Уравнения с параметром

1. Задание 18 № 500411. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-3)^2=|x-a+3|+|x+a-3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Решение.

Введём обозначения: $a-3=b$, $f(x)=x^4+b^2$, $g(x)=|x-b|+|x+b|$.

В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x)=g(x)$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\geq|b|$, $g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Покажем, что при $|b|\geq 2$ уравнение $f(x)=g(x)$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Действительно, если $|x|\geq|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\geq 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$.

Если $|x|<|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\geq b^2\geq 2|b|=g(x)$, причём равенство достигается только при $|b|=2$ и $x=0$.

При $|b|<2$ верны неравенства $f(0)\leq g(0)$ и $f(2)>g(2)$, так как $b^2\leq 2|b|$ и $16+b^2>4$. Значит, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение, то это решение $x=0$.

Решим уравнение $f(0)=g(0)$ относительно b:

$$b^2=2|b|\Leftrightarrow|b|\cdot(|b|-2)=0,$$

значит, $x=0$ является решением уравнения $f(x)=g(x)$ при $b=0$ или $|b|=2$.

Случай, когда $|b|=2$, уже был разобран.

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2}$, $x=0$, $x=\sqrt[3]{2}$.

Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b\leq-2$ и $b\geq 2$, то есть при $a\leq 1$ и $a\geq 5$.

Ответ: $a\leq 1, a\geq 5$.

2. Задание 18 № 512875. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2-2ax+7|=|6a-x^2-2x-1|$$

имеет более двух корней.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$$(x^2-2ax+7)^2=(6a-x^2-2x-1)^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(x^2-2ax+7-6a+x^2+2x+1)(x^2-2ax+7+6a-x^2-2x-1)=0\Leftrightarrow$$
$$(x^2+(1-a)x+4-3a)(a+1)(x-3)=0.$$

Последнее уравнение имеет более двух корней или если $a=-1$, или если уравнение $x^2+(1-a)x+4-3a=0$ имеет два различных корня, отличных от 3:

$$\begin{cases}(1-a)^2-4\cdot(4-3a)>0,\\ 3^2+(1-a)\cdot 3+4-3a\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+10a-15>0,\\ 16-6a\neq 0.\end{cases},$$

откуда $a<-5-2\sqrt{10}$, $-5+2\sqrt{10}<a<\frac{8}{3}$ или $a>\frac{8}{3}$.

Исходное уравнение имеет более двух различных корней при $a<-5-2\sqrt{10}$, при $a=-1$, при $-5+2\sqrt{10}<a<\frac{8}{3}$ и при $a>\frac{8}{3}$.

Ответ: $(-\infty;\ -5-2\sqrt{10});\ -1;\ \left(-5+2\sqrt{10};\ \frac{8}{3}\right);\ \left(\frac{8}{3};\ +\infty\right)$.

3. Задание 18 № 512886. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{5a}{a-3}\cdot 7^{|x|}=49^{|x|}+\frac{6a+7}{a-3}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $7^{|x|}=t,\ t\geq 1.$ Если $t>1,$ тогда $|x|=\log_7 t;\ x=\log_7 t$ и $x=-\log_7 t.$ Если $t=1,$ тогда $|x|=0;\ x=0.$

Обозначим $f(t)=t^2-\frac{5a}{a-3}\cdot t+\frac{6a+7}{a-3}.$ Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t)=0$ имеет ровно один корень больший 1.

Уравнение $t^2-\frac{5a}{a-3}\cdot t+\frac{6a+7}{a-3}=0$ имеет ровно один корень, если дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{5a}{a-3}\right)^2-4\cdot\frac{6a+7}{a-3}=0\Leftrightarrow\frac{a^2+44a+84}{(a-3)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2,\\ a=-42.\end{array}\right.$$

При $a=-2$ уравнение $t^2-2t+1=0$ имеет единственный корень $t=1.$ В этом случае исходное уравнение имеет единственный корень $x=0.$

При $a=-42$ уравнение $t^2-\frac{14}{3}\cdot t+\frac{49}{9}=0$ имеет единственный корень $t=\frac{7}{3}.$ В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение $f(t)=0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$f(1)<0;\qquad 1-\frac{5a}{a-3}+\frac{6a+7}{a-3}<0;$$

$$\frac{2a+4}{a-3}<0;\qquad -2<a<3.$$

Ответ: $a=-42, -2<a<3.$

4. Задание 18 № 512892. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\frac{4a}{a-6}\cdot 3^{|x|}=9^{|x|}+\frac{3a+4}{a-6}$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $3^{|x|}=t,\ t\geq 1$. Если $t>1$, тогда $|x|=\log_3 t;\ x=\log_3 t$ и $x=-\log_3 t$. Если $t=1$, тогда $|x|=0;\ x=0$.

Обозначим $f(t)=t^2-\frac{4a}{a-6}\cdot t+\frac{3a+4}{a-6}$. Исходное уравнение имеет ровно два корня тогда и только тогда, когда уравнение $f(t)=0$ имеет ровно один корень больший 1.

Уравнение $t^2-\frac{4a}{a-6}\cdot t+\frac{3a+4}{a-6}=0$ имеет ровно один корень, если дискриминант равен нулю:

$$\left(\frac{4a}{a-6}\right)^2-4\cdot\frac{3a+4}{a-6}=0\Leftrightarrow\frac{a^2+14a+24}{(a-6)^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-2,\\ a=-12.\end{array}\right.$$

При $a=-2$ уравнение $t^2-t+\frac{1}{4}=0$ имеет единственный корень $t=\frac{1}{2}$. В этом случае исходное уравнение не имеет корней.

При $a=-12$ уравнение $t^2-\frac{8}{3}\cdot t+\frac{16}{9}=0$ имеет единственный корень $t=\frac{4}{3}$. В этом случае исходное уравнение имеет два корня.

Графиком функции $f(t)$ является парабола, ветви которой направлены вверх. Для того чтобы уравнение $f(t)=0$ имело два корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$f(1)<0;\qquad 1-\frac{4a}{a-6}+\frac{3a+4}{a-6}<0;$$

$$-\frac{2}{a-6}<0;\qquad a>6.$$

Ответ: $a=-12,\ a>6$.

5. Задание 18 № 505502. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0.$$

имеет ровно 4 решения.

Решение.

Заметим, что сумма корней уравнения $t^2-(a+9)t+2a(9-a)=0$ равна $a+9,$ а их произведение равно $2a(9-a)$. Поэтому корни — суть числа $2a$ и $9-a$. Тогда для исходного уравнения имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{1}{x-a}=2a, \\ x+\dfrac{1}{x-a}=9-a \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-a+\dfrac{1}{x-a}=a, \\ x-a+\dfrac{1}{x-a}=9-2a. \end{array}\right.$$

Каждое из уравнений совокупности может иметь не более двух корней.

Для того, чтобы исходное уравнение имело четыре корня, каждое из уравнений совокупности должно иметь по два корня и при этом уравнения не должны совпадать. Используя свойство суммы двух взаимно обратных чисел, получаем, что четыре корня исходное уравнение будет иметь при

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 9-2a<-2, \\ 9-2a>2, \end{array}\right. \\ a\ne 9-2a. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ a>2, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} a>\dfrac{11}{2}, \\ a<\dfrac{7}{2}, \end{array}\right. \\ a\ne 3. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-2, \\ 2<a<3, \\ 3<a<\dfrac{7}{2}, \\ a>\dfrac{11}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2;)\cup(2;\ 3)\cup\left(3;\ \dfrac{7}{2}\right)\cup\left(\dfrac{11}{2};\ +\infty\right)$.

6. Задание 18 № 505569. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$|x-2|=a\log_2|x-2|$$

имеет ровно два решения.

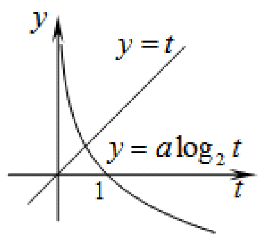
Решение.

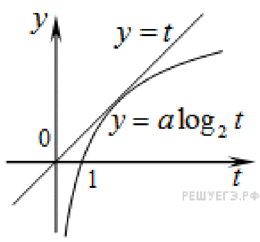
Пусть $|x-2|\ =t,$тогда $t=a\log_2 t,\ t>0.$Чтобы исходное уравнение имело ровно два решения, уравнение $t=a\log_2 t$ должно иметь единственное решение.

Если $a=0$, то уравнение не имеет решений.

Если $a<0$, то уравнение имеет единственное решение (см. рис.).

Если $a>0$ уравнение имеет единственное решение тогда и только тогда, когда прямая $y=t$ касается графика функции $y=a\log_2 t$ (см. рис.), что задаётся системой соотношений:





$$\begin{cases} t'=(a\log_2 t)', \\ t=a\log_2 t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{a}{t\ln 2}, \\ t=a\log_2 t \end{cases} \underset{t>0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} t=\dfrac{a}{\ln 2}, \\ t=\dfrac{a\ln t}{\ln 2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t\ln 2, \\ \ln t=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=e\ln 2, \\ t=e. \end{cases}$$

Заметим, что найденное значение параметра, действительно, положительно.

Ответ: $a<0,\ a=e\ln 2$.

7. Задание 18 № 507512. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$|x-a^2+a+2|+|x-a^2+3a-1|=2a-3$$

имеет корни, но ни один из них не принадлежит интервалу (4; 19).

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x-a^2+3a-1)-(x-a^2+a+2)=2a-3.$$

Сделаем замену: $m=x-a^2+3a-1,\ n=x-a^2+a+2.$ Тогда уравнение имеет вид:

$$|m|+|n|=m-n.$$

Это равносильно условию $n\le 0\le m.$ Получаем

$$x-a^2+a+2\le 0\le x-a^2+3a-1 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2-3a+1\le x\le a^2-a-2.$$

Уравнение имеет корни, ни один из которых не принадлежит интервалу (4; 19) , только если правая граница отрезка решений не больше 4 или левая граница не меньше 19. Получаем

$$\begin{cases} a^2-3a+1\le a^2-a-2, \\ \left[\begin{array}{l} a^2-a-2\le 4, \\ a^2-3a+1\ge 19 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a\ge 3, \\ \left[\begin{array}{l} a^2-a-6\le 0, \\ a^2-3a-18\ge 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} (a-3)(a+2)\le 0, \\ (a-6)(a+3)\ge 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge 1,5, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -3, \\ -2\le a\le 3, \\ a\ge 6. \end{array} \right. \end{cases}$$

Ответ: $a\in[1,5;\,3]\cup[6;\,+\infty).$

8. Задание 18 № 507587. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение

$$|x-a^2+4a-2|+|x-a^2+2a+3|=2a-5$$

имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23].

Решение.

Разность выражений, стоящих под знаками модуля, совпадает с правой частью уравнения:

$$(x-a^2+4a-2)-(x-a^2+2a+3)=2a-5.$$

Сделаем замену: $m=x-a^2+4a-2, n=x-a^2+2a+3.$

Тогда уравнение примет вид: $|m|+|n|=m-n.$

Это равносильно условию $n\le 0\le m$. Получаем:

$$x-a^2+2a+3\le 0\le x-a^2+4a-2;$$
$$a^2-4a+2\le x\le a^2-2a-3.$$

Уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23], только если правая граница отрезка решений не меньше 5, а левая не больше 23. Получаем

$$\begin{cases} a^2-4a+2\le a^2-2a-3, \\ a^2-2a-3\ge 5, \\ a^2-4a+2\le 23. \end{cases} \begin{cases} 2a\ge 5, \\ a^2-2a-8\ge 0, \\ a^2-4a-21\le 0. \end{cases} \begin{cases} a\ge 2,5, \\ (a-4)(a+2)\ge 0, \\ (a-7)(a+3)\le 0. \end{cases} \begin{cases} a\ge 2,5, \\ \left[\begin{array}{l} a\le -2, \\ a\ge 4, \end{array}\right. \\ 4\le a\le 7. \end{cases}$$

Таким образом, данное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке [5; 23] при a принадлежащем множеству $[4;\ 7]$.

Ответ: $[4;\ 7]$.

9. Задание 18 № 511469. Найти все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение

$$\sin(x+4a)+\sin\left(\frac{x^2-6x-7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

Решение.

Пусть $y=\dfrac{x^2-6x-7a}{2}$, тогда $x^2=2y+6x+7a$, и уравнение принимает вид

$$\sin(x+4a)+\sin y=4x-(2y+6x+7a)-a\Leftrightarrow 2y+\sin y=2(-4a-x)+\sin(-x-4a).$$

Заметим, что уравнение имеет вид $f(y)=f(-4a-x)$ для $f(t)=2t+\sin t$. Производная $f'(t)=2+\cos t$ положительна при всех t, поэтому функция $f(t)$ возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(-4a-x)=f(y)$ равносильно уравнению $-4a-x=y$.

Вернемся к исходной переменной:

$$-4a-x=\frac{x^2-6x-7a}{2}\Leftrightarrow -8a-2x=x^2-6x-7a\Leftrightarrow x^2-4x+a=0.$$

Полученное уравнение, а вместе с них и исходное, не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен, откуда $a>4$.

Ответ: $a>4$.

10. Задание 18 № 507678. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sin(x-3a)+\sin\left(\frac{x^2-6x+7a}{2}\right)=4x-x^2-a$$

не имеет действительных решений.

Решение.

Пусть $y=\dfrac{x^2-6x+7a}{2}$. Тогда $x^2=2y+6x-7a$, и уравнение принимает вид

$$\sin(x-3a)+\sin y=4x-2y-6x+6a\Leftrightarrow 2x-6a+\sin(x-3a)=-2y-\sin y.$$

Синус — нечётная функция, поэтому $2(3a-x)+\sin(3a-x)=2y+\sin y.$ Рассмотрим функцию $f(t)=2t+\sin t$. Тогда уравнение принимает вид $f(3a-x)=f(y)$. Эта функция определена при всех t и её производная $f'(t)=2+\cos t$ положительна при всех t. Следовательно, функция $f(t)$ монотонно возрастает на всей числовой прямой. Тогда уравнение $f(3a-x)=f(y)$ равносильно уравнению $3a-x=y$.

Сделаем обратную замену:

$$3a-x=\frac{x^2-6x+7a}{2}\Leftrightarrow 6a-2x=x^2-6x+7a\Leftrightarrow x^2-4x+a=0.$$

Уравнение не имеет действительных решений, если его дискриминант отрицателен: $4^2-4a<0$, откуда $a>4$.

Ответ: $a>4$.

11. Задание 18 № 507743. Найти все значения параметра a, при каждом из которых среди значений функции $y=\dfrac{x^2-2x+a}{6+x^2}$ есть ровно одно целое число.

Решение.

Функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Уравнение $\dfrac{x^2-2x+a}{6+x^2}=1$ при любом a имеет решение $x=\dfrac{a-6}{2}$. Значит, при любом a одно из значений функции равно 1.

Поскольку функция непрерывна, множество её значений образует промежуток, включающий число 1. Других целых значений функции нет, если для всех x:

$$0<\frac{x^2-2x+a}{6+x^2}<2\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-2x+a>0,\\ x^2+2x+12-a>0.\end{cases}$$

Чтобы неравенства выполнялись для всех x, дискриминанты обоих трёхчленов должны быть отрицательны:

$$\begin{cases}4-4a<0,\\ 4-4(12-a)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>1,\\ a<11.\end{cases}$$

Таким образом, подходящие значения параметра $1<a<11$.

Ответ: (1; 11).

12. Задание 18 № 507891. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых множество значений функции $y=\dfrac{a+3x-ax}{x^2+2ax+a^2+1}$ содержит отрезок $[0;\ 1]$.

Решение.

Запишем функцию в виде $y=\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}$.

Отрезок $[0;\ 1]$ содержится в множестве значений данной функции тогда и только тогда, когда уравнения $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=0$ и $\dfrac{a+(3-a)x}{(x+a)^2+1}=1$ имеют решения.

Решим первое уравнение. Уравнение $(a-3)x=a$ имеет решение при любом $a\neq 3$.

Решим второе уравнение. Уравнение $x^2+3(a-1)x+a^2-a+1=0$ имеет решение тогда и только тогда, когда его дискриминант неотрицателен:

$$D=9(a-1)^2-4\left(a^2-a+1\right)\geq 0\Leftrightarrow 5a^2-14a+5\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(a-\frac{7-2\sqrt{6}}{5}\right)\left(a-\frac{7+2\sqrt{6}}{5}\right)\geq 0,$$

откуда $a\leq\dfrac{7-2\sqrt{6}}{5},\ \dfrac{7+2\sqrt{6}}{5}\leq a<3,\ a>3.$

13. Задание 18 № 508237. Найдите все такие значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Решение 1. Положим $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $0\leq t\leq 2$, так как $0\leq 4x-x^2\leq 4$.

Тогда, исходное уравнение принимает вид $t^4-32t=a^2-14a$. Найдем множество значений функции $f(t)=t^4-32t$ на отрезке [0; 2]. Так как $f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8)<0$ на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, следовательно, множество ее значений на отрезке [0; 2] — отрезок [f (2); f (0)], т.е. отрезок $[-48;0]$. Таким образом, уравнение $f(t)=a^2-14a$ имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-48\leq a^2-14a\leq 0.$

$$\begin{cases}a^2-14a\leq 0,\\ a^2-14a+48\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq a\leq 14,\\ \left[\begin{array}{l}a\leq 6,\\ a\geq 8\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq a\leq 6,\\ 8\leq a\leq 14.\end{array}\right.$$

Решение 2. Положим $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $0\leq t\leq 2$, так как $0\leq 4x-x^2\leq 4$, и рассмотрим функцию $f(t)=t^4-32t-a^2+14a.$ Так как ее производная $f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8)<0$ на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $f(0)\geq 0$ и $f(2)\leq 0$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases}a^2-14a\leq 0,\\ a^2-14a+48\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\leq a\leq 14,\\ \left[\begin{array}{l}a\leq 6,\\ a\geq 8\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq a\leq 6,\\ 8\leq a\leq 14.\end{array}\right.$$

Решение 3 (Указание). Построить эскиз графика функции $f(t)=t^4-32t$ на отрезке [0; 2] (см. решение 1) и исследовать взаимное расположение графика этой функции и прямой $y=a^2-14a$.

Ответ: $0\leq a\leq 6,\ 8\leq a\leq 14.$

14. Задание 18 № 508258. Найдите все такие значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $(1+\sin x)^4-4\sin x=7-a-a^2$ не имеет решений.

Решение.

Решение 1. Перепишем данное уравнение в виде $(1+\sin x)^4-4(1+\sin x)=3-a-a^2$ и положим $1+\sin x=t,$ где $0\le t\le 2.$ Тогда исходное уравнение принимает вид $t^4-4t=3-a-a^2.$

Найдем множество значений функции $f(t)=t^4-4t$ на отрезке [0; 2].

Так как $f'(t)=4t^3-4=4(t^3-1),$ то $f'(t)<0$ на промежутке [0; 1) и $f'(t)>0$ промежутке (1; 2]. Значит, функция убывает на отрезке [0; 1] и возрастает на отрезке [1; 2]. Поскольку $f(0)<f(2),$ то множество значений функции на отрезке [0; 2] — отрезок [f(1); f(2)], т. е. отрезок $[-3;8]$. Таким образом, уравнение $f(t)=3-a-a^2$ не имеет решений на отрезке [0; 2] тогда и только тогда, когда выполняются условия $3-a-a^2>8$ или $3-a-a^2<-3.$

$$\left[\begin{array}{l} a^2+a+5<0, \\ a^2+a-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>2. \end{array}\right.$$

Решение 2. Положим $1+\sin x=t,$ где $0\le t\le 2,$ и рассмотрим функцию $f(t)=t^4-4t+a^2+a-3.$ Так как ее производная $f'(t)=4t^3-4=4(t^3-1),$ то $f'(t)<0$ на промежутке [0; 1) и $f'(t)>0$ промежутке (1; 2]. Значит, на промежутке [0; 2) функция имеет единственный экстремум — минимум $f_{\min}=f(1)=a^2+a-6.$ Так как $f(0)<f(2),$ уравнение $t^4-4t+a^2+a-3=0$ не имеет решений на отрезке [0; 2] тогда и только тогда, когда выполняются условия $f(2)<0$ или $f_{\min}>0.$ Таким образом, приходим к совокупности

$$\left[\begin{array}{l} a^2+a+5<0, \\ a^2+a-6>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a<-3, \\ a>2. \end{array}\right.$$

Решение 3. Построить эскиз графика функции $f(t)=t^4-4t$ на отрезке [0; 2] (см. решение 1) и исследовать взаимное расположения графика этой функции и прямой $y=3-a-a^2.$

Ответ: $a<-3,\ a>2.$

15. Задание 18 № 509047. Найдите все такие значения параметра a, при каждом из которых уравнение $(4x-x^2)^2-32\sqrt{4x-x^2}=a^2-14a$ имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Решение 1. Положим $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $0\le t\le 2$, так как $0\le 4x-x^2\le 4$.

Тогда, исходное уравнение принимает вид $t^4-32t=a^2-14a$. Найдем множество значений функции $f(t)=t^4-32t$ на отрезке [0; 2]. Так как $f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8)<0$ на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, следовательно, множество ее значений на отрезке [0; 2] — отрезок $[f(2);\ f(0)]$, т. е. отрезок $[-48;\ 0]$. Таким образом, уравнение $f(t)=a^2-14a$ имеет решения тогда и только тогда, когда выполняются условия $-48\le a^2-14a\le 0$.

$$\begin{cases} a^2-14a\le 0, \\ a^2-14a+48\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le a\le 14, \\ \left[\begin{array}{l} a\le 6, \\ a\ge 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le a\le 6, \\ 8\le a\le 14. \end{array}\right.$$

Решение 2. Положим $\sqrt{4x-x^2}=t$, где $0\le t\le 2$, так как $0\le 4x-x^2\le 4$, и рассмотрим функцию $f(t)=t^4-32t-a^2+14a$. Так как ее производная $f'(t)=4t^3-32=4(t^3-8)<0$ на промежутке [0; 2), то функция убывает на отрезке [0; 2], и, значит, имеет на нем не более одного корня. Этот корень есть тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия $f(0)\ge 0$ и $f(2)\le 0$. Таким образом, приходим к системе

$$\begin{cases} a^2-14a\le 0, \\ a^2-14a+48\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0\le a\le 14, \\ \left[\begin{array}{l} a\le 6, \\ a\ge 8 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le a\le 6, \\ 8\le a\le 14. \end{array}\right.$$

Решение 3 (Указание). Построить эскиз графика функции $f(t)=t^4-32t$ на отрезке [0; 2] (см. решение 1) и исследовать взаимное расположение графика этой функции и прямой $y=a^2-14a$.

Ответ: $0\le a\le 6,\ 8\le a\le 14.$

16. Задание 18 № 511110. Найдите все значения параметра a, при которых любое число из отрезка $2 \le x \le 3$ является решением уравнения

$$|x-a-2|+|x+a+3|=2a+5.$$

Решение.

Если $2a+5<0$, то уравнение решений не имеет.

Пусть $a=-2{,}5$. Тогда уравнение имеет вид

$$|x+0,5|+|x+0,5|=0,$$

и ни одно число отрезка [2, 3] не является его решением.

Пусть $a>-2{,}5$. Будем использовать геометрический подход и запишем уравнение в виде

$$x-(a+2)|+|x-(-a-3)|=2a+5.$$

Заметим, что при $a>-2{,}5$ верно неравенство $-a-3<a+2$. Поэтому решением неравенства является любое число из отрезка $[-a-3,\ a+2]$: ведь длина отрезка равна $(a+2)-(-a-3)=2a+5$ и неравенству удовлетворяют те и только те точки x, сумма расстояний от каждой из которых до точек $x=a+2$; $x=-a-3$ равна $2a+5$. Осталось выбрать те значения a, при каждом из которых отрезок $[-a-3,\ a+2]$ содержит отрезок [2, 3]. Это выполнено тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} -a-3\le 2, \\ a+2\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\ge -5, \\ a\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow a\ge 1.$$

Ответ: $a\ge 1$.

17. Задание 18 № 500431. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $x^4+(a-4)^2=|x-a+4|+|x+a-4|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Решение.

Введём обозначения: $a-4=b,\ f(x)=x^4+b^2,\ g(x)=|x-b|+|x+b|$. В этих обозначениях исходное уравнение принимает вид $f(x)=g(x)$.

Заметим, что $g(x)=2|x|$ при $|x|\ge|b|,\ g(x)=2|b|$ при $|x|<|b|$.

Пусть $|b|\ge 2$ покажем, что в этом случае уравнение $f(x)=g(x)$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

Действительно, если $|x|\ge|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\ge 2x^2\cdot|b|>2|x|=g(x)$.

Если $|x|<|b|$, то $f(x)=x^4+b^2\ge b^2\ge 2|b|=g(x)$, причём равенство достигается только при $|b|=2$ и $x=0$.

При $|b|<2$ верны неравенства $f(0)\le g(0)$ и $f(2)>g(2)$, так как $b^2\le 2|b|$ и $16+b^2>4$. Значит, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет решение.

Если некоторое число x_0 является решением этого уравнения, то и число $-x_0$ также является его решением, поскольку функции $f(x)$ и $g(x)$ — чётные. Значит, если уравнение f (x) = g (x) имеет единственное решение, то это решение $x=0$.

Решим уравнение $f(0)=g(0)$ относительно b: $b_2=2|b|\Leftrightarrow|b|\cdot(|b|-2)=0$, значит, $x=0$ является решением уравнения $f(x)=g(x)$ при $b=0$ или $|b|=2$.

Случай, когда $|b|=2$, уже был разобран.

При $b=0$ уравнение принимает вид $x^4=2|x|$ и имеет три различных решения: $x=-\sqrt[3]{2},\ x=0,\ x=\sqrt[3]{2}$.

Таким образом, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственное решение или не имеет решений при $b\le -2$ и $b\ge 2$, то есть при $a\le 2$ и $a\ge 6$.

Ответ: $a\in(-\infty,\ 2]\cup[6,\ +\infty)$.

18. Задание 18 № 507192. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-1$$

на промежутке $(0,+\infty)$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax-1$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(0,+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(0,+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(0,+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(0,\frac{5}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(0,\frac{5}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f\left(\frac{5}{3}\right)\ge g\left(\frac{5}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-1\ge 0$, то есть $a\ge\frac{3}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax-1=3-\frac{5}{x}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-4x+5=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=16-20a$, поэтому при $a>\frac{4}{5}$ это уравнение не имеет корней, при $a=\frac{4}{5}$ уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{5}{2}$, при $0<a<\frac{4}{5}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{4}{5}$, то больший корень $x_2=\frac{4+\sqrt{D}}{2a}>\frac{4}{2a}>2>\frac{5}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{5}{3},+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{5}{3}\right)\left(x_2-\frac{5}{3}\right)=a\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^2-4\cdot\frac{5}{3}+5=\frac{25a-15}{9}>0,\ \text{то есть}\ a>\frac{3}{5}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{5}{x}-3\right|=ax-1$ имеет следующее количество корней на промежутке $(0,+\infty)$:

— нет корней при $a\le 0$;

— один корень при $0<a<\frac{3}{5}$ и $a>\frac{4}{5}$;

— два корня при $a=\frac{3}{5}$ и $a=\frac{4}{5}$;

— три корня при $\frac{3}{5}<a<\frac{4}{5}$.

Ответ: $\frac{3}{5}<a<\frac{4}{5}$.

19. Задание 18 № 501070. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left|\frac{5}{x+1}-3\right|=ax+a-2$$

на промежутке $(-1,+\infty)$ имеет больше двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=ax+a-2$ и $g(x)=\left|\frac{5}{x+1}-3\right|$. Исследуем уравнение $f(x)=g(x)$ на промежутке $(-1,+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $(-1,+\infty)$ отрицательны, а все значения функции $g(x)$ — неотрицательны, поэтому при $a\le 0$ уравнение $f(x)=g(x)$ не имеет решений на промежутке $(-1,+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $\left(-1,\frac{2}{3}\right]$, поэтому уравнение $f(x)=g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $\left(-1,\frac{2}{3}\right]$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда $f\left(\frac{2}{3}\right)\ge g\left(\frac{2}{3}\right)$, откуда получаем $a\cdot\frac{5}{3}-2\ge 0$, то есть $a\ge\frac{6}{5}$.

На промежутке $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ уравнение $f(x)=g(x)$ принимает вид $ax+a-2=3-\frac{5}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2+(2a-5)x+a=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=25-20a$, поэтому при $a>\frac{5}{4}$ это уравнение не имеет корней, при $a=\frac{5}{4}$ уравнения имеет единственный корень, равный 1, при $0<a<\frac{5}{4}$ уравнение имеет два корня.

Если уравнение имеет два корня x_1 и x_2, то есть $0<a<\frac{5}{4}$, то больший корень $x_2=\frac{5-2a+\sqrt{D}}{2a}>\frac{5-2a}{2a}>1>\frac{2}{3}$, поэтому он принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$. Меньший корень x_1 принадлежит промежутку $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$ тогда и только тогда, когда

$$a\left(x_1-\frac{2}{3}\right)\left(x_2-\frac{2}{3}\right)=a\left(\frac{2}{3}\right)^2+(2a-5)\cdot\frac{2}{3}+a=\frac{25a-30}{9}>0,\ \text{то есть}\ a>\frac{6}{5}.$$

Таким образом, исходное уравнение $\left|\frac{5}{x+1}-3\right|=ax+a-2$ имеет следующее количество корней на промежутке $(-1,+\infty)$:

— нет корней при $a\le 0$;

— один корень при $0<a<\frac{6}{5}$ и при $a>\frac{5}{4}$;

— два корня при $a=\frac{6}{5}$ и при $a=\frac{5}{4}$;

— три корня при $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$.

Ответ: $\frac{6}{5}<a<\frac{5}{4}$

20. Задание 18 № 501693. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

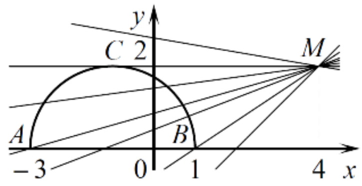
$$ax+\sqrt{3-2x-x^2}=4a+2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{3-2x-x^2}=-ax+4a+2$ Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ и $g(x)=-ax+4a+2=-a(x-4)+2.$ Графиком функции $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$ является полуокружность радиуса 2 с центром в точке $(-1,0)$, лежащая в верхней полуплоскости. При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом $-a$, проходящая через точку $M(4,2)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, проходит через точки $M(4,2)$ и $A(-3,0)$, следовательно, её угловой коэффициент $-a=\frac{2}{7}$. При $0<-a\leq\frac{2}{7}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент не больше, чем у прямой MA, и пересекает полуокружность в двух точках. При $\frac{2}{7}<-a\leq\frac{2}{3}$ прямая, заданная уравнением $y=-ax+4a+2$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $-\frac{2}{3}\leq a<-\frac{2}{7}$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $-a>\frac{2}{3}$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $\left[-\frac{2}{3},-\frac{2}{7}\right)\cup\{0\}.$

21. Задание 18 № 501733. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

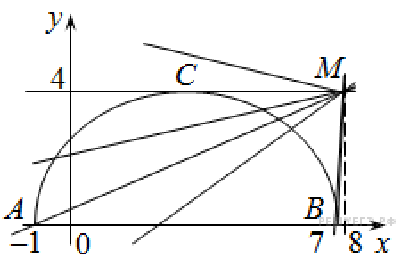
$$8a+\sqrt{7+6x-x^2}=ax+4$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде $\sqrt{7+6x-x^2}=ax+4-8a$ Рассмотрим две функции: $f(x)=\sqrt{7+6x-x^2}$ и $g(x)=ax-8a+4$. Графиком функции $f(x)=\sqrt{4^2-(x-3)^2}$ является полуокружность радиуса 4 с центром в точке (3;0). лежащая в верхней полуплоскости (см. рис.). При каждом значении a графиком функции $g(x)$ является прямая с угловым коэффициентом a, проходящая через точку $M(8;\ 4)$.

Уравнение имеет единственный корень, если графики функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют единственную общую точку: либо прямая касается полуокружности, либо пересекает её в единственной точке.



Касательная MC, проведённая из точки M к полуокружности, имеет угловой коэффициент, равный нулю, то есть при $a=0$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $a<0$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Прямая MA, заданная уравнением $y=ax-8a+4$, проходит через точки $M(8;\ 4)$ и $A(-1;\ 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $a=\frac{4}{9}$. При $0<a\le\frac{4}{9}$ прямая, заданная уравнением $y=ax-8a+4$, имеет две общие точки с полуокружностью. Прямая MB, заданная уравнением $y=ax-8a+4$, проходит через точки $M(8;\ 4)$ и $B(7;\ 0)$, следовательно, её угловой коэффициент $a=4$. При $\frac{4}{9}<a\le 4$ прямая, заданная уравнением $y=ax-8a+4$, имеет угловой коэффициент больше, чем у прямой MA, и не больше, чем у прямой MB, и пересекает полуокружность в единственной точке. Получаем, что при $\frac{4}{9}<a\le 4$ исходное уравнение имеет единственный корень. При $a>4$ прямая не имеет общих точек с полуокружностью.

Ответ: $0;\ \left(\frac{4}{9};\ 4\right]$.

22. Задание 18 № 501048. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{4^{-x^2}-a\cdot 2^{1-x^2}+a}{2^{1-x^2}-1}=3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Сделаем замену $z=2^{-x^2}$, $x^2\ge 0$, поэтому $0<z\le 1$. Задачу можно сформулировать так: найдите значения a, при каждом из которых уравнение $\frac{z^2-2az+a}{2z-1}=3$ имеет хотя бы одно решение, удовлтеворяющее условию $0<z\le 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2-2az+a=6z-3, \\ z\ne 0{,}5, \\ 0<z\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-2(a+3)z+a+3=0, \\ z\ne 0{,}5, \\ 0<z\le 1. \end{cases}$$

Заметим, что ни при одном значении a число $z=0{,}5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z)=z^2-2(a+3)z+a+3$. Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке

$(0,\ 1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) < 0, \\ f(1) \geq 0. \end{cases}$$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке

$(0,\,1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \leq 0. \end{cases}$$

3) Трёхчлен имеет два корня, возможно, совпадающих, и оба, а также вершина, лежат на промежутке $(0,\,1]$, то есть

$$\begin{cases} f(0) > 0, \\ f(1) \geq 0, \\ f(z_0) \leq 0, \\ 0 < z_0 \leq 1 \end{cases}$$

где $z_0 = a+3$ — абсцисса вершины параболы. Эти условия соответствуют следующим способам расположения графика функции $f(z)$:

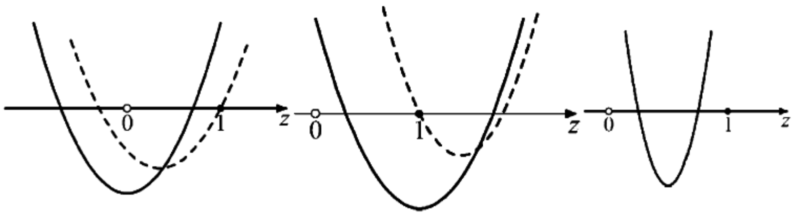


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Решим первую систему:

$$\begin{cases} a+3 < 0, \\ 1-a-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -3, \\ a \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a < -3.$$

Решим вторую систему:

$$\begin{cases} a+3 > 0, \\ 1-a-3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -3, \\ a \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -2.$$

Решим третью систему:

$$\begin{cases} a+3 > 0, \\ 1-a-3 \geq 0, \\ (a+3)^2 - 2\,(a+3)^2 + a + 3 \leq 0, \\ 0 < a+3 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -3, \\ a \leq -2, \\ \left[\begin{array}{l} a \leq -3, \\ a \geq -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow a = -2.$$

Ответ: $a < -3,\ a \geq -2.$

23. Задание 18 № 501050. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{1 - 2a\sqrt{1+x^2} + a\left(1+x^2\right)}{(1+x^2) - 2\sqrt{1+x^2}} = 3$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Поделим числитель и знаменатель дроби на $1+x^2$.

$$\frac{\frac{1}{1+x^2} - \frac{2a}{\sqrt{1+x^2}} + a}{1 - \frac{2}{\sqrt{1+x^2}}} = 3.$$

Сделаем замену $z=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$:

$$\frac{z^2-2az+a}{1-2z}=3.$$

$1+x^2\geq 1$, поэтому $0<z\leq 1$.

Задачу можно сформулировать так: найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\dfrac{z^2-2az+a}{1-2z}=3$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $0<z\leq 1$.

Перейдем к системе:

$$\begin{cases} z^2-2az+a=-6z+3, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2-2(a-3)z+a-3=0, \\ z\neq 0,5, \\ 0<z\leq 1. \end{cases}$$

Заметим, что ни при одном значении a число $z=0,5$ не является корнем уравнения.

Рассмотрим функцию $f(z)=z^2-2(a-3)z+a-3.$ Её график — парабола, ветви которой направлены вверх. Следовательно, условие задачи выполнено тогда и только тогда, когда выполняется одно из трех условий:

1) Трёхчлен имеет два различных корня, и только больший из них лежит на промежутке (0; 1])(см.рис. 1), то есть $\begin{cases} f(0)<0, \\ f(1)\geq 0. \end{cases}$

2) Трёхчлен имеет два различных корня, и только меньший из них лежит на промежутке (0; 1])(см.рис. 2), то есть $\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\leq 0. \end{cases}$

3) Трёхчлен имеет два корня,возможно, совпадающих, и оба лежат на промежутке (0; 1])(см.рис. 3), то есть

$$\begin{cases} f(0)>0, \\ f(1)\geq 0, \quad \text{где } z_0 \text{ — абсцисса вершины параболы.} \\ f(z_0)\leq 0. \end{cases}$$

Эти условия соответствуют следующим способам расположения графика функции $f(z)$:

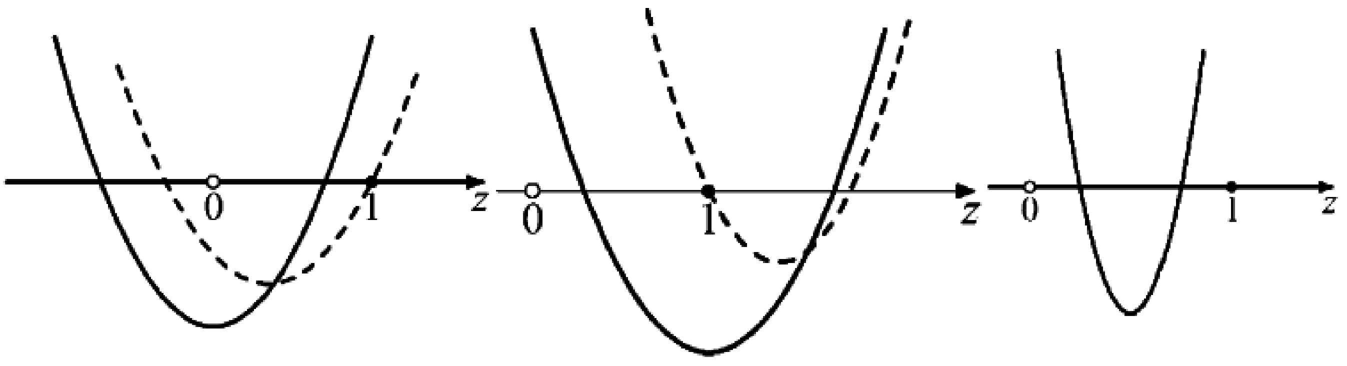


Рис. 1 Рис. 2 Рис. 3

Решим систему: $\begin{cases} a-3<0, \\ 1-a+3\geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3, \\ a\leq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a<3.$

Решим систему: $\begin{cases} a-3>0, \\ 1-a+3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3, \\ a\geq 4; \end{cases} \Leftrightarrow a\geq 4.$

Решим систему: $\begin{cases} a-3>0, \\ 1-2(a-3)+a-3\geq 0, \\ (a-3)^2-2(a-3)^2+a-3\leq 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>3, \\ a\leq 4, \\ a\geq 4, \end{cases}$ откуда $a=4$.

Ответ: $a<3, a\geq 4$.

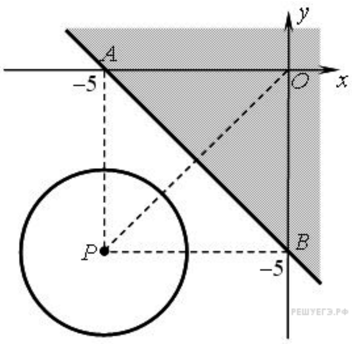
24. Задание 18 № 501399. Найдите все значения параметра *a*, при которых уравнение $\sqrt{2xy+a}=x+y+5$ не имеет решений.

Решение.

Возведем в квадрат:

$$\sqrt{2xy+a}=x+y+5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5\geq 0, \\ 2xy+a=x^2+y^2+25+2xy+10x+10y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+5\geq 0, \\ (x+5)^2+(y+5)^2=a+25. \end{cases}$$

Неравенство $x+y+5\geq 0$ задает на координатной плоскости «верхнюю» полуплоскость с границей $x+y+5=0$, а уравнение $(x+5)^2+(y+5)^2=a+25$ при $a>-25$ — окружность с центром $P(-5;-5)$ и радиусом $R=\sqrt{a+25}$ (см. рисунок).



Окружность и полуплоскость не имеют общих точек тогда и только тогда, когда радиус окружности меньше половины диагонали *PO* квадрата *APBO*, т. е., $\sqrt{a+25}<\frac{5\sqrt{2}}{2}$, откуда $-25<a<-12,5$.

При $a<-25$ уравнение, а, следовательно, и вся система решений не имеют, а при $a=-25$ решением уравнения является пара $(-5;-5)$, которая не удовлетворяет неравенству $x+y+5\geq 0$.

Ответ: $a<-12,5$.

25. Задание 18 № 501713. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение

$$x^2+(a-3)^2=|x+3-a|+|x+a-3|$$

имеет единственный корень.

Решение.

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0=-x_0$, то есть $x_0=0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение:

$$(a-3)^2=|3-a|+|a-3| \Leftrightarrow |a-3|\cdot(|a-3|-2)=0,$$

откуда либо $|a-3|=0 \Leftrightarrow a=3$, либо $|a-3|=2 \Leftrightarrow$ а = 1, или $a=5$.

При $a=3$ исходное уравнение принимает вид: $x^2=2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа −2; 0 и 2, то есть исходное уравнение имеет более одного корня.

При $a=1$ и при $a=5$ уравнение принимает вид: $x^2+4=|x-2|+|x+2|$.

При $x<-2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2+2x+4=0$, которое не имеет корней.

При $-2\leq x\leq 2$ получаем уравнение $x^2=0$, которое имеет единственный корень.

При $x>2$ получаем уравнение $x^2-2x+4=0$, которое не имеет корней. При $a=1$ и при $a=5$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: 1; 5.

26. Задание 18 № 502026. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $a^2-7a+7\sqrt{2x^2+49}=3|x-7a|-6|x|$ имеет хотя бы один корень.

Решение.

Рассмотрим две функции: $f(x)=a^2-7a+7\sqrt{2x^2+49}$ и $g(x)=3|x-7a|-6|x|$. Поскольку $x^2\geq 0$, получаем: $f(x)\geq f(0)=a^2-7a+49$.

Функция $g(x)=3|x-7a|-6|x|$ является кусочно-линейной, причём при $x<0$ угловой коэффициент равен либо 3, либо 9, а при $x>0$ угловой коэффициент равен либо –3, либо –9. Значит, функция $g(x)$ возрастает при $x<0$ и убывает при $x>0$, поэтому $g(x)\leq g(0)=21|a|$.

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень тогда и только тогда, когда $f(0)\leq g(0)$:

$$a^2-7a+49\leq 21|a| \Leftrightarrow a^2-7a-21|a|+49\leq 0.$$

Значит, либо

$$\begin{cases} a^2-28a+49\leq 0, \\ a\geq 0, \end{cases} \text{откуда } 14-7\sqrt{3}\leq a\leq 14+7\sqrt{3},$$

либо

$$\begin{cases} a^2+14a+49\leq 0, \\ a<0, \end{cases} \text{откуда } a=-7.$$

Исходное уравнение имеет хотя бы один корень при $a=-7$ и при $14-7\sqrt{3}\leq a\leq 14+7\sqrt{3}$ и не имеет корней при других значениях a.

Ответ: $a\in\{-7\}\cup\left[14-7\sqrt{3},\ 14+7\sqrt{3}\right]$.

27. Задание 18 № 502078. Найдите все значения a, при которых уравнение $|\cos^2 x+2\sin x-2a|=\cos^2 x+\sin x+2a$ имеет на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2},0\right)$ единственный корень.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x + 2\sin x - 2a = \cos^2 x + \sin x + 2a \Leftrightarrow \sin x = 4a.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ единственный корень при $-1 \leq 4a < 0$, откуда $-\dfrac{1}{4} \leq a < 0$. Подставив $\sin x = 4a$ в неравенство $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$, получим: $1 - 16a^2 + 8a - 2a \geq 0$, откуда $-\dfrac{1}{8} \leq a \leq \dfrac{1}{2}$.

В этом случае уравнение $\sin x = 4a$ при условии $\cos^2 x + 2\sin x - 2a \geq 0$ имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ единственный корень $x = \arcsin(4a)$ при $-\dfrac{1}{8} \leq a < 0$ и не имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ корней при $a < -\dfrac{1}{8}$ и при $a \geq 0$.

Второй случай: $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$. Исходное уравнение примет вид

$$\cos^2 x + 2\sin x - 2a = -\cos^2 x - \sin x - 2a \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\sin x = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\sin x + 1)(\sin x - 2) = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2}.$$

Последнее уравнение имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ единственный корень $x = -\dfrac{\pi}{6}$. Подставив $x = -\dfrac{\pi}{6}$ в неравенство $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$, получим: $\dfrac{3}{4} - 2 \cdot \dfrac{1}{2} - 2a < 0$, откуда $a > -\dfrac{1}{8}$.

В этом случае уравнение $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$ при условии $\cos^2 x + 2\sin x - 2a < 0$ имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ единственный корень $x = -\dfrac{\pi}{6}$ при $a > -\dfrac{1}{8}$ и не имеет на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$ корней при $a \leq -\dfrac{1}{8}$.

Уравнение $|\cos^2 x + 2 - 2a| = \cos^2 x + +2a$ на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$:

- при $a < -\dfrac{1}{8}$ не имеет корней;
- при $a = -\dfrac{1}{8}$ имеет единственный корень $x = \arcsin(4a)$;
- при $-\dfrac{1}{8} < a < 0$ имеет два различных корня $x = -\dfrac{\pi}{6}$ и $x = \arcsin(4a)$;
- при $a \geq 0$ имеет единственный корень $x = -\dfrac{\pi}{6}$.

Ответ: $a \in \left\{-\dfrac{1}{8}\right\} \cup [0, +\infty)$.

28. Задание 18 № 502118. Найдите все значения *a*, при которых уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1;\ 1]$.

Решение.

Уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^2+x+7-a=0, \\ x>-1, \\ x\neq 0. \end{cases}$$

Эта система имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1,\ 1]$, если уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий либо промежутку $(-1,0)$, либо промежутку $(0,\ 1]$.

Поскольку графиком функции $f(x)=x^2+x+7-a$ является парабола, ветви которой направлены вверх, а вершина находится в точке $x=-\frac{1}{2}$, уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1,\ 0)$, при условии

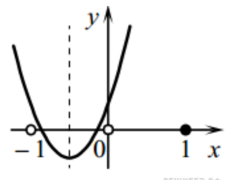


Рис. 1

$$\begin{cases} f\left(-\frac{1}{2}\right)\le 0, \\ f(-1)=f(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\frac{3}{4}-a\le 0, \\ 7-a>0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{27}{4}\le a<7, \text{ (рис. 1).}$$

Уравнение $f(x)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(0,\ 1]$, при условии

$$\begin{cases} f(0)<0, \\ f(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7-a<0, \\ 9-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 7<a\le 9 \text{ (рис. 2).}$$

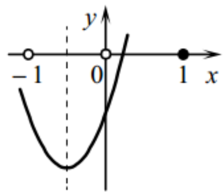


Рис. 2

Уравнение $\log_{x+1}(a+x-6)=2$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку $(-1,\ 1]$, при $\frac{27}{4}\le a<7$ и при $7<a\le 9$.

Ответ: $\left[\frac{27}{4},7\right)\cup\ (7,9]$.

29. Задание 18 № 502297. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2-|x-a+6|=|x+a-6|-(a-6)^2$$

имеет единственный корень.

Решение.

Запишем уравнение в виде

$$x^2+(a-6)^2=|x+a-6|+|x-a+6|.$$

Если x_0 является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней, только если $x_0=-x_0$ то есть $x=0$. Подставим значение $x=0$ в уравнение:

$$(a-6)^2=2|a-6| \Leftrightarrow |a-6|\cdot(|a-6|-2)=0,$$

откуда либо $|a-6|=0 \Leftrightarrow a=6$, либо $|a-6|=2 \Leftrightarrow a=4$ или $a=8$.

При $a=6$ уравнение принимает вид $x^2=2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа -2, 0 и 2, то есть уравнение имеет ровно три корня.

При $a=4$ и при $a=8$ уравнение принимает вид $x^2+4=|x-2|+|x+2|$.

При $x<-2$ это уравнение сводится к уравнению $x^2+2x+4=0$, которое не имеет корней.

При $-2\le x\le 2$ получаем уравнение $x^2=0$, которое имеет единственный корень.

При $x>2$ получаем уравнение $x^2-2x+4=0$, которое не имеет корней.

Таким образом, при $a=4$ и при $a=8$ исходное уравнение имеет единственный корень.

Ответ: $a=4$ и $a=8$.

30. Задание 18 № 504547. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$|(x-1)^2-2^{1-a}|+|x-1|+(1-x)^2+2^{a-1}=4+4^a$$

имеет единственное решение. Найдите это решение для каждого значения a.

Решение.

Пусть число x — решение данного уравнения при некотором значении параметра a. Тогда число $(2-x)$ есть его решение при том же значении a. Если решение единственно, то решения $2-x$ и x совпадают, то есть

$$(2-x)=x \Leftrightarrow x=1.$$

Подставив это решение в исходное уравнение, получим:

$$2^{1-a}+2^{a-1}=4+4^a \Leftrightarrow \frac{2}{2^a}+\frac{2^a}{2}=4+4^a \Leftrightarrow \frac{1}{2^{a+1}}=1,$$

откуда $a=-1$.

Пусть $a=-1$. Тогда исходное уравнение примет вид

$$|(x-1)^2-4|+|x-1|=4-(1-x)^2.$$

Отсюда следует, что $4-(1-x)^2\ge 0$, следовательно, $|(x-1)^2-4|=4-(1-x)^2$.

Исходное уравнение принимает вид $|x-1|=0$, и оно имеет единственное решение $x=1$, удовлетворяющее условию $4-(1-x)^2\ge 0$. Следовательно, $a=-1$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: при $a=-1$ единственное решение $x=1$.

31. Задание 18 № 505244. Найдите все значения a, при которых любое решение уравнения

$$4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$$

принадлежит отрезку $[1;3]$.

Решение.

Рассмотрим функцию $f(x)=4\sqrt[3]{3,5x-2,5}+3\log_2(3x-1)+2a$. Она определена при $x>\frac{1}{3}$, возрастает на области определения и принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$. Значит, уравнение $f(x)=0$ имеет единственное решение. Это решение принадлежит отрезку $[1;3]$ тогда и только тогда, когда $f(1)\le 0$ и $f(3)\ge 0$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4+3+2a\le 0, \\ 8+9+2a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+7\le 0, \\ 2a+17\ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{17}{2}\le a\le -\frac{7}{2}.$$

Ответ: $\left[-\frac{17}{2};-\frac{7}{2}\right]$.

32. Задание 18 № 505474. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(|x+2|+|x-a|)^2-5(|x+2|+|x-a|)+3a(5-3a)=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t=|x+2|+|x-a|$, тогда исходное уравнение принимает вид:

$$t^2-5t+3a(5-3a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3a, \\ t=5-3a \end{array}\right.$$

откуда

$$\left[\begin{array}{l}|x+2|+|x-a|=3a,\\|x+2|+|x-a|=5-3a.\end{array}\right.$$

Значит, решение исходного уравнения — это решение уравнений $|x+2|+|x-a|=3a$ или $|x+2|+|x-a|=5-3a.$ Исследуем сколько решений имеет уравнение $|x+2|+|x-a|=b$ в зависимости от a и $b.$ Заметим, что слева стоит сумма модулей, то есть при $b<0$ решений нет. Запишем уравнение в виде $|x+2|=-|x-a|+b.$ Левая часть этого уравнения — график модуля с вершиной в точке $(-2,0)$, график левой части — график модуля, отражённый относительно оси Ox, с вершиной в точке (a,b). Это уравнение будет иметь два решения, если одновременно прямая $y=-x+a+b$ лежит правее (выше) прямой $y=-x-2$ и прямая $y=x-a+b$ лежит левее (выше) прямой $y=x+2.$ Это достигается условиями $-x+a+b>-x-2$ и $x-a+b>x+2.$ Таким образом уравнение совокупности имеет два решения при условии:

$$\begin{cases}a+b>-2,\\a-b<-2,\\b\geq 0.\end{cases}$$

Если вершина (a,b) находится внутри части плоскости отсекаемой графиком $y=|x+2|$, то уравнение имеет два решения, если прямые $y=-x-2$ и $y=-x+a+b$ совпадают или прямые $y=x+2$ и $y=x-a+b$ совпадают, то уравнение имеет бесконечно много решений, если вершина (a,b) совпадает с точкой $(-2,0)$, то уравнение имеет одно решение.

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений совокупности имеет два решения, а второе не имеет решений, либо если каждое из уравнений совокупности имеет два решения, но эти решения совпадают. Разберём каждый из этих случаев.

Первый случай. При $a+b<-2$ или $a-b>-2$, или $b<0$ уравнение совокупности решений не имеет. Таким образом исходное уравнение имеет два решения, если первое уравнение имеет два решения, а второе — не имеет, либо наоборот. В случае, когда первое уравнение верно система условий имеет вид:

$$\begin{cases}\begin{cases}a+3a>-2,\\a-3a<-2,\\3a\geq 0\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}a+5-3a<-2,\\a-5+3a>-2,\\5-3a<0,\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}a>-\dfrac{1}{2},\\a>1,\\a\geq 0,\end{cases}\\ \left[\begin{array}{l}a>\dfrac{7}{2},\\a>\dfrac{3}{4},\\a>\dfrac{5}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow a>1.$$

В случае, когда второе уравнение верно система условий имеет вид:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a+3a<-2,\\a-3a>-2,\\3a<0,\end{array}\right.\\ \begin{cases}a+5-3a>-2,\\a-5+3a<-2,\\5-3a\geq 0,\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a<-\dfrac{1}{2},\\a<1,\\a<0,\end{array}\right.\\ \begin{cases}a<\dfrac{7}{2},\\a<\dfrac{3}{4},\\a\leq\dfrac{5}{3}\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow a<\frac{3}{4}.$$

Второй случай. Решения совпадут, если совпадают уравнения, то есть, если $3a = 5 - 3a$, откуда $a = \frac{5}{6}$. При данном значении a оба уравнения принимают вид:

$$|x+2| + \left|x - \frac{5}{6}\right| = \frac{5}{2}$$

Данное уравнение не имеет решений.

То есть исходное уравнение не имеет решений при a равном $\frac{5}{6}$.

Таким образом, уравнение имеет ровно два решения при $a \left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right) \cup (1, +\infty)$.

33. Задание 18 № 500216. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$ имеет более двух корней.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x) = a - 3|x|$ и $g(x) = \sqrt{1-2x}$. Исследуем уравнение $f(x) = g(x)$.

На промежутке $(-\infty, 0)$ функция $f(x)$ возрастает. Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения на промежутке $(-\infty, 0)$, причем решение будет существовать тогда и только тогда, когда, $f(0) > g(0)$, то есть при $a > 1$.

При $x \geq 0$ уравнение $f(x) = g(x)$ принимает вид $a - 3x = \sqrt{1-2x}$. При $x > \frac{a}{3}$ левая часть этого уравнения отрицательна, следовательно, решений нет. При $x \leq \frac{a}{3}$ это уравнение сводится к квадратному уравнению $9x^2 + (2-6a)x + (a^2-1) = 0$, дискриминант которого $D = (2-6a)^2 - 36(a^2-1) = 40 - 24a$, поэтому при $a > \frac{5}{3}$ это уравнение не имеет корней, при $a = \frac{5}{3}$ — уравнение имеет единственный корень, равный $\frac{4}{9}$, при $a < \frac{5}{3}$ — уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, $x_1 = \frac{6a-2-\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2+\sqrt{D}}{18}$ и $x_2 = \frac{6a-2+\sqrt{D}}{18} = \frac{a}{3} - \frac{2-\sqrt{D}}{18}$.

Тогда меньший корень $x_1 < \frac{a}{3}$, а больший корень x_2 не превосходит $\frac{a}{3}$, если $\sqrt{D} \leq 2$, то есть при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

По теореме Виета $x_1 + x_2 = \frac{6a-2}{9}$, $x_1 x_2 = \frac{a^2-1}{9}$, поэтому знаки корней x_1 и x_2 зависят от знаков выражений $\frac{6a-2}{9}$ и $\frac{a^2-1}{9}$. Значит, при $a < -1$ оба корня отрицательны, при $-1 \leq a < 1$ один из корней отрицательный, а другой неотрицательный, при $a \geq 1$ оба корня неотрицательны.

Таким образом, при $x \geq 0$ уравнение $a - 3x = \sqrt{1-2x}$ не имеет корней при $a < 1$ и $a > \frac{5}{3}$, имеет один корень при $1 \leq a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$, имеет два корня при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Таким образом, уравнение $\sqrt{1-2x} = a - 3|x|$ имеет следующее количество корней:

— нет корней при $a < 1$;

— один корень при $a = 1$ и $a > \frac{5}{3}$;

— два корня при $1 < a < \frac{3}{2}$ и $a = \frac{5}{3}$;

— три корня при $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

Ответ: $\frac{3}{2} \leq a < \frac{5}{3}$.

34. Задание 18 № 500067. Найдите все значения a, при которых уравнение $a|x-5|=\frac{2}{x+1}$ на промежутке $[0;+\infty)$ имеет ровно два корня.

Решение.

Рассмотрим функции $f(x)=a|x-5|$ и $g(x)=\frac{2}{x+1}$. Исследуем $g(x)=f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a\le 0$ все значения функции $f(x)$ на промежутке $[0;+\infty)$. неположительны, а все значения функции $g(x)$ — положительны, поэтому при $a\le 0$ уравнение не имеет решений на промежутке $[0;+\infty)$.

При $a>0$ функция $f(x)$ возрастает на промежутке $(5;+\infty)$, Функция $g(x)$ убывает на этом промежутке, поэтому уравнение $g(x)=f(x)$ всегда имеет ровно одно решение на промежутке $(5;+\infty)$, поскольку $f(5)<g(5)$, а $f(5+\frac{1}{a})>g(5+\frac{1}{a})$.

На промежутке $[0;5]$ уравнение $g(x)=f(x)$ принимает вид $5a-ax=\frac{2}{x+1}$. Это уравнение сводится к уравнению $ax^2-4ax+(2-5a)=0$. Будем считать, что $a>0$, поскольку случай $a\le 0$ был рассмотрен ранее. Дискриминант квадратного уравнения $D=16a^2-4a(2-5a)=36a^2-8a$, поэтому при $0<a<\frac{2}{9}$ это уравнение не имеет корней; при $a=\frac{2}{9}$ уравнение имеет единственный корень, равный 2; при $a>\frac{2}{9}$ уравнение имеет два корня.

Пусть уравнение имеет два корня, то есть $a>\frac{2}{9}$. Тогда оба корня меньше 5, поскольку при $x\ge 5$ значения функции $5a-ax$ неположительны, а значения функции $\frac{2}{x+1}$ положительны. По теореме Виета сумма корней равна 4, а произведение равно $\frac{2}{a}-5$. Значит, больший корень всегда принадлежит промежутку $[0;5]$, а меньший принадлежит этому промежутку тогда и только тогда, когда $\frac{2}{a}-5\ge 0$.

Таким образом, уравнение $a|x-5|=\frac{2}{x+1}$ имеет следующее количество корней на промежутке $[0;+\infty)$:

1) Нет корней при $a\le 0$;

2) Один корень при $0<a<\frac{2}{9}$;

3) Два корня при $a=\frac{2}{9}$ и $a>\frac{2}{5}$;

4) Три корня при $\frac{2}{9}<a\le\frac{2}{5}$.

Ответ: $a=\frac{2}{9}$; $a>\frac{2}{5}$.

35. Задание 18 № 503256. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение

$$(4\cos x-3-a)\cdot\cos x-2,5\cos 2x+1,5=0$$

имеет хотя бы один корень.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде $\cos^2 x+(3+a)\cos x-4=0.$

Пусть $t=\cos x$, тогда исходное уравнение имеет хотя бы один корень, если уравнение $t^2+(3+a)t-4=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку [−1; 1]. Графиком функции $f(t)=t^2+(3+a)t-4$ является парабола, ветви которой направлены вверх, $f(0)=-4<0,$
следовательно, уравнение $f(t)=0$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий отрезку [−1; 1], либо при условии $f(-1)\geq 0$ (рис. 1) $1-(3+a)-4\geq 0,$ откуда $a\leq -6,$ либо при условии $f(1)\geq 0$ (рис. 2) $1+(3+a)-4\geq 0,$ откуда $a\geq 0.$

Ответ: $(-\infty;\ -6];\ [0;\ +\infty)$

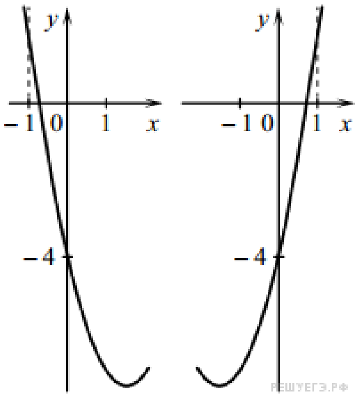


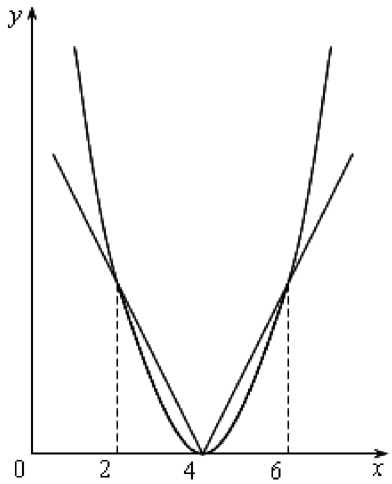
Рис. 1 Рис. 2

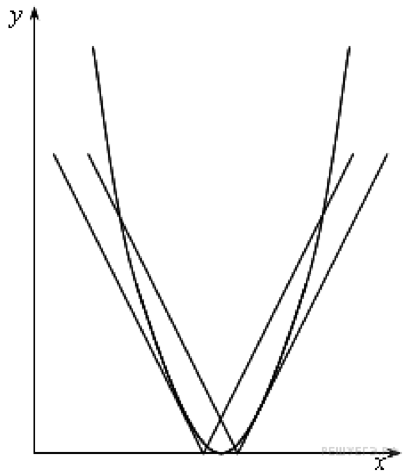
36. Задание 18 № 484651. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение $x^2-8x=2|x-a|-16$ имеет ровно три различных решения.

Решение.

Запишем уравнение в виде $(x-4)^2 = 2|x-a|$ и рассмотрим графики функций $y=(x-4)^2$ и $y=2|x-a|$.

График первой функции — парабола, график второй функции — угол с вершиной в точке *a*.





Уравнение будет иметь три различных решения в следующих случаях.

1. Вершина параболы совпадает с вершиной угла (рис. 1).

2. Одна из сторон угла касается параболы (рис. 2).

В первом случае $a=4$, и уравнение имеет три корня: 2, 4, 6. Рассмотрим второй случай. Пусть правая сторона угла касается параболы. Уравнение $(x-4)^2 = 2x-2a$, а должно иметь единственное решение.

Приведём уравнение к стандартному виду:

$$x^2 - 10x + 16 + 2a = 0.$$

Из равенства нулю дискриминанта получаем

$$25 - (16 + 2a) = 0,$$

откуда $a = 4,5$.

Если параболы касается левая сторона угла, получаем уравнение

$$(x-4)^2 = 2a - 2x;\ x^2 - 6x + 16 - 2a.$$

Оно имеет единственное решение, только если $a = 3,5$.

Ответ: 3,5; 4; 4,5.

37. Задание 18 № 505432. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin^{14} x+(a-3\sin x)^7+\sin^2 x+a=3\sin x$$

имеет хотя бы одно решение.

Решение.

Запишем уравнение в виде:

$$\sin^{14} x+\sin^2 x=(3\sin x-a)^7+(3\sin x-a).$$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^7+t$. Она является суммой двух возрастающих функций и поэтому возрастает. Исходное уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда $f(\sin^2 x)=f(3\sin x-a)$, откуда получаем

$$\sin^2 x=3\sin x-a \Leftrightarrow a=3\sin x-\sin^2 x.$$

Функция $y=\sin x$ принимает значения от 1 до 1, а функция $z=3y-y^2$ монотонно возрастает на отрезке $[-1,1]$ и принимает на нём значения от 4 до 2. Значит, уравнение $a=3\sin x-\sin^2 x$, а с ним и исходное уравнение имеют решение при $-4\le a\le 2$.

Ответ: $[-4, 2]$.

38. Задание 18 № 485982. При каких a уравнение $\left|x^2-2x-3\right|-2a=|x-a|-1$ имеет ровно три корня?

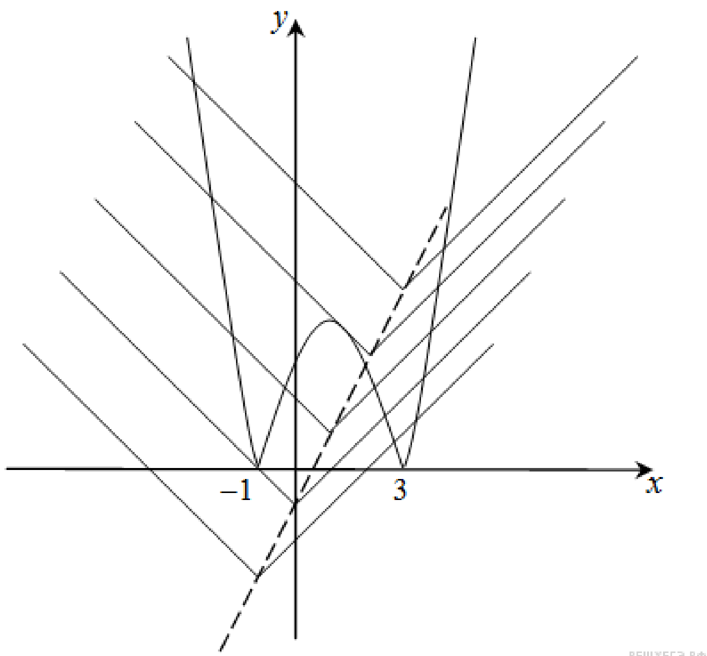
Решение.

Запишем уравнение в виде $\left|x^2-2x-3\right|=|x-a|+2a-1$.

Построим графики левой и правой частей уравнения (см. рис.) Из рисунка видно, что подходящих значений a ровно два — при одном из них график правой части проходит через точку $(-1,0)$ при другом — касается отраженного участка параболы.

Первое происходит при $a=0$, а второе — когда уравнение $3+2x-x^2=3a-1-x$ имеет единственный корень. Приравнивая дискриминант к нулю, находим $a=\dfrac{25}{12}$.

Ответ: $a=0, a=\dfrac{25}{12}$.



39. Задание 18 № 505453. Найдите все значения *a*, при которых уравнение

$$(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))^2-12a(\log_8(x+a)-\log_8(x-a))+35a^2-6a-9=0$$

имеет ровно два решения.

Решение.

Пусть $t=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$, тогда, используя теорему, обратную теореме Виета, получим:

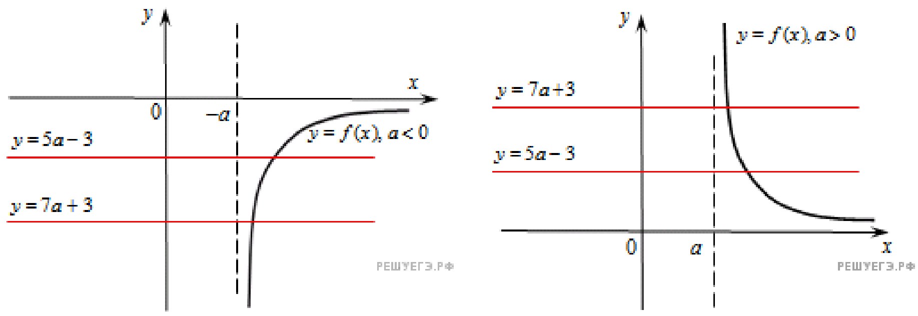
$$t^2-12at+35a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow t^2-((5a-3)+(7a+3))t+(5a-3)(7a+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=5a-3,\\ &t=7a+3.\end{aligned}\right.$$

Значит, исходное уравнение имеет два различных корня тогда и только тогда, когда график функции $f(x)=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$ имеет с горизонтальными прямыми $y=5a-3$ и $y=7a+3$ ровно две общие точки. Эти прямые совпадают, если $a=-3$.

При $a=0$ уравнение не имеет решений. Если $a>0$, то при $x>a$, а если $a<0$, то при $x>-a$, имеем:

$$f(x)=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=\log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right).$$

При неограниченном увеличении x значения функции стремятся к нулю; причём для $a>0$ функция f является убывающей, а при $a<0$ — возрастающей. Эскизы графиков изображены на рисунке.



Тем самым, при $a>0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3>0,\ 7a+3>0,$ откуда $a>\frac{3}{5}$; при $a<0$, должны быть выполнены неравенства $5a-3<0,\ 7a+3<0,$ откуда $a<-\frac{3}{7}$;

Ответ: $(-\infty;\ -3)\cup\left(-3;\ -\frac{3}{7}\right)\cup\left(\frac{3}{5};\ +\infty\right)$.

Приведём авторское решение.

Пусть $t=\log_8(x+a)-\log_8(x-a)$, тогда получим:

$$t^2-12at+35a^2-6a-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &t=5a-3,\\ &t=7a+3.\end{aligned}\right.$$

Значит, решение исходного уравнения — это решение уравнений $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ или $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3.$

Исследуем сколько решений имеет уравнение $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=b$ в зависимости от a и b. При $a\neq 0$ и $x>a$, и $x>-a$, то есть при $x>|a|$, левая часть определена и принимает вид

$$\log_8\left(\frac{x+a}{x-a}\right)=\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right).$$

При $x>|a|$ выражение $1+\frac{2a}{x-a}$ принимает по одному все значения из промежутка $(1;\ +\infty)$ для $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;\ 1)$ для $a<0$. Значит, при $x>|a|$ выражение $\log_8\left(1+\frac{2a}{x-a}\right)$ принимает по одному разу все значения из промежутка $(0;\ +\infty)$ при $a>0$ и принимает по одному разу все значения из промежутка $(-\infty;\ 0)$ при $a<0$. Таким образом, уравнение $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=b$ имеет одно решение при $ab>0$ и не имеет решений при $a\neq 0$ и $ab\leq 0$. При $a=0$ и $x>0$ уравнение принимает вид $0=b$ и либо имеет бесконечно много решений, либо не имеет решений.

Уравнение $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ и $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3$ могут иметь общие решения при $5a-3=7a+3,$ то есть при $a=-3.$ При $a=-3$ оба уравнения принимают вид $\log_8(x-3)-\log_8(x+3)=-18$ и имеют одно решение.

При других значениях a исходное уравнение имеет два решения, если оба уравнения $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=5a-3$ и $\log_8(x+a)-\log_8(x-a)=7a+3$ имеют по одному решению. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}(5a-3)a>0,\\(7a+3)a>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<-\dfrac{3}{7},\\a>\dfrac{3}{5}.\end{array}\right.$$

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при a принадлежащем множеству $(-\infty;\ -3)\cup\left(-3;\ -\dfrac{3}{7}\right)\cup\left(\dfrac{3}{5};\ +\infty\right).$

40. Задание 18 № 513432. Найдите все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$x^3+2x^2-x\log_2(b-1)+4=0$$

имеет единственное решение на отрезке $[-1;2]$.

Решение.

Пусть $\log_2(b-1)=a$. Рассмотрим уравнение $x^3+2x^2-ax+4=0$. Число $x=0$ не является корнем этого уравнения ни при каком значении параметра a. Поэтому это уравнение равносильно уравнению

$$a=x^2+2x+\frac{4}{x}.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x)=x^2+2x+\frac{4}{x}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1\geq x\geq 2,\\ x\neq 0\end{array}\right.$$

и определим число корней и их расположение для каждого значения параметра a.

Найдём производную

$$f'(x)=2x+2-\frac{4}{x^2}=\frac{2(x-1)(x^2+2x+2)}{x^2}.$$

Отсюда следует, что на промежутках $(-\infty;\ 0)$, $(0;\ 1]$ функция убывает, а на промежутке $[1;\ +\infty)$ — возрастает. Следовательно, точка $x=1$ — точка минимума, а минимум равен 7. Из полученных свойств функции $f(x)$ следует, что при любом значении a данное уравнение имеет ровно один отрицательный корень, и поскольку $f(-1)=-5$, то при $a\leq -5$ уравнение имеет ровно один корень на отрезке $[-1;\ 2]$; при $-5<a<7$ уравнение не имеет корней на $[-1;\ 2]$. При $a>7$ уравнение имеет единственный корень $x=1$ на отрезке $[-1;\ 2]$. Поскольку $f(2)=10$, то при $7<a\leq 10$ на отрезке $[-1;\ 2]$ уравнение имеет ровно два корня. При $a>10$ уравнение также имеет единственный корень на отрезке $[-1;\ 2]$.

Решим два неравенства и уравнение:

$$\log_2(b-1)\leq -5;\quad \log_2(b-1)=7;\quad \log_2(b-1)>10.$$

Получим:

$$1<b\leq\frac{33}{32};\quad b=129;\quad b>1025.$$

Ответ: $1<b\leq\dfrac{33}{32};\ b=129;\ b>1025.$