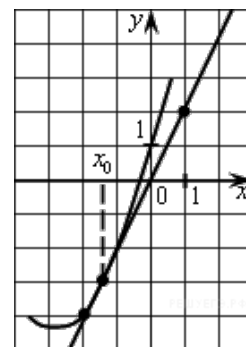


Геометрический смысл производной, касательная

1. **Задание 7 № 27503.** На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

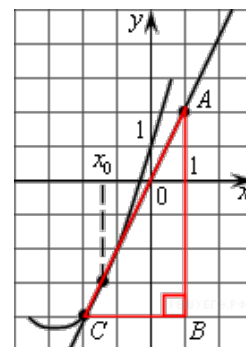


Решение.

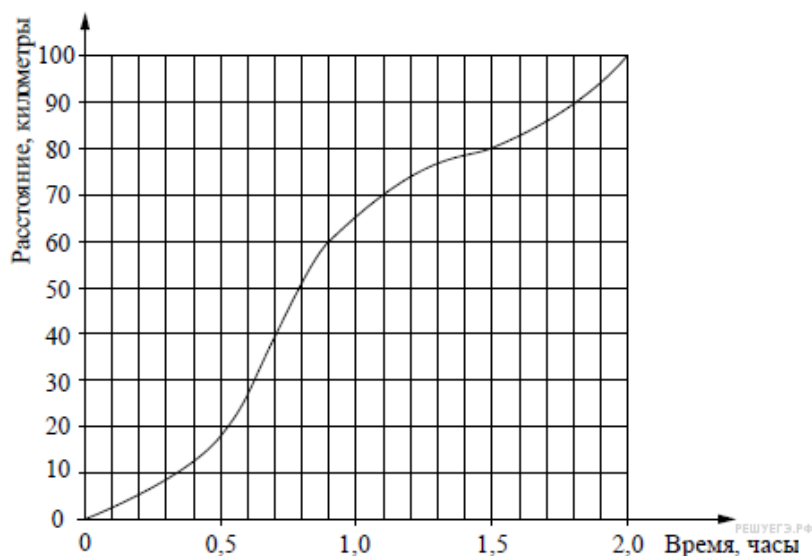
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(1; 2)$, $B(1; -4)$, $C(-2; -4)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2+4}{1+2} = 2.$$

Ответ: 2.



2. **Задание 7 № 512495.** На рисунке показан график движения автомобиля по маршруту. На оси абсцисс откладывается время (в часах), на оси ординат — пройденный путь (в километрах). Найдите среднюю скорость движения автомобиля на данном маршруте. Ответ дайте в км/ч.

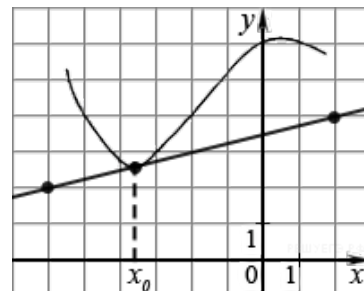


Решение.

Чтобы найти среднюю скорость, необходимо пройденное расстояние разделить на время прохождения: $100 : 2 = 50$ км/ч

Ответ: 50.

3. Задание 7 № 27504. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

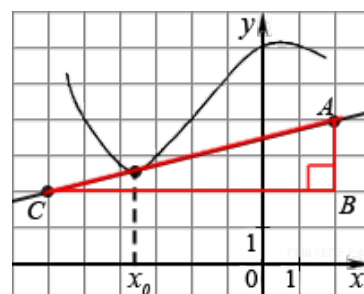


Решение.

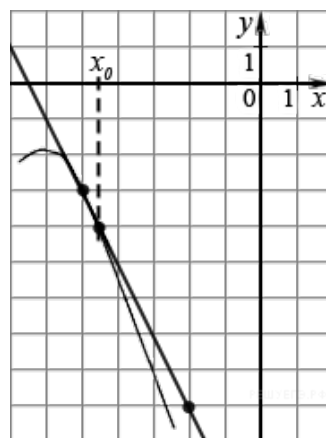
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; 4)$, $B(2; 2)$, $C(-6; 2)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу ACB . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg} \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{2}{8} = 0,25.$$

Ответ: 0,25.



4. Задание 7 № 27505. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

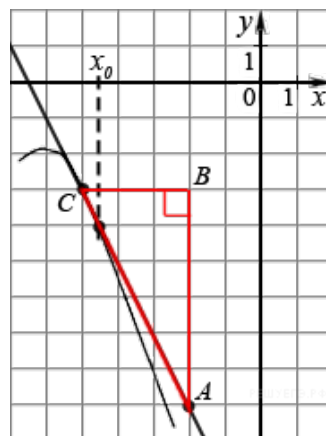


Решение.

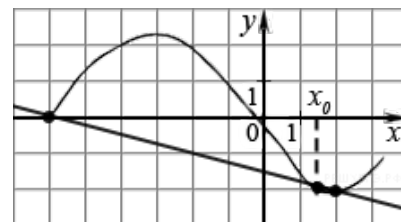
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2; -9)$, $B(-2; -3)$, $C(-5; -3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB . Поэтому

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg}(\angle ACB) = -\frac{AB}{BC} = -\frac{6}{3} = -2.$$

Ответ: -2.



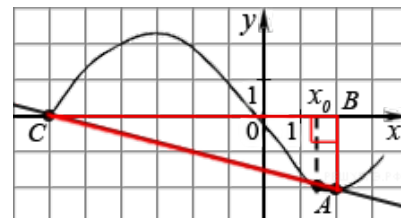
5. Задание 7 № 27506. На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Решение.

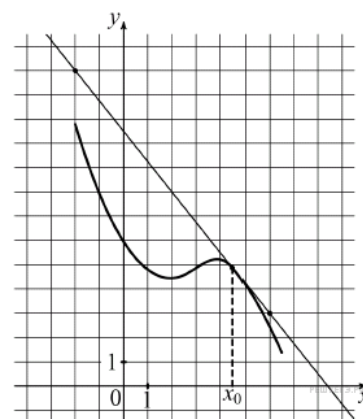
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(2; -2)$, $B(2; 0)$, $C(-6; 0)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{2}{8} = -0,25.$$



Ответ: $-0,25$.

6. Задание 7 № 505379. На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

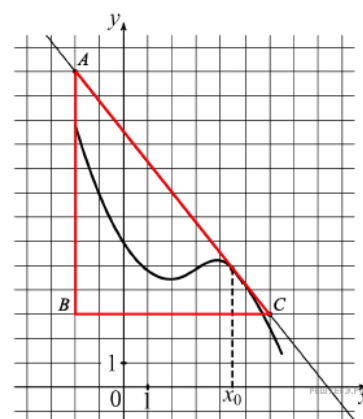


Решение.

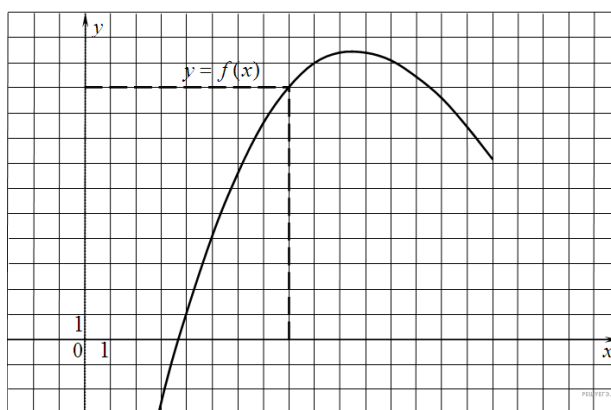
Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Построим треугольник с вершинами в точках $A(-2; 13)$, $B(-2; 3)$, $C(6; 3)$. Угол наклона касательной к оси абсцисс будет равен углу, смежному с углом ACB :

$$y'(x_0) = \operatorname{tg}(180^\circ - \angle ACB) = -\operatorname{tg} \angle ACB = -\frac{AB}{BC} = -\frac{10}{8} = -1,25.$$

Ответ: $-1,25$.



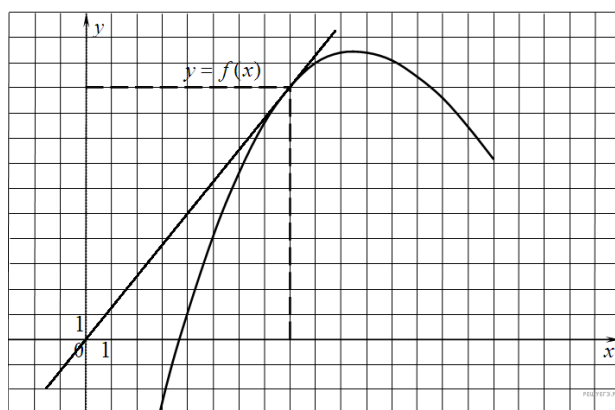
7. Задание 7 № 40129. На рисунке изображен график функции $y=f(x)$. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика этой функции в точке с абсциссой 8. Найдите $f(8)$.



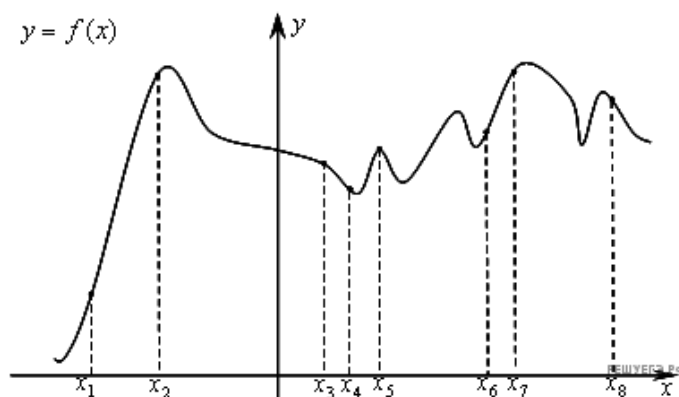
Решение.

Поскольку касательная проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $y = kx$. Эта прямая проходит через точку $(8; 10)$, поэтому $10 = 8 \cdot k$, откуда $k = 1,25$. Поскольку угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, получаем: $f'(8) = 1,25$.

Ответ: 1,25.



8. Задание 7 № 317539. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и восемь точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_8$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ положительна?

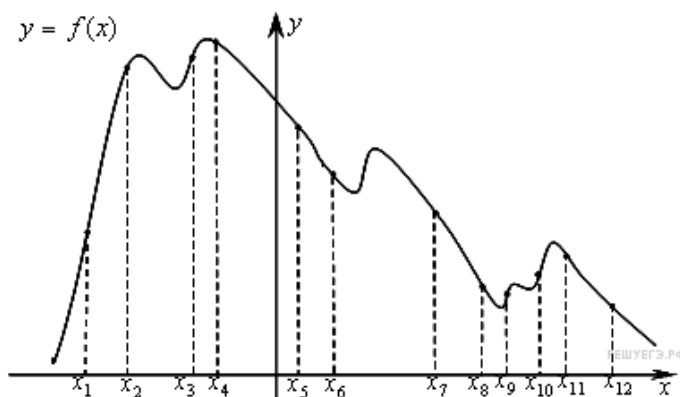


Решение.

Положительным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$, возрастает. На них лежат точки x_1, x_2, x_6, x_7 . Таких точек 4.

Ответ: 4.

9. Задание 7 № 317540. На рисунке изображён график функции $y = f(x)$ и двенадцать точек на оси абсцисс: $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{12}$. В скольких из этих точек производная функции $f(x)$ отрицательна?

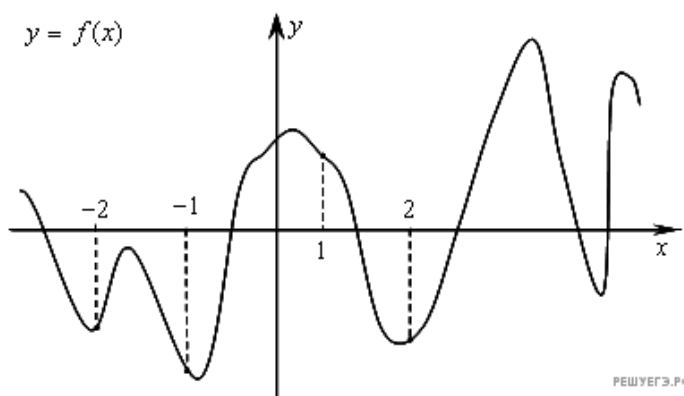


Решение.

Отрицательным значениям производной соответствуют интервалы, на которых функция $f(x)$ убывает. В этих интервалах лежат точки $x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_{11}, x_{12}$. Таких точек 7.

Ответ: 7.

10. Задание 7 № 317543. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$ и отмечены точки $-2, -1, 1, 2$. В какой из этих точек значение производной наибольшее? В ответе укажите эту точку.

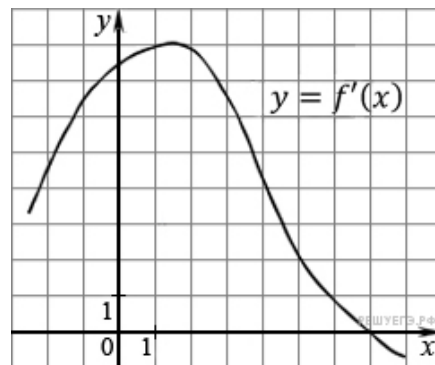


Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной, который в свою очередь равен тангенсу угла наклона данной касательной к оси абсцисс. Производная положительна в точках -2 и 2 . Угол наклона (и его тангенс) явно больше в точке -2 .

Ответ: -2 .

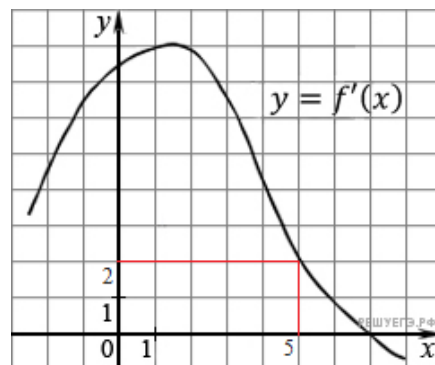
11. **Задание 7 № 40130.** На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней.



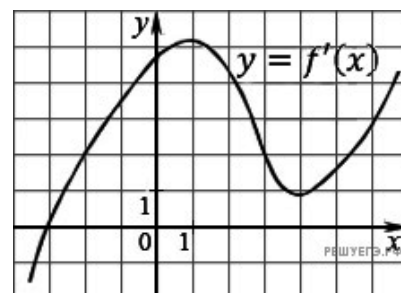
Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 2x - 2$ или совпадает с ней, она имеет угловой коэффициент равный 2 и $f'(x_0) = 2$. Осталось найти, при каких x производная принимает значение 2. Искомая точка $x_0 = 5$.

Ответ: 5.



12. **Задание 7 № 40131.** На рисунке изображен график производной функции $f(x)$. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к графику $y = f(x)$ параллельна оси абсцисс или совпадает с ней.



Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна оси абсцисс или совпадает с ней, она имеет вид $y = b$, и её угловой коэффициент равен 0. Следовательно, мы ищем точку, в которой угловой коэффициент, равен нулю, а значит, и производная равна нулю. Производная равна нулю в той точке, в которой её график пересекает ось абсцисс. Поэтому искомая точка $x = -3$.

Ответ: -3.

13. **Задание 7 № 27485.** Прямая $y = 7x - 5$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 6x - 8$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Значение производной в точке касания равно угловому коэффициенту касательной. Поскольку касательная параллельна прямой $y = 7x - 5$ их угловые коэффициенты равны. Поэтому абсцисса точки касания находится из уравнения $y' = 7$:

$$(x^2 + 6x - 8)' = 7 \Leftrightarrow 2x + 6 = 7 \Leftrightarrow x = 0,5.$$

Ответ: 0,5.

14. Задание 7 № 27486. Прямая $y = -4x - 11$ является касательной к графику функции $y = x^3 + 7x^2 + 7x - 6$. Найдите абсциссу точки касания.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 3x^2 + 14x + 7 = -4, \\ x^3 + 7x^2 + 7x - 6 = -4x - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 14x + 11 = 0, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{11}{3}, \\ x = -1, \\ x^3 + 7x^2 + 11x + 5 = 0 (*). \end{cases}$$

Проверка подстановкой показывает, что первый корень не удовлетворяет, а второй удовлетворяет уравнению (*). Поэтому искомая абсцисса точки касания -1 .

Ответ: -1 .

15. Задание 7 № 119972. Прямая $y = 3x + 1$ является касательной к графику функции $ax^2 + 2x + 3$. Найдите a .

Решение.

Прямая $y = kx + b$ является касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0 тогда и только тогда, когда одновременно $f(x_0) = y(x_0)$ и $f'(x_0) = k$. В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 2ax_0 + 2 = 3, \\ ax_0^2 + 2x_0 + 3 = 3x_0 + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax_0 = 0,5, \\ 0,5x_0 - x_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,125, \\ x_0 = 4. \end{cases}$$

Искомое значение a равно $0,125$.

Ответ: $0,125$.

Приведем другое решение.

По смыслу задачи $a \neq 0$, а значит, график заданной функции — парабола. Касательная к параболе (а также и к гиперболе) имеет с ней единственную общую точку. Поэтому необходимо и достаточно, чтобы уравнение $ax^2 + 2x + 3 = 3x + 1$ имело единственно решение. Для этого дискриминант $1 - 8a$ уравнения $ax^2 - x + 2 = 0$ должен быть равен нулю, откуда

$$a = \frac{1}{8} = 0,125.$$

16. Задание 7 № 119974. Прямая $y = 3x + 4$ является касательной к графику функции $3x^2 - 3x + c$. Найдите c .

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + b$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + b. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 6x - 3 = 3, \\ 3x^2 - 3x + c = 3x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ 3x^2 - 6x + c - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 1, \\ c = 7. \end{cases}$$

Ответ: 7.

17. Задание 7 № 119973. Прямая $y = -5x + 8$ является касательной к графику функции $28x^2 + bx + 15$. Найдите b , учитывая, что абсцисса точки касания больше 0.

Решение.

Условие касания графика функции $y = f(x)$ и прямой $y = kx + l$ задаётся системой требований:

$$\begin{cases} f'(x) = k, \\ f(x) = kx + l. \end{cases}$$

В нашем случае имеем:

$$\begin{cases} 56x + b = -5, \\ 28x^2 + bx + 15 = -5x + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ 28x^2 + (-5 - 56x)x + 15 = -5x + 8 \end{cases} \begin{cases} b = -5 - 56x, \\ x^2 = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

По условию абсцисса точки касания положительна, поэтому $x = 0,5$, откуда $b = -33$.

Ответ: -33.