1. Формулы сокращённого умножения.

1. Разложить на множители:

а) $6x^3-36x^2+72x-48$; б) $2a^4-24a^3+96a^2-128a$; в) $x^5+x^4-2x^3-2x^2+x+1$;

г) $x^3+2x^2y-4xy^2-8y^3$; д) x^4-3x^3+6x-4.

2. Упростить выражения:

а) $\dfrac{a^3+8}{4a^2-1}\cdot\dfrac{1-2a}{2a^2-4a+8}\cdot\dfrac{6a+3}{4+4a+a^2}$; б) $\dfrac{(a-b)^2+ab}{(a+b)^2-ab}:\dfrac{a^5+b^5+a^2b^3+a^3b^2}{(a^3+b^3+a^2b+ab^2)(a^3-b^3)}$

в) $\left(\dfrac{1/a-1/b}{1/a+1/b}-\dfrac{1/a+1/b}{1/a-1/b}\right)\cdot\dfrac{(b^2-a^2)}{4ab}$; г) $\left(\dfrac{x^2}{x^2-y^2}-\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\cdot\left(\dfrac{x}{xy+y^2}+\dfrac{y}{x^2+xy}\right)\right):\dfrac{y}{x-y}$;

д) $\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3+x^2-5x+3}$; е) $\dfrac{2a^4+a^3+4a^2+a+2}{2a^3-a^2+a-2}$;

ж) $\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}+2}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[3]{2}}-\sqrt[12]{2^7}\right):\left(\dfrac{\sqrt[4]{8}-2}{\sqrt[4]{2}-\sqrt[3]{2}}-3\sqrt[12]{2^7}\right)^{\frac{1}{2}}$.

4. Проверить равенство: $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt[3]{\dfrac{10-7\sqrt{2}}{10+7\sqrt{2}}}$.

5. Найти сумму $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{a+2}+\sqrt{a+3}}...+\dfrac{1}{\sqrt{a+n-1}+\sqrt{a+n}}$.

6. Представить число 19 как разность кубов двух натуральных чисел. Доказать, что такое представление единственно.

7. Проверить, что $x=\sqrt[3]{4+\sqrt{80}}-\sqrt[3]{\sqrt{80}-4}$ – корень уравнения $x^3+12x-8=0$.

8. Докажите равенство: $(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3(x+y)(y+z)(z+x)$.

9. Вычислить:

а) $\dfrac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}}{\sqrt{8+\sqrt{28}}-\sqrt{8-\sqrt{28}}}$; б) $\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{12+6\sqrt{3}}-\sqrt{4-\sqrt{12}}}$; в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+2}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$.

10. Упростить выражения:

а) $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$ б) $\dfrac{\sqrt{2b+2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}+b+2}$ в) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОДУЛЯ.

***Решить уравнения*:**

3. а) $|x+2|=-1$ б) $|x+2|=-x^2$ в) $|x+1|=-\sqrt{x+1}$ г) $|2x-1|=2x-5$

д) $\left|5\sqrt{2}x+1\right|=5\sqrt{2}x-1+\sqrt{2}$ е) $|2x-1|=1-2x$ ж) $|x-3|=x-3.$ з) $x^2-|x-1|=0$

4. а) $2|x+3|-|x-4|=4$ б) $3|x-1|-|2x-3|=4$ в) $|5x-13|-|6-5x|=7$

г) $|x-4|+|x+4|=8$ д) $|x-3|+|x+2|-|x-4|=3$ е) $|x|-2|x+1|+3|2x-4|=1$

ж) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$ з) $\sqrt{1-4x}+2=\sqrt{(2x+1)^2-8x}$

и) $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}-\sqrt{x+23-8\sqrt{x+7}}=5$ к) $\sqrt{1-5x}+2=\sqrt{(x+3)^2-12x}$

5. а) $\left|x^2-9\right|+|x-2|=5$ б) $\left|2x^2-1\right|=x^2-2x-3$ в) $\left|x^2-4\right|-\left|9-x^2\right|=5$

г) $\left|x-x^2-1\right|=\left|2x-3-x^2\right|$ д) $\left|x^2-x\right|+|1-x|=\left|x^2-2x\right|$ е) $x^2+x=\left|x^2+x\right|$

6. а) $\big||x-1|-1\big|=x-2$ б) $\left|x^2-3|x|+2\right|=x^2-2x$ в) $\big|3x-|2x-5|\big|=x+5$

г) $\big||x+3|-|x-1|\big|=2-x$ д) $\big|\ 2\cdot|x+4|-|x-2|\ \big|-7=x$ е) $\left|\left|x^2-3x\right|-x+1\right|=2x^2+x$

***Решите неравенства*:**

7. а) $|x|\ge x+1$ б) $|\ x-1\ |>1$ в) $|2x+3|\le 4x$ г) $|1-3x|-|x+2|\le 2$ д) $|x+2|+|x-3|>5$

е) $\left|x^2-2x-3\right|<3x-3$ ж) $\left|\ 2x^2-x-1\right|<2x-2$ з) $\left|x-3-x^2\right|>x+2$ и) $(|x-1|-3)(|x+2|-5)<0$

к) $\big||2x-1|-5\big|>2$ л) $\big||x-3|+1\big|\ge 2$ м) $\big||x-1|+x\big|<3$ н) $\big||x-1|-|2x+1|\big|\ge 1$

8. а) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$ б) $\dfrac{|x+2|}{2|x|-3}<2$ в) $\dfrac{4}{|x+1|-2}\ge|x-1|$ г) $\dfrac{\left|x^2-3x-1\right|}{\left|x^2+x+1\right|}\ge 3$ д) $\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9}+\dfrac{|x-2|}{|x-3|}-12<0$

9. *Решите системы неравенств*:

а) $\begin{cases}|x|\ge x,\\ 2x-1>3.\end{cases}$ б) $\begin{cases}|x|\le -x,\\ |x+2|>1.\end{cases}$ в) $\begin{cases}|x-1|+|y-5|=1\\ y=5+|x-1|\end{cases}$ г) $\begin{cases}\left|x^2-2x\right|+y=1\\ x^2+|y|=1\end{cases}$

11. *Найдите все решения в зависимости от параметра* a:

а) $|3-x|=a$ б) $|x-a|=2$ в) $|a-x|=2x$ г) $(4a-15)x+2a|\,x|+4=0$

е) $|x+3|-a|x-1|=4$ ж) $a|x+3|+2|x+4|=2$ з) $|x-2|+a|x+3|=5$ и) $|x+a|-|2x-a+2|=a$

к) $x|x-4|+a=0$ л) $(x+1)|x-1|=a$ м) $|1+ax|=2$ н) $|2ax-1|=3$ о) $|1+ax|=2a$

3. ГРАФИКИ.

1. *ПРЯМАЯ.*

а) $y=|\ 2-|4+x|\ |$ б) $|y|=|-3+|-4+|\ 2x-5\ |\ |\ |$ в) $|y|-|x|=2$ г) $|y-2|-|x|=0$

2. *ПАРАБОЛА.*

а) $y=\left|x^2-2x-3\right|$ б) $|\ y\ |=-0{,}5x^2-4x+10$ в) $y=\left|\left|x^2-1\right|-2\right|$ г) $y=\left|-x^2+3x+4\right|$

д) $y=x^2-4|x|+3$ е) $|\ y\ |=\left|-x^2+2x\ \right|+3$ ж) $y=\left|\left|-x^2+4x\right|-4\right|$ з) $|\ y+1\ |=5|x|-x^2-6$

3. *ГИПЕРБОЛА.*

а) $|y|=\dfrac{2}{x+3}-1$ б) $y=\dfrac{1}{|4+x|}$ в) $|y-1|=\dfrac{1}{|x|-3}$ г) $y=\dfrac{-2}{|x+3|}+1$

д) $y=\left|\dfrac{4}{|x|-3}-2\right|$ е) $y=\left|\dfrac{x+3}{x+2}\right|$ ж) $|y+2|=\left|\dfrac{3x+4}{x+2}\right|$ з) $y=\left|\dfrac{5-3x}{x-2}\right|$

и) $y=-\left|\dfrac{2x+5}{x+3}\right|$ к) $|y|=2-\left|\dfrac{3-2x}{x+1}\right|$ л) $y=\left|\left|\dfrac{2x+3}{x+2}\right|-4\right|$ м) $y=\left|\dfrac{x^2-5x+4}{-x^2+4x-3}\right|$

4. *КОРЕНЬ.*

а) $y=\left|1-\sqrt{1-x}\right|$ б) $|y-1|=1-\sqrt{|x-1|}$ в) $(y-1)^2-4+x=0$ г) $y=\left[\dfrac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}\cdot\left[\dfrac{x^{0,5}+3}{x^{1,5}-27}\right]^{-1}\right]^{0,5}-x^{0,5}$

5. *ЛОГАРИФМ.*

а) $|y|=\log_2(x-4)$ б) $y=4+\log_{0,5}|x|$ в) $|y-2|=\left|2-\log_{0,25}|x|\right|$

г) $y=\left|\log_3(|x|-3)\right|$ д) $|y|=2-\log_3|x-3|$ е) $|y-3|=\left|\log_{0,5}\dfrac{4-x^2}{x+2}\right|$

6. *ОКРУЖНОСТЬ.*

а) $y^2+4y+x^2-3x=0$ б) $x^2+|y|^2-4|y|=0$ в) $y^2+x^2=2|x|$ г) $|x|+|y|=x^2+y^2$

д) $(x+\sqrt{x-y})(x-\sqrt{x-y})=16-y^2-x+y$ е) Найти площадь фигуры $\begin{cases}x^2+y^2+3x-7y+13{,}5\le 0,\\ 7x+3y\le 0\end{cases}$

4. ЗАДАНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ И МОДУЛЕМ.

1. *Решить уравнения с параметром:*

а) $(a-1)(3a+2)\,x=a-1$ б) $\dfrac{3x-2}{a(a-2)}+\dfrac{2}{a}=0$ в) $\dfrac{3ax-5}{(a-1)(x+3)}+\dfrac{3a-11}{a-1}=\dfrac{2x+7}{x+3}$

г) $(a+4)\,x^2-2\,a\,x+2\,a-6=0$ д) $\dfrac{x^2-2ax+a^2-3a+2}{x-2}=0$ е) $\dfrac{x^2+(2a-1)\cdot x+a^2-3}{x+2}=0$

2. *Найти решения систем в зависимости от параметра* a:

а) $\begin{cases}ax-1\le 0\\ x-4a\ge 0\end{cases}$ б) $\begin{cases}(a-1)x+y=-1\\ 2x-3y=2.\end{cases}$ в) $\begin{cases}x-(2-a)y=3\\ 3x+y=-2.\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x+ay=5\\ x^2+y^2=2{,}5\end{cases}$

3. *Найти все решения в зависимости от параметра*:

а) $(a-1)\,x<2$ б) $2x+3(ax-8)+x/3<4(x+1/2)-5$ в) $|3-x|=a$ г) $|x-a|=2$ д) $|a-x|=2x$

е) $|x+3|-a|x-1|=4$ ж) $a|x+3|+2|x+4|=2$ з) $|x-2|+a|x+3|=5$ и) $|x+a|-|2x-a+2|=a$

к) $(4a-15)x+2a|x|+4=0$ л) $(x+1)|x-1|=a$ м) $|x-4b|-|x+2b|<b$ н) $|(ax-5)/3+x|<3$

4. *Определите количество решений в зависимости от параметра* a:

а) $ax^2+|x-1|=0$ б) $x^2+a|x-2|=0$ в) $x^2+2|x-a|=5$ к) $\begin{cases}|x|+|y|=1\\ x^2+y^2=a\end{cases}$

5. *Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение.*

а) $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax$ б) $|(a+1)x-2|=(1+a)x-2ax+2$ в) $x|x-2a|-1-a=0$

6. *Найдите все значения параметра* a*, при которых уравнение имеет ровно два различных решения.*

а) $x^2+4x-2|x-a|+2=a$ б) $x|x+a|-1+a=0$

7. *Найдите все значения параметров, при которых уравнение имеет ровно три различных решения.*

а) $x-a/2=4\left|4|x|-a^2\right|$ б) $x-a/3=9\left|9|x|-a^2\right|$ в) $x-a=2\left|2|x|-a^2\right|$

г) $\left|a x^2-2a x+b+a\right|=x^2-2x+2$ д) $\left|bx^2+4bx+4b+c\right|=x^2+4x+6$

8. *Найти все такие* a*, что при любом* b *уравнение* $ax+b=3x$ *имеет решение.*

5. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.

Найдите решения уравнений

1. а) $\sqrt{1+3x}=x-1$ б) $2\sqrt{1-x^2}=2-x$ в) $\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2$ г) $\sqrt{2x+\sqrt{6x^2+1}}=x+1$

д) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}}=x-1$ е) $3\sqrt{x+3}-\sqrt{x-2}=7$ ж) $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$ з) $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+1}=2$

и) $\sqrt{4x+9}-\sqrt{11x+1}-\sqrt{7x+4}=0$ к) $\sqrt{11x+3}-\sqrt{2-x}=\sqrt{9x+7}-\sqrt{x-2}$

Найдите решения неравенств

4. а) $\sqrt{9x-20}<x$ в) $\sqrt{x^2+x-2}>x$ г) $\sqrt{4-x^2}\le x^2+x-6$

д) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$ е) $\sqrt{x^2+5x+4}>x+2$ ж) $x+4<\sqrt{-x^2-8x-12}$

5. а) $\sqrt{x-5}-\sqrt{9-x}\ge 1$ б) $\sqrt{x+6}-\sqrt{x+1}>\sqrt{2x-5}$ в) $\sqrt{2-\sqrt{3+x}}-\sqrt{x+4}<0$

Решите, сделав замену

6. а) $7\sqrt{x}-2x+15=0$ б) $x^2+2\sqrt{41-x^2}=26$ в) $x^2-4x-6=\sqrt{2x^2-8x+12}$

г) $x\sqrt{x^2+15}-\sqrt{x}\,\sqrt[4]{x^2+15}=2$ д) $\sqrt{x\cdot\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x}}=56$ ж) $\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{3x}}=12+\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{3\cdot\sqrt[4]{x}}}$

з) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$ и) $10\sqrt{2-x}+\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2$ к) $x^{10}-x^5-2\sqrt{x^5}+2=0$

7. а) $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$ б) $x+\sqrt{17-x^2}+x\cdot\sqrt{17-x^2}=9$

8. а) $\sqrt{x^2-3x+5}+x^2\le 3x+7$ б) $3\sqrt{x(x+3)}>(x+5)(2-x)$ в) $2x^2-\sqrt{(x-3)(2x-7)}<13x+9$

г) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$ д) $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+2}}-\sqrt{\dfrac{x+2}{2x-1}}\ge\dfrac{7}{12}$ е) $\dfrac{6x}{x-2}-\sqrt{\dfrac{12x}{x-2}}-2\cdot\sqrt[4]{\dfrac{12x}{x-2}}>0$

Найдите решения уравнений и неравенств

9. а) $x\cdot\sqrt{1-x^2}\le 0$ б) $(x-1)\cdot\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$ в) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$

д) $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x+1}<1$ е) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\ge 2$ ж) $\dfrac{1-\sqrt{21-4x-x^2}}{x+1}\ge 0$

6. Иррациональные уравнения и неравенства с параметром.

1. *При всех значениях параметра* a *решите уравнения*:

а) $\sqrt{x+1}=a$ б) $\sqrt{x+3}=\sqrt{a-x}$ в) $\sqrt{2x+1}=x-a$

д) $\sqrt{2ax-1}=x-1$ е) $\sqrt{2x}-\sqrt{x-1}=a$ ж) $\sqrt{3x+2}+\sqrt{3x+2a}=4$

з) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x+2-a}=1$ и) $\sqrt{x-2a}-\sqrt{x-a}=2$ к) $x+\sqrt{x(a-x)}=1$

л) $\sqrt{x+a}=a-\sqrt{x}$ м) $x+\sqrt{x^2-x}=a$ н) $\sqrt{x^2+ax-2a}=x+1$

2. *Найдите все значения* a*, при которых уравнение* $6\sqrt{x-2}=ax+7$ *имеет единственное решение.*

3. *Найдите все значения* a*, при которых уравнение* $\sqrt{x+2a+1}=\dfrac{x}{4}+a$ *имеет ровно два решения.*

4. *Найдите все значения* a*, при которых уравнение* $\sqrt{2x-3}=a-3x$ *не имеет решений.*

5. *При всех значениях параметра* a *решите неравенство:*

а) $a\sqrt{x+1}<1$ б) $(1-a)\sqrt{2x-1}<1$ в) $(a+1)\sqrt{2-x}\le 1$

г) $2\sqrt{x-a}>2x+1$ д) $\sqrt{2x+a}\ge x$ е) $2\sqrt{x+a}>x+1$

ж) $\sqrt{x}-\sqrt{x-1}>a$ з) $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$ и) $\sqrt{x^2+x}<a-x$

к) $\sqrt{1-x^2}<a-x$ л) $\sqrt{2ax-x^2}\ge a-x$ м) $\sqrt{a^2-x^2}>x+1$

н) $4-x^2>\sqrt{a^2-x^2}$ о) $x+\sqrt{4-x^2}<a$. п) $\sqrt{1-x^2}<a-x$

р) $x+\sqrt{x^2-x}<a$ р) $\sqrt{a^2-x^2}+\sqrt{2ax-x^2}>a$ с) $\sqrt{\dfrac{3x-1}{a-2}}<1$

т) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}\le\sqrt{2}$ у) $\sqrt{\dfrac{3x+a}{x-a}}<a-1$

6. *Определите, при каких значениях параметра* a *неравенство*

а) $x+\sqrt{x^2-2ax}>1$ *выполняется для всех* $0{,}25\le x\le 1$;

б) $x-\sqrt{x-1}<a$ *имеет решения меньшие* 1.

7. СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ.

1. Найти решения следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} 5x+y-7z=0 \\ 5x-2z=3 \\ 3x-y+2z=3 \\ 3x+2y-10z=-3 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+3y+2z=1 \\ 2x+4y+z=1 \\ 4x+6y-z=1 \\ 3x+7y+3z=2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x-y-z=-3 \\ 5x-y+z-2t=3 \\ 8x-y-z-t=1 \\ 7x-t=3 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y - z + t = 1 \\ x + 2y + z - t = 3 \\ 3x \quad - z + t = 5 \end{cases}$ д) $\begin{cases} 7x + 2y - 4z = 19 \\ 5x + 3y - 3z = 15 \\ 5x - 3y + 3z = 15 \end{cases}$ е) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y + 2z + t = 3 \end{cases}$

2. Найти решения следующих систем уравнений:

а) $\begin{cases} xy + x + y = 11 \\ x^2y + y^2x = 30 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2y^3 + x^3y^2 = 12 \\ x^2y^3 - x^3y^2 = 4 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^3 - y^3 = 26 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 91 \\ x^2 - xy + y^2 = 7 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$ е) $\begin{cases} \dfrac{y^2}{x} + \dfrac{x^2}{y} = 12 \\ 3x + 3y = xy \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4 \\ xy = 27 \end{cases}$ з) $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + 3x - 3y = 3 \\ 3x^2 + 4{,}5y^2 + 8x - 3y = 7 \end{cases}$ и) $\begin{cases} x\sqrt{x} - \sqrt{x} = y\sqrt{y} + 8\sqrt{y} \\ x = y + 5 \end{cases}$

к) $\begin{cases} 3x^2 + 2y^2 - 3x + 5y = 3 \\ 4{,}5x^2 + 3y^2 - 3x + 8y = 7 \end{cases}$ л) $\begin{cases} \left(x + y\sqrt{x} + y^2\right)\sqrt{x + y^2} = 65, \\ \left(x - y\sqrt{x} + y^2\right)\sqrt{x + y^2} = 185. \end{cases}$ м) $\begin{cases} \left(13x^4y^2 - 6x^2 - 6y\right)x\sqrt{y} = 356, \\ \left(5x^4y^2 - 6x^2 - 6y\right)x\sqrt{y} = 100. \end{cases}$

3. Найти решения систем уравнений (*вступительные экзамены в ТвГУ в* 2001, 2002 г.)

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 34 \\ x + y + xy = 23 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 2 \\ x^2y^2 + 1 = 2y^2 \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2 + xy = 15 \\ y^2 + xy = 10 \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 65 \\ x^2y + xy^2 = 20 \end{cases}$ д) $\begin{cases} x + y + xy = -11, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$ е) $\begin{cases} x^2 + y^2 - xy = 13 \\ x + y - \sqrt{xy} = 3 \end{cases}$

9а. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА НЕРАВЕНСТВА.

1) Если пионеров лагеря построить в колонну по 8 человек в ряду, то один ряд окажется неполным. Если – по 7 человек в ряду, то рядов будет на 2 больше, и все они будут полными. Если же выполнить построение по 5 человек в ряду, то рядов будет еще на 7 больше, но один ряд будет заполнен не весь. Сколько пионеров в лагере?

2) В Вузе имеются большие аудитории трех типов: I типа вмещают по 80 чел., II – по 90 чел., III – по 110 чел. Абитуриентов, сдающих экзамен, необходимо разместить в нескольких аудиториях одного типа. Если взять ауд. I типа, то одна из них будет занята не полностью. Если взять ауд. II типа, то понадобится на три ауд меньше, причем одна вновь будет занята не полностью. Если же использовать ауд. III типа, то понадобится еще на 6 ауд. меньше, и все они при этом будут заняты полностью. Сколько абитуриентов было в потоке?

3) При покупке нескольких одинаковых книг и тетрадей за книги уплатили 10р56к, а за тетради - 56к. Книг купили на 6 штук больше, чем тетрадей. Сколько купили книг, если цена одной книги больше чем на 1р превосходит цену одной тетради?

4) Группа студентов решила купить мяч ценой от 170р до 195р. Однако двое отказались участвовать в покупке, и оставшимся пришлось внести на 1р больше, чем они планировали. Сколько стоил мяч?

5) Группа студентов из 30 человек сдавала экзамен. При этом выставлялись оценки 2,3,4,5. Сумма полученных оценок равна 93, причем 3-к было больше, чем 5-к, и меньше, чем 4-к. Кроме того, число 4-к делилось на 10, число 5-к было четным. Сколько, каких оценок получила группа?

6) На биржевые торги выставлено некоторое количество акций нефтяной и газовой компаний. Число проданных за два дня акций нефтяной компании составило 115% числа проданных акций газовой компании. В 1-й день торгов было продано 2/3 акций нефтяной компании и 1/7 акций газовой компании. Во 2-й торговый день было продано 1/3 акций нефтяной компании и 6/7 акций газовой компании. Сколько

акций той и другой компании было продано, если известно, что в 1-й день было продано менее 1000 акций, а во 2-й – более 1000 акций.

7) На бирже продано некоторое количество акций автомобильной и авиационной компаний. Число проданных за два дня акций автомобильной компании составило 6/7 числа проданных акций авиационной компании. В 1-й день было продано 2/5 акций автомобильной компании и 5/9 акций авиационной компании. Во 2-й день было продано 3/5 акций автомобильной компании и 4/9 акций авиационной компании. Сколько акций той и другой компании было продано, если в 1-й день было продано менее 1200 акций, а во 2-й – более 1200 акций.

8) Трое мальчиков вместе хотели купить две одинаковые игрушки, но общего количества их денег не хватило даже на одну. Если бы у 1-го мальчика денег было вдвое больше, то на одну игрушку денег хватило бы, а на покупку двух игрушек им не хватило бы 34к. Если бы у 3-го мальчика денег было втрое больше, то после покупки двух игрушек у мальчиков осталось бы 6к. Сколько стоит одна игрушка, если известно, что у 2-го мальчика было на 3к больше, чем у 1-го?

9) В четырехзначном числе сумма цифр тысяч, десятков и единиц равна 16, а сумма цифр сотен, десятков и единиц равна 15, причем цифра сотен на 6 больше цифры десятков. Из всех чисел, удовлетворяющих таким условиям, найти то, у которого сумма квадратов цифр наименьшая.

10) Число двухкомнатных квартир в доме в 4 раза больше числа однокомнатных, а число трёхкомнатных квартир кратно числу однокомнатных. Если число трёхкомнатных увеличить в 5 раз, то их станет на 22 больше, чем двухкомнатных. Сколько всего квартир в доме, если их не меньше 100?

11) В двух аудиториях абитуриенты сдают экзамен. Их общее количество, больше 29. Число абитуриентов 1-й аудитории, уменьшенное на два, более чем в 3 раза превышает число абитуриентов 2-й аудитории. Утроенное число абитуриентов 1-й аудитории превышает удвоенное число абитуриентов 2-ой аудитории менее чем на 60. Сколько абитуриентов в каждой аудитории?

12) Фирма продала несколько автомобилей «Жигули», «Москвич» и «Волга». «Волг» продано в целое число раз меньше, чем «Москвичей», и в 7 раз меньше, чем «Жигулей». «Жигулей» продано больше, чем «Москвичей», а удвоенное их число на 11 превышает число «Жигулей». Сколько продано автомобилей каждой марки.

9б. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ПРОЦЕНТЫ.

1. Цену товара снизили на 20%, затем новую цену снизили еще на 30%, и наконец после пересчета произвели снижение еще на 50%. На сколько процентов всего снизили первоначальную цену товара?
2. Завод увеличивал объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и тоже число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции вырос на 21%.
3. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл - 4% примесей. Сколько получится металла из 24 т. руды?
4. Из 176кг винограда, после сушки, получено 20кг изюма, содержащего 12% воды. Сколько % воды содержит виноград.
5. Свежие огурцы, содержащие 98% воды, весят 100 кг. Когда огурцы усохли, воды в них стало 96%. Сколько они весят.
6. Крыжовник имеет влажность 99 процентов. При хранении, его влажность уменьшилась на 1 процент. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?
7. Рабочий должен выполнить работу за 20 дней. За первые 10 дней он выполнил 40% задания. На сколько % ему нужно повысить производительность труда во вторые 10 дней (по сравнению с первыми), чтобы выполнить всю работу в срок?
8. Смешали два сорта бензина по 30000 и 50000руб. за бочку. Полученную смесь, в количестве 1200 бочек продали по 44000руб за бочку и получили при этом 10% прибыли. Сколько бочек каждого сорта?
9. За 5м шерстяной и 4м шелковой ткани уплачено 50р. После снижения цен шерсти на 25%, а шелка на 15% стало возможным купить каждой ткани на 1м больше, и еще осталось 1,75 р. Сколько стоил метр каждой ткани до снижения цен?
10. Брат и сестра нашли вместе 36 белых грибов. Известно, что количество процентов, выражающее, на сколько брат собрал больше, чем сестра, в два раза больше, чем количество процентов, выражающее, на сколько сестра собрала меньше, чем брат. Сколько грибов нашел брат и сколько сестра?
11. 1-е число составляет 140% 2-го, а отношение 1-го к 3-у равно 14/11. Разность между 3-м и 2-м на 40 единиц меньше числа, составляющего 12,5% суммы 1-го и 2-го числа. Найти эти три числа.

12. Две бригады, состоящие из 11 и 13 человек, увеличили производительность труда, соответственно на 20% и 12%, после чего обе бригады вместе за смену вместо 545 деталей стали изготовлять 628 деталей. Найти производительность труда каждого рабочего первой и второй бригад за смену до и после повышения производительности труда.
13. Бригада рабочих должна изготовить по плану 8000 деталей. Увеличив дневную производительность труда на 50 деталей, бригада и выполнила план на 8 дней раньше срока. Найти за сколько дней бригада должна была закончить работу и на сколько процентов повысилась производительность труда.
14. Магазин продал в первый день месяца 105 игрушек. В каждый следующий день продажа возросла на 10 игрушек и месячный план, составляющий 4000 игрушек, был выполнен досрочно, причем в целое число дней. После этого ежедневно продавалось на 13 игрушек меньше, чем в последний день выполнения плана. На сколько % был перевыполнен месячный план, если в месяце 26 рабочих дней?
15. Стадо увеличивается за счет естественного прироста и приобретения новых голов. В начале первого года стадо составляло 3000 голов, в конце года было приобретено 700 голов. В конце второго года стадо составляло 4400 голов. Определить процент естественного прироста.
16. Фирма продала 3 партии автомобилей. Во 2-й партии автомобиль стоил на 50% дороже, чем в 1-й, но продать удалось на 3 автомобиля меньше, при этом выручка увеличилась на 20%. В 3-й партии автомобиль стоил на 1000р дешевле по сравнению с 1-й, и продано было на 20% автомобилей больше, чем в 1-й, при этом выручка уменьшилась на 10%. Найти число и цену автомобиля в 1-й партии.
17. Имеются два сплава из цинка меди и олова. 2-й сплав содержит 30% цинка. % содержание олова в 1-м сплаве вдвое превосходит % содержание олова во 2-м сплаве. % содержание меди во 2-м сплаве вдвое превосходит % содержание цинка в 1-м сплаве. 100кг 1-го сплава сплавили с 300кг 2-го сплава. В получившемся новом сплаве % содержание олова совпало с % содержанием цинка в 1-м сплаве. Найдите % содержание меди в 1-м сплаве.
18. Имеются три слитка. Масса I слитка – 5кг, II – 3кг и каждый из этих слитков содержит 30% меди. Если I сплавить с III, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если II сплавить с III, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу III слитка и % содержания в нем меди.
19. В два разных сосуда налиты растворы соли, причём в 1 сосуд налито 5кг, а во 2 – 20кг раствора. При испарении воды, % содержание соли в 1 сосуде увеличилось в p раз, а во 2 – в q раз, причем $pq = 9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?
20. В два разных сосуда налиты растворы кислоты: в 1 сосуд – 1000кг, а во 2 – 1960кг. В оба сосуда добавили воды. При этом % содержание кислоты в 1 сосуде уменьшилось в k раз, а во 2– в l раз, $kl=9-k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть добавлено в оба сосуда вместе?
21. Сколько солёной воды, имеющей концентрацию соли по массе, равную q%, надо добавить к 90 кг соленой воды, имеющей концентрацию соли по массе, равную 15%, чтобы концентрация соли по массе составила p%? Считать, что $p \neq q,\ p \neq 0$ и температура воды поддерживается постоянной.

9в. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ.

1. Три компаньона разделили между собой полученную прибыль. При этом 1-й получил половину всей суммы без 3/22 того, что получили остальные двое вместе. 2-й получил четверть всей суммы и ещё 1/56 того, что получили остальные двое вместе. 3-й получил 30000р. Как велика была прибыль и сколько получил каждый.
2. A, B и C выполняют некоторую работу. Разность производительностей A и C в три раза больше разности производительностей C и B. Время, за которое A выполняет 4/5 всей работы, равно сумме времени, за которое B выполняет 1/15 всей работы, и времени, за которое C выполняет 9/28 частей работы, оставшейся после B. Во сколько раз производительность A больше B.
3. A, B и C могут выполнить некоторую работу. Время, за которое A выполняет 2/3 всей работы, равно сумме времени, за которое C выполняет 1/3 всей работы, и времени, за которое B выполняет 9/10 частей работы, оставшейся после C. Производительность C равна полу сумме производительностей A и B. Во сколько раз производительность B больше производительности C.
4. Пешеход и велосипедист одновременно отправляются из A в B. В B велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 20мин после начала движения. Не останавливаясь, велосипедист доезжает до A, поворачивает обратно и догоняет пешехода через 10 мин после первой встречи. За какое время пешеход пройдет путь от A до B.

5. Из A в B выехал «Камаз». Через 1ч из A в B выехала «Волга», прибывшая в B одновременно с «Камазом». Если бы «Камаз» и «Волга» одновременно выехали из A и B навстречу друг другу, то они бы встретились через 1ч 12мин после выезда. Сколько времени провёл в пути от A до B «Камаз»?
6. Из A в B вышел Петя. Одновременно с ним из B в A выехал Вася, который встретил Петю через 50мин после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы Пете для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что Вася проделал бы тот же путь на 4ч быстрее Пети?
7. Когда спортсмен проплывал по течению мимо моста, ему бросили два мяча. 1-й мяч он подхватил, а 2-й оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за 2-м мячом. Подхватив 2-й мяч, снова повернул и догнал свободно плывший 1-й мяч на расстоянии 600м от моста. Какое расстояние пришлось проплыть спортсмену, если его собственная скорость всё время была в 3 раза больше скорости течения?
8. Когда спортсмен проплывал по течению мимо моста, ему бросили два мяча. 1-й мяч он подхватил, а 2-й оставил плыть по течению. Проплыв с мячом некоторый участок реки, спортсмен оставил этот мяч и поплыл вверх по реке за 2-м мячом. Подхватив 2-й мяч, снова повернул, и догнал свободно плывший 1-й мяч на расстоянии 1000м от моста. Во сколько раз его постоянная собственная скорость больше скорости реки, если спортсмен в общей сложности проплыл 1400м?
9. Бригады, состоящие из одинакового числа рабочих, получила на складе спецодежду. Каждый рабочий получил по 2 комплекта спецодежды, а каждой бригаде выдали на 20 комплектов больше, чем было бригад. Если бы бригад было на 4 больше и каждой бригаде выдавали бы по 12 комплектов, то спецодежды на складе не хватило бы. Сколько комплектов спецодежды было на складе?
10. В 2-х бригадах вместе более 27 человек. Число членов 1-й бригады более чем в 2 раза превышает число членов 2-й бригады, уменьшенное на 12. Число членов 2-й бригады более чем в 9 раз превышает число членов 1-й бригады, уменьшенное на 10. Сколько человек в каждой бригаде.
11. Двум бригадам общей численностью 18 человек было поручено организовать в течение 3 суток непрерывное круглосуточное дежурство по 1-му человеку. Первые двое суток дежурили члены 1-й бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во 2-й бригаде 3 девушки, а остальные - юноши, причем девушки дежурили по 1 часу, а юноши распределили между собой остаток времени поровну. При подсчете оказалось, что сумма часов дежурства каждого юноши 2-й бригады и любого члена 1-й бригады меньше 9 часов. Сколько человек в каждой бригаде?
12. Завод выпустил за год 780 единиц продукции, причем в каждом четном месяце выпускал на 20 ед. больше, чем в предыдущем, а в каждом нечетном на 10 меньше чем в предыдущем. Сколько процентов от объема производства за 4-ый квартал составил объем производства за 2-й квартал?
13. На складе имеется некоторое число бочек двух образцов общей емкостью 7000 л. Если бы все бочки были 1 образца, то суммарная емкость всех бочек увеличилась бы на 1000 л. Если бы все бочки были 2 образца, то суммарная емкость уменьшилась бы на 4000 л. Вычислить суммарную емкость бочек каждого образца в отдельности.
14. В контейнер упакованы изделия 2-х типов. Стоимость и вес одного изделия составляют 300000р и 15 кг для 1-го типа и 400000р и 18 кг для 2-го типа. Общий вес изделий равен 279 кг. Определить максимальную и минимальную возможную стоимость изделий.
15. 1-й станок-автомат изготовил 36 деталей. 2-й (работавший на 5 часов меньше)- 25 деталей. Если бы 1-й станок работал столько сколько 2-й, а 2-й столько сколько 1-й, то они изготовили бы одинаковое количество деталей. Сколько часов работала каждый станок?
16. В начальный момент времени на предприятии была некоторая производительность труда. В течение определенного времени она ежемесячно повышалась на 5%, а затем мгновенно снизилась на 20%, после чего в течение вдвое большего времени повышалась теме же темпами и превысила достигнутый до падения уровень в 3 раза. Найти время до резкого падения производительности труда.
17. В начальный момент времени фирма имела капитал- S. Постоянные ежемесячные затраты фирмы составляют 10% от S. Половину капитала фирма вложила в организацию производства, которое через 3 месяца начало работать и ежемесячно приносить доход , равный 5% от S. Какую часть первоначального капитала необходимо с момента открытия предприятия дополнительно ежемесячно

вкладывать в производство, чтобы фирма не разорилась, если известно, что каждый дополнительно вложенный рубль через месяц приносит 2 рубля?

18. В контейнер упакованы изделия трех типов. Стоимость и вес составляют 400 тыс. р. и 12 кг 1-го типа, 500 тыс р. и 16 кг для 2-го типа, 600 тыс. р. и 15 кг для 3-го типа. Общий вес изделий 326 кг. Определить минимальную и максимальную возможную суммарную стоимость изделий.
19. Партия товара упакована в коробки трех типов. Вес и стоимость содержимого одной коробки составляют 9кг и 320 тыс. р. для 1-го типа, 6 кг и 150 тыс. р. для 2-го типа, 4 кг и 120 тыс. руб. для 3-го типа. Суммарная стоимость товара равна 4180 тыс. р. Определить наименьший и наибольший возможный общий вес партии товара.
20. Из A в B можно доехать тремя маршрутами: или через C, или через D, или напрямую, минуя промежуточные пункты. Расстояния AB = 80км, AC = 40км, CB = 60км, DB= 100км, AD = 30км. Известно, что A и B, A и C, A и D связывают грунтовые дороги, а C и B, D и B – шоссейные. Скорость на шоссе на 40км/ч больше, чем на грунтовой дороге. Какой маршрут следует выбрать, чтобы скорейшим образом добраться из A в B, если скорость на грунтовой дороге более 15км/ч, но не более 30км/ч.
21. Бассейны объемами 1200м^3, 1400м^3 и 1600м^3 можно наполнит: I – одной 1 трубой, II – сначала 800м^3 1 трубой, затем 600м^3 2 трубой, III – сначала 700м^3 1 трубой, затем 900м^3 2 трубой. Производительность 1 трубы на 400м^3/ч меньше чем 2. Какой из бассейнов наполняется быстрее, если производительность 2 трубы не менее 700м^3/ч, но менее 1100м^3/ч.
22. Поезд, идущий с постоянной скоростью из A в B, был задержан у семафора на 16 мин. Расстояние от семафора до B равно 80км. При каких значениях первоначальной скорости поезд прибудет в B не позже запланированного срока, если после задержки он увеличил скорость на 10км/ч?
23. Дорога из A в B идет сначала в гору, затем – с горы. При движении из A в B автобус тратит 6 мин. на подъеме и 2мин. на спуске, а на движение из B в A автобус тратит 7мин. Определить, во сколько раз скорость на спуске больше скорости на подъеме, если известно, что эти скорости не зависят от того, едет автобус из A в B или обратно.
24. Три гонщика стартуют одновременно из одной точки шоссе имеющего форму окружности и едут в одном направлении с постоянными скоростями. 1 гонщик впервые догнал 2, делая свой пятый круг в точке диаметрально противоположной старту. Через полчаса после этого он вторично, не считая момента старта, догнал 3 гонщика. 2 гонщик догнал впервые 3-го через три часа после старта. Сколько кругов в час делает 1 гонщик, если 2 гонщик проходит круг не менее , чем за 20 мин?
25. Из A в B отправился путешественник, который в первый день преодолел $1/n$-ю часть всего пути. В следующий день он прошел $1/m$-ю часть оставшегося пути. В последующие дни он проходил попеременно, то $1/n$ -ю часть, то $1/m$ -ю часть пути, оставшегося к концу предыдущего дня. Через 10 дней такого движения выяснилось, что он прошел 31/32 часть всего расстояния между A и B. Найдите m и n, если известно, что это целые числа и $m > n$.
26. Три бригады должны изготовить некоторое количество единиц продукции. 1-я бригада делает в день 200 единиц продукции, 2-я на m единиц меньше, чем 1-я, а 3-я на $5m$ больше, чем 1-я. Сначала 1-я и 2-я бригады, работая вместе, выполнили 1/5 часть работы, а затем все три бригады, работая вместе, выполнили оставшуюся часть работы. Определите m, при котором, время потраченное на выполнение всей работы указанным образом, будет наименьшим.
27. B находится ниже по течению A. В 9 час утра из A в B отправляется плот, а из B в A – лодка, которая встречается с плотом через 5 час. Доплыв до A, лодка поворачивает обратно и приплывает в B одновременно с плотом. Успеют ли лодка и плот прибыть в B к 9 час вечера того же дня?
28. Резервуар снабжается водой по пяти трубам. 1-я заполняет его за 40 мин; 2-я, 3-я и 4-я вместе – за 10 мин, 5-я и 4-я – за 30 мин. За какое время его наполнят все пять труб вместе?

11а. ТРИГОНОМЕТРИЯ.

Решить тригонометрические уравнения:

1. а) $\cos 4x + 2\sin^2 x = 0$ **б)** $2\sin^2(x/2) + \cos 2x = 0$ **в)** $6\sin^2 3x + \cos 12x = 4$

г) $\dfrac{1+2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + \sin 2x}{2\sin x\cos x - 1} = 1$ **д)** $\dfrac{\cos x(2\sin x + 3\sqrt{2}) - 2\cos^2 x - 1}{\sin 2x + 1} = 1$

2. а) $3\cos^2 x = \sin^2 x + \sin 2x$ **б)** $3\sin^2 x + \sqrt{3}\sin 2x + \cos^2 x = 1$ **в)** $2(\sqrt{3}-1)\cos^2 x + (\sqrt{3}+1)\sin 2x = -2$

г) $\cos 2x - 3\sin 2x + 3 = \arccos(-1/2) - 2\pi/3$ **д)** $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cos x - \sin x\cos^2 x - \cos^3 x = 0$

е) $\sin 2x - 4\cos 2x = 4$ **ж)** $3\sin 5x - 2\cos 5x = 3$ **з)** $(1+tg^2 x)(1+\sin 2x) = 1$

и) $\sin x + \cos x = 1/\cos x$ **к)** $1/\cos 3x - 6\cos 3x = 4\sin 3x$

3. а) $1+\sin x + \cos x = 0$ **б)** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}/2$ **в)** $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = 1$ **г)** $\sqrt{3}\sin x + \cos x = \sqrt{2}$

д) $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = \sqrt{3}$ **е)** $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}$ **ж)** $\cos x + \sqrt{2}\sin 5x = \sin x$

4. а) $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x$ **б)** $\cos 5x + \cos 7x = \cos x$ **в)** $\sin 7x - \sin 3x = \sin 2x$

г) $\sin x + \cos 4x = \cos 2x - \sin 5x$ **д)** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ **е)** $\sin^2 2x + \sin^2 4x = \sin^2 6x$

5. а) $4\sin^4 x + \cos 4x = 1 + 12\cos^4 x$ **б)** $\sin^4 x + \cos^4 x = 7/8$ **в)** $\sin^4 x + \sin^4\left(x+\pi/4\right) = 1/4$

6. а) $\sin\left(2\pi/x\right) = -1/2$ **б)** $tg\left(\pi/\sqrt{x}\right) = 1$ **в)** $2\cos(\sqrt{x}+\pi)+1=0$ **г)** $\sin(\pi\cdot tgx) = \cos(\pi\cdot tgx)$

д) $\cos\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) = \dfrac{1}{2}$ **е)** $\sin\left(\dfrac{1}{2\cos x}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **ж)** $\sin\left(\dfrac{4}{3}\pi\sin x\right) = \dfrac{1}{2}$

7. а) $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$ **б)** $|\cos x| = \cos x - 2\sin x$ **в)** $4|\cos x| + 3 = 4\sin^2 x$ **г)** $|\sin x| = \sin|x|$

8. а) $\sqrt{\sin x} = \sin x$ **б)** $2\cos x = \sqrt{2+\sin 2x}$ **в)** $\sqrt{1-\cos 2x} = \sqrt{2}\cos x$ **г)** $\sqrt{1+\cos 2x} = \sin 2x$

д) $\sqrt{1-\sqrt{2}\sin x} + 2\cos x = 0$ **е)** $\sqrt{5\sin x + \cos 2x} + 2\cos x = 0$ **ж)** $\sqrt{1-\sqrt{3}\cos x} + \sqrt{3}\sin x = 0$

9. а) $\cos x\cdot\cos 6x = -1$ **б)** $\cos 2x + \sin 3x = 2$ **в)** $3\cos x - 2\sin 7x = -5$ **г)** $\cos^5 5x + \sin^5 7x = 2$

д) $tg^2 x + 2\sin(x/3) = -2$ **е)** $\cos^2 2x - 3\sin(x/5) = 4$ **ж)** $\cos(\pi\sqrt{x})\cdot\cos(\pi\sqrt{x-4}) = 1$

12. а) $\sqrt{3}tg^2 x - 4tgx + \sqrt{3} > 0$ **б)** $\dfrac{15}{\sin x + 1} < 11 - 2\sin x$ **в)** $\dfrac{2}{tgx+1} < 2 - tgx$ **г)** $tgx + ctgx > \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

д) $\cos 2x \le \cos 3x - \cos 4x$ **е)** $\sin 2x + 2\sin x > 0$ **ж)** $\sin x > \cos^2 x$ **з)** $(1+\cos x)(tgx - \sqrt{3}) > 0$

и) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x \ge 2$ **к)** $\cos 2x + \sin 2x > tgx$ **л)** $3\sin x > 2\cos^2 x$ **м)** $4\cos x - \sin 2x > 0$

н) $\sin 2x + \cos^2 2x > 1 + \sqrt{2}$ **о)** $\cos 2x + \sqrt{3}\cos x \le 2$ **п)** $3\sin x + \sin 2x < 0$ **р)** $\sqrt{5-2\sin x} \ge 6\sin x - 1$

с) $2\cos x - 1 \le \sqrt{8\cos^2 x - 6\cos x - 16}$ **т)** $2\sin x - 1 \le \sqrt{6\sin^2 x - 6\sin x - 12}$ **у)** $\cos^2(3+x) + \sin^2(3-x) < ctg\dfrac{9\pi}{4} - \sqrt{\sin 2x}$

14. а) $\begin{cases} 3x + 4\sin y = -11 \\ 5\sin y - 2x = 7/2 \end{cases}$ **б)** $\begin{cases} tgx\cdot tgy = 0 \\ 2tgx = 3/\cos y \end{cases}$ **в)** $\begin{cases} ctgx\cdot ctgy = 1 \\ \sqrt{2}\,ctgy = 1/\sin x \end{cases}$ **г)** $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y = 0{,}25 \\ \sin y\cdot\cos x = 0{,}75 \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sin x\cdot\cos y = -0{,}5 \\ tgx\cdot ctgy = 1 \end{cases}$ **е)** $\begin{cases} \sin(x+y) = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ **ж)** $\begin{cases} 4\sin y - 6\sqrt{2}\cos x = 5 + 4\cos^2 y \\ \cos 2x = 0 \end{cases}$

12. ЛОГАРИФМЫ.

1. ***Решите уравнения:***

а) $\log_9(x+30)\cdot\log_x 3=1$ **б)** $\log_2(2^{x+1}-2)\cdot\log_{\sqrt{2}}(2^x-1)=4$ **в)** $\log_{0,5}x-2\cdot\log_4(x-1)=-1$

г) $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$ **д)** $\log_{0,5}(x-1)^2-\log_{0,5}(x-1)=-2$ **е)** $\log_2((3-x)(x-1))-\log_{0,5}\frac{x-1}{6-2x}=-1$

ж) $\log_x(4x-3)=2+\sqrt{\log_x^2(4x-3)-4\log_x\left(4-\frac{3}{x}\right)}$ **з)** $\sqrt{\log_x\sqrt{7x}}\cdot\log_7 x=-1$

и) $\log_x(6x-5)=\sqrt{\log_x^2(6x-5)-4\log_x\left(6-\frac{5}{x}\right)}+2$ **к)** $\sqrt{2\left(\log_2\frac{x^2}{64}-1\right)(2+\log_4 8x)}=\log_2 2x$

л) $\log_3\sqrt{x}-2=\log_3 x\cdot\log_2\frac{1}{x}+\log_2\frac{x^3}{4}$ **м)** $\log_3\frac{3}{x}\cdot\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}x=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$

н) $\log_{\sqrt{x}}(3-x)\cdot\log_2 x+\log_2(x-6)^2=4$ **о)** $\log_{x-4}(x-2)\cdot\log_7(x-4)^2+\log_7(8-x)^2=2$

п) $\log_2 3\cdot\log_{x+5}4-\log_4(x-5)^2\cdot\log_{x+5}2=1$ **р)** $x+\lg(1+2^x)=x\cdot\lg 5+\lg 6$

с) $\log_3\log_3 x=\log_3 10+\frac{1}{3}\log_3\frac{1}{1000}$ **т)** $\lg\lg x=\lg\lg 64-\lg\lg 2$ **у)** $\log_x(x+2)=\log_x x^2$

2. ***Решите уравнения:***

а) $\log^2_{\cos x}(\sin x)=1$ **б)** $\log^2_{\sin x}(-\cos x)=1$ **в)** $\log_3(3^x-1)\cdot\log_{\sqrt{3}}(3^{x+1}-3)=4$

г) $9\cdot\log_{\sin 2x}(4\cos^2 x)+8\cdot\log_{2\cos x}(\sin x)=16$ **д)** $2\log_{0,5}(2\sin x)-\log_{\sqrt{2}}(\cos x)=2$

3. ***Решите неравенства.***

а) $(x+5)\lg(x^2-2)>(x+7)\lg(x^2-2)$ **б)** $\log_2(x^2+4-4x)-2\log_4(2x-4)\le -2$

в) $\lg\sqrt{x-5}+\frac{1}{\log_{x+3}10}\ge\lg(x\sqrt{9x+27}-15\sqrt{x+3})$ **г)** $\log_{0,5}\left(3-\sqrt{2^{-x}-1}\right)>x$

д) $\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}\left(4x-x^2-2\right)\ge 0$ **е)** $\log_{\sqrt{11-2\sqrt{10}}+1-\sqrt{5}}\left(5x-x^2-3\right)\ge 0$

ж) $\log_{\sqrt{4+2\sqrt{3}}+2-\sqrt{7}}\left(x-6+x^2\right)\le 0$ **з)** $\log_{\sqrt{11+6\sqrt{2}}-3+\sqrt{5}}\left(5x-x^2-4\right)\ge 0$

и) $1-\frac{1}{\log_3 x-2}\le\frac{\log_3 x+1}{\log_3 x}$ **к)** $\log_3(9^x-25)+\log_{1/3}(3^{x-1}-\frac{1}{3})\le 1+2\log_2 7\cdot(\log_2 9)^{-1}$

л) $\frac{3\log_{0,5}x}{2-\log_{0,5}x}\ge 2\log_{0,5}x+1$ **м)** $\log_{\sqrt{5}}(4^x-6)+2\log_{1/5}(2^x-2)\le(\log_5 3\cdot\log_5 9)^{-1}$

н) $\frac{x+2}{\lg(x^2-5)}>\frac{x+3}{\lg(x^2-5)}$ **о)** $\sqrt{\log_4(21-5\cdot 4^{2-x^2})}>x$ **п)** $\log_{1/3}(4^x-2^{x+2})\ge -2$

р) $\log_{1/\sqrt{5}}(36^x-6^{x+1})\ge -2$ **с)** $\log_{0,5}\left(5x^2+\frac{1}{2x^2}\right)\cdot\log_5(5-2x)\ge 0$

4. ***Решите неравенства.***

а) $\log_{\sqrt{y}}(y+1)\le\log_y(3-y)^2$ **б)** $\log_x(3-x)>1$ **в)** $\log_x(x^2+6)>1$

г) $\log_x(2x^2-1)\ge 2$ **д)** $\log_{(3x-1)}2x>1$ **е)** $\log_{\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}}(x^2+x)\ge 0$

ж) $\log_{x^2}(3-x) \le \log_x \sqrt{x+1}$ **и)** $\log_x(3x^2-2) \le 2$ **к)** $\log_x \log_2(12-4^x) \ge 1$

л) $\log_{x-1}\log_2(4^x-5) \le 1$ **м)** $\dfrac{\lg 2+\lg\cos(x+\pi/4)}{\lg(\sin x+\cos x)} > -1$ **н)** $\dfrac{\lg\sin x+\lg\cos x}{\lg(tgx+ctgx)-2\lg 2} > 1$

н) *Дана функция* $f(x)=3^{-x-1}+3^x$. *Решите неравенство* $f(\log_3 x)+f(\log_{\frac{1}{3}}(x)) \le 4$

о) *Дана функция* $f(x)=2^{-x+1}+2^x$. *Решите неравенство* $f(\log_2 x) \ge f(\log_{0,5}(x))$

6. ***Задания с параметром:***

а) *Найти* $\log_{9x}3x$ *, если* $\log_{27}\sqrt[3]{x}=a$

б) *Найти* $\lg^2\sqrt{x}$*, если* $\log_x 100=a$

г) *Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение имеет 2 решения:*

1) $\log_3(9^x+9\cdot a^3)=x$ 2) $\log_2(4^x-a)=x$

д) *При каких значениях y верно следующее утверждение "при любом x выполняется неравенство*

$$x^2\left(2-\log_2\frac{y}{y+1}\right)+2x\left(1-\log_2\frac{y+1}{y}\right)-2\left(1+\log_2\frac{y}{y+1}\right)>0\text{"?}$$

е) *При каких y верно следующее утверждение "при любом x выполняется неравенство*

$$x^2\left(\log_3\frac{y+2}{y}-2\right)+2x\left(\log_3\frac{y+2}{y}-2\right)+2\left(\log_3\frac{y}{y+2}\right)<0\text{"?}$$

15а. ПЛАНИМЕТРИЯ на вступительных экзаменах в ТвГУ в 2000г.

1. **(ГМУ)** Из одной точки проведены две касательные к окружности, длиной 5см каждая. Расстояние между точками касания равно 6см. Найти радиус окружности.
2. **(ГМУ)** В острый угол, равный 60^0, вписаны две окружности, внешним образом касающиеся друг друга. Радиус меньшей окружности 2см. Найти радиус большей окружности.
3. **(Менеджмент)** В трапеции *ABCD* заданы основания *AD*=12, *BC*=8. На продолжении стороны *BC* выбрана такая точка *M*, что *CM*=2,4. Прямая *AM* делит трапецию на четырёхугольник *ABCO* и треугольник *AOD*. Найдите отношение площади *ABCO* к площади *AOD*.
4. **(Менеджмент)** В равнобедренном треугольнике *ABC*, *AB*=*BC*=8, *AC*=12. На стороне *AB* задана точка *E* так, что *BE/AE*=3/1. Найдите угол *ACE*.
5. **(ЭФ)** В трапеции *ABCD* боковые стороны *AB*=36, *CD*=34, *cos ABC* = -1/3 и верхнее основание BC=10. Найдите диагональ *BD*.
6. **(ЭФ)** Рассматриваются всевозможные трапеции, обе боковые стороны и меньшее основание которых равны *a*. Найдите большее основание той из этих трапеций, которая имеет наибольшую площадь.
7. **(ЭФ)** Из трапеций, вписанных в окружность радиуса *R*, таких, что одно из оснований является диаметром этой окружности, найдите углы той трапеции, которая имеет наибольшую площадь.
8. **(ЭФ)** Площадь квадрата *ABCD* больше 225. В плоскости квадрата находится точка *O*: *OB*=*OD*=13, *OC*=$5\sqrt{2}$. Найдите сторону квадрата и выясните, где расположена точка − вне или внутри квадрата.
9. **(ЭФ)** Имеется квадрат *ABCD* и точка *O*, лежащая в плоскости квадрата, но вне его. Известно, что *OA*=*OB*=5, *OD*=$\sqrt{13}$. Найдите площадь квадрата *ABCD*.
10. **(ЭФ)** В треугольнике *ABC* высоты: *BD*=56/5, *AE*=12. *E* лежит на *BC* и *BE/CE*=5/9. Найдите длину *AC*.
11. **(ЭФ)** В треугольнике *ABC* высоты: *CD*=7, *AE*=6. *E* лежит на стороне *BC* и *BE/CE*=3/4. Найдите *AB*.
12. **(МФ)** Сторона *AD* четырехугольника *ABCD* является диаметром окружности, описанной около этого четырех угольника. *AD*=6, *BD*=$3\sqrt{3}$. Отношение угла *BAC* к углу *CAD* равно 1/3. Найдите длину *BC*.
13. **(МФ)** Диагональ *AC* четырехугольника *ABCD* является диаметром окружности, описанной около *ABCD*. *AC*=4, *BD*=$2\sqrt{2}$. Отношение угла *BAC* к углу *CAD* равно 2/3. Найдите длину диагонали *BD*.
14. **(МФ)** Стороны треугольника равны 5, 7 и 11см. Найдите медиану, проведенную к большей стороне.

15. **(МФ)** В параллелограмме $ABCD$ угол BAD равен 60^0. Окружность, проходящая через точки A, B и D пересекает сторону CD в её середине. Найдите площадь $ABCD$, если радиус окружности равен R.
16. **(МФ)** Найти площадь трапеции, описанной около окружности радиуса R. Если хорда длины b, соединяющая точки касания окруж-ти с боковыми сторонами трапеции, параллельна основаниям трапеции.
17. **(МФ)** Около окружности радиуса R описан параллелограмм. Площадь четырехугольника с вершинами в точках касания окружности и параллелограмма равна S. Найдите стороны параллелограмма.
18. **(МФ)** Около окружности радиуса R описана трапеция $ABCD$, меньшее основание $BC=a$. $E-$ точка касания окружности с AB и $BE=b$. Найдите площадь трапеции.
19. **(МФ)** В трапеции $ABCD$ основание AB вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. $AC=a$, а $BC=b$. Найдите площадь трапеции.
20. **(МФ)** В трапеции $ABCD$ длины основания CD, диагонали BD и боковой стороны AD равны p. Длина боковой стороны BC равна q. Найдите длину диагонали AC.
21. **(КБ)** Найти площадь равнобедренной трапеции с перпендикулярными диагонали и средней линией l.
22. **(КБ)** В прямоугольной трапеции боковая сторона, перпендикулярная основаниям, в два раза больше меньшего основания трапеции, равного a. Диагонали трапеции перпендикулярны. Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.
23. **(КБ)** В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания в отношении 2/3. Найдите длины сторон треугольника.
24. **(КБ)** В прямоугольный треугольник вписана окружность. Гипотенуза делится точкой касания на отрезки длиной 5см и 12см. Найдите площадь треугольника.
25. **(ПмиК)** В треугольнике ABC со сторонами AB=10, AC=8, BC=6 проведена медиана CH. Прямая, параллельная стороне AC, пересекает отрезки AB, CH, BC в точках P, Q, R соответственно. Найти наименьшее возможное значение суммы площадей треугольников PQH и CQR.
26. **(ПмиК)** В треугольнике ABC на основании AB или на его продолжении взята произвольным образом точка D и около треугольников ACD и BCD описаны окружности. Найти такое положение D для которого эти радиусы будут иметь наименьшую величину.

15б. ПЛАНИМЕТРИЯ на вступительных экзаменах в ТвГУ в 2001г.

1. (Георгр.) В трапеции, площадью 161, высотой 7, и разностью параллельных сторон 11, найти большую сторону.
2. (Геогр.) В трапеции $ABCD$ средняя линия MN = 18. Из B проведена прямая, параллельная стороне CD, до пересечения в точке E с большим основанием AD. Определите длины оснований трапеций, если AE = 1.
3. (ГМУ) Прямая делит одну сторону треугольника пополам, а другую в отношении 3:1, считая от вершины общей для этих двух сторон. В каком отношении прямая делит площадь треугольника.
4. (Документоведение) Две окружности радиусов 3 см и 1 см касаются друг друга внешним образом. Найдите расстояния от точки касания окружностей до их общей касательной.
5. (Документоведение) Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны равна 5. Найдите длины боковых сторон треугольника.
6. (Маркетинг) На основании равнобедренного треугольника с боковой стороной 6, взята точка так, что сумма расстояний от этой точки до боковых сторон равна 5. Найдите площадь треугольника.
7. (Маркетинг) В равнобедренном треугольнике с основанием 9, и углами при основании 30^o, из точки основания треугольника, опущены перпендикуляры на боковые стороны. Найдите сумму длин этих перпендикуляров.
8. (Маркетинг) Большее основание трапеции = 24см. Расстояние между серединами диагоналей = 4см. Найдите меньшее основание.
9. (Маркетинг) Боковые стороны равнобочной трапеции перпендикулярны. Её площадь – 12 см^2, а высота – 2 см. Найдите стороны трапеции.
10. (МФ) В угол вписана окружность радиуса r. Хорда, соединяющая точки касания, равна a. Параллельно хорде проведены касательные. Найти площадь трапеции, полученной касательной и сторонами угла.

11. (МФ) Площадь равнобочной трапеции, описанной около окружности радиуса r, равна S. Найдите угол между прямыми, содержащими боковые стороны трапеции.
12. (МФ) Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке F. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. В каком отношении прямая FE делит большее основание AD трапеции?
13. (МФ) Две окружности радиусов R и r внешним образом касаются друг друга. Третья окружность касается двух заданных окружностей и их общей касательной. Найдите радиус третьей окружности.
14. (Менеджмент) В треугольнике ABC точка K делит медиану BD в отношении 1:2, считая от вершины B. Прямая AK, пересекает сторону BC в точке M. В каком отношении точка M делит сторону BC?
15. (Менеджмент) В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D, а на стороне BC – точка K. При этом $\frac{BK}{KC}=\frac{1}{2}$. Отрезки AK и BD, пересекаются в M. При этом $\frac{BM}{MD}=\frac{2}{3}$. Найдите отношение $\frac{AD}{DC}$.
16. (Мен-т) В окружности радиуса R проведена хорда, равная $R/2$. Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой – секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние касательной и секущей.
17. (Менеджмент) Имеются две концентрические окружности. В большей проведена хорда, длиною 32 см, касающаяся меньшей окружности. Ширина кольца равна 8 см. Найдите радиусы окружностей.
18. (Псих.) Около круга радиуса 2см описана равнобочная трапеция площадью 20 см^2. Найдите стороны трапеции.
19. (Психология) В прямоугольный треугольник с углом 60^0 вписан ромб со стороной 6, так что угол в 60^0 у них общий и все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Найдите стороны треугольника.
20. (Психология) В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиуса 2. Найдите сторону ромба.
21. (ЭФ) Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность $AB = \sqrt{10}$, $BC = 2$, $AC \perp BD$ и площади треугольников ABC, BCD и AED равны. Найдите площадь пятиугольника.
22. (ЭФ) Через вершины L, M, N параллелограмма $KLMN$ проведена окружность, пересекающая продолжение отрезка KL за точку L в точке P и касается прямой KN. Известно, что $KN = 2$, $PM = \sqrt{2}$. Определите площадь четырёхугольника $KPMN$.
23. (ПМиК) В треугольнике ABC угол A в два раза больше угла B, $AB = c$, $AC = b$. Найти BC.
24. (ПМиК) В треугольнике ABC, $AB = 400$, $AC = 300$, $BC = 500$. Стороны BC и AC точками $M_1, M_2, \dots, M_{999}$ и $N_1, N_2, \dots, N_{999}$ разбиты на 1000 равных частей каждая: $BM_1 = M_1M_2 = \dots = M_{999}C$; $AN_1 = N_1N_2 = \dots = N_{999}C$. Найти длину ломаной $ABM_1N_1M_2N_2M_3N_3 \dots M_{999}N_{999}C$.
25. (ПМиК) У прямоугольника периметром 128 см скруглили все углы с одинаковым радиусом. В результате его периметр уменьшился до 120 см. Определить, на сколько сократилась площадь фигуры.
26. (ПМиК) В окружность радиусом 24см вписана равнобокая трапеция с большим основанием 48см. При какой высоте трапеции её площадь будет наибольшей. Найти эту площадь.
27. (ПМиК) В окружность радиуса 30см вписан прямоугольный треугольник. На его гипотенузу опущена высота, которая делит треугольник на два треугольника. При каких размерах исходного треугольника разность площадей двух получившихся треугольников будет наибольшей? Найти эти площади.

Прогрессии в геометрических задачах.

1. На стороне угла откладываются от его вершины равные отрезки. Через их концы проводятся параллельные прямые. Доказать, что длины отрезков этих прямых, заключённых между сторонами угла образуют арифметическую прогрессию. Найти длину 7-го отрезка.
2. Середины сторон равностороннего треугольника образуют 2-й треугольник. Середины сторон 2-го треугольника образуют 3-й треугольник и т.д. Доказать, что периметры этих треугольников образуют геометрическую прогрессию. Найти периметр 11 треугольника.
3. В окружность вписан квадрат, а в него вписана 2-я окружность. Во 2-ю окружность вписан 2-й квадрат, а в него вписана 3-я окружность и т.д. Доказать, что радиусы окружностей образуют геометрическую прогрессию. Найти радиус 9-й окружности.
4. На кубе с ребром a стоит куб с ребром $a/2$, на нём куб с ребром $a/4$ и т.д. Найти высоту фигуры
5. В угол 60^o, последовательно вписаны окружности с радиусами R_i, касающиеся друг друга ($\forall i\ a>R_i$, i=2,3,…). Найти радиусы остальных окружностей, если $R_1=a$ и показать, что они образуют бесконечную убывающую геометрическую прогрессию. Доказать, что $R_1+2(R_2+ R_3+\ldots+R_n+ +\ldots)$ равно расстоянию от центра первой окружности до вершины угла.

6. Из вершины B равностороннего треугольника ABC со стороной a проведена высота , пересекающая противоположную сторону в точке A_1. Через A_1 проведена прямая, параллельная стороне AB, которая при пересечении со стороной BC даёт точку B_1. Для полученного 2-го треугольника A_1B_1C проделаем те же построения и получим 3-й треугольник A_2B_2C и т.д. Доказать, что сумма высот $B_1A_2+B_2A_3+\ldots$ равна высоте треугольника BA_1.
7. В конус с радиусом основания 3 см и образующей 6 см вписан шар. 2-й шар касается 1-го шара и боковой поверхности конуса и т.д. Найти объем 17-го шара. (Ответ: $4\pi/3^{47,5}$)
8. В конус с радиусом основания 4 см и образующей 8 см вписан шар. 2-й шар касается 1-го шара и боковой поверхности конуса и т.д. Найти площадь поверхности 13-го шара. (Овет: $S_{13} = \dfrac{64\pi}{3^{37}}$)
9. В результате проекции равнобедренного треугольника со стороной 5 см и основанием 6 см на плоскость проходящую через основание этого треугольника и образующую угол 60° с плоскостью 1-го треугольника, получен 2-й треугольник. 3-й треугольник получен в результате проекции 2-го на плоскость 1-го и т.д. Найти периметр 11-го треугольника.
10. Дан тетраэдр с ребрами равными 3 см. Вершинами 2-го тетраэдра являются центры вписанных в грани 1-го тетраэдра окружностей. Вершинами 3-го тетраэдра– центры вписанных в грани 2-го тетраэдра окружностей и т.д. Найти объем 7 тетраэдра. [Ответ: $V_7 = \sqrt{2}/\left(4\cdot 3^{16}\right)$]

17. СТЕРЕОМЕТРИЯ .

1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна h и угол BA_1C равен 2α. Найти площадь треугольника BA_1C. При каких α задача имеет решение.
2. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна b и плоский угол при вершине равен углу наклона бокового ребра к плоскости основания. Найти объем пирамиды.
3. Все грани призмы - ромбы со стороной b и острым углом α. Найти объем призмы.
4. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна h, а плоский угол при вершине равен α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.
5. Основанием призмы $ABCA_1B_1C_1$ служит правильный треугольник ABC со стороной b. Вершина A проецируется в центр треугольника ABC и ребро AA_1 наклонено к плоскости ABC под углом 60°. Найти боковую поверхность призмы.
6. Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб $ABCD$ с острым углом 60° и стороной b. Ребро AA_1 также равно b и образует с ребрами AB и AD углы 45°. Найти объем параллелепипеда.
7. Основанием четырехугольной призмы служит параллелограмм с острым углом α. Боковое ребро проходящее через вершину острого угла основания равно b и наклонено к прилежащим сторонам основания под одним и тем же углом. Найти высоту призмы.
8. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной b. Длина бокового ребра равна d. Одно из боковых ребер образует с пересекающими его сторонами основания равные углы 45°. Найти объем призмы.
9. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник со сторонами b и d, боковое ребро равно h и образует со сторонами основания равные углы 60°. Найти объем параллелепипеда.
10. Основанием параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ служит квадрат $ABCD$ со стороной b, боковые ребра равны h. Ребро AA_1 образует с пересекающими его сторонами основания равные углы α. Найти площади диагональных сечений AA_1CC_1 и BB_1DD_1.
11. В треугольной пирамиде $SABC$, дано $AC = 2$, $AS = 4$, угол BAC равен углу BAS равен 60° и угол CAS равен 90°. Найти объем пирамиды.
12. В треугольной пирамиде $SABC$ грань SBC перпендикулярна грани ABC, все плоские углы при вершине S равны 60°, $SB = SC = 1$. Найти объем пирамиды.
13. Найти размеры конуса максимального объёма, который можно вписать в шар объёмом 270см^3, и сам этот объём.
14. В прямую призму, в основании которой лежит ромб со стороной 7см, вписана сфера радиуса 2см. Найти объем призмы.
15. На высоте прямого кругового конуса как на диаметре построена сфера, пересекающая конус по некоторой окружности. Образующая конуса равна l , а угол осевого сечения равен α . Найти расстояние от центра этой окружности до основания конуса.
16. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $AC = 5$. Известно, что $CA_1 \perp AB_1$ и $BC : BB_1 = 4 : 3$. Определите объем призмы.