Функции с параметром

1. Задание 18 № 485938. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4ax + \left|x^2 - 6x + 5\right|$$

больше, чем -24.

Решение.

1. При $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$ функция имеет вид:

$$f(x) = 4ax - (x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 2(2a+3)x - 5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

При $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ функция имеет вид:

$$f(x) = 4ax + (x^2 - 6x + 5) = x^2 + 2(2a-3)x + 5,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 3 - 2a$.

2. Если $3 - 2a$ принадлежит отрезку $[1, 5]$, то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x = 1$ и $x = 5$. Если $3 - 2a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ — то в точке $x = 3 - 2a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда, когда либо

$$\begin{cases} 3 - 2a \in [1, 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{cases} \quad \text{либо} \quad \begin{cases} 3 - 2a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty), \\ f(3 - 2a) > -24. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -1 \leq a \leq 1, \\ 4a > -24, \\ 20a > -24 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-1, 1].$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ |2a - 3| < \sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, -1\right) \cup \left(1, \frac{3 + \sqrt{29}}{2}\right).$$

Ответ: $\left(\dfrac{3 - \sqrt{29}}{2}, \dfrac{3 + \sqrt{29}}{2}\right)$.

2. Задание 18 № 511452. Найдите все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 6ax + |x^2 - 6x + 5|$$

больше, чем -24.

Решение.

1. При $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [1, 5]$ функция имеет вид:

$$f(x) = 6ax - (x^2 - 6x + 5) = -x^2 + 2(3a+3)x - 5,$$

а её график представляет собой часть параболы с ветвями, направленными вниз.

При $x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ функция имеет вид:

$$f(x) = 6ax + (x^2 - 6x + 5) = x^2 + 2(3a-3)x + 5,$$

а ее график состоит из двух частей параболы с ветвями, направленными вверх и осью симметрии $x = 3 - 3a$.

2. Если $3 - 3a$ принадлежит отрезку $[1, 5]$, то наименьшее значение функция может принимать только в точках $x = 1$ и $x = 5$. Если $3 - 3a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty)$ — то еще и в точке $x = 3 - 3a$.

3. Наименьшее значение функции $f(x)$ больше -24 тогда и только тогда, когда либо

$$\begin{cases} 3 - 3a \in [1, 5], \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} 3 - 3a \in (-\infty, 1] \cup [5, +\infty), \\ f(1) > -24, \\ f(5) > -24, \\ f(3-3a) > -24. \end{cases}$$

Решим первую систему:

$$\begin{cases} -\frac{2}{3} \leq a \leq \frac{2}{3}, \\ 6a > -24, \\ 30a > -24 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right].$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a \in \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{3}\right) \cup (\frac{2}{3}, +\infty), \\ |3a - 3| < \sqrt{29} \end{cases} \Leftrightarrow a \in \left(\frac{3-\sqrt{29}}{3}, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, \frac{3+\sqrt{29}}{3}\right).$$

Ответ: $\left(\frac{3-\sqrt{29}}{3}, \frac{3+\sqrt{29}}{3}\right)$.

3. Задание 18 № 500016. Найдите все значения а, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$$

на множестве $|x| \geq 1$ не менее 6.

Решение.

Графиком функции $f(x) = (2x+a)^2 - 2a + 2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(-\frac{a}{2};\ -2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x = -\frac{a}{2}$.

На множестве $|x| \geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x = -\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x = \pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1) \geq 6;\ a^2 + 2a + 6 \geq 6;\ a(a+2) \geq 0,$$

$f(-1) \geq 6;\ a^2 - 6a + 6 \geq 6;\ a(a-6) \geq 0,$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a+2) \geq 0, \\ a(a-6) \geq 0, \end{cases}$$

решениями которой являются $a \leq -2;\ a = 0;\ a \geq 6$.

При $a \leq -2$ имеем: $-\frac{a}{2} \geq 1$, значит наименьшее значение функции достигается в точке $x = -\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a + 2 \geq 6$, что удовлетворяет условию задачи.

При $a = 0$ имеем: $-\frac{a}{2} = 0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x = \pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

При $a \geq 6$ имеем: $-\frac{a}{2} \leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x = -\frac{a}{2}$ и $f\left(-\frac{a}{2}\right) = -2a + 2 \leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \leq -2;\ a = 0$.

4. Задание 18 № 500471. Найдите все значения *a*, при каждом из которых наименьшее значение функции

$$f(x)=4x^2-4ax+a^2+2a+2$$

на множестве $|x|\geq 1$ не меньше 6.

Решение.

Графиком функции $f(x)=(2x-a)^2+2a+2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина имеет координаты $\left(\frac{a}{2},\, 2a+2\right)$. Значит, минимум функции $f(x)$ на всей числовой оси достигается при $x=\frac{a}{2}$.

На множестве $|x|\geq 1$ эта функция достигает наименьшего значения либо в точке $x=\frac{a}{2}$, если эта точка принадлежит множеству, либо в одной из граничных точек $x=\pm 1$.

Если наименьшее значение функции не меньше 6, то и всякое значение функции не меньше 6. В частности,

$$f(1)\geq 6 \Leftrightarrow a^2-2a+6\geq 6 \Leftrightarrow a(a-2)\geq 0,$$
$$f(-1)\geq 6 \Leftrightarrow a^2+6a+6\geq 6 \Leftrightarrow a(a+6)\geq 0,$$

откуда получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a(a-2)\geq 0, \\ a(a+6)\geq 0. \end{cases}$$

.

решениями которой являются $a\in(-\infty,\,-6]\cup\{0\}\cup[2,\,+\infty)$.

П р и $a\leq -6$ имеем: $\frac{a}{2}\leq -3$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=\frac{a}{2}$ и $f\left(\frac{a}{2}\right)=2a+2\leq -10$, что не удовлетворяет условию задачи.

При $a=0$ имеем: $\frac{a}{2}=0$, значит, наименьшее значение функции достигается в одной из граничных точек $x=\pm 1$, в которых значение функции не меньше 6.

П р и $a\geq 2$ имеем: $\frac{a}{2}\geq 1$, значит, наименьшее значение функции достигается в точке $x=\frac{a}{2}$ и $f\left(\frac{a}{2}\right)=2a+2\geq 6$, что удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a=0,\, a\geq 2$.

5. Задание 18 № 484644. Найти все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2-2|x-a^2|-8x$$

имеет более двух точек экстремума.

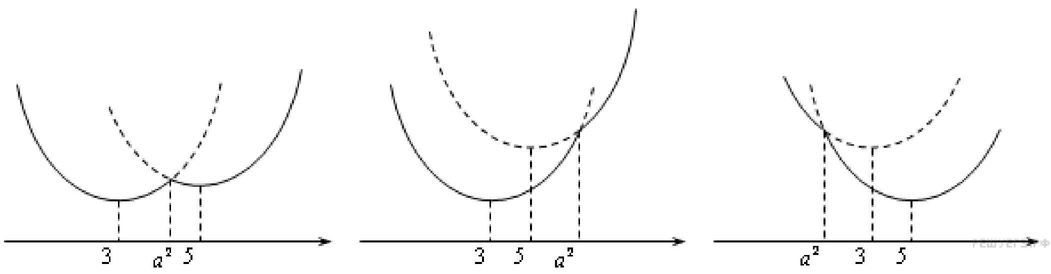
Решение.

1. Функция $f(x)$ имеет вид

а) при $x\ge a^2: f(x)=x^2-10x+2a^2,$ поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=5;$

б) при $x\le a^2: f(x)=x^2-6x-2a^2,$ поэтому ее график есть часть параболы с ветвями, направленными вверх, и осью симметрии $x=3.$

2. Все возможные виды графиков функции показаны на рисунках:



Графики обеих квадратичных функции проходят через точку $(a^2, f(a^2)).$

3. Функция $y=f(x)$ имеет более двух точек экстремума, а именно три, в единственном случае (рис. 1):

$$3<a^2<5\Leftrightarrow\sqrt{3}<|a|<\sqrt{5}.$$

Ответ: $-\sqrt{5}<a<-\sqrt{3};\ \sqrt{3}<a<\sqrt{5}.$

6. Задание 18 № 507482. Найти все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x)=x^2-2|x-a^2|-4x$$

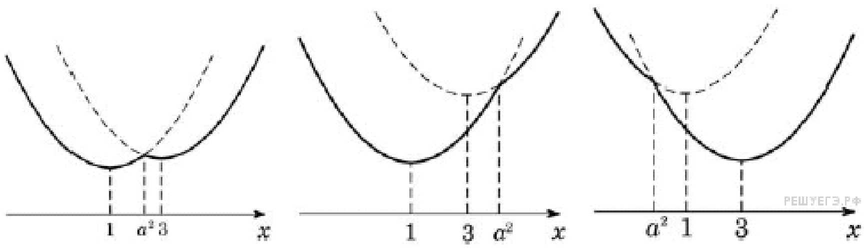
имеет хотя бы одну точку максимума.

Решение.

Раскроем модуль:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-6x+2a^2, \text{ при } x\ge a^2,\\ x^2-2x-2a^2, \text{ при } x<a^2.\end{cases}$$

График функции при $x\ge a^2$ представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x=3.$ При $x<a^2$ график представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x=1.$ Рассмотрим все возможные конфигурации при различных значениях a :



Из рисунка видно, что единственная точка максимума имеет место при $x=a^2.$ Причём она является таковой тогда и только тогда, когда $1<a^2<3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\sqrt{3}<a<-1,\\ 1<a<\sqrt{3}.\end{array}\right.$

Ответ: $(-\sqrt{3};\ -1)\cup(1;\ \sqrt{3}).$

7. Задание 18 № 507185. Найдите все значения a, при каждом из которых функция

$$f(x) = x^2 - |x - a^2| - 9x$$

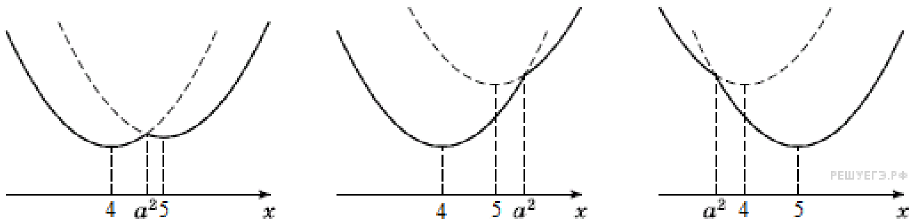
имеет более двух точек экстремума.

Решение.

Раскроем модуль:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 10x + a^2, \text{ при } x \geq a^2, \\ x^2 - 8x - a^2, \text{ при } x < a^2. \end{cases}$$

График функции при $x \geq a^2$ представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x = 5$. При $x < a^2$ график представляет собой параболу с ветвями верх и вершиной с абсциссой $x = 4$. Рассмотрим все возможные конфигурации при различных значениях a:



Из рисунка видно, что график имеет более двух точек экстремума при $4 < a^2 < 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{5} < a < -2, \\ 2 < a < \sqrt{5}. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\sqrt{5};\ -2) \cup (2;\ \sqrt{5})$.

8. Задание 18 № 507578. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|-a$$

пересекает ось абсцисс менее чем в трех различных точках.

Решение.

Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-3x+2-|x^2-5x+4|.$

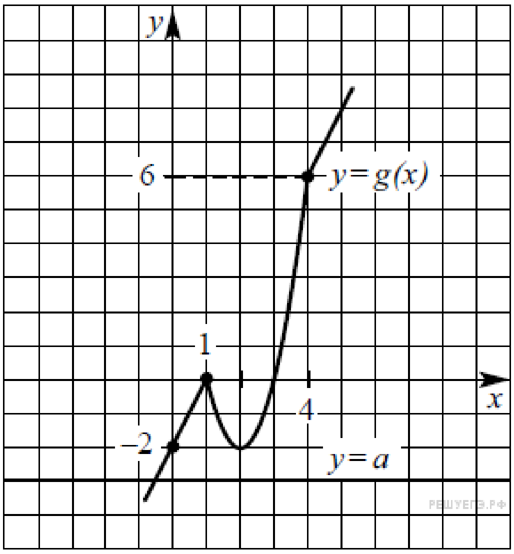


График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в двух или менее точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех различных корней.

Если $x\leq 1$ или $x\geq 4$, то $|x^2-5x+4|=x^2-5x+4,$ и $g(x)=2x-2.$

Если $1<x<4$, то $|x^2-5x+4|=-x^2+5x-4,$ и $g(x)=2x^2-8x+6.$

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет менее трех корней, только если $a\leq g(2)$ или $a\geq g(1)$. Заметим, что $g(2)=-2; g(1)=0,$ получаем ответ: $a\geq 0$ или $a\leq -2.$

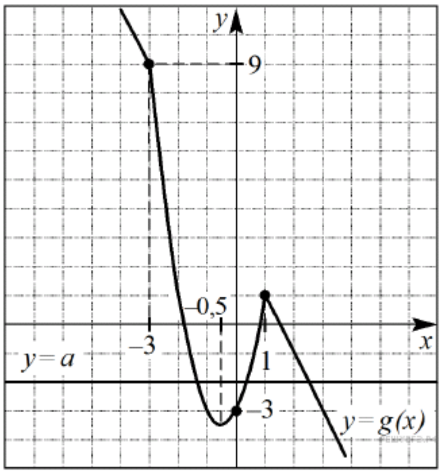
Ответ: $a\geq 0,\ a\leq -2.$

9. Задание 18 № 507709. Найдите все значения a, при каждом из которых график функции

$$f(x)=x^2-|x^2+2x-3|-a$$

пересекает ось абсцисс более чем в двух различных точках.

Решение.



Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x)=x^2-|x^2+2x-3|$. График функции $f(x)$ пересекает ось абсцисс в трёх или более точках, если уравнение $g(x)=a$ имеет более двух различных корней.

Если $x\le -3$ или $x\ge 1$, то $|x^2+2x-3|=x^2+2x-3$, и $g(x)=-2x+3$.

Если $-3<x<1$, то $|x^2+2x-3|=-x^2-2x+3$, и $g(x)=2x^2+2x-3$.

График функции $g(x)$ состоит из двух лучей и дуги параболы. На рисунке видно, что уравнение $g(x)=a$ имеет более двух корней только если $g\left(-\frac{1}{2}\right)<a<g(1)$. Соответствующие значения функции g равны:

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=-3,5;\quad g(1)=1.$$

Ответ: $-3,5<a<1$.