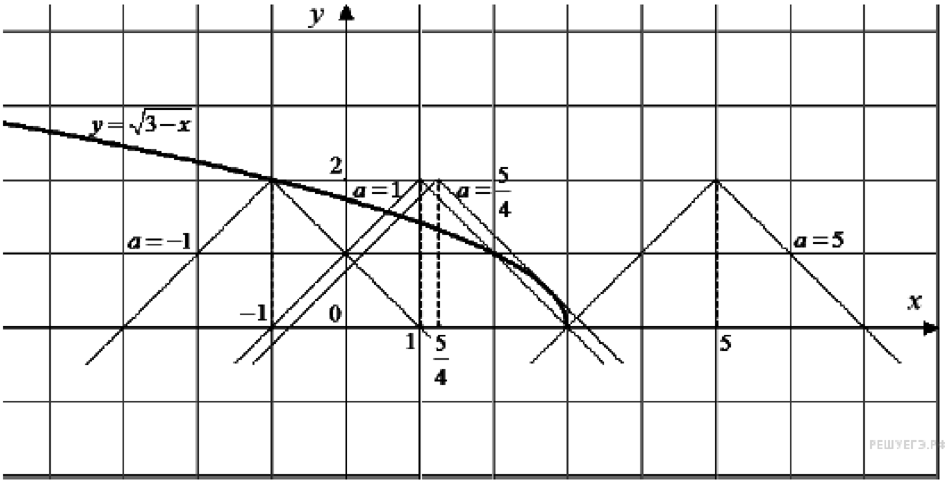
является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{3-x}\leq 2-|x-a|.$$

Нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Из рисунка видно, что график правой части неравенства лежит выше левой при $a\in(-1,5)$. Заметим, что при $a=1$, решением кроме отрезка становится еще и точка $x=3$, что противоречит условию.

При дальнейшем уменьшении a в решение будет попадать еще один отрезок с правым концом в точке $x=3$. Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором решение снова превратится в один отрезок.

Рассмотрим случай касания:

$$f'(\sqrt{3-x})=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=-1\Leftrightarrow 3-x=0{,}25\Leftrightarrow x=2{,}75,$$

тогда

$$\sqrt{3-2{,}75}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0{,}5=2-(2{,}75-a)\Leftrightarrow a=1{,}25.$$

Итак, интервал $(1;\,1{,}25]$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in(-1;\,1)\cup[1{,}25,\,5)$.

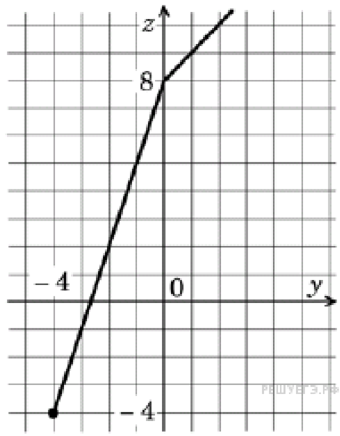
4. Задание 18 № 510559. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left||x^2-6x+5|-x^2+6x-13\right|<a-a^2-(x-2)^2+2x-4$$

имеет единственное целое решение.

Решение.

Пусть $x^2-6x+5=y$, тогда $y\ge-4$, при этом, если x — целое, то y — также целое число.



Неравенство имеет вид $||y|-y-8|+y<-a^2+a-3$. Построим график функции $f(y)=||y|-y-8|+y$ при $y\ge-4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a, то все $y<y_0$ также являются решениями.

Значит, если есть решение $y_0\ge-3$, то целые числа −4 и −3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, три решения данного неравенства: $x=2,\ 3,\ 4$. Следовательно, $-4\le y<-3$, и, стало быть, $-4\le f(y)<-1$. Значит, должно выполняться двойное неравенство: $-4<-a^2+a-3\le-1$, откуда

$$\begin{cases}a^2-a-1<0,\\a^2-a+2\ge0.\end{cases}$$

Решение первого неравенства: $\dfrac{1-\sqrt5}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt5}{2}$. Второе неравенство выполняется при всех a.

Ответ: $\left(\dfrac{1-\sqrt5}{2};\ \dfrac{1+\sqrt5}{2}\right)$.

5. Задание 18 № 503324. Найдите все значения a, для каждого из которых существует хотя бы одна пара чисел x и y, удовлетворяющих неравенству $5|x-2|+3|x+a|\le\sqrt{4-y^2}+7$.

Решение.

Рассмотрим две функции: $f(x)=5|x-2|+3|x+a|$ и $g(y)=\sqrt{4-y^2}+7$.

Функция $f(x)=5|x-2|+3|x+a|$ является кусочно-линейной, причём при $x<2$ угловой коэффициент равен либо −2, либо −8, а при $x>2$ угловой коэффициент равен либо 2, либо 8. Значит, функция $f(x)$ убывает при $x<2$ и возрастает при $x>2$, поэтому $f(x)\ge f(2)=3|a+2|$.

Поскольку $y^2\ge0$, получаем: $g(y)\le g(0)=9$.

Если $f(2)>g(0)$, то $f(x)\ge f(2)>g(0)\ge g(y)$, поэтому неравенство $f(x)\le g(y)$ не имеет решений.

Если $f(2)\le g(0)$, то пара чисел $x=2,\ y=0$ удовлетворяет неравенству $f(x)\le g(y)$. Получаем:

$$f(2)\le g(0)\Leftrightarrow 3|a+2|\le9\Leftrightarrow -3\le a+2\le3\Leftrightarrow -5\le a\le1.$$

Ответ: [−5; 1].

6. Задание 18 № 500196. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство $|x^2-4x+a|\le 10$ выполняется для всех $x\in[a,\,a+5]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=x^2-4x+a=(x-2)^2+a-4$. Эта функция возрастает на промежутке $[2,\,+\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty,\,2]$.

Исходное неравенство имеет вид $|f(x)|\le 10$, значит, график функции $y=f(x)$ на отрезке $[a,\,a+5]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-10\le f(x)\le 10$.

Отрезок $[a,\,a+5]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, иначе приращение $f(x)$ на отрезке длины 5 будет не меньше 25, поэтому ее график не поместится в полосе ширины 20, следовательно, $a<2<a+5$, откуда $-3<a<2$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,a+5]$ достигается либо при $x=a$, либо при $x=a+5$.

Наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,a+5]$ достигается при $x=2$. Получаем систему:

$$\begin{cases}-3<a<2,\\ f(a)\le 10,\\ f(a+5)\le 10,\\ f(2)\ge -10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<a<2,\\ (a-2)^2+a-4\le 10,\\ (a+3)^2+a-4\le 10,\\ a-4\ge -10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<a<2,\\ a^2-3a-10\le 10,\\ a^2+7a-5\le 10,\\ a\ge -6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<a<2,\\ -2\le a\le 5,\\ \dfrac{-7-\sqrt{69}}{2}\le a\le\dfrac{-7+\sqrt{69}}{2},\\ a\ge -6,\end{cases}$$

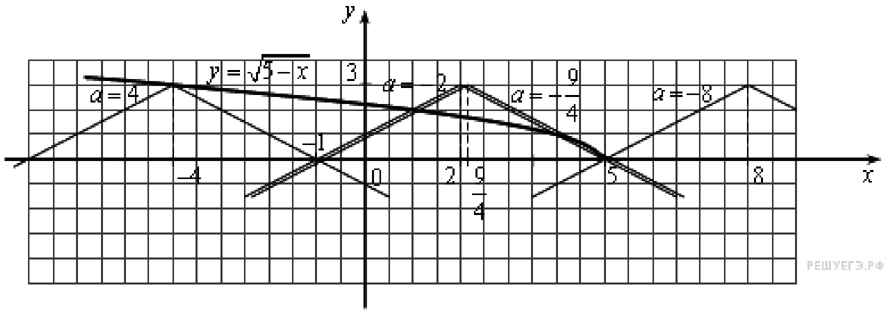
откуда $-2\le a\le\dfrac{-7+\sqrt{69}}{2}$.

Ответ: $-2\le a\le\dfrac{-7+\sqrt{69}}{2}$.

7. Задание 18 № 484643. Найдите все значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\sqrt{5-x}+|x+a|\le 3$ является отрезок.

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\sqrt{5-x}\le 3-|x+a|$. И нарисуем эскизы графиков левой и правой частей неравенства.



Из рисунка видно, что график правой части неравенства лежит выше левой при $a\in(-8,4)$. Заметим, что при $a=-2$, решением кроме отрезка становится еще и точка $x=5$, что противоречит условию.

При дальнейшем уменьшении a в решение будет попадать еще один отрезок с правым концом в точке $x=5$. Левый конец будет сдвигаться вплоть до случая касания при котором решение снова превратится в один отрезок.

Рассмотрим случай касания:

$$f'(\sqrt{5-x})=-\frac{1}{2\sqrt{5-x}}=-1\Leftrightarrow 5-x=0,25\Leftrightarrow x=4,75,$$

тогда

$$\sqrt{5-4,75}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0,5=3-(4,75+a)\Leftrightarrow a=-2,25.$$

Итак, интервал $(-2,25;\,-2]$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a\in(-8;\,-2,25]\cup(-2,4)$.

8. Задание 18 № 500115. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство

$$\left|\frac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

выполняется при всех x.

Решение.

Поскольку $x^2+x+1>0$ для всех значений x, получаем:

$$|x^2+ax+1|<3x^2+3x+3.$$

Решим полученное неравенство:

$$\begin{cases}x^2+ax+1<3x^2+3x+3,\\ x^2+ax+1>-3x^2-3x-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2+(3-a)x+2>0,\\ 4x^2+(3+a)x+4>0.\end{cases}$$

Для того, чтобы любое значение x удовлетворяло этой системе неравенств, нужно, чтобы каждое из неравенств системы было верным для любого значения x, то есть дискриминанты левых частей этих неравенств должны быть отрицательными:

$$\begin{cases}(3-a)^2-16<0,\\ (3+a)^2-64<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|a-3|<4,\\ |3+a|<8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<a<7,\\ -11<a<5\end{cases}\Leftrightarrow -1<a<5.$$

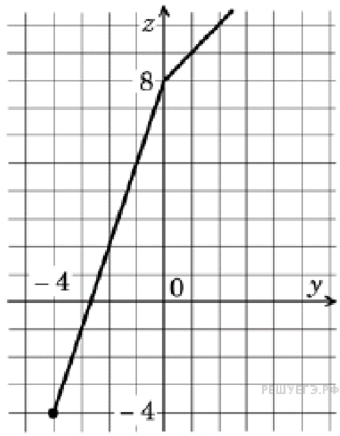
Ответ: $-1<a<5$.

9. Задание 18 № 507624. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left||x^2-6x+5|-x^2+6x-13\right| < a-a^2-(x-2)^2+2x-4$$

имеет единственное целое решение.

Решение.



Пусть $x^2-6x+5=y$, тогда $y \geq -4$, при этом, если x — целое, то y — также целое число.

Неравенство имеет вид $||y|-y-8|+y<-a^2+a-3$. Построим график функции $f(y)=||y|-y-8|+y$ при $y \geq -4$, находим, что эта функция монотонно возрастает. Следовательно, если y_0 является решением неравенства при некотором a, то все $y<y_0$ также являются решениями.

Значит, если есть решение $y_0 \geq -3$, то целые числа −4 и −3 также будут решениями, и тогда будет, по крайней мере, три решения данного неравенства: $x=2,\ 3,\ 4$. Следовательно, $-4 \leq y < -3$, и, стало быть, $-4 \leq f(y) < -1$. Значит, должно выполняться двойное неравенство: $-4<-a^2+a-3 \leq -1$, откуда

$$\begin{cases} a^2-a-1<0, \\ a^2-a+2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}<a<\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. Второе неравенство выполняется при всех a.

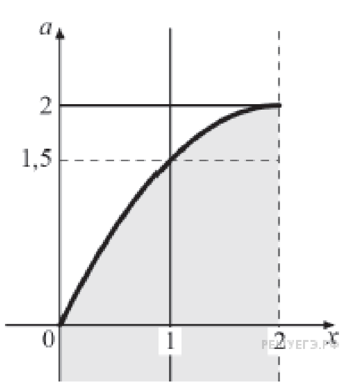
Ответ: $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

10. Задание 18 № 500965. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых на интервале $(1,2)$ существует хотя бы одно число x, неудовлетворяющее неравенству $a+\sqrt{a^2-2ax+x^2} \leq 3x-x^2$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$a+\sqrt{a^2-2ax+x^2} \leq 3x-x^2 \Leftrightarrow |x-a| \leq 3x-x^2-a \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-a \leq 3x-x^2-a, \\ x-a \geq -3x+x^2+a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \leq 0, \\ a \leq -\dfrac{1}{2}x^2+2x. \end{cases}$$



Неравенство $x(x-2) \leq 0$ определяет на плоскости Oxa полосу, заключенную между прямыми $x=0$ и $x=2$. Неравенство $a \leq -\dfrac{1}{2}x^2+2x$ задаёт часть плоскости, ограниченную сверху параболой.

На рисунке видно, что на интервале $(1,2)$ есть x, не удовлетворяющие неравенству, только если $a>1,5$.

Ответ: $(1,5;+\infty)$.

11. Задание 18 № 501219. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых множеством решений неравенства $\dfrac{x-2}{ax^2-(a^2+1)x+a}\geq 0$ является некоторый луч.

Решение.

Разложим знаменатель левой части данного неравенства на множители:

$$ax^2-(a^2+1)x+a=0,\ ax^2-a^2x-x+a=0,\ ax(x-a)-(x-a)=0,\ (ax-1)(x-a)=0.$$

Способ 1 (метод интервалов).

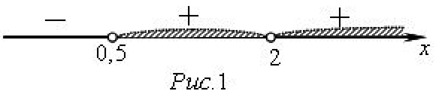


*Рис.*1

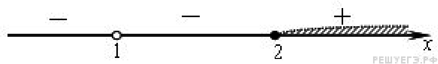


*Рис.*2

Так как $a>0$, знаменатель исходной дроби имеет корни a и $\frac{1}{a}$. Если числа 2, a и $\frac{1}{a}$ попарно различны, то искомое множество — объединение двух промежутков, а не луч. Значит, для того, чтобы множеством решений неравенства являлся луч, необходимо, чтобы из трех чисел 2, a и $\frac{1}{a}$ какие-то два совпали.

1. Если $a=2$ или $a=0,5$, то множеством решений данного неравенства также является не луч, а объединение двух промежутков: $(0,5;2)\cup(2;+\infty)$ (см. рисунок 1).

2. Если $a=\frac{1}{a}$, то $a=1$, так как, согласно условию $a>0$.

В этом случае множеством решений данного неравенства является луч $[2;+\infty)$ (см. рисунок 2).

Способ 2 (графоаналитический).

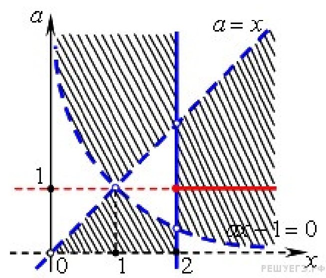


*Рис.*3

Данное неравенство задает на координатной плоскости Оха три области (см. заштрихованные области на рисунке 3).

Множество решений данного неравенства при каждом значении a есть множество абсцисс всех точек этих областей, ордината которых равна a.

Это множество является лучом только при $a=1$.

Ответ: $a=1$.

12. Задание 18 № 504833. Найдите все значения a, при которых неравенство $\log_a\left(\dfrac{3+2x^4}{1+x^4}\right)+\log_a\left(\dfrac{5+4x^4}{1+x^4}\right)>1$ выполняется для всех действительных значений x.

Решение.

Заметим, что

$$\frac{3+2x^4}{1+x^4}=\frac{1+2(1+x^4)}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+2,$$
$$\frac{5+4x^4}{1+x^4}=\frac{1}{1+x^4}+4.$$

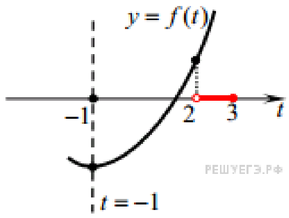
Пусть $t=\dfrac{1}{1+x^4}+2$. Ввиду того, что $1\le 1+x^4<+\infty$ множеством значений выражения $\dfrac{1}{1+x^4}+2$ при $x\in\mathbb{R}$ является промежуток $(2,3]$. Значит, неравенство $\log_a\left(\dfrac{3+2x^4}{1+x^4}\right)+\log_a\left(\dfrac{5+4x^4}{1+x^4}\right)>1$ выполняется для всех действительных значений x тогда и только тогда, когда на промежутке $(2,3]$ выполняется неравенство $\log_a t+\log_a(t+2)>1(*)$.

Далее имеем:

1) если $0<a<1$, то неравенство $(*)$ не имеет решений на промежутке $(2,3]$, так как на этом промежутке оба слагаемых левой части неравенства отрицательны;

2) если $a>1$, то неравенство $(*)$ равносильно неравенству

$$t^2+2t-a>0.$$



Функция $f(t)=t^2+2t-a$ должна быть положительна на промежутке $(2,3]$, значит, ее график должен быть расположен выше интервала $(2,3]$ оси абсцисс, то есть, должно выполняться условие $f(2)\ge 0$ (см.рисунок). Решая неравенство $8-a\ge 0$ с учетом условия $a>1$, окончательно получаем $1<a\le 8$.

Ответ: $1<a\le 8$.

Замечание.

Пункт 2) можно выполнить иначе с помощью следующих рассуждений:

Поскольку вершина параболы $y=t^2+2t$ имеет координаты $(-1,y_0)$, функция $y=t^2+2t$ возрастает на промежутке $(2,3]$ и, значит множеством ее значений на этом промежутке является промежуток $(y(2),y(3)]$, то есть промежуток $(8,15]$. Таким образом, неравенство $t^2+2t-a>0$ верно для всех t из промежутка $(2,3]$ в том и только в том случае, когда выполняется условие $a\le 8$, откуда с учетом условия $a>1$, окончательно получаем $1<a\le 8$.