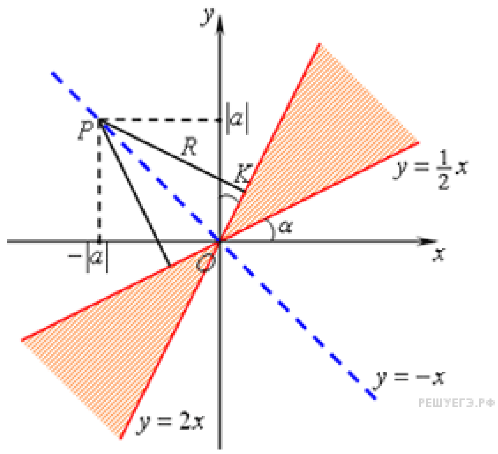
Системы с параметром

1. Задание 18 № 500004. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases}(y-2x)(2y-x)\le 0, & (1)\\ \sqrt{(x+a)^2+(y-a)^2}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt5} & (2)\end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Неравенство (1) задает пару вертикальных углов на координатной плоскости Oxy (см. рисунок). Графиком уравнения (2) является окружность радиуса $R=\dfrac{|a+1|}{\sqrt5}$, центр которой — точка $P(-a;a)$ — лежит на прямой $y=-x$. Поскольку оба графика симметричны относительно прямой $y=-x$, система будет иметь ровно два решения тогда и только тогда, когда расстояние PK от центра окружности до прямой $y=2x$ будет равняться радиусу $R=\dfrac{|a+1|}{\sqrt5}$ данной окружности. Из треугольника POK находим: $PK=PO\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент прямой $y=\dfrac12 x$. Таким образом, $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac12$, $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt5}$, откуда



$$PK=PO\left(\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\sin\alpha\right)=|a|\sqrt2\cdot\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\right)=\frac{3|a|}{\sqrt5}.$$

Окончательно получаем: $\dfrac{3|a|}{\sqrt5}=\dfrac{|a+1|}{\sqrt5}$, $3a=\pm(a+1)$, $a=\dfrac12$ или $a=-\dfrac14$.

Ответ: $a=\dfrac12$ или $a=-\dfrac14$.

2. Задание 18 № 507483. Найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x-ax-a}{x-2+2a} \geq 0, \\ x-8 > ax. \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Рассмотрим второе неравенство системы: $(1-a)x > 8$. Если $a=1$, то неравенство, а значит и система не имеет решений. Если $a<1$, то решение неравенства — луч $x > \dfrac{8}{1-a}$. Если $a>1$, то решение неравенства — луч $x < \dfrac{8}{1-a}$.

При $a \neq 1$ первое неравенство системы принимает вид: $\begin{cases} (1-a)\left(x-\dfrac{a}{1-a}\right)(x-2(1-a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1-a). \end{cases}$

Если $a<1$, то решение этой системы — два луча с концами в точках $\dfrac{a}{1-a}$, $2(1-a)$. Если $a>1$, то решение этой системы — полуинтервал с концами в точках $\dfrac{a}{1-a}$, $2(1-a)$. Отметим, что точки $x=2(1-a)$ нет в множестве решений первого неравенства.

Очевидно, что при $a<1$, решение системы будет содержать луч, вида $(b, +\infty)$, где b большее из чисел $\dfrac{8}{1-a}$, $\dfrac{a}{1-a}$ и $2(1-a)$, а значит система будет иметь решение.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq 1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a>1, \\ \dfrac{a}{1-a} \geq \dfrac{8}{1-a}, \\ 2(1-a) \geq \dfrac{8}{1-a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<a \leq 8, \\ (1-a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow 1<a \leq 3.$$

Таким образом, при $a \in [1;\,3]$ исходная система неравенств не имеет решений.

Ответ: $[1;\,3]$

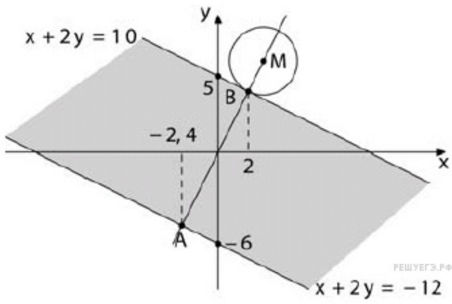
3. **Задание 18 № 507636.** Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |x+2y+1| \le 11, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 = 2+a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем систему:



$$\begin{cases} -12 \le x+2y \le 10, \\ (x-a)^2+(y-2a)^2 = 2+a. \end{cases}$$

Неравенство $-12 \le x+2y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых: $x+2y=10$ и $x+2y=-12$.

Если $a<-2$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной. Если $a=-2$, то уравнение принимает вид: $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ и задаёт единственную точку $(-2;\ -4)$, координаты которой удовлетворяют неравенству: $|-2-8+1|=9<11$. Следовательно, при $a=-2$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a>-2$. Тогда уравнение $(x-a)^2+(y-2a)^2=2+a$ определяет окружность радиусом $\sqrt{2+a}$. Центр $M(a;2a)$ окружности лежит на прямой y=2x, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A(-2,4;-4,8)$ и $B(2;4)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания — A, то $a<-2,4$, что невозможно. Окружность касается полосы в точке B, только если $a>2$ и $MB=r$. Получаем:

$$(a-2)^2+(2a-4)^2 = 2+a \Leftrightarrow 5a^2-21a+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=3, \\ a=1,2. \end{array}\right.$$

Условию $a>2$ удовлетворяет только корень $a=3$.

Ответ: −2; 3.

4. Задание 18 № 507648. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

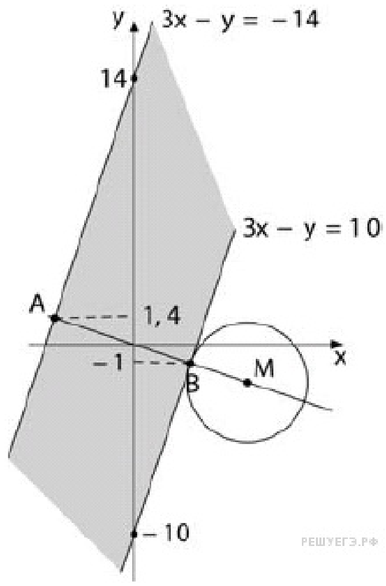
$$\begin{cases} |3x-y+2| \le 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2 = 3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases} -14 \le 3x-y \le 10, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2 = 3a+4. \end{cases}$$



Неравенство $-14 \le 3x-y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых: $3x-y=-14$ и $3x-y=10$.

Если $a<-\dfrac{4}{3}$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной. Если $a=-\dfrac{4}{3}$, то уравнение принимает вид: $(x+4)^2+(y-\dfrac{4}{3})^2=0$ и задаёт единственную точку $(-4;\ \dfrac{4}{3})$, координаты которой удовлетворяют неравенству: $\left|-12-\dfrac{4}{3}+2\right| = \dfrac{34}{3} < 12.$ Следовательно, при $a=-\dfrac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a>-\dfrac{4}{3}$. Тогда уравнение $(x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4$ определяет окружность радиусом $\sqrt{3a+4}$. Центр $M\,(3a;\,-a)$ окружности лежит на прямой $y=-\dfrac{1}{3}x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A\,(-4,2;\,1,4)$ и $B\,(3;\,-1)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания — A, то $-a>1,4$, что невозможно, поскольку $a>-\dfrac{4}{3}$. Окружность касается полосы в точке B, только если $a>1$ и $MB=r$. Получаем:

$$(3-3a)^2+(-1+a)^2 = 3a+4 \Leftrightarrow 10a^2-23a+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, \\ a=0,3. \end{array}\right.$$

Условию $a>1$ удовлетворяет только корень $a=2$.

Ответ: $-\dfrac{4}{3};\ 2.$

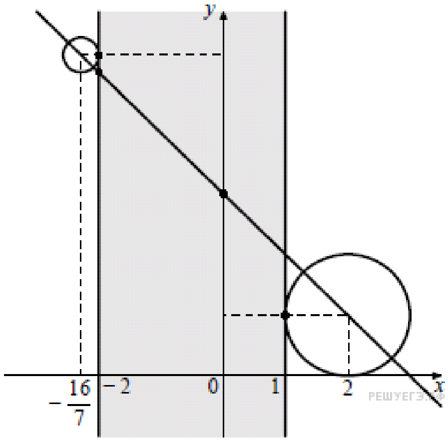
5. Задание 18 № 509026. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x-1)(x+2) \le 0, \\ 8x^2+8y^2-16a(x-y)+15a^2-48y-50a+72=0. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Выделим в уравнении системы полные квадраты:



$$8x^2-16ax+8a^2+8y^2+16ay+8a^2-a^2-48y-50a+72=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 8(x-a)^2+8(y+a)^2-48(y+a)+72-a^2-2a=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$8(x-a)^2+8(y-3+a)^2-a^2-2a=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-a)^2+(y-3+a)^2=\frac{a(a+2)}{8}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a;\ 3-a)$ и радиусом $\sqrt{\frac{a^2+2a}{8}}$. Неравенство $(x-1)(x+2) \le 0$ определяет вертикальную полосу $-2 \le x \le 1$.

На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-2, \\ (a+2)^2=\frac{a^2+2a}{8} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>1, \\ (a-1)^2=\frac{a^2+2a}{8}. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-2, \\ a+2=\frac{a}{8} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>1, \\ 7a^2-18a+8=0. \end{cases}$$

Первая система имеет решение $a=-\frac{16}{7}$. Вторая система имеет решение $a=2$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -2 \le a \le 1, \\ a^2+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0, \\ a=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{16}{7};\ -2;\ 0;\ 2.$

6. Задание 18 № 509206. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что

$$y^2-xy+3x-y-6=0 \Leftrightarrow y^2-(x+1)y+(3x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=3. \end{array}\right.$$

Поэтому исходная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2, \end{array}\right. \\ y=a-x. \end{cases}$$

Полученная смешанная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда семейство прямых $y=a-x$ имеет с графиком системы

$$\begin{cases} -2 \le x < 6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

ровно две общие точки, то есть при $a \in (-6;\,1] \cup \{8\} \cup [9;\,10)$.

7. Задание 18 № 509584. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 2x^2+2y^2=5xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=5a^4. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-2y)(y-2x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=2y$ и $y=2x$.

Второе уравнение при каждом $a \ne 0$ — уравнение окружности с центром $(a,\,a)$ и радиусом $a^2\sqrt{5}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \ne 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=\frac{|a-2a|}{\sqrt{5}}=a^2\sqrt{5}.$$

Отсюда a = ± 0,2.

Ответ: a = ± 0,2

8. Задание 18 № 509825. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y-7)=xy-5(x+2), \\ x \le 6, \\ \dfrac{a(x-6)-2}{y-2}=1. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

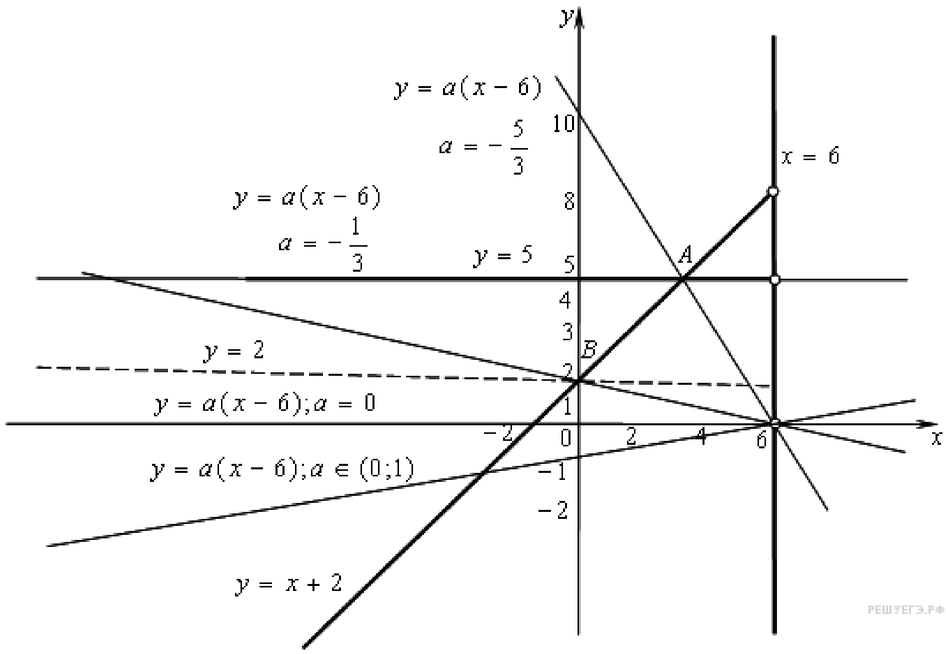
Заметим, что

$$y(y-7)=xy-5(x+2) \Leftrightarrow y^2-(x+7)y+5(x+2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=5, \\ y=x+2. \end{array}\right.$$

Тогда исходная система равносильна следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=5, \\ y=x+2, \end{array}\right. \\ y=a(x-6), \\ x \le 6,\ y \ne 2. \end{cases}$$

Построим её график и определим, при каких значения параметра пучок прямых $y=a(x-6)$ имеет единственную общую точку с объединением прямых $y=5$ и $y=x+2$ при условиях $x \le 6,\ y \ne 2$ (см. рис.)



Ответ: $a \in [0;\,1) \cup \left\{-\dfrac{5}{3};\,-\dfrac{1}{3}\right\}$.

9. Задание 18 № 509846. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy+3x-y-6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}}=0, \\ x+y-a=0. \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Заметим, что

$$y^2-xy+3x-y-6=0 \Leftrightarrow y^2-(x+1)y+(3x-6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x-2, \\ y=3. \end{array}\right.$$

Поэтому исходная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases} -2\leq x<6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2, \\ y=a-x. \end{array}\right. \end{cases}$$

Полученная смешанная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда семейство прямых $y=a-x$ имеет с графиком системы

$$\begin{cases} -2\leq x<6, \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ y=3, \\ y=x-2 \end{array}\right. \end{cases}$$

ровно две общие точки, то есть при $a\in(-6;\,1]\cup\{8\}\cup[9;\,10)$.

10. Задание 18 № 509893. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ a=x+y. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.
Заметим, что

$$\frac{(y^2-xy-2y-2y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow \frac{(y-2)(y-x-2)(\sqrt{x+4})}{\sqrt{5-y}}=0.$$

Поэтому исходная система равносильна смешанной системе

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2,\\ y=x+2,\\ x=-4.\end{array}\right.\\ y<5,\\ x\geq -4.\end{cases}$$

Полученная смешанная система имеет ровно два решения в том и только в том случае, когда семейство прямых $y=a-x$ имеет с графиком системы

$$\begin{cases}-2\leq x<6,\\ \left[\begin{array}{l}x=-2,\\ y=3,\\ y=x-2\end{array}\right.\end{cases}$$

ровно две общие точки, то есть при $a\in(-6;\,1]\cup\{8\}\cup[9;\,10)$.
Преобразуем первое уравнение:

$$\frac{(y^2-xy-2y-2y-2y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow \frac{(y(y-x-2)-2)y-x-2))\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-2)(y-x-2)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2,\\ y=x+2,\\ \sqrt{x+4}=0,\end{array}\right.\\ 5-y>0,\\ 4+x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2,\\ y=x+2,\\ x=-4,\end{array}\right.\\ y<5,\\ x\geq -4.\end{cases}$$

Графиком первого уравнения является объединение открытого луча AB, закрытого луча CD и отрезка BE с открытым концом E. Второе уравнение перепишем в виде: $y=-x+a$ оно задаёт множество параллельных прямых с $k=-1$; значение параметра a равно ординате точки, в которой каждая прямая пересекает ось Oy.

Количество точек пересекающих графиков даёт нам количество решений исходной системы. Значение a_1 найдём из условия, что прямая $y=-x+a$ проходит через точку $B(-4;-4)$, также поступим с остальными параметрами $C(-4; 2)$: $a_2=-4+2=-2$, $A(-4; 5)$: $a_3=-4+5=1$, $D(0; 2)$: $a_4=0+2=2$, $E(3; 5)$: $a_5=3+5=8$.

Количество точек пересекающих график от значения a:
$a\leq-6$ — 1 точка, $-6<a\leq-2$ — 2 точки, $-2<a<1$ — 3 точки, $1\leq a<2$ — 2 точки, $a=2$ — 1 точка, $2<a<8$ — 2 точки, ≥ 8 — 1 точка, то по условию следую значения $a\in(-\infty;-6]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)$

Ответ: $(-\infty;-6]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)$

11. Задание 18 № 509931. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 3x^2+3y^2=10xy, \\ (x-a)^2+(y-a)^2=10a^4. \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Первое уравнение системы раскладывается на множители: $(x-3y)(y-3x)=0$. Следовательно, уравнение задаёт пару прямых $x=3y$ и $y=3x$.

Второе уравнение при каждом $a\neq 0$ — уравнение окружности с центром (a, a) и радиусом $a^2\sqrt{10}$.

Если $a=0$, то система имеет единственное решение и поэтому не удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a\neq 0$. Тогда условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда окружность касается каждой из прямых. То есть расстояние от центра до каждой из прямых равно радиусу окружности.

Можно воспользоваться геометрическим методом или использовать формулу расстояния от точки до прямой.

$$\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=\frac{|a-3a|}{\sqrt{10}}=a^2\sqrt{10}.$$

Отсюда $a=\pm 0{,}2$.

Ответ: $a=\pm 0{,}2$

12. Задание 18 № 509973. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-2x+y^2-4y=2|x+2y-5|, \\ 2x-y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

Решение.

Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

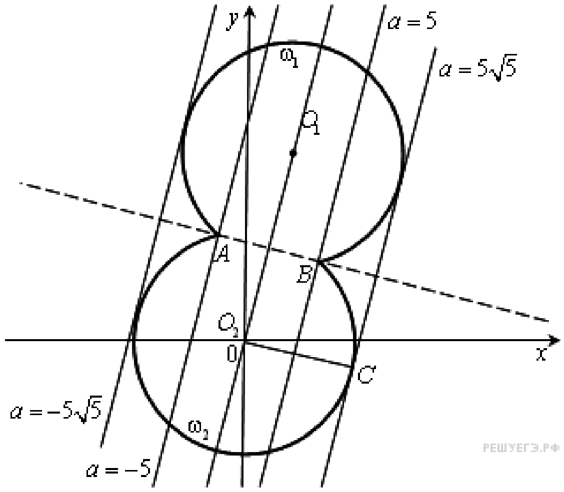
1) Если $x + 2y - 5 \geq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2x + 4y - 10;$$
$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 10 = 0;$$
$$(x-2)^2 + (y-4)^2 = 10.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(2; 4)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

2) Если $x + 2y - 5 \leq 0$, то получаем уравнение

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 10 - 2x - 4y \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10.$$



Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(0; 0)$ и радиусом $\sqrt{10}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-1; 3)$ и $B(3; 1)$, лежащих на прямой $x + 2y - 5 = 0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Заметим, что точка $C(2\sqrt{2}; \; -\sqrt{2})$ лежит на дуге ω_2 и прямая O_2C перпендикулярна прямой O_1O_2.

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой O_1O_2 или совпадающую с ней.

При $a = -5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a = 5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a = -5\sqrt{2}$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a = 5\sqrt{2}$ прямая m касается дуг ω_2 и ω_1, то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{2} < a < -5$ или $5 < a < 5\sqrt{2}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B, то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5 < a < 5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a < -5\sqrt{2}$ или $a > 5\sqrt{2}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{2} < a \leq -5$ или $5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

Ответ: $-5\sqrt{2} < a \leq -5; \; 5 \leq a < 5\sqrt{2}$.

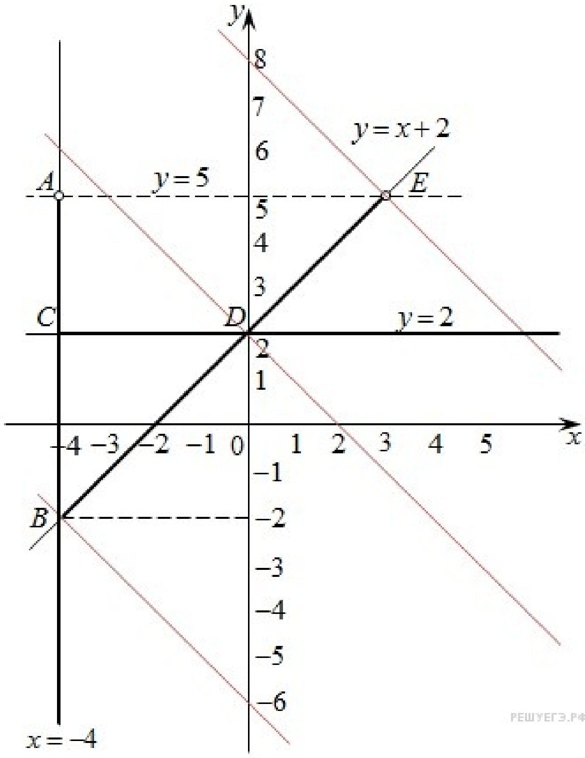
13. Задание 18 № 510076. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2-xy-4y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0, \\ a=x+y. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем первое уравнение:



$$\frac{(y^2-xy-2y-2y-2y+2x+4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y(y-x-2)-2)y-x-2))\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-2)(y-x-2)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=x+2, \\ \sqrt{x+4}=0, \end{array}\right. \\ 5-y>0, \\ 4+x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=x+2, \\ x=-4, \end{array}\right. \\ y<5, \\ x\ge -4. \end{cases}$$

Графиком первого уравнения является объединение открытого луча AB, закрытого луча CD и отрезка BE с открытым концом E. Второе уравнение перепишем в виде: $y=-x+a$ оно задаёт множество параллельных прямых с угловым кожффициентом $k=-1$. Значение параметра a равно ординате точки, в которой каждая такая прямая пересекает ось Oy.

Количество точек пересесений графиков соответствует количеству решений исходной системы. Значение $a_1=-6$ находим из условия, что прямая $y=-x+a$ проходит через точку $B(4;2)$, также поступим с остальными параметрами $C(4;2):a_2=-2, A(4;5):a_3=1, D(0;2):a_4=2, E(3;5):a_5=8.$

Таким образом, количество точек пересечений графиков в зависимости от значения a следующее: $a\le -6$ — одна точка, $-6<a\le -2$ — две точки, $-2<a<1$ — три точки, $1\le a<2$ — две точки, $a=2$ — одна точка, $2<a<8$ — две точки, $a\ge 8$ — одна точка. Откуда получаем ответ к задаче.

Ответ: $(-\infty;-6]\cup\{2\}\cup[8;+\infty)$.

14. Задание 18 № 510104. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10|, \\ x+2y=a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

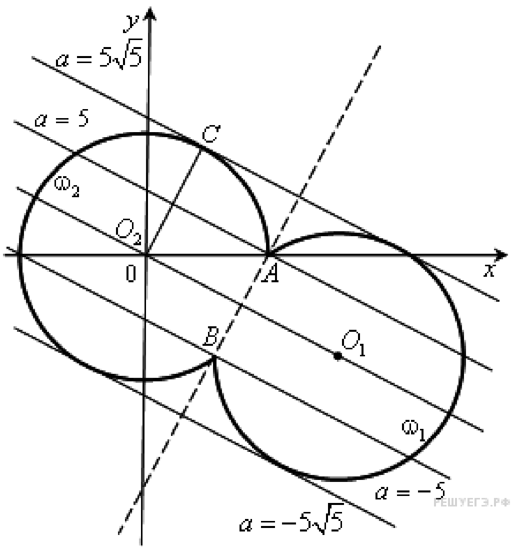
Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2-8x+y^2+4y+15=4|2x-y-10| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=4(2x-y-10), \\ 2x-y-10\geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2-8x+y^2+4y+15=-4(2x-y-10), \\ 2x-y-10<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-16x+y^2+8y+55=0, \\ y\leq 2x-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y>2x-10 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} (x-8)^2+(y+4)^2=25, \\ y\leq 2x-10, \end{cases} \\ \begin{cases} x^2+y^2=25, \\ y>2x-10. \end{cases} \end{array}\right.$$

Тем самым, первое уравнение задаёт объединение дуг ω_1 и ω_2 окружностей радиуса 5 с центрами в точках $O_1(8;\ -4)$ и $O_2(0;\ 0)$, лежащих ниже и выше прямой $y=2x-1$ соответственно (см. рис.), пересекающихся в точках $A(5;\ 0)$ и $B(3;\ -4)$. Заметим, что точка касания $C(\sqrt{5};\ 2\sqrt{5})$ лежит на дуге ω_2 и прямая O_2C перпендикулярна прямой O_1O_2.



Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, параллельную прямой O_1O_2 или совпадающую с ней.

При $a=5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке A и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

Аналогично, при $a=-5$ прямая m проходит через точку B и исходная система имеет три решения.

При $a=5\sqrt{5}$ прямая m проходит через точку C, значит, прямая m касается дуг ω_1 и ω_2, то есть исходная система имеет два решения.

Аналогично, при $a=-5\sqrt{5}$ прямая m касается дуг ω_1 и ω_2, то есть исходная система имеет два решения.

При $-5\sqrt{5}<a<-5$ или $5<a<5\sqrt{5}$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в двух точках, отличных от точек A и B, то есть исходная система имеет четыре решения.

При $-5<a<5$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке, отличной от точек A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-5\sqrt{5}$ или $a>5\sqrt{5}$ прямая m не пересекает дуги ω_1 и ω_2, то есть исходная система не имеет решений.

Значит, исходная система имеет более двух решений при $-5\sqrt{5}<a\leq -5$ или $5\leq a<5\sqrt{5}$.

Ответ: $-5\sqrt{5}<a\leq -5;\ 5\leq a<5\sqrt{5}$.

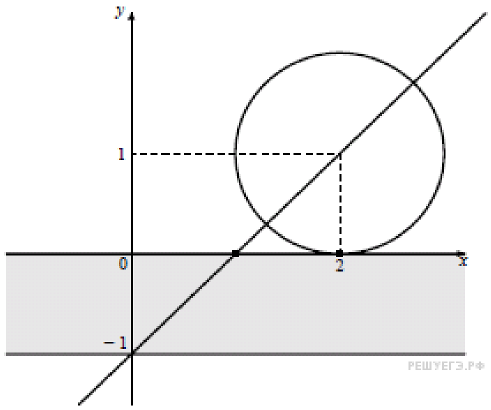
15. Задание 18 № 510517. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y(y+1) \le 0, \\ 3x^2+3y^2-6a(x+y)+5a^2-6x+4a+3=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Выделим в уравнении системы полные квадраты:



$$3x^2-6ax+3a^2+3y^2-6ay+3a^2-6x+4a+3-a^2=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 3(x-a)^2+3(y-a)^2-6(x-a)+3-2a-a^2=0.$$

Ещё раз выделим полный квадрат:

$$3(x-a)^2-6(x-a)+3+3(y-a)^2=a^2+2a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-a-1)^2+(y-a)^2=\frac{a^2+2a}{3}.$$

Уравнение определяет окружность с центром $(a+1;\ a)$ и радиусом $\sqrt{\frac{a^2+2a}{3}}$. Неравенство $y(y+1) \le 0$ определяет горизонтальную полосу $-1 \le y \le 0.$ На рисунке видно, что единственное решение получается в двух случаях.

1. Окружность касается полосы внешним образом. Это происходит тогда и только тогда, когда центр расположен вне полосы, а её радиус равен расстоянию от центра до ближайшей границы полосы:

$$\begin{cases} a<-1, \\ (a+1)^2=\frac{a^2+2a}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ a^2=\frac{a^2+2a}{3}. \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} a<-1, \\ 2a^2+4a+3=0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a>0, \\ 2a^2-2a=0. \end{cases}$$

Первая система не имеет решений. Вторая система имеет решение $a=1$.

2. Окружность превращается в точку и при этом принадлежит полосе:

$$\begin{cases} -1 \le a \le 0, \\ a^2+2a=0 \end{cases} \Leftrightarrow a=0.$$

Ответ: 0; 1.

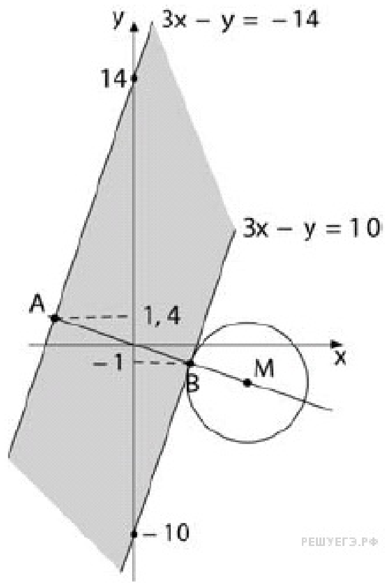
16. Задание 18 № 510583. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |3x-y+2| \le 12, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Преобразуем систему:



$$\begin{cases} -14 \le 3x-y \le 10, \\ (x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4. \end{cases}$$

Неравенство $-14 \le 3x-y \le 10$ задаёт на плоскости полосу, граница которой — пара параллельных прямых: $3x-y=-14$ и $3x-y=10$.

Если $a < -\frac{4}{3}$, то система не имеет решений, поскольку правая часть уравнения становится отрицательной. Если $a = -\frac{4}{3}$, то уравнение принимает вид: $(x+4)^2+(y-\frac{4}{3})^2=0$ и задаёт единственную точку $(-4;\ \frac{4}{3})$, координаты которой удовлетворяют неравенству: $\left|-12-\frac{4}{3}+2\right| = \frac{34}{3} < 12.$ Следовательно, при $a=-\frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Рассмотрим случай $a > -\frac{4}{3}$. Тогда уравнение $(x-3a)^2+(y+a)^2=3a+4$ определяет окружность радиусом $\sqrt{3a+4}$. Центр $M\,(3a;\,-a)$ окружности лежит на прямой $y=-\frac{1}{3}x$, которая перпендикулярна граничным прямым полосы и пересекает их в точках $A\,(-4,2;\,1,4)$ и $B\,(3;\,-1)$. Система имеет единственное решение, если только окружность внешним образом касается полосы в точке A или в точке B. Если точка касания — A, то $-a > 1,4$, что невозможно, поскольку $a > -\frac{4}{3}$. Окружность касается полосы в точке B, только если $a > 1$ и $MB = r$. Получаем:

$$(3-3a)^2+(-1+a)^2=3a+4 \Leftrightarrow 10a^2-23a+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=2, \\ a=0,3. \end{array}\right.$$

Условию $a > 1$ удовлетворяет только корень $a=2$.

Ответ: $-\frac{4}{3};\ 2.$

17. Задание 18 № 512340. Найдите все целочисленные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}=4, \\ x^2-|a+1|x-2a^2=3 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(1, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(1, a)$ и $(5, a)$ равно 4, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y), причём $1 \le x \le 5$, $y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}>4.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $1 \le x \le 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x)=x^2-|a+1|x-2a^2-3.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный $-2a^2-3<0$ при любом a, то корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x)=x^2-|a+1|x-2a^2-3$ лежит на отрезке $1 \le x \le 5$ тогда и только тогда, когда $f(1) \le 0$ и $f(5) \ge 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(1) \le 0, \\ f(5) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-|a+1|-2a^2-3 \le 0, \\ 25-5|a+1|-2a^2-3 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a^2-2 \le |a+1|, \\ 22-2a^2 \ge 5|a+1| \end{cases} \Leftrightarrow 5|a+1| \le 22-2a^2.$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $22-2a^2 \ge 0$, то есть $a^2 \le 11$, и по условию a — целое число, то решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm1,\ \pm2,\ \pm3\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: −2, ±1, 0.

Ответ: −2, ±1, 0.

18. Задание 18 № 512361. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2+2(2y-x)a=1+2a-4a^2, \\ x^2+y^2+4(x-y)a=4+4a-7a^2. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x-a)^2+(y+2a)^2=(1+a)^2, \\ (x+2a)^2+(y-2a)^2=(2+a)^2. \end{cases}$$

Если $a \neq -1$, $a \neq -2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей равно сумме или разности их радиусов.

При $a=-1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a=-1$ не удовлетворяет условию задачи. При $a=-2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1, \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a=-2$ не удовлетворяет условию задачи.

Пусть a $\neq$ -1, a $\neq$ -2. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(a,\ -2a)$ и $O_2(-2a,\ 2a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|a+1|$ и $R_2=|a+2|$. Решим два уравнения: (1) $O_1O_2=R_1+R_2$ и (2) $O_1O_2=|R_1-R_2|$.

Уравнение (1) имеет вид $5|a|=|a+1|+|a+2|$; уравнение (2) имеет вид $5|a|=||a+1|-|a+2||$. Решением уравнения (1) являются числа 1 и $-\frac{3}{7}$. Решением уравнения (2) являются числа $\pm\frac{1}{5}$.

Ответ: $-\frac{3}{7};\ -\frac{1}{5};\ \frac{1}{5};\ 1.$

19. Задание 18 № 512382. Найдите все целочисленные значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \sqrt{(x-2)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}=3, \\ x^2-|a+2|x-3a^2=5 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Пусть (x, y) — решение системы. Тогда при любом значении параметра a левая часть первого уравнения системы есть сумма расстояний от точки (x, y) до точек $(2, a)$ и $(5, a)$, лежащих на прямой $y = a$, параллельной оси абсцисс. Но расстояние между точками $(2, a)$ и $(5, a)$ равно 3, и поэтому решение первого уравнения — множество точек (x, y), причём $2 \le x \le 5$, $y = a$, поскольку иначе

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-a)^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-a)^2}>3.$$

Следовательно, данная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда второе уравнение системы имеет единственное решение на отрезке $2 \le x \le 5$.

Рассмотрим квадратичную функцию

$$f(x)=x^2-|a+2|x-3a^2-5.$$

Её график — парабола, направленная ветвями вверх. Поскольку свободный $-3a^2-5<0$ при любом a, то корни этой функции имеют разные знаки. Известно, что в этом случае единственный положительный корень функции $f(x)=x^2-|a+2|x-3a^2-5$ лежит на отрезке $2 \le x \le 5$ тогда и только тогда, когда $f(2) \le 0$ и $f(5) \ge 0$. Получаем систему

$$\begin{cases} f(2) \le 0, \\ f(5) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-2|a+2|-3a^2-5 \le 0, \\ 25-5|a+2|-3a^2-5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a^2-1 \le 2|a+2|, \\ 20-3a^2 \ge 5|a+2| \end{cases} \Leftrightarrow 5|a+2| \le 20-3a^2.$$

Поскольку любое решение полученного неравенства должно удовлетворять условию $20-3a^2 \ge 0,$ то есть $a^2 \le \dfrac{20}{3}$, и по условию a — целое число, то решениями неравенства могут быть только $a \in \{0, \pm 1,\ \pm 2\}$. Из этих условий проверкой получаем все решения: −2, ±1, 0.

Ответ: −2, ±1, 0.

20. Задание 18 № 512403. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-2(2y-x)a=1-2a-4a^2, \\ x^2+y^2-4(x-y)a=4-4a-7a^2. \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.

Запишем систему в виде

$$\begin{cases} (x+a)^2+(y-2a)^2=(1-a)^2, \\ (x-2a)^2+(y+2a)^2=(2-a)^2. \end{cases}$$

Если $a \neq 1$, $a \neq 2$, то каждое уравнение системы есть уравнение окружности. В этом случае система не имеет решений тогда и только тогда, когда расстояние между центрами этих окружностей больше суммы или меньше разности их радиусов. При $a = 1$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+1)^2+(y-2)^2=0, \\ (x-2)^2+(y+2)^2=1. \end{cases}$$

Эта система решений не имеет. Следовательно, $a = 1$ удовлетворяет условию задачи. При $a = 2$ имеем систему

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2=1, \\ (x-4)^2+(y+4)^2=0. \end{cases}$$

Эта система тоже решений не имеет. Следовательно, и $a = 2$ удовлетворяет условию задачи. Пусть $a \neq 1$, $a \neq 2$. Расстояние O_1O_2 между центрами $O_1(-a,\ 2a)$ и $O_2(2a,\ -2a)$ равно $O_1O_2=\sqrt{9a^2+16a^2}=5|a|$, а радиусы $R_1=|1-a|$ и $R_2=|2-a|$. Решим два неравенства: (1) $O_1O_2>R_1+R_2$ и (2) $O_1O_2<|R_1-R_2|$.

Неравенство (1) имеет вид $5|a|>|1-a|+|2-a|$; неравенство (2) имеет вид $5|a|<||1-a|-|2-a||$. Решением неравенства (1) являются промежутки $(-\infty;\ -1)$ и $\left(\frac{3}{7};\ +\infty\right)$. Решением неравенства (2) является промежуток $\left(-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right)$.

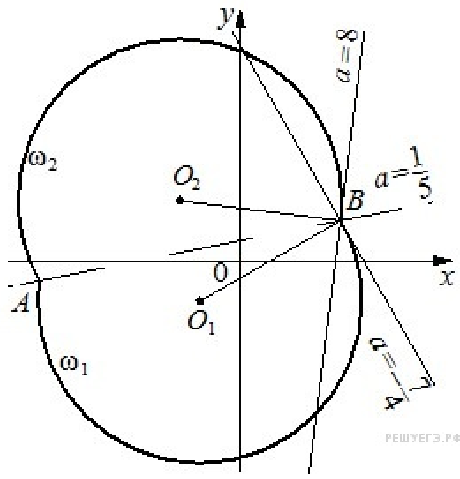
Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup\left(-\frac{1}{5};\ \frac{1}{5}\right)\cup\left(\frac{3}{7};+\infty\right)$.

21. Задание 18 № 513110. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+5x+y^2-y-|x-5y+5|=52, \\ y-2=a(x-5). \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Решение.



Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют первому уравнению системы.

Рассмотрим два случая:

1) Если $x-5y+5\geq 0,$ то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y-x+5y-5=52 \Leftrightarrow x^2+4x+y^2+4y-57=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y+2)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_1(-2;\ -2)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

2) Если $x-5y+5\leq 0,$ то получаем уравнение

$$x^2+5x+y^2-y+x-5y+5=52 \Leftrightarrow x^2+6x+y^2-6y-47=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+3)^2+(y-3)^2=65.$$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке $O_2(-3;\ 3)$ и радиусом $\sqrt{65}$.

Полученные окружности пересекаются в двух точках $A(-10;\ -1)$ и $B(5;\ 2)$, лежащих на прямой $x-5y+5=0$, поэтому в первом случае получаем дугу ω_1 с концами в точках A и B, во втором — дугу ω_2 с концами в тех же точках (см. рис.).

Рассмотрим второе уравнение системы. Оно задаёт прямую m, которая проходит через точку B и угловой коэффициент которой равен a.

При $a=\frac{1}{5}$ прямая m проходит через точки A и B, то есть исходная система имеет два решения.

При $a=-\frac{7}{4}$ прямая m перпендикулярна прямой O_1B, угловой коэффициент которой равен $\frac{4}{7}$, значит, прямая m касается дуги ω_1 в точке B и пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a = 8$ прямая m перпендикулярна прямой O_2B, угловой коэффициент которой равен $-\frac{1}{8}$, значит, прямая m касается дуги ω_2 в точке B и пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B), то есть исходная система имеет два решения.

При $a<-\frac{7}{4}$ или $a>8$ прямая m пересекает каждую из дуг ω_1 и ω_2 в точке B и ещё в одной точке, отличной от точки A, то есть исходная система имеет три решения.

При $-\frac{7}{4}<a<\frac{1}{5}$ прямая m пересекает дугу ω_2 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_1 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

При $\frac{1}{5}<a<8$ прямая m пересекает дугу ω_1 в двух точках (одна из которых — точка B) и не пересекает дугу ω_2 в точках, отличных от точки B, то есть исходная система имеет два решения.

Значит, исходная система имеет ровно два решения при $-\frac{7}{4}\leq a\leq 8.$

Ответ: $-\frac{7}{4}\leq a\leq 8.$

22. Задание 18 № 513111. Найдите все значения *a*, при каждом из которых система

$$\begin{cases} yx^2+y^2=2y+63-7x^2, \\ x\geq -3, \\ x+y=a \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

Решим первое уравнение:

$$yx^2+y^2=2y+63-7x^2 \Leftrightarrow yx^2+7x^2+y^2-2y-63=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (y+7)(y+x^2-9)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_1=-7, \\ y_2=9-x^2. \end{array}\right.$$

Рассмотрим случай (1): $y = -7$. При любом *a* получаем одно решение $x = a + 7$, для которого неравенство $x \geq -3$ верно только при $a \geq -10$.

Рассмотрим случай (2):

$$y=9-x^2 \Leftrightarrow 9-x^2=a-x \Leftrightarrow x^2-x+(a-9)=0.$$

Так как $D=1-4(a-9)=37-4a,$ то при $a>9,25$ корней нет, при $a=9,25$ получаем один корень $x=0,5,$ при $a<9,25$ получаем два различных корня. У параболы $y=x^2-x+(-9)$ — ветви вверх, абсцисса вершины равна $0,5>0.$

Значит, оба корня не меньше -3 при $3+a\geq 0,$ то есть при $-3\leq a<9,25,$ а при $a<-3$ один корень меньше −3, а другой — больше −3.

Соберем сведения о числе решений в случаях (1) и (2) в таблице

a	$a < -10$	$-10 \leq a < -3$	$-3 \leq a < 9{,}25$	$a = 9{,}25$	$a > 9{,}25$
Число решений (1)	0	1	1	1	1
Число решений (2)	1	1	2	1	0

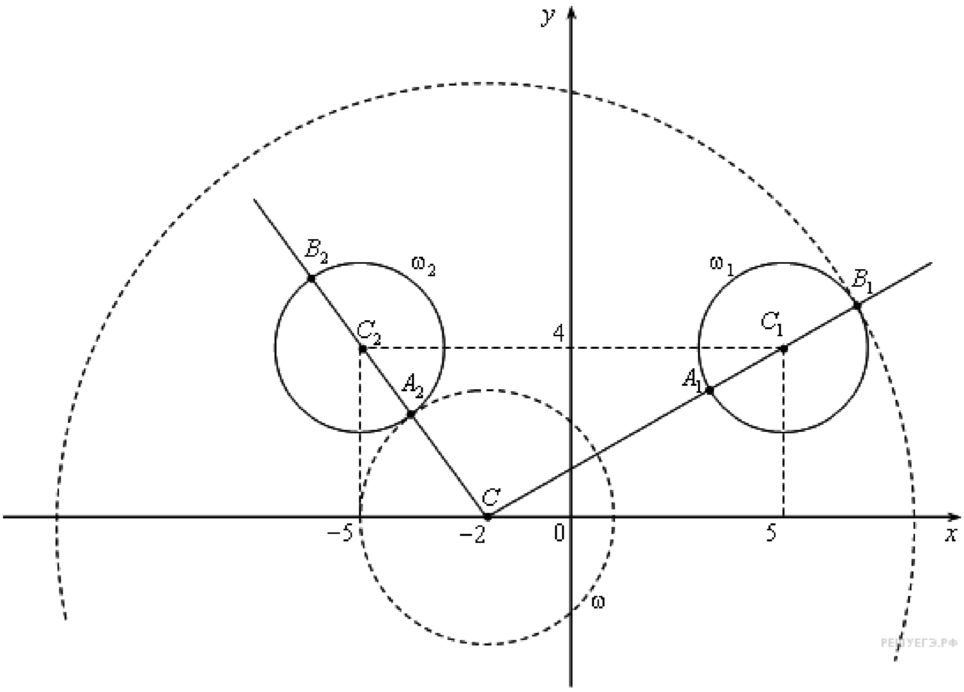
Остаётся учесть те значения *a*, при которых решение из случая (1) совпадает с одним из решений случая (2). Тогда $y=-7+9-x^2 \Leftrightarrow x=\pm 4,$ и из $x+y=a \Leftrightarrow x\geq -3$ получаем, что $x = 4$, $a = -3$.

Ответ: $-10\leq -3,\ a=9,25.$

23. Задание 18 № 484650. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=4, \\ (x+2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=4$ задаёт окружность ω_1, с центром в точке $C_1\ (5;\ 4)$ радиуса 2, а если $x < 0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2\ (-5;\ 4)$ того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра *a* уравнение $(x+2)^2+y^2=a^2$ задает окружность ω с центром в точке $C\ (-2;\ 0)$ радиуса *a*. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра *a*, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1.

Так как $CC_1=\sqrt{(5+2)^2+4^2}=\sqrt{65}$, то

$$CA_1=\sqrt{65}-2,\ CB_1=\sqrt{65}+2.$$

При $a < CA_1$ или $a > CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_1 < a < CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a = CA_1$ или $a = CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между C и C_2.

Так как $CC_2=\sqrt{(-5+2)^2+4^2}=5$, то

$$CA_2=5-2=3,\ CB_2=5+2=7.$$

При $a < CA_2$ или $a > CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_2 < a < CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a = CA_2$ или $a = CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

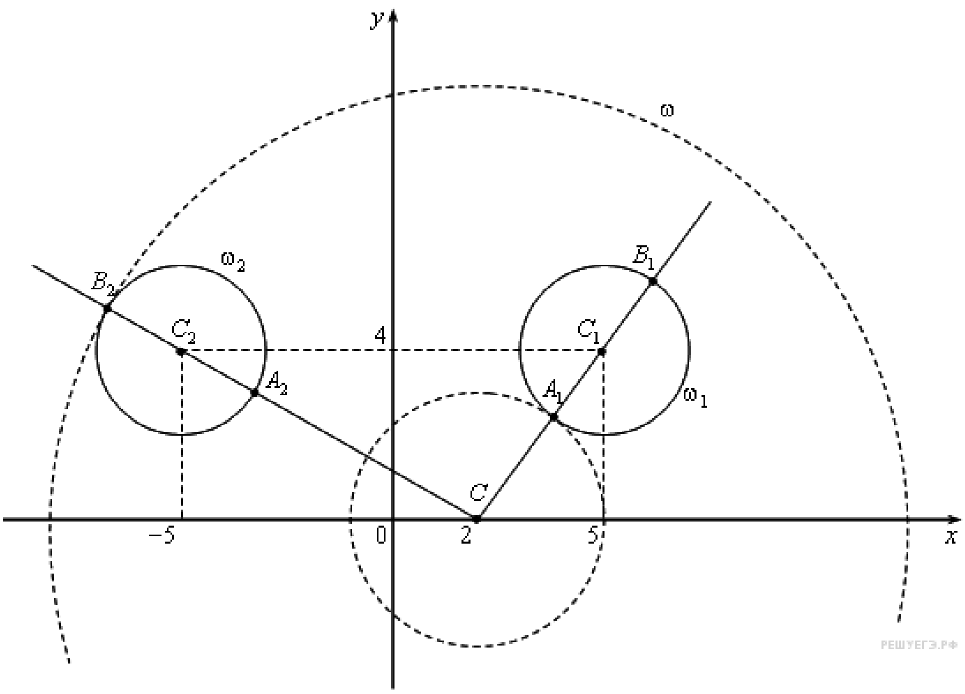
Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2, и не пересекается с другой. Так как $CA_2 < CA_1 < CB_2 < CB_1$, то условию задачи удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2$.

Ответ: 3; $\sqrt{65}+2$.

24. Задание 18 № 484649. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система $\begin{cases} (|x|-5)^2+(y-4)^2=4, \\ (x-2)^2+y^2=a^2 \end{cases}$ имеет единственное решение.

Решение.

Если $x \geq 0$, то уравнение $(|x|-5)^2+(y-4)^2=4$ задает окружность ω_1 с центром в точке $C_1(5,4)$ радиуса 2, а если $x<0$, то оно задаёт окружность ω_2 с центром в точке $C_2(-5,4)$ того же радиуса (см. рис.).



При положительных значениях параметра a уравнение $(x-2)^2+y^2=a^2$ задаст окружность ω с центром в точке $C(2,0)$ радиуса a. Поэтому задача состоит в том, чтобы найти все значения параметра a, при каждом из которых окружность ω имеет единственную общую точку с объединением окружностей ω_1 и ω_2.

Из точки C проведём луч CC_1 и обозначим A_1 и B_1 точки его пересечения с окружностью ω_1, где A_1 лежит между C и C_1.

Так как $CC_1=\sqrt{(5-2)^2+4^2}=5,$ то $CA_1=5-2=3, CB_1=5+2=7.$

При $a<CA_1$ или $a>CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_1<a<CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a=CA_1$ или $a=CB_1$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

Из точки C проведём луч CC_2 и обозначим A_2 и B_2 точки его пересечения с окружностью ω_2, где A_2 лежит между точками C и C_2. Так как $CC_2=\sqrt{(-5-2)^2+4^2}=\sqrt{65},$ то $CA_2=\sqrt{65}-2, CB_2=\sqrt{65}+2.$

При $a<CA_2$ или $a>CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 не пересекаются. При $CA_2<a<CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 имеют две общие точки. При $a=CA_2$ или $a=CB_2$ окружности ω_1 и ω_2 касаются.

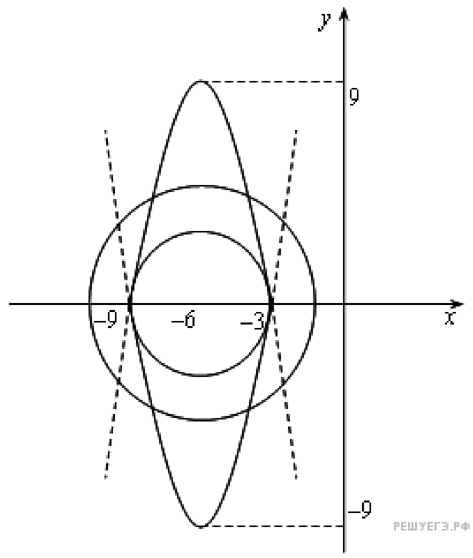
Исходная система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается ровно одной из двух окружностей ω_1 и ω_2 и не пересекается с другой. Так как $CA_1<CA_2<CB_1<CB_2,$ то условию задачи удовлетворяют только числа $a=3$ и $a=\sqrt{65}+2.$

Ответ: $3, \sqrt{65}+2.$

25. Задание 18 № 484647. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2+12x+|y|+27=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=-12(x+3) \end{cases}$ имеет ровно 4 решения.

Решение.

Преобразуем систему:



$$\begin{cases} |y|=9-(x+6)^2, \\ (x+6)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол (см. рисунок):

$$y=\begin{cases} 9-(x+6)^2, \ y\geq 0, \\ (x+6)^2-9, \ y<0 \end{cases}$$

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(-6;\ 0)$.

На рисунке видно, что четыре решения системы получаются в двух случаях.

1. Окружность касается каждой из ветвей обеих парабол.

2. Окружность пересекает каждую из ветвей обеих парабол в двух точках, лежащих по разные стороны от оси абсцисс.

Составим уравнение для ординат общих точек окружности и параболы $y=9-(x+6)^2$. Получим: $y=9-(a^2-y^2)$, откуда

$$y^2-y+(9-a^2)=0 .$$

Чтобы окружность касалась парабол, уравнение должно иметь нулевой дискриминант: $1+4a^2-36=0$, откуда

$$a=\pm\frac{\sqrt{35}}{2}.$$

Во втором случае радиус окружности заключен между числами 3 и 9.

Ответ: $(-9,\ -3),\ -\frac{\sqrt{35}}{2}, \frac{\sqrt{35}}{2}, (3,\ 9).$

26. Задание 18 № 484641. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 4|y-3| = 12-3|x|, \\ y^2 - a^2 = 3(2y-3) - x^2 \end{cases}$ имеет ровно четыре решения.

Решение.

Преобразуем данную систему:

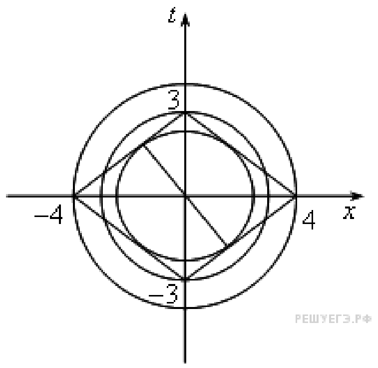
$$\begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ x^2 + y^2 - 6y + 9 = a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3|x| + 4|y-3| = 12, \\ x^2 + (y-3)^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t = y - 3$, получаем систему

$$\begin{cases} 3|x| + 4|t| = 12, & (1) \\ x^2 + t^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат Oxt.

График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 8 и 6, лежат соответственно на осях Ox и Ot, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$ (см. рисунок).



Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет условию

$$3 < r < 4.$$

В первом случае радиус окружности является высотой прямоугольного треугольника с катетами, равными 3 и 4, откуда

$$r = |a| = \frac{3 \cdot 4}{5} = \frac{12}{5}, \; a = \pm\frac{12}{5}.$$

Во втором случае получаем $3 < |a| < 4$, откуда

$$-4 < a < -3 \text{ или } 3 < a < 4.$$

Ответ: $a \in \left\{\pm\frac{12}{5}\right\} \cup (-4, -3) \cup (3, 4).$

27. Задание 18 № 484642. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases}$ имеет

а) ровно четыре решения,

б) ровно 8 решений.

Решение.
Преобразуем данную систему:

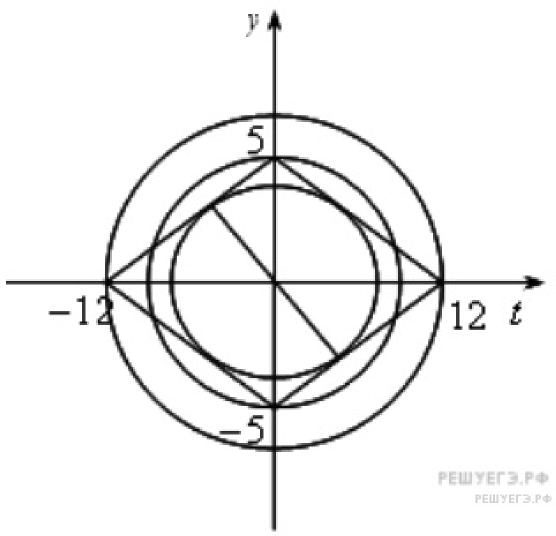
$$\begin{cases} 5|x+2| = 60 - 12|y|, \\ 4(x+1) + y^2 = a^2 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5|x+2| + 12|y| = 60, \\ (x+2)^2 + y^2 = a^2. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $t = x+2$, получаем систему

$$\begin{cases} 5|t| + 12|y| = 60, & (1) \\ y^2 + t^2 = a^2. & (2) \end{cases}$$

Заметим, что количество решений полученной системы совпадает с количеством решений исходной системы. Построим графики уравнений (1) и (2) в системе координат *Oty*.

График первого уравнения — ромб, диагонали которого, равные 24 и 10, лежат соответственно на осях x и *Ot*, а графиком второго уравнения является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = |a|$ (см. рисунок).



Графики уравнений системы имеют ровно четыре общих точки, и, следовательно, система имеет ровно четыре решения, тогда и только тогда, когда окружность либо вписана в ромб, либо ее радиус удовлетворяет соотношению $0,5d_1 < r < 0,5d_2$, где $0,5d_1 = 5,\ 0,5d_2 = 12$ — половины меньшей и большей диагоналей ромба соответственно. Радиус вписанной в ромб окружности равен высоте прямоугольного треугольника с катетами, равными 5 и 12, откуда

$$r = \frac{5 \cdot 12}{13} = \frac{60}{13}.$$

Таким образом, система имеет 4 ровно решения, если $|a| = \dfrac{60}{13}$ или $5 < |a| < 12,$ откуда $a = \pm\dfrac{60}{13}, -12 < a < -5$ или $5 < a < 12.$

Графики имеют 8 общих точек, если радиус окружности удовлетворяет условию $r_1 < r < 0,5d_1,$ где r_1 — радиус окружности, вписанной в ромб. Тогда $\dfrac{60}{13} < |a| < 5,$ откуда

$$-5 < a < -\frac{60}{13}, \frac{60}{13} < a < 5.$$

Ответ: а) $a = \pm\dfrac{60}{13}, -12 < a < -5, 5 < a < 12;$

б) $-5 < a < -\dfrac{60}{13}, \dfrac{60}{13} < a < 5.$

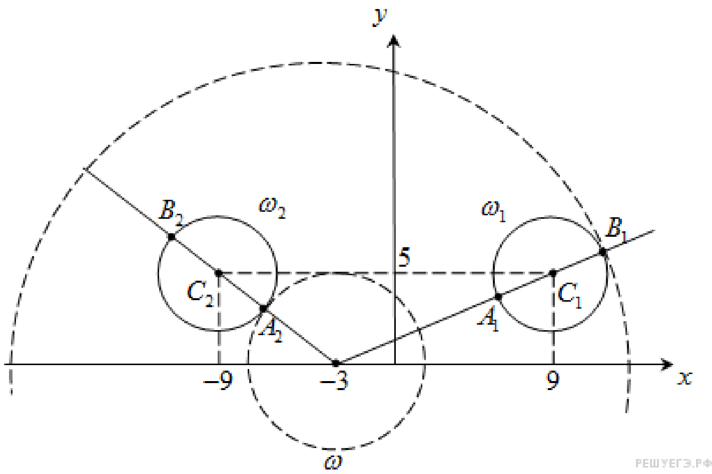
28. Задание 18 № 485952. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|-9)^2+(y-5)^2=9, \\ (x+3)^2+y^2=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

Первое уравнение задаёт на плоскости окружности ω_1 и ω_2 радиуса 3, симметричные относительно оси ординат. Центры этих окружностей — точки $C_1\,(9;\ 5)$ и $C_2\,(-9;5)$. Второе уравнение — уравнение окружности ω радиуса $a>0$ с центром $C\,(-3;\ 0)$.



Система имеет единственное решение тогда и только тогда, когда окружность ω касается одной из окружностей ω_1 и ω_2, но не имеет общих точек с другой окружностью.

Из точки C проведём лучи CC_1 и CC_2 и обозначим A_1, B_1, A_2, B_2 точки их пересечения с окружностями ω_1 и ω_2 (см. рис.).

Заметим, что $CC_2 < CC_1$, поэтому $CA_2 < CA_1$ и $CB_2 < CB_1$. Значит, если $a = CA_2$, то ω касается ω_2, но не имеет общих точек с ω_1. Если $a = CB_1$, то ω касается ω_1, но не имеет общих точек с ω_2.

$$CA_2 = CC_2 - C_2A_2 = \sqrt{(9-3)^2+5^2}-3 = \sqrt{61}-3;$$
$$CB_1 = CC_1 + C_1B_1 = \sqrt{(9+3)^2+5^2}+3 = 13+3 = 16.$$

Сравним CA_1 и CB_2:

$$CA_1 = \sqrt{(9+3)^2+5^2}-3 = 10,\ CB_2 = \sqrt{(9-3)^2+5^2}+3 = \sqrt{61}+3.$$

Получаем $CA_1 < CB_2$. Значит, если ω касается ω_1 в точке A_1, то ω пересекает ω_2 в двух точках. Аналогично, если ω касается ω_2 в точке B_2, то ω пересекает ω_1 в двух точках. Следовательно, других решений, кроме двух найденных, система не имеет.

Ответ: $\sqrt{61}-3$ или 16.

29. Задание 18 № 484648. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система $\begin{cases} x^2-8x+|y|+12=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=8(x-2) \end{cases}$ имеет ровно 8 решений.

Решение.

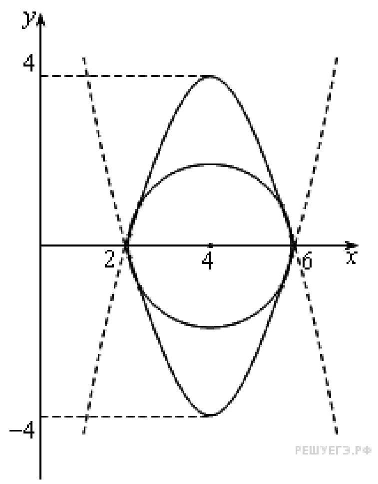
Преобразуем систему:

$$\begin{cases} |y|=4-(x-4)^2, \\ (x-4)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$

Первое уравнение задает части двух парабол:

$$y=\begin{cases} 4-(x-4)^2, & y\geq 0, \\ (x-4)^2-4, & y<0 \end{cases}$$

(см. рисунок).



Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(4;\ 0)$. На рисунке видно, что система имеет восемь решений, только если радиус окружности меньше 2 и окружность дважды пересекает каждую ветвь каждой из парабол. Это условие в силу симметрии равносильно тому, что окружность пересекает правую ветвь параболы $y=4-(x-4)^2$ в двух точках с положительными ординатами.

Получаем уравнение $y=4-(a^2-y^2)$, откуда

$$y^2-y+(4-a^2)=0,$$

которое должно иметь два различных положительных корня. Следовательно, дискриминант и свободный член этого уравнения должны быть положительны:

$$\begin{cases} 1+4a^2-16>0, \\ 4-a^2>0, \end{cases} \text{откуда} \begin{cases} a^2>\dfrac{15}{4}, \\ a^2<4; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a|>\dfrac{\sqrt{15}}{2}, \\ -2<a<2. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2;\ -\dfrac{\sqrt{15}}{2}\right),\ \left(\dfrac{\sqrt{15}}{2};\ 2\right).$

30. Задание 18 № 484646. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

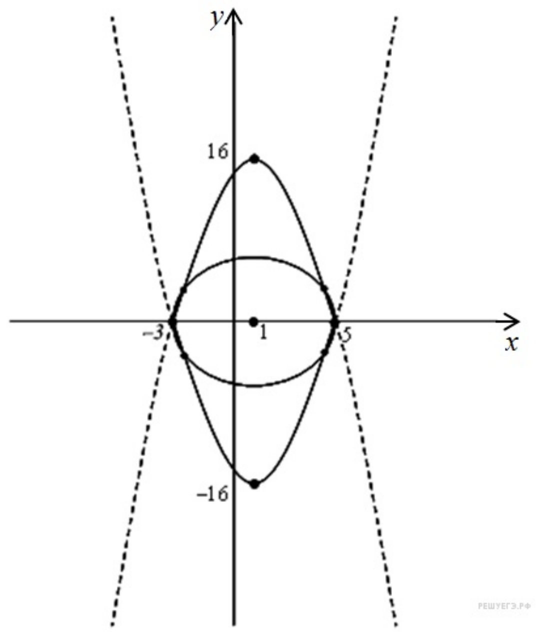
$$\begin{cases} x^2-2x+|y|-15=0, \\ x^2+(y-a)(y+a)=2\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

имеет ровно 6 решений.

Решение.

Преобразуем систему, получим:

$$\begin{cases} (x-1)^2+|y|=16, \\ (x-1)^2+y^2=a^2. \end{cases}$$



Первое уравнение задает части двух парабол (см. рисунок):

$$y=\begin{cases} 16-(x-1)^2, \ y\geq 0, \\ (x-1)^2-16, \ y<0. \end{cases}$$

Второе уравнение задает окружность радиусом $|a|$ с центром $(1, 0)$. На рисунке видно, что шесть решений системы получаются, только если окружность проходит через точки $(-3, 0)$ и $(5, \ 0)$, пересекая параболу еще в четырех точках.

При этом радиус окружности равен 4, откуда $a=-4$ или $a=4$.

Ответ: $-4, 4$.

31. Задание 18 № 484630. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1 \end{cases}$ имеет ровно два решения.

Решение.

Заменим первое уравнение разностью, а второе — суммой исходных уравнений:

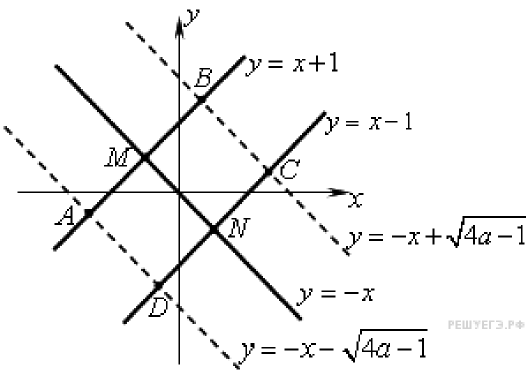
$$\begin{cases} x^2+y^2=2a, \\ 2xy=2a-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=1, & (1) \\ (x+y)^2=4a-1. & (2) \end{cases}$$

При $a<\frac{1}{4}$ второе уравнение системы, а, значит, и вся система решений не имеет. При $a \geq \frac{1}{4}$ получаем:

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=x-1, \\ y=x+1. \end{array} \right.$$

$$(2) \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=-x-\sqrt{4a-1}, \\ y=-x+\sqrt{4a-1}. \end{array} \right.$$

Ясно (см. рисунок), что при $a>\frac{1}{4}$ система имеет четыре решения (координаты точек A, B, C и D), а при $a=\frac{1}{4}$ — два решения (координаты точек M и N).



Ответ: $a=\frac{1}{4}$.

32. Задание 18 № 484632. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} y = x^2 - 2x, \\ x^2 + y^2 + a^2 = 2x + 2ay \end{cases}$ имеет решения?

Решение.

Перепишем исходную систему в виде

$$\begin{cases} (x-1)^2 = y+1, \\ (y-a)^2 + (x-1)^2 = 1. \end{cases}$$

Исходная система имеет решения, тогда и только тогда, когда относительно y имеет решения система:

$$\begin{cases} (y-a)^2 + y + 1 = 1, \\ y + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + (1-2a)y + a^2 = 0, \\ y \geq -1. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, находим, что $y = \dfrac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

Требование задачи будет выполнено, если последняя смешанная система имеет хотя бы одно решение. Искомые значения a находятся из совокупности неравенств

$$\frac{2a - 1 \pm \sqrt{1-4a}}{2} \geq -1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{1-4a} \geq -1 - 2a, \\ \sqrt{1-4a} \leq 1 + 2a \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right], \\ a \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right). \end{array} \right.$$

решая которое, получаем $a \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$.

Ответ: $a \in \left[-2, \dfrac{1}{4}\right]$.

33. Задание 18 № 484635. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} \sqrt{|y+3|} = 1 - \sqrt{5|x|}, \\ 16a - 9 - 6y = 25x^2 + y^2 \end{cases}$ имеет четыре решения?

Решение.

Полагая $u = \sqrt{5|x|}$, $v = \sqrt{|y+3|}$, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} u + v = 1, \\ u^4 + v^4 = 16a. \end{cases}$$

Заметим, теперь что если пара (u_0, v_0) является решением системы, то и пара (v_0, u_0) — также решение этой системы. Следовательно, если (u_0, v_0) — решение системы такое, что $u_0 \neq v_0$ и $u_0 > 0, v_0 > 0,$ то система будет иметь восемь решений.

Таким образом, исходная система будет иметь четыре решения в следующих двух случаях: $u = v, u = 0$ или $v = 0$.

А тогда, если $u = v$, то $a = \dfrac{1}{128}$. Если же $u = 0$ или $v = 0$, то $a = \dfrac{1}{16}$.

Ответ: $a = \dfrac{1}{128}, a = \dfrac{1}{16}$.

34. Задание 18 № 484637. При каждом значении a решите систему $\begin{cases} 6x^2+17xy+7y^2=a, \\ \log_{2x+y}(3x+7y)=3. \end{cases}$

Решение.

Пары $(x;\ y)$ дающие решение системы, должны удовлетворять условиям

$$\begin{cases} 3x+7y>0, \\ 2x+y>0, \\ 2x+y\neq 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы находим

$$3x+7y=(2x+y)^3.$$

Осталось заметить, что тогда

$$6x^2+17xy+7y^2=(3x+7y)\cdot(2x+y)=(2x+y)^4\ .$$

Уравнение $(2x+y)^4=a$ при условиях $2x+y>0$ и $2x+y\neq 1$ имеет при $a>0,\ a\neq 1$ решение $2x+y=\sqrt[4]{a}$. Тогда

$$3x+7y=\sqrt[4]{a^3}$$

и из полученной системы находим

$$x=\frac{7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{11},\ y=\frac{2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a}}{11}.$$

Ответ: при $a\in(-\infty;\ 0]\cup\{1\}$ решений нет, при $a\in(0;\ 1)\cup(1;\ +\infty)$ $(x;\ y)=\left(\frac{7\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a^3}}{11};\frac{2\sqrt[4]{a^3}-3\sqrt[4]{a}}{11}\right)$.

35. Задание 18 № 484627. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \dfrac{x+ax+a}{x-2a-2}\geq 0, \\ x+ax>8 \end{cases}$$

не имеет решений.

Решение.
Рассмотрим второе неравенство системы

$$(1+a)x > 8.$$

Если $a=-1$, то неравенство, а значит, и система не имеет решений.
Если $a>-1$, то решение неравенства — луч

$$x > \frac{8}{1+a}.$$

Если $a<-1$, то решение неравенства — луч

$$x < \frac{8}{1+a}.$$

При $a \neq -1$ первое неравенство системы принимает вид

$$\begin{cases} (1+a)\left(x+\dfrac{a}{1+a}\right)(x-2(1+a)) \geq 0, \\ x \neq 2(1+a). \end{cases}$$

Если $a>-1$, то решение этой системы — два луча с концами в точках $-\dfrac{a}{1+a},\ 2(1+a)$.

Если $a<-1$, то решение этой системы — полуинтервал с концами в точках $-\dfrac{a}{1+a}, 2(1+a)$.

Отметим, что точки $x=2(1+a)$ нет во множестве решений первого неравенства.

Очевидно, что при $a>-1$, решение системы будет содержать луч, вида $(b,+\infty)$, где b большее из чисел $\dfrac{8}{1+a}, -\dfrac{a}{1+a}$ и $2(1+a)$, а значит система будет иметь решение.

Для того, чтобы система не имела решений, при $a \neq -1$ необходимо и достаточно:

$$\begin{cases} a<-1, \\ -\dfrac{a}{1+a} \geq \dfrac{8}{1+a}, \\ 2(1+a) \geq \dfrac{8}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 \leq a < -1, \\ (1+a)^2 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq a < -1.$$

Учитывая случай $a=-1$, получаем ответ.

Ответ: $-3 \leq a \leq -1$.

36. Задание 18 № 484629. Известно, что значение параметра a таково, что система уравнений

$$\begin{cases} 2^{\ln y} = 4^{|x|}, \\ \log_2(x^4y^2 + 2a^2) = \log_2(1 - ax^2y^2) + 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Найдите это значение параметра a и решите систему при найденном значении параметра.

Решение.

Из первого уравнения системы получаем

$$2^{\ln y} = 4^{|x|} \Leftrightarrow y = e^{2|x|}.$$

Заметим, что если пара $(x; y)$ — решение системы, то пара $(-x; y)$ — также решение этой системы. Поскольку система имеет единственное решение, то этим решением может быть только пара $(0; y)$. Таким образом, $x = 0$ и из второго уравнения получаем:

$$\log_2(2a^2) = \log_2 1 + 1 \Leftrightarrow \log_2(2a^2) = 1 \Leftrightarrow 2a^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &a = 1, \\ &a = -1. \end{aligned}\right.$$

Проверим, действительно ли система при найденных значениях а имеет единственное решение.

1. Если $a = 1$, то система действительно имеет единственное решение:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1-x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2-2x^2y^2 \Leftrightarrow y^2(x^4+2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x = 0.$$

Тогда

$$y = e^0 = 1.$$

2. Если $a = -1$, то система имеет три решения:

$$\log_2(x^4y^2+2) = \log_2(1+x^2y^2)+1 \Leftrightarrow x^4y^2+2 = 2+2x^2y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2(x^4-2x^2) = 0 \underset{y>0}{\Leftrightarrow} x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = 0, \\ &x = \sqrt{2}, \\ &x = -\sqrt{2}. \end{aligned}\right.$$

Каждому из найденных значений x соответствует единственное значение

$$y = e^{2|x|}.$$

Ответ: система имеет единственное решение $(0; 1)$ при $a = 1$.

37. Задание 18 № 484631. При каких значениях параметра *a* система $\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$ имеет единственное решение?

Решение.

Прежде всего: заметим, что если $(x_0;\ y_0)$ — решение системы при некотором значении параметра *a*, то при этом значении параметра решением системы будет и $(-x_0;\ y_0)$. Отсюда следует, что условие $x=0$ является необходимым условием существования у системы единственного решения.

При $x=0$ система перепишется в виде

$$\begin{cases} 3a=7-3y, \\ y^2=1. \end{cases}$$

Решая эту систему относительно *a*, находим, что требуемые значения а могут принадлежать только множеству $\left\{\frac{4}{3};\ \frac{10}{3}\right\}$. Пусть $a=\frac{4}{3}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=5x^2+3y, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы следует, что $|x|\le 1$ и $|y|\le 1$, и, таким образом, $5x^2\le 5|x|$. Учитывая теперь, что $2^{|x|}\ge 1$, приходим к неравенству

$$3\cdot 2^{|x|}+5|x|\ge 3y+5x^2,$$

которое означает, что первое равенство системы справедливо только при $2^{|x|}=1,\ |x|=x^2$, следовательно, $y=1$, т. е. при $x=0,\ y=1$. Итак, при $a=\frac{4}{3}$ система имеет единственное решение.

Пусть теперь $a=\frac{10}{3}$. При таком значении параметра а система перепишется в виде

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|=5x^2+3y+6, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$$

Эта система имеет решения $x=0,\ y=-1,\ x=\pm 1,\ y=0$ и, таким образом, при $a=\frac{10}{3}$ условию единственности решения не удовлетворяет. Заметим, что решения здесь просто угаданы.

Ответ: $a=\frac{4}{3}$.

38. Задание 18 № 484633. При каких значениях параметров a и b система $\begin{cases} 8x+(a^2+ab+b^2)y=4, \\ (a-b)x+26y=2 \end{cases}$ имеет бесконечно много решений?

Решение.

На координатной плоскости xOy множество точек $(x;\ y)$, удовлетворяющих любому из уравнений системы — прямые. А тогда решением системы будут точки пересечения этих прямых. Поэтому исходная система будет иметь бесконечное множество решений в том и только в том случае, когда эти прямые совпадают. В общем случае две прямые, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ совпадают, если, $k_1=k_2$ и $b_1=b_2$ (при $k_1\neq k_2$ они имеют одну точку пересечения, при $k_1=k_2$ и $b_1\neq b_2$ точек пересечения у них нет). Следовательно, система будет иметь бесконечно много решений в том случае, когда совместна система

$$\frac{a-b}{8}=\frac{26}{a^2+ab+b^2}=\frac{1}{2},$$

где $a\neq 0$ и $b\neq 0$.

Решая систему, получаем $(-2;\ -6)$, $(6;\ 2)$.

Ответ: $(-2;\ -6)$, $(6;\ 2)$.

39. Задание 18 № 484634. При каких значениях параметра a хотя бы при одном значении параметра с система

$$\begin{cases} bx+y=ac^2, \\ x+by=ac+1 \end{cases}$$

имеет решения для любых значений параметра b?

Решение.

Ясно, что при $b=0$ система имеет единственное решение

$$\begin{cases} y=ac^2, \\ x=ac+1, \end{cases}$$

которое выражается через a и c однозначно, то есть существует для любых a и c.

При $b\neq 0$, если умножить второе уравнение на b и из полученного уравнения вычесть первое уравнение системы, то будем иметь

$$(b^2-1)y=abc+b-ac^2 .$$

Если же умножить на b первое уравнение и из полученного уравнения вычесть второе уравнение системы, то

$$(b^2-1)x=abc^2-ac-1 .$$

Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} (b^2-1)x=abc^2-ac-1, \\ (b^2-1)y=abc+b-ac^2. \end{cases}$$

При любом $b\neq\pm1$ система всегда имеет единственное решение.

Если же $b=-1$, то система будет иметь решения если существуют a и c удовлетворяющие уравнению

$$ac^2+ac+1=0.$$

Рассматривая его как квадратное относительно параметра c, приходим к выводу, что оно будет иметь хотя бы одно решение, если $D=a^2-4a\geq 0$ и $a\neq 0$, т. е. если $a\in(-\infty;\ 0)\cup[4;\ +\infty)$.

При $b=1$ приходим к рассмотрению уравнения

$$ac^2-ac-1=0.$$

В данном случае решая неравенство $D=a^2+4a\geq 0$, где $a\neq 0$, находим, что $a\in(-\infty;\ -4]\cup(0;\ +\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;\ -4]\cup[4;\ +\infty)$.

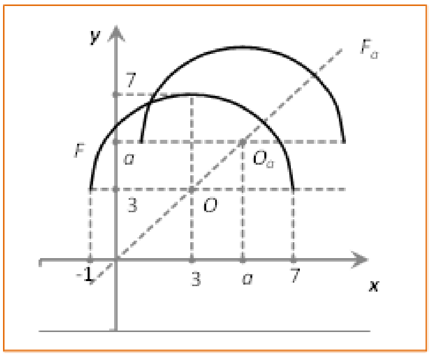
40. Задание 18 № 509096. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} y=\sqrt{7+6x-x^2}+3, \\ y=a+\sqrt{16-a^2+2ax-x^2}. \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение.

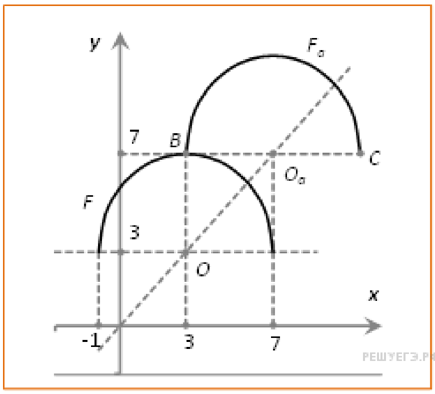
Преобразуем первое уравнение системы:



$$y-3=\sqrt{16-(x-3)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2+(y-3)^2=16, \\ y\geq 3. \end{cases}$$

Эти условия задают «верхнюю» полуокружность с центром в точке (3; 3) радиуса 4. Преобразуем второе уравнение системы:

$$y-a=\sqrt{16-(x-a)^2} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2+(y-a)^2=16, \\ y\geq a. \end{cases}$$



Эти условия задают «верхнюю» полуокружность с центром в точке (a; a) радиуса 4. Полуокружности, определяемые уравнениями системы, изображены на рисунке 1, обозначив полуокружности через F и Fa, а их центры — O и Oa.

Данная в условии система имеет единственное решение, если полуокружности F и Fa имеют единственную общую точку. Две «верхние» полуокружности одинакового радиуса либо не имеют общих точек, либо имеют ровно одну общую точку, либо совпадают.

При a = 3 полуокружности F и Fa совпадают, т. е. a = 3 не является искомым.

При $a > 3$, точка O расположена выше точки Oa. В этом случае полуокружности F и Fa имеют общую точку, если диаметр BC полуокружности Fa имеет общую точку с полуокружностью F. Крайнее положение диаметра BC, при котором он ещё имеет общую точку полуокружностью F является положение на нижнем рисунке, при этом точка Oa имеет координаты (7; 7)., т. е. a = 7. При a > 7 полуокружности F и Fa не имеют общих точек. Таким образом, все значения $3<a\leq 7$ являются искомыми.

При a < 3 полуокружность Fa может быть получена параллельным переносом полуокружности F на вектор $\overrightarrow{(b;b)}$, где $b = a - 3$. Если при параллельном переносе полуокружности F на вектор $\overrightarrow{(b;b)}$ полученная полуокружность имеет общую точку с F, то это же справедливо и при параллельном переносе полуокружности F на вектор $\overrightarrow{(-b;-b)}$. Поэтому искомое множество значений параметра a симметрично относительно точки a = 3, поэтому $-1\leq a<3$.

Ответ: $[-1;3)\cup(3;7]$.

41. Задание 18 № 484636. При каких значениях a системы уравнений $\begin{cases} \sin(x+y)=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y=0, \\ x^2+y^2=a \end{cases}$ равносильны?

Решение.

При $a<0$ ни одна из систем не имеет решений и, следовательно, они равносильны. При $a=0$ второе уравнение, общее для обеих систем, имеет единственное решение $x=0,\ y=0$, удовлетворяющее и первым уравнениям обеих систем. Поэтому системы равносильны и при $a=0$.

При $a>0$ второе уравнение задается окружностью радиуса $\sqrt{a}$ с центром в начале координат. Уравнение $\sin(x+y)=0$ равносильно бесконечной совокупности уравнений $x+y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

Системы равносильны тогда и только тогда, когда окружность, определяемая вторым уравнением, имеет общие точки только с прямой $x+y=0$, соответствующей $n=0$ в первой системе. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ее радиус был меньше, чем расстояние от начала координат до прямой $x+y=\pi$, т. е. чем число $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$.

Итак, $0<\sqrt{a}<\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ или $0<a<\frac{\pi^2}{2}$. Добавляя полученные ранее значения $a\le 0$, получаем ответ.

Ответ: $a\in\left(-\infty;\ \frac{\pi^2}{2}\right)$.

42. Задание 18 № 484638. При каждом a решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+2(x-y)+2=0, \\ a^2+ax+ay-4=0. \end{cases}$

Решение.

Первое уравнение преобразуем к виду

$$x^2+2x+1+y^2-2y+1=0,$$

или

$$(x+1)^2+(y-1)^2=0.$$

Оно означает, что $x=-1$, $y=1$, поскольку при остальных значениях его левая часть больше 0. Подставим эти значения во второе уравнение и получим $a^2-4=0$, откуда $a=\pm 2$.

Таким образом, система имеет решение $x=-1$, $y=1$ при $a=\pm 2$, при остальных a решений нет.

Ответ: при $a=\pm 2$, $x=-1$, $y=1$, при остальных a решении нет.

43. Задание 18 № 484639. При каких p данная система имеет решения: $\begin{cases} x^2+px+2=0, \\ \sin^2\pi p+\sin^2\pi x+2^{|y|}=\left|\sin\frac{\pi x}{2}\right| \end{cases}$?

Решение.

Поскольку $\sin^2\pi p \geq 0$ и $\sin^2\pi x \geq 0, |y| \geq 0$ и, значит, $2^{|y|} \geq 1$, левая часть второго уравнения системы не меньше, чем 1. Так как его правая часть не больше 1, оно равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^2\pi p=0, \\ \sin^2\pi x=0, \\ 2^{|y|}=1, \\ \left|\sin\frac{\pi x}{2}\right|=1, \end{cases}$$

из которой находим, что $p\in\mathbb{Z}, x=2k+1, k\in\mathbb{Z}, y=0.$

Первое уравнение имеет целые коэффициенты и целый корень $x_1=2k+1.$ Так как $x_1+x_2=-p, x_2$ — тоже целое число и из равенства $x_1x_2=2$ получаем, что это нечетное число, делящее число 2. Такими числами являются 1 и -1.

При $x=1$ находим $p=-3$, при $x=-1$ находим $p=3$.

Ответ: система имеет решения при $p=\pm 3$.

44. Задание 18 № 484640. При каждом a решите систему уравнений

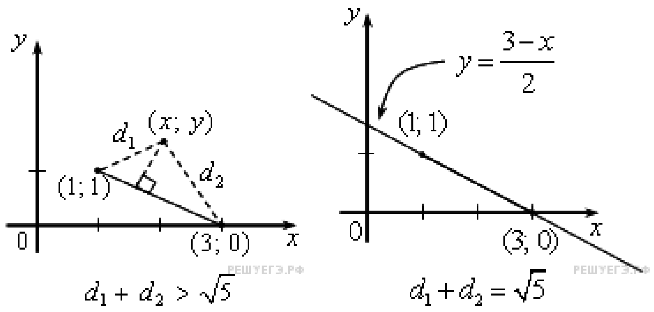
$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ \sqrt{x^2+a^2+2-2x-2a} + \sqrt{x^2+a^2-6x+9} = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Решение.

Запишем второе уравнение в виде

$$\sqrt{(x-1)^2+(a-1)^2} + \sqrt{(x-3)^2+a^2} = \sqrt{5}.$$

Геометрический смысл уравнения состоит в том, что сумма расстояний от точек $(x;\ a)$ до точек $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ равно $\sqrt{5}$. Поскольку расстояние между точками $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$ тоже равно $\sqrt{5}$, это означает, что точка $(x;\ a)$ должна лежать на отрезке, соединяющем точки $(1;\ 1)$ и $(3;\ 0)$. Другими словами, она удовлетворяет уравнению $a = \frac{3-x}{2}$ и условию $x \in [1;\ 3]$.



Таким образом, исходная система равносильна системе

$$\begin{cases} 2^{1+x} = 32a\sqrt{2}, \\ 2a = 3-x,\ x \in [1;\ 3]. \end{cases}$$

Подставив $2a$ в первое уравнение, получаем

$$2^{1+x} = 16(3-x)\sqrt{2} \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} = 3-x \Leftrightarrow 2^{x-\frac{7}{2}} + x = 3 \ .$$

Поскольку функция $y = 2^{x-\frac{7}{2}} + x$ возрастающая (как сумма двух возрастающих), каждое значение она принимает ровно один раз. Поэтому решение $x = \frac{5}{2}$ — единственное, ему соответствует $a = \frac{1}{4}$.

Ответ: если $a = \frac{1}{4}$, то $x = \frac{5}{2}$, при остальных a нет решений.