Задачи о банках и процентах

1. **Задание 17 № 506948.** За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, 12,5% в месяц. известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма увеличилась на $104\frac{1}{6}\%.$ Определите срок хранения вклада.

Решение.

Известно:

1. Проценты на вклад начислялись ежемесячно.

2. Каждая последующая процентная надбавка по истечении календарного месяца начислялась с учетом вновь образованной суммы вклада и с учетом предыдущих надбавок.

Если первоначальная сумма вклада при ежемесячной 5%-ной ставке начисления процентов продержалась k месяцев, то вклад ежемесячно увеличивался в $1+5\cdot 0,01$ раз, и этот коэффициент будет сохранен до тех пор, пока ставка не изменится.

При изменении процентной надбавки с 5% на 12% (ставка 12% продержалась m месяцев) первоначальная сумма вклада за $(k+m)$ месяцев увеличится в $(1+0,05)^k\cdot(1+0,12)^m=\left(\frac{21}{20}\right)^k\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^m$ раз.

Предположим, что процентная ставка $11\frac{1}{9}$ продержалась n месяцев, а процентная ставка $12,5$ продержалась t месяцев. Тогда соответствующие коэффициенты повышения составят:

$$\left(1+\frac{100}{9}\cdot 0,01\right)^n=\left(\frac{10}{9}\right)^n \text{ и } (1+12,5\cdot 0,01)^t=\left(\frac{9}{8}\right)^t.$$

Таким образом, коэффициент повышения суммы вклада в целом за весь период хранения вклада в банке составит:

$$\left(\frac{21}{20}\right)^k\cdot\left(\frac{28}{25}\right)^m\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^n\cdot\left(\frac{9}{8}\right)^t=\frac{3^k\cdot 7^k\cdot 2^{2m}\cdot 7^m\cdot 2^n\cdot 5^n\cdot 3^{2t}}{2^{2k}\cdot 5^k\cdot 5^{2m}\cdot 3^{2n}\cdot 2^{3t}}=\frac{2^{2m+n}\cdot 3^{k+2t}\cdot 5^n\cdot 7^{k+m}}{2^{2k+3t}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{k+2m}}.$$

Это — с одной стороны. Но с другой стороны, согласно условию задачи первоначальная сумма вклада за это же время увеличилась на $104\frac{1}{6}$ то есть в

$$\left(1+\frac{625\cdot 0,01}{6}\right)=\left(\frac{6+6,25}{6}\right)=\frac{12,25}{6}=\frac{1225}{600}=\frac{49}{24}=\frac{7^2}{2^3\cdot 3} \text{ (раз).}$$

Значит,

$$\frac{2^{2m+n}\cdot 3^{k+2t}\cdot 5^n\cdot 7^{k+m}}{2^{2k+3t}\cdot 3^{2n}\cdot 5^{k+2m}}=\frac{7^2}{2^3\cdot 3}\Leftrightarrow 2^{2m+n-2k-3t}\cdot 3^{k+2t-2n}\cdot 5^{n-k-2m}\cdot 7^{k+m}=2^{-3}\cdot 3^{-1}\cdot 7^2.$$

Согласно основной теореме арифметики каждое натуральное число, большее 1, можно представить в виде произведения простых множителей, и это представление единственное с точностью до порядка их следования. В таком случае:

$$\begin{cases}2m+n-2k-3t=-3,\\ k+2t-2n=-1,\\ n-k-2m=0,\\ k+m=2.\end{cases}$$

Решим эту систему относительно натуральных k, m, n и t.

Из последнего уравнения системы имеем: $k=m=1.$ При этих значениях k и m система примет вид:

$$\begin{cases}2+n-2-3t=-3,\\ 1+2t-2n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n-3t=-3,\\ 2t-2n=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n-3t=-3,\\ t-n=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2t=-4,\\ t=n-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2,\\ n=t+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2,\\ n=3.\end{cases}$$

Итак, $k+m+n+t=1+1+3+2=7,$ вклад в банке на хранении был 7 месяцев. При найденных значениях k, m, n и t $n-k-2m$ действительно равно нулю.

Ответ: 7.

2. Задание 17 № 506949. В начале года 5/6 некоторой суммы денег вложили в банк А, а то, что осталось — в банк Б. Если вклад находится в банке с начала года, то к концу года он возрастает на определённый процент, величина которого зависит от банка. Известно, что к концу первого года сумма вкладов стала равна 670 у.е., к концу следующего — 749 у.е. Если первоначально 5/6 суммы было бы вложено в банк Б, а оставшуюся вложили бы в банк А, то по истечении одного года сумма выросла бы до 710 у.е. Определите сумму вкладов по истечении второго года в этом случае.

Решение.

Пусть в банк А, у которого исходя из годовой процентной ставки коэффициент повышения вклада равен y, вложено $5x$ у.е. денег. Тогда в банк Б, у которого аналогичный коэффициент равен t, вложено x у.е денег.

В соответствии с условием задачи будем иметь:

$$\begin{cases} 5xy+xt=670, \\ 5xy^2+xt^2=749. \end{cases} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Если бы те же суммы были вложены в банки Б и А соответственно, то имели бы уравнение $xy+5xt=710.$ (3)

А искомая сумма будет равна значению выражения $xy^2+5xt^2.$

Рассмотрим систему уравнений (1) и (3):

$$\begin{cases} 5xy+xt=670, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -25xy-5xt=-3350, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24xy=2640, \\ xy+5xt=710 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ 5xt=710-110 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ 5xt=600 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=110, \\ xt=120. \end{cases}$$

Отсюда: $\dfrac{y}{t}=\dfrac{11}{12} \Leftrightarrow y=\dfrac{11t}{12}.$

Подставим найденное значение y в уравнение (2):

$$5x\cdot\frac{121t^2}{144}+xt^2=749 \Leftrightarrow 605xt^2+144xt^2=749\cdot144 \Leftrightarrow 749xt^2=749\cdot144 \Leftrightarrow xt^2=144.$$

$$5xy^2+xt^2=749 \Leftrightarrow 5xy^2=749-xt^2 \Leftrightarrow 5xy^2=749-144 \Leftrightarrow 5xy^2=605 \Leftrightarrow xy^2=121.$$

Искомая сумма имеет вид: $xy^2+5xt^2=121+5\cdot144=841.$

Ответ: 841.

3. Задание 17 № 506950. В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после вычисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?

Решение.

Общая сумма, причитающаяся вкладчику, включая дополнительные вклады в течение четырех лет и все процентные начисления, к концу пятого года хранения денег составляет 825 (100+725) процентов от первоначального (3900 тыс. руб.). Эта сумма равна:

$$3900\cdot 8,25=39\cdot 825=3\cdot 13\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 11=3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13 \text{ (тыс.руб.)}$$

Некоторая часть найденной суммы образована хранением первоначально вложенной суммы (3900 тыс.руб.) Вычислим эту часть. Поскольку процентная надбавка начислялась в размере 50% годовых, то за 5 лет хранения этой части вклада вложенная сумма увеличилась в $1,5^5=\frac{3^5}{2^5}$ раза. То есть стала:

$$\frac{3900\cdot 3^5}{2^5}=\frac{3\cdot 13\cdot 2^2\cdot 5^2\cdot 3^5}{2^5}=\frac{3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3} \text{ (тыс. руб.)}$$

Теперь найдем другую часть образованной суммы с учетом дополнительных вкладов в течение четырех лет, а также процентных начислений на эту сумму. Эта часть равна разности двух сумм, вычисленных выше.

$$3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13-\frac{3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3}=\frac{2^3\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 11\cdot 13-3^6\cdot 5^2\cdot 13}{2^3}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot(2^3\cdot 11-3^4)}{2^3}=$$
$$=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 13\cdot(88-81)}{2^3}=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13}{2^3} \text{ (тыс. руб.)}$$

Это — с одной стороны. С другой же стороны эта сумма образовалась так:

Пусть вкладчик в конце года и еще три раза в следующие годы вносил дополнительный вклад в сумме x тыс. руб.

В конце первого года хранения этой суммы (к концу второго года от открытия вклада) она выросла до $\frac{3}{2}x$ тыс. руб.

Вкладчик дополнительно внес еще x тыс. руб. На начало следующего календарного года эта часть суммы стала:

$$\frac{3}{2}x+x=\frac{5}{2}x \text{ (тыс.руб.)}$$

Через год эта сумма выросла до:

$$\frac{5}{2}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{15}{4}x \text{ (тыс.руб.)}$$

Но вкладчик внес на счет еще x тыс.руб. Сумма стала:

$$\frac{15}{4}x+x=\frac{19}{4}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Через год эта сумма выросла до:

$$\frac{19}{4}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{57}{8}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Вкладчик вновь внес на счет x тыс. руб. Часть вклада становится равной:

$$\frac{57}{8}x+x=\frac{65}{8}x \text{ (тыс.руб.)}$$

К концу последнего года хранения всего вклада эта часть вырастает до:

$$\frac{65}{8}x\cdot\frac{3}{2}=\frac{3\cdot 5\cdot 13}{2^4}x \text{ (тыс. руб.)}$$

Теперь решим уравнение:

$$\frac{3\cdot 5\cdot 13}{2^4}\cdot x=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13}{2^3}\Leftrightarrow x=\frac{3^2\cdot 5^2\cdot 7\cdot 13\cdot 2^4}{2^3\cdot 3\cdot 5\cdot 13}\Leftrightarrow x=3\cdot 5\cdot 7\cdot 2\Leftrightarrow x=210.$$

Итак, искомая сумма равна 210 тыс. руб.

Ответ: 210 000.

4. Задание 17 № 506952. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

Решение.

Пусть сумма кредита составляет S у.е., а процентная ставка по кредиту $x\%$. К концу первого года сумма долга фермера в банк с учетом начисленных процентов составила $(1+0,01x)S$ у.е.

После возвращения банку 3/4 части от суммы долга долг фермера на следующий год составил $\frac{1}{4}(1+0,01x)S$ у.е.

На эту сумму в следующем году вновь начислены проценты. Сумма долга фермера к концу второго года погашения кредита с учетом процентной ставки составила $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S$ у.е. По условию задачи эта сумма равна $1,21S$ у.е.

Решим уравнение $\frac{1}{4}(1+0,01x)^2S=1,21S$ на множестве положительных чисел.

$$(1+0,01x)^2=4\cdot 1,21 \Leftrightarrow 1+0,01x=2\cdot 1,1 \Leftrightarrow 0,01x=1,2 \Leftrightarrow x=120.$$

Ответ: 120.

5. Задание 17 № 506953. В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составила x % годовых, тогда как в январе 2001 года — y% годовых, причем известно, что $x + y =$ 30%. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

Решение.

Пусть в январе 2000 года вкладчик положил на счет S у.е. Тогда в январе 2001 года на счету сумма станет $S(1+0,01x)$ у.е. Но в январе же 2001 года вкладчик снял $0,2S$ у.е. На счету осталось:

$$S(1+0,01x)-0,2S=0,8S+0,01S\cdot x \text{ у.е.}$$

В январе 2002 года сумма на счету будет равна:

$$(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1+0,01(30-x))=(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1+0,3-0,01x)=$$

$$=(0,8S+0,01S\cdot x)\cdot(1,3-0,01x)=1,04S+0,013Sx-0,008Sx-0,0001Sx^2=$$

$$=-0,0001Sx^2+0,005Sx+1,04S.$$

Функция $f(x)=-0,0001Sx^2+0,005Sx+1,04S$ является квадратичной от x.

У нее есть наибольшее значение при $x_0=\dfrac{0,005S}{2\cdot 0,0001S}=25.$

Ответ: 25.

6. Задание 17 № 506954. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена барреля сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Решение.

Пусть сумма, которой первоначально располагала администрация края, составляла S у.е., а цена барреля сырой нефти M у.е. Тогда первоначально возможный объем закупок составлял S/M баррелей. Этот объем примем за 100 процентов. За 2 месяца хранения в банке положенная сумм выросла до $1,26^2S$ у.е., а цена барреля сырой нефти за это же время убыла до $0,9^2M$ у.е. Следовательно, 1 ноября 2001 г. руководство края на эту сумму могла закупить $\frac{1,26^2S}{0,9^2M}$ баррелей сырой нефти. Процентное отношение этого объема к первоначально возможному объему закупок составит:

$$\frac{1,26^2S}{0,9^2M} : \frac{S}{M} \cdot 100 \text{ \% то есть } 1,4^2 \cdot 100 \text{ \%} = 196 \text{ \%}.$$

Значит, руководство края смогло пополнить 1 ноября 2001 г. нефтяные запасы края на 96% больше, чем 1 сентября того же года.

Ответ: 96.

7. Задание 17 № 506955. Транснациональная компания Amako Inc. решила провести недружественное поглощение компании First Aluminum Company (FAC) путем скупки акций миноритарных акционеров. Известно, что Amako было сделано три предложения владельцам акций FAC, при этом цена покупки одной акции каждый раз повышалась на 1/3. В результате второго предложения Amako сумела увеличить число выкупленных акций на 20%, а в результате скупки по третьей цене — еще на 20%. Найдите цену третьего предложения и общее количество скупленных акций FAC, если начальное предложение составляло $27 за одну акцию, а по второй цене Amako скупила 15 тысяч акций.

Решение.

Предложения	Цена одной акции ($)	Количество выкупленных акций: При данном предложении	Количество выкупленных акций: Общее количество выкупленных акций
1	**27**		**75 000** $15000 : 0,2 = 75000$
2	**36** $27 + \frac{1}{3} \cdot 27 = 27 + 9 = 36$	**15 000**	**90 000** $75000 + 15000 = 90000$
3	**48** $36 + \frac{1}{3} \cdot 36 = 36 + 12 = 48$		**108 000** $90000 \cdot 1,2 = 108000$

Ответ: цена третьего предложения составила $48 за одну акцию; всего было выкуплено 108 000 акций.

8. Задание 17 № 506956. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

Решение.

Первый способ (близкий к арифметическому решению).

Пусть первый брокер купил x акций, а второй — y акций. Тогда первый продал $0,75x$ акций, второй — $0,8y$ акций.

То, что сумма от продажи акций, полученных вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, означает: сумма, полученная вторым брокером, больше суммы, полученной первым, в 2,4 раза:

$$\frac{100+140}{100}=2,4.$$

Так как цена одной акции у обоих брокеров одинакова, а полученные суммы прямо пропорциональны количеству акций, проданных каждым брокером, то

$$\frac{0,8y}{0,75x}=2,4\Leftrightarrow\frac{y}{x}=\frac{2,4\cdot 0,75}{0,8}=\frac{1,8}{0,8}=\frac{9}{4}.$$

Если k — коэффициент пропорциональности количества акций, купленных брокерами, то ими приобретено $13k$ акций на сумму 3640 р. Следовательно, на тот момент цена каждой акции составляла:

$$\frac{3640}{13k}=\frac{280}{k}\text{ р.}$$

Первый брокер продал $0,75\cdot 4k=3k$ акций, второй $0,8\cdot 9k=7,2k$ акций. Всего было продано $10,2k$ акций. К моменту продажи цена одной акции стала

$$\frac{3927}{3k+7,2k}=\frac{3927}{10,2k}=\frac{385}{k}\text{(р), т.е. на }\frac{385-280}{k}=\frac{105}{k}\text{ (р) выше.}$$

Значит, цена одной акции возросла на 37,5%

$$\left(\frac{105}{k}:\frac{280}{k}\cdot 100=37,5\right).$$

Второй способ (преобладает алгебраический подход).

Пусть x р. — первоначальная цена одной акции, y — количество акций, купленных первым брокером, z — количество акций, купленных вторым брокером. И пусть цена одной акции возросла на t %. Тогда: $x\cdot(y+z)=3640$ (1)

Со временем цена одной акции выросла до $x\cdot(1+0,01t)$ рублей.

Первый брокер продал акций на сумму $0,75xy(1+0,01t)$ рублей, а второй брокер — на $0,8xz(1+0,01t)$ рублей.

Согласно условию задачи имеем: $0,75xy(1+0,01t)+0,8xz(1+0,01t)=3927,$ т.е.

$$x(0,75y+0,8z)\cdot(1+0,01t)=3927\text{ (2)}$$

Так как сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером, то

$$0,8xz(1+0,01t)=2,4\cdot 0,75xy(1+0,01t)\Leftrightarrow 0,8z=1,8y\Leftrightarrow z=2,25y.$$

Подставив полученное значение z в уравнение (1), будем иметь:

$$3,25xy=3640\Leftrightarrow xy=1120.$$

Подставим то же значение z в уравнение (2):

$$2,55xy(1+0/01t)=3927\Leftrightarrow xy\cdot(1+0,01t)=1540.$$

А значение xy нами найдено выше.

Следовательно, $1120\cdot(1+0,01t)=1540\Leftrightarrow 1+0,01t=1,375\Leftrightarrow 0,01t=0,375\Leftrightarrow t=37,5.$

Ответ: 37,5.

9. Задание 17 № 506959. Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Зпербанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Зпербанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Зпербанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Зпербанке Баба Валя сняла половину образовавшей суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» И открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния.

Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Зпербанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?..»

Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валю без навара!

А каков в Зпербанке процент годовых для пенсионеров?

Решение.

Пусть Баба Валя внесла в Зпербанк S у. е. под $x\%$ годовых. Тогда за год хранения вклада в Зпербанке внесенная сумма выросла до $S(1+0,01x)$ у. е. Баба Валя сняла со счета $\frac{S}{2}(1+0,01x)$ у. е. и поместила эту сумму в коммерческий банк. За год хранения вклада в коммерческом банке сумма выросла до $\frac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)$ у.е. А эта сумма по условию задачи составляет $1,65S$ у. е.

Решим уравнение $\frac{S}{2}(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=1,65S$:

$$(1+0,01x)\cdot(1+0,2x)=3,3 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(10+2x)=3300 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+210x+1000-3300=0 \Leftrightarrow x^2+105x-1150=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-115, \\ x=10. \end{array}\right.$$

По условию задачи нам подходит только положительный корень $x=10$. Значит, в Зпербанке процент годовых для пенсионеров равен 10.

Ответ: 10.

10. Задание 17 № 506951. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до $(a+40)$%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?

Решение.

Пусть банк первоначально принял вклад в размере s у.е. под $x\%$ годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $s(1+0,01x)$ у.е.

После снятия четверти накопленной суммы на счету осталось $\frac{3s}{4}(1+0,01x)$ у.е.

С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01) \text{ у.е.}$$

По условию задачи эта сумма равна $1,44s$ у.е.

Решим уравнение $\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44s.$

$$\frac{3s}{4}(1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,44s \Leftrightarrow (1+0,01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0,01)=1,92 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (100+x)\cdot(100+(x+40))=19200 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(140+x)=19200 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+240x+14000-19200=0 \Leftrightarrow x^2+240x-5200=0 \Leftrightarrow x=-120\pm\sqrt{14400+5200} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x=-120\pm\sqrt{19600} \Leftrightarrow x=-120\pm 140.$$

$$x_1=20;\ x_2=-260$$

Этот корень не подходит по смыслу задачи: $x_2=-260$. Новые годовые составляют 20 + 40 = 60 %.

Ответ: 60.

11. Задание 17 № 507214. 1 января 2015 года Тарас Павлович взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем Тарас Павлович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Тарас Павлович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение.

Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Месяц	Долг на первое число месяца (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Заметим, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Ответ: 6.

12. Задание 17 № 508214. 1 января 2015 года Александр Сергеевич взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Александр Сергеевич переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Александр Сергеевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 275 тыс. рублей?

Решение.

Заметим, что за 4 месяца Александр Сергеевич выплатит 1,1 млн рублей. Таким образом, он не покроет долг с процентами. Каждый месяц долг увеличивается не более, чем на 1 100 000 · 0,01 = 11 000 рублей. Значит, за пять месяцев Александр Сергеевич должен будет выплатить не более 1 100 000 + 5 · 11 000 = 1 155 000 рублей, что менее чем 5 · 275 000 = 1 375 000 рублей. Таким образом, Александр Сергеевич сможет выплатить кредит за 5 месяцев.

Ответ: 5.

13. Задание 17 № 507278. 1 января 2015 года Павел Витальевич взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Павел Витальевич переводит в банк платёж. НА какое минимальное количество месяцев Павел Витальевич может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 125 тыс. рублей?

Решение.

Ясно, что за 8 месяцев Павел Витальевич не справится с выплатой долга, так как он вернет банку не более $125000 \cdot 8 = 1000000$ рублей, а общий долг будет больше миллиона рублей, так как банк еще начисляет проценты. Покажем, что на 9 месяцев кредит брать можно. Пусть ежемесячный платеж будет равен 125000 рублей. Через месяц задолженность Павла Витальевича перед банком составит 1010000 рублей, затем Павел Витальевич выплачивает 125000 и долг составляет 885000. Затем банк начисляет процент, но 1 процент от оставшейся суммы будет уже меньше, чем 10000 рублей, и в дальнейшем будет тем более меньше. Поэтому задолженность через два месяца будет меньше 895000, а после очередного платежа - меньше 770000 рублей. Аналогично, через 3 месяца задолженность будет меньше 780000, а после платежа - меньше 655000 рублей. Через 4 месяца задолженность будет меньше 665000, а после платежа - меньше 540000 рублей. Через 5 месяцев задолженность будет меньше 550000, а после платежа - меньше 425000 рублей. Через 6 месяцев задолженность будет меньше 435000, а после платежа - меньше 310000 рублей. Через 7 месяцев задолженность будет меньше 320000, а после платежа - меньше 195000 рублей. Через 8 месяцев задолженность будет меньше 205000, а после платежа - меньше 80000 рублей. Таким образом, через 9 месяцев задолженность заведомо не будет превышать 90000 рублей, и своим последним платежом Павел Витальевич полностью расплатится с банком.

Ответ: на 9 месяцев

14. Задание 17 № 509183. 1 июня 2013 года Всеволод Ярославович взял в банке 900000 рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая — 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 1 процент на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 1%), затем Всеволод Ярославович переводит в банк платёж. На какое минимальное количество месяцев Всеволод Ярославович может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 300000 рублей?

Решение.

Минимизировать время выплат можно, только максимизироввав сами выплаты. Решим задачу в общем виде. Пусть S — сумма (в тыс. руб.) кредита; S_n — задолженность в n-й месяц; s_n — выплата в n-й месяц, $S_n = S$; q — коэффициент ежемесячного повышения, $q > 1$. Тогда

$$S_1 = qS - s,$$
$$S_2 = qS_1 - s = q(qS - s) - s = q^2S - (1+q)s,$$
$$S_3 = qS_2 - s = q^3S - (1+q+q^2)s, \dots$$

После предпоследней выплаты останется $S_{N-1} \le s$ и тогда в последний раз,. N-й раз, кредит будет погашен. Значит,

$$S_{N-1} = q^{N-1}S - (1+q+q^2+\dots+q^{N-2})s = q^{N-1}S - \frac{q^{N-1}-1}{q-1}s \le s.$$

Относительно $x = q^{N-1}$ получаем неравенство

$$(q-1)xS - (x-1)s \le (q-1)s, \qquad x((q-1)S - s) \le (q-2)s.$$

По условию $S = 900$, $s = 300$, q = 1,01, т. е. $x\cdot(-291) \le -297,\ x = 1{,}01^{N-1} \ge \dfrac{297}{291} = 1{,}0206\dots$

Так как $1{,}01^2 = 1{,}0201 < 1{,}0206\dots$, $1{,}01^3 = 1{,}030301 > 1{,}0206\dots$, то $N - 1 = 3$, $N = 4$.

Приведём другой вариант решения.

Если бы банк не брал процентов, то долг можно было бы вернуть за 3 месяца. Банк за 3 месяца возьмет меньше, чем 3% от первоначальной суммы в 900 тыс., т.е. меньше 27 тыс. Поэтому то, что забирает банк, точно можно будет оплатить в 4-й месяц, потратив меньше 300 тыс.

Ответ: 4.

15. Задание 17 № 507275. 31 декабря 2014 года Валерий взял в банке 1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на определённое количество процентов), затем Валерий переводит очередной транш. Валерий выплатил кредит за два транша, переводя в первый раз 660 тыс рублей, во второй — 484 тыс. рублей. Под какой процент банк выдал кредит Валерию?

Решение.

Пусть x- это процент, под который банк выдал кредит Валерию. Из условия следует, что на 31 декабря 2015 года у Валерия был долг:

$$1000000(1+0{,}01\mathrm{x})$$

Из этого долга он погасил 660 тыс. рублей. Перед вторым траншем его долг составлял:

$$(1000000(1+0{,}01\mathrm{x}) - 660000)(1+0{,}01\mathrm{x})$$

И он полностью погасил данную сумму 484 тыс. рублей.

Составим уравнение:

$$(1000000(1+0{,}01\mathrm{x}) - 660000)(1+0{,}01\mathrm{x}) = 484000$$
$$(340000 + 10000\mathrm{x})(1+0{,}01\mathrm{x}) = 484000$$
$$340000 + 3400\mathrm{x} + 10000\mathrm{x} + 100\mathrm{x}^2 = 484000$$
$$x^2 + 134x - 1440 = 0$$
$$x_1 = 10, x_2 = -144$$

16. Задание 17 № 511109. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплат кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк x рублей. Какой должна быть сумма x, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - x$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - x = (Sb - x)b - x = Sb^2 - (1+b)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1+b+b^2)x = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1}\cdot x.$$

После четвёртой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1+b+b^2+b^3)x = Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1}\cdot x.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1}\cdot x = 0, \text{ откуда } x = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}.$$

При $S = 6\ 902\ 000$ и $a = 12{,}5$, получаем: $b = 1{,}125$ и

$$x = \frac{6\ 902\ 000\cdot 1{,}601806640625\cdot 0{,}125}{0{,}601806640625} = 2\ 296\ 350\ (\text{рублей}).$$

Ответ: 2 296 350.

17. Задание 17 № 507284. 31 декабря 2014 года Тимофей взял в банке 7 007 000 рублей в кредит под 20% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 20%), затем Тимофей переводит в банк платёж. Весь долг Тимофей выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1 b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1 + b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1 + b + b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X.$$

По условию тремя выплатами Тимофей погасил кредит полностью, поэтому

$$Sb^3 - \frac{b^3 - 1}{b - 1} \cdot X = 0,$$

откуда $X = \frac{Sb^3(b-1)}{(b^3-1)}$.

Рассуждая аналогично, находим, что если бы Тимофей гасил долг двумя равными выплатами, то каждый год он должен был бы выплачивать $Y = \frac{Sb^2}{b+1}$ рублей. Значит, он отдал банку на $3X - 2Y$ больше.

При $S = 7007000$ и $a = 20$, получаем: $b = 1,2$ и

$$X = \frac{7\,007\,000 \cdot 1,728 \cdot 0,2}{0,728} = 3\,326\,400 \text{ (рублей).}$$

$$Y = \frac{7\,007\,000 \cdot 1,44}{2,2} = 4\,586\,400 \text{ (рублей).}$$

Значит, $3X - 2Y = 806400.$

Ответ: 806400.

18. Задание 17 № 508217. 31 декабря 2014 года Савелий взял в банке 7 378 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Савелий Переводит в банк платёж. Весь долг Савелий выплатил за 3 равных платежа. На сколько рублей меньше он бы отдал банку, если бы смог выплатить долг за 2 равных платежа?

Решение.

Заметим, что увеличение долга на 12,5% есть увеличение его в $\frac{9}{8}$ раза.

Дата	**Долг при условии, что Савелий выплатил долг за 3 равных платежа**	**Долг при условии, что Савелий выплатил долг за 2 равных платежа**
31.12.2014	Долг: 7 378 000 руб.	Долг: 7 378 000 руб.
31.12.2015	Долг увеличен, стал $7378000\cdot\frac{9}{8}$ руб.	Долг увеличен, стал $7378000\cdot\frac{9}{8}$ руб.
До 31.12.2016	Савелий перевел в банк x руб. Долг уменьшился и стал $7378000\cdot\frac{9}{8}-x$ руб.	Савелий перевел в банк y руб. Долг уменьшился и стал $7378000\cdot\frac{9}{8}-y$ руб.
31.12.2016	Долг увеличен в $\frac{9}{8}$раза, стал $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{9}{8}x$ руб.	Долг увеличен в $\frac{9}{8}$раза, стал $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{9}{8}y$ руб.
До 31.12.2017	Савелий перевел в банк x руб. Долг уменьшился и стал $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{9}{8}x-x=$ руб., т. е. $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{17}{8}x$ руб.	Савелий перевел в банк y руб. Долг уменьшился и стал $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{9}{8}y-y=$ руб., т. е. $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{17}{8}y$ руб. Савелий расплатился за 2 равных платежа. Долга нет. Т. е. $7378000\cdot\frac{81}{64}-\frac{17}{8}y=0$
31.12.2017	Долг увеличен в $\frac{9}{8}$ раза, стал $7378000\cdot\frac{729}{512}-\frac{153}{64}x$ руб.	Долг 0 руб.
До 31.12.2018	Савелий перевел в банк x руб. Долг уменьшился и стал $7378000\cdot\frac{729}{512}-\frac{153}{64}x-x=$ руб., т.е. $7378000\cdot\frac{729}{512}-\frac{217}{64}x$ руб. Савелий расплатился за 3 равных платежа. Долга нет. Т.е. $7378000\cdot\frac{729}{512}-\frac{217}{64}x=0$	Долг 0 руб.

Из таблицы получаем, что ежегодные платежи в первом случае: $x=7\ 378\ 000\cdot\frac{729}{512}\cdot\frac{64}{217}=3\ 098\ 250$ руб. Во втором случае: $y=7\ 378\ 000\cdot\frac{81}{64}\cdot\frac{8}{17}=4\ 394\ 250$ руб. Найдём насколько рублей меньше отдал бы Савелий банку, если бы выплачивал долг двумя равными платежами:

$$3\ 098\ 250\cdot 3-4\ 394\ 250\cdot 2=506\ 250 \text{ руб.}$$

Ответ: 506 250.

19. Задание 17 № 508215. 31 декабря 2014 года Дмитрий взял в банке 4 290 000 рублей в кредит под 14,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 14,5%), затем Дмитрий переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Дмитрий выплатил долг двумя равными платежами (то есть за два года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_1 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

По условию двумя выплатами Дмитрий должен погасить кредит полностью, поэтому $Sb^2 - (1+b)X = 0$, откуда $X = \dfrac{Sb^2}{b+1}$.

При $S = 4\,290\,000$ и $a = 14{,}5$, получаем: $b = 1{,}145$ и

$$X = \frac{4290000 \cdot 1,311025}{2,145} = 2622050 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 2 622 050.

20. Задание 17 № 507212. 31 декабря 2014 года Алексей взял в банке 6 902 000 рублей в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Алексей переводит в банк X рублей. Какой должна быть сумма X, чтобы Алексей выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют $a\%$. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0,01a$. После первой выплаты сумма долга составит $S_1 = Sb - X$. После второй выплаты сумма долга составит

$$S_2 = S_1b - X = (Sb - X)b - X = Sb^2 - (1+b)X.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_3 = Sb^3 - (1+b+b^2)X = Sb^3 - \frac{b^3-1}{b-1} \cdot X.$$

После четвертой выплаты сумма оставшегося долга равна

$$S_4 = Sb^4 - (1+b+b^2+b^3)X = Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X.$$

По условию четырьмя выплатами Алексей должен погасить кредит полностью, поэтому

$$Sb^4 - \frac{b^4-1}{b-1} \cdot X = 0 \Leftrightarrow X = \frac{Sb^4(b-1)}{b^4-1}$$

При $S = 6902000$ и $a = 12,5$, получаем: $b = 1,125 = \dfrac{9}{8}$ и

$$\mathrm{X} = \frac{6902000 \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^4 \cdot \frac{1}{8}}{\left(\frac{9}{8}\right)^4 - 1} = \frac{6902000 \cdot 9^4 \cdot 8^4}{8^5 \cdot (9^4 - 8^4)} = \frac{6902000 \cdot 9^4}{8 \cdot (9-8) \cdot (9+8) \cdot (9^2+8^2)} = \frac{6902000 \cdot 81 \cdot 81}{8 \cdot 17 \cdot 145} = 2296350 \text{ (рублей)}$$

Ответ: 2 296 350.

21. Задание 17 № 507280. 31 декабря 2014 года Ярослав взял в банке некоторую сумму в кредит под 12,5% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 12,5%), затем Ярослав переводит в банк 2 132 325 рублей. Какую сумму взял Ярослав в банке, если он выплатил долг четырьмя равными платежами (то есть за четыре года)?

Решение.

Заметим сначала, что увеличить число на $12,5\%$ это тоже самое, что умножить это число на $\frac{9}{8}\cdot$ Пусть Ярослав взял в банке N рублей, а его ежегодный платеж равен a (в данном случае $a=2132325$). Тогда из условия следует уравнение: $\left(\left(\left(\frac{9}{8}N-a\right)\frac{9}{8}-a\right)\frac{9}{8}-a\right)\frac{9}{8}-a=0.$ Раскрывая скобки, получаем следующее:

$$\left(\frac{9}{8}\right)^4\cdot N=a\left(\left(\frac{9}{8}\right)^3+\left(\frac{9}{8}\right)^2+\frac{9}{8}+1\right).$$

Отсюда

$$N=\frac{a\left(\frac{729+81\cdot 8+9\cdot 64+512}{8^3}\right)}{\frac{9^4}{8^4}}=\frac{8a(729+648+576+512)}{9^4}=$$

$$=\frac{8\cdot 2465a}{9^4}=\frac{19720\cdot 2132325}{9^4}=19720\cdot 325=6409000.$$

Ответ: 6409000 рублей.

22. Задание 17 № 510022. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - \left(1 + m + m^2\right)x = am^3 - \frac{m^3-1}{m-1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \dfrac{m^3-1}{m-1} \cdot x = 0,$ откуда $x = \dfrac{am^3(m-1)}{m^3-1}$. При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем: $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Приведём другое решение.

Пусть x — один из трёх разовых платежей. Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9930000 \cdot 1{,}1 - x$. После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x$. Сумма долга после третьего платежа: $((9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x$. Третьим платежом Сергей должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю:

$$((9930000 \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x) \cdot 1{,}1 - x = 0 \Leftrightarrow 9930000 \cdot 1{,}1^3 - 1{,}1(1{,}1x + x) - x = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow 9930000 \cdot 1{,}1^3 - 3{,}31x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9930000 \cdot 1{,}1^3}{3{,}31} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

23. Задание 17 № 510054. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение.

Пусть сумма кредита равна a, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют k %. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01k$. После первой выплаты сумма долга составит: $a_1 = am - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$a_2 = a_1 m - x = (am - x)\,m - x = am^2 - mx - x = am^2 - (1+m)\,x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$a_3 = am^3 - \left(1 + m + m^2\right)x = am^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1}\cdot x.$$

По условию тремя выплатами Сергей должен погасить кредит полностью, поэтому $am^3 - \dfrac{m^3-1}{m-1}\cdot x = 0,$ откуда $x = \dfrac{am^3\,(m-1)}{m^3 - 1}$. При $a = 9\,930\,000$ и $k = 10$, получаем: $m = 1{,}1$ и

$$x = \frac{9930000 \cdot 1,331 \cdot 0,1}{0,331} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Приведём другое решение.

Пусть x — один из трёх разовых платежей. Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9930000 \cdot 1,1 - x$. После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9930000 \cdot 1,1 - x)\cdot 1,1 - x$. Сумма долга после третьего платежа: $((9930000 \cdot 1,1 - x)\cdot 1,1 - x)\cdot 1,1 - x$. Третьим платежом Сергей должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю:

$$((9930000 \cdot 1,1 - x)\cdot 1,1 - x)\cdot 1,1 - x = 0 \Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 1,1(1,1x + x) - x = 0 \Leftrightarrow .$$

$$\Leftrightarrow 9930000 \cdot 1,1^3 - 3,31x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9930000 \cdot 1,1^3}{3,31} = 3993000 \text{ (рублей)}.$$

24. Задание 17 № 507208. 31 декабря 2014 года Пётр взял в банке некоторую сумму в кредит под некоторый процент годовых. Схема выплаты кредита следующая — 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на a%), затем Пётр переводит очередной транш. Если он будет платить каждый год по 2 592 000 рублей, то выплатит долг за 4 года. Если по 4 392 000 рублей, то за 2 года. Под какой процент Пётр взял деньги в банке?

Решение.

Пусть S — сумма кредита. Обозначим ежегодные платежи A_1 и A_2 соответственно. Сумма долга каждый год увеличивается на $a\%$, то есть сумма долга умножается на коэффициент $b=1+0{,}01a$. После первой выплаты сумма долга станет равной $S_1=Sb-A_1$, после второй выплаты: $S_2=(Sb-A_1)b-A_1$, после третье выплаты: $S_3=((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1$, после четвёртой выплаты: $S_4=(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1$. Причём долг будет погашен полностью, получаем, то есть $(((Sb-A_1)b-A_1)b-A_1)b-A_1=0$. Аналогично получаем уравнение для случая, когда выплаты совершаются платежами размером A_2: $S_2'=(Sb-A_2)b-A_2$. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} Sb^4-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2-A_2b-A_2=0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Sb^2\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0, \\ Sb^2=A_2b+A_2. \end{cases}$$

Подставим выражение для Sb^2 в первое уравнение: $(A_2+A_2b)\cdot b^2-A_1b^3-A_1b^2-A_1b-A_1=0$. Преобразуем это уравнение:

$$(A_2-A_1)b^3+(A_2-A_1)b^2-A_1b-A_1=0 \Leftrightarrow b^2(A_2-A_1)(b+1)-A_1(b+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (b+1)((A_2-A_1)b^2-A_1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b^2=\dfrac{A_1}{A_2-A_1}. \end{array}\right.$$

Подставляя числовые значения получаем:

$$\left[\begin{array}{l} b=-1, \\ b=-1{,}2, \\ b=1{,}2. \end{array}\right.$$

Отрицательные корни не подходят по условию задачи, значит, $b=1{,}2$, откуда $a=20$, то есть Пётр взял деньги в банке под 20%.

Ответ: 20%.

25. Задание 17 № 507714. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счёт, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счёте. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счёт, на который ежегодно кладёт по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Решение.

Через n лет 1 сентября на первом счёте будет сумма

$$1000+1000\cdot 1,2+\ldots+1000\cdot 1,2^n=1000(1+1,2+\ldots+1,2^n)=1000\cdot\frac{1,2^{n+1}-1}{1,2-1}=5000(1,2^{n+1}-1)\ (\text{руб.}).$$

В это же время на втором счёте будет сумма

$$2200+2200\cdot 1,44+\ldots+2200\cdot 1,44^{n-6}=2200\cdot\frac{1,44^{n-5}-1}{1,44-1}=5000(1,44^{n-5}-1)\ (\text{руб.}).$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^{n+1}-1)=5000(1,44^{n-5}-1)\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,44^{n-5}\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,2^{2(n-5)}\Leftrightarrow n+1=2n-10\Leftrightarrow n=11.$$

Таким образом, суммы на счетах сравняются через 11 лет после открытия первого вклада то есть в 2019 году.

Ответ: 2019.

26. Задание 17 № 507890. Оля хочет взять в кредит 100 000 рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10 % годовых. На какое минимальное количество лет может Оля взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 24000 рублей?

Решение.

Пусть сумма кредита равна S, а годовые составляют a %. Тогда в последний день каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $b = 1 + 0{,}01a$ Составим таблицу выплат.

Год	**Долг банку (руб.)**	**Остаток доли после выплаты (руб.)**
0	100000	–
1	110000	86000
2	94600	70600
3	77660	53660
4	59026	35026
5	38528,6	14528,6
6	15981,46	0

Значит, Оля погасит кредит за 6 лет.

Ответ: 6.

27. Задание 17 № 507227. Савелий хочет взять в кредит 1,4 млн рублей. Погашение кредита происходит раз в год равными суммами (кроме, может быть, последней) после начисления процентов. Ставка процента 10% годовых. На какое минимальное количество лет может Савелий взять кредит, чтобы ежегодные выплаты были не более 330 тысяч рублей?

Решение.

Ясно, что чем больше годовые выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 330 тыс. рублей. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг после начисления процентов, а во втором — долг после выплаты. Для упрощения расчётов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Годы	Долг до выплаты (тыс. руб)	Долг после выплаты (тыс. руб)
1	1540	1210
2	1331	1001
3	1101,1	771,1
4	848,21	518,21
5	570,03	240,03
6	264,03	0

Заметим, что в последний год выплата составит менее 330 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 лет.

Ответ: 6 лет.

28. Задание 17 № 508626. Имеется три пакета акций. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, а суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. руб. до 20 тыс. руб., а цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. руб. и не больше 60 тыс. руб. Определите, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Решение.

Введём обозначения так, как показано в таблице (выделено цветом), и затем заполним оставшиеся ячейки по данным из условия:

	Первый пакет	Второй пакет	Третий пакет
Цена одной акции, тыс. руб.	x		
Количество акций в пакете, шт	y	ly	$y(l+1)$
Цена пакета, тыс. руб.	xy	$4xy$	$5xy$

Заметим, что цена одной акции из второго пакета равна $\frac{4x}{l}$ тыс. руб., а цена одной акции из третьего пакета равна $\frac{5x}{l+1}$ тыс. руб., причем из условия следует, что $1<l<4$. Требуется определить наибольшее и наименьшее значение величины $\frac{y}{2y(l+1)}=\frac{1}{2(l+1)}$, выраженное в процентах. Из условия имеем:

$$\begin{cases} 16 \le \frac{4x}{l} - x \le 20, \\ 42 \le \frac{5x}{l+1} \le 60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16l}{4-l} \le x \le \frac{20l}{4-l}, \\ \frac{42}{5}(l+1) \le x \le 12(l+1). \end{cases}$$

Отрезки [a; b] и [c; d] пересекаются тогда и только тогда, когда $a \le d$ и $c \le b$ одновременно, поэтому полученная система имеет решения тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} \frac{16l}{4-l} \le 12(l+1), \\ \frac{42}{5}(l+1) \le \frac{20l}{4-l}. \end{cases}$$

Решим эту систему на интервале (1; 4):

$$\begin{cases} \dfrac{16l}{4-l} \leq 12(l+1), \\ \dfrac{42}{5}(l+1) \leq \dfrac{20l}{4-l} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4l \leq 3(l+1)(4-l), \\ 21(l+1)(4-l) \leq 50l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3l^2-5l-12 \leq 0, \\ 21l^2-13l-84 \geq 0 \end{cases} \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \leq l \leq 3, \\ \left[\begin{array}{l} l \geq \dfrac{7}{3}, \\ l \leq -\dfrac{12}{7}. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{3} \leq l \leq 3.$$

Тем самым,

$$\frac{20}{3} \leq 2(l+1) \leq 8 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2(l+1)} \leq \frac{3}{20} \Leftrightarrow 0,125 \leq \frac{1}{2(l+1)} \leq 0,15,$$

т. е. искомая доля меняется от 12,5% до 15%.

Ответ: 12,5% и 15%.

Примечание.

Заметим, что при найденных значениях l существует такие значения цены акций первого пакета x, что цены акций второго и третьего пакетов подчиняются указанным в условии ограничениям. При этом количество акций в первом пакете может быть любым натуральным числом: ни условие, ни решение от этого количества не зависят. С другой стороны, для решения задачи существенно, что цены всех акций в каждом пакете одинаковы. Об этом авторам следовало написать в условии более отчетливо.

Приведём решение И. В. Фельдман.

Будем считать, что общая стоимость акций фиксирована. Давайте для начала введем переменные:

	Первый пакет	Второй пакет	Третий пакет
Количество акций	n	m	$n+m$
Стоимость акций	x	y	z

Тогда стоимость первого пакета акций равна nx, второго my, третьего $(n+m)z$.

Теперь внимательно читаем задачу:

1. Первый пакет в 4 раза дешевле второго, следовательно, $4nx = my$.

2. Суммарная стоимость первого и второго пакетов совпадает со стоимостью третьего пакета, следовательно, $nx + my = z(n+m)$.

3. Одна акция из второго пакета дороже одной акции из из первого пакета на величину, заключенную в пределах от 16 тыс. р. до 20 тыс. р., следовательно, $16 \leq y - x \leq 20$.

4. Цена акции из третьего пакета не меньше 42 тыс. р. и не больше 60 тыс. р., следовательно, $42 \leq z \leq 60$.

Получили систему условий:

$$\begin{cases} 4nx = my, \\ nx + my = z(n+m), \\ 16 \leq y - x \leq 20, \\ 42 \leq z \leq 60. \end{cases}$$

В первую очередь разберемся с неравенствами. По условию задачи нам нужно найти, какой наименьший и наибольший процент от общего количества акций может содержаться в первом пакете.

Этот процент равен

$$\frac{n}{n+m+(n+m)} \cdot 100\% = \frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\%.$$

Сначала найдем, при каких условиях этот процент будет наименьшим. Общее суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете. Поэтому чем меньше акций в третьем пакете, тем меньше суммарное количество акций в первых двух пакетах. Акций в третьем пакете тем меньше, чем больше их стоимость. Следовательно, чтобы получить наименьший процент акций из первого пакета, мы должны взять наибольшую стоимость акций из третьего, то есть берем $z = 60$.

Далее. Чем дешевле акции из второго пакета, тем их больше, и тем меньше остается акций в первом пакете (суммарное количество акций первых двух пакетов совпадает с общим количеством акций в третьем пакете). Следовательно, разность между стоимостью акции из первого пакета и акции из второго пакета должна быть наименьшей. Поэтому берем $y - x = 16$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} 4nx = my, \\ nx + my = z(n+m), \\ y - x = 16, \\ z = 60. \end{cases}$$

В этой систем 4 уравнения и 5 неизвестных, поэтому мы не можем найти значение каждой неизвестной величины. Но мы можем найти их соотношение. Для этого вернемся вернемся к вопросу задачи. Нам нужно найти значение выражения $\frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\%$ (1) Рассмотрим дробь $\frac{n}{2(n+m)}$. Обратная ей дробь равна $\frac{2(n+m)}{n} = 2 + 2\frac{n}{m}$. То есть если мы найдем отношение $\frac{m}{n}$, то задача будет решена. Из первого, второго и четвертого уравнений системы получим $5nx = 60(n+m)$ (2) Из третьего уравнения выразим y через x, получим $y = x + 16$. Подставим это выражение для y в первое уравнение и выразим x через n и m:

$$4nx = m(x+16) \Leftrightarrow 4nx = mx + 16m \Leftrightarrow 4nx - mx = 16m \Leftrightarrow x(4n-m) = 16m \Leftrightarrow x = \frac{16m}{4n-m}.$$

Подставим это выражение для x в уравнение (2). Получим: $5n \cdot \frac{16m}{4n-m} = 60(n+m)$

Разделим обе части равенства на 20 и умножим на $4n - m$. Получим: $4mn = 3(n+m)(4n-m)$ Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим: $3m^2 - 5mn - 12n^2 = 0$. Разделим обе части равенства на n^2, и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$3\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 5\frac{m}{n} - 12 = 0$$

Получим 2 значения $\frac{m}{n} = -\frac{4}{3}$ и $\frac{m}{n} = 3$.

Так как n и m — натуральные числа, нам подходит только $\frac{m}{n} = 3$. То есть $m = 3n$. Подставим это соотношение в выражение (1):

$$\frac{n}{2(n+m)} \cdot 100\% = \frac{n}{8n} \cdot 100\% = 12{,}5$$

Итак, наименьший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете, равен 12,5%. Аналогичным образом найдем наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} 4nx = my, \\ nx + my = z(n+m), \\ y - x = 20, \\ z = 42. \end{cases}$$

Из первого, второго и четвертого уравнений получим $5nx = 42(n+m)$ (3). Из третьего уравнения выразим y через x, получим $y = x + 20$. Подставим это выражение для y в первое уравнение и выразим x через n и m. Получим: $x = \frac{20m}{4n-m}$. Подставим это выражение для x в уравнение (3). Получим: $5n \cdot \frac{20m}{4n-m} = 42(n+m)$ Разделим обе части равенства на 2 и умножим на $4n - m$. Получим: $50mn = 21(n+m)(4n-m)$. Раскроем скобки, приведем подобные члены и перенесем слагаемые в одну сторону, получим: $84n^2 + 13mn - 21m^2 = 0$. Разделим обе части равенства на n^2, умножим на -1 и решим квадратное уравнение относительно $\frac{m}{n}$:

$$21\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 13\frac{m}{n} - 84 = 0$$

Получим 2 значения: $\frac{m}{n} = -\frac{12}{7}$ и $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$. Так как n и m — натуральные числа, нам подходит только $\frac{m}{n} = \frac{7}{3}$. То есть $m = \frac{7}{3}n$. Подставим это соотношение в выражение (1):

$$\frac{n}{2(n+m)}\cdot 100\% = \frac{n}{2+\frac{7}{3}n}\cdot 100\% = \frac{3}{20}\cdot 100\% = 15\%.$$

Итак, наибольший процент от общего количества акций, который может содержаться в первом пакете, равен 15%.
Ответ: 12,5% и 15%.

29. Задание 17 № 508629. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент, свой для каждого банка. В начале года Степан положил 60% некоторой суммы денег в первый банк, а оставшуюся часть суммы во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равна 590 000 руб., а к концу следующего года 701 000 руб. Если бы Степан первоначально положил 60% своей суммы во второй банк, а оставшуюся часть в первый, то по истечении одного года сумма вкладов стала бы равной 610 000 руб. Какова была бы сумма вкладов в этом случае к концу второго года?

Решение.

Пусть сумма денег, которые Степан положил в два разных банка, составляет x руб. Коэффициент повышения суммы, обусловленный годовой процентной ставкой на вклад, составляет в первом банке u, во втором v (это — не процентная ставка).

Тогда к концу первого года хранения (60% процентов в первом банке и 40% во втором банке) вся сумма вклада стала $0,6xu+0,4xv=590000$ (руб.).

Если бы Степан первоначально положил 60% всей суммы во второй банк, а 40% — в первый банк, то вся сумма была бы равна $0,4xu+0,6xv=610000$ (руб.).

Решим систему уравнений $\begin{cases}0,6xu+0,4xv=590000,\\ 0,4xu+0,6xv=610000\end{cases}$ относительно xu и xv.

Для удобства в расчетах заменим число 590 000 выражением 590 t, 610 000 — выражением 610 t, $t=1000$.

Тогда приведенная система уравнений после некоторых преобразований будет выглядеть так: $\begin{cases}3xu+2xv=2950t,\\ 2xu+3xv=3050t.\end{cases}$

Решим ее относительно xu и xv.

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2,\\ 2 & 3\end{vmatrix}=9-4=5;\ \Delta_{xu}=\begin{vmatrix}2950t & 2,\\ 3050t & 3\end{vmatrix}=8850t-6100t=2750t;$$

$$\Delta_{xv}=\begin{vmatrix}3 & 2950t,\\ 2 & 3050t\end{vmatrix}=9150t-5900t=3250t;\ xu=\frac{2750t}{5}=550t;\ xv=\frac{3250t}{5}=650t;\ \frac{u}{v}=\frac{11}{13};\ u=\frac{11v}{13}.$$

Теперь воспользуемся тем, что к концу второго года сумма вкладов (в реале) стала 701 000 руб., т.е. $701t$ руб.

$$0,6xu^2+0,4xv^2=701t \Leftrightarrow 0,6\cdot 550t\cdot\frac{11v}{13}+0,4\cdot 650t\cdot v=701t \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 330\cdot 11v+13\cdot 260v=13\cdot 701 \Leftrightarrow 3630v+3380v=13\cdot 701 \Leftrightarrow 7010v=13\cdot 701 \Leftrightarrow v=1,3.$$

При $v=1,3;\ u=\frac{11\cdot 1,3}{13}=1,1.$

Теперь нетрудно найти и искомую сумму.

$$0,4xu^2+0,6xv^2=0,4\cdot 550t\cdot 1,1+0,6\cdot 650t\cdot 1,3=242t+507t=749t=749000 \text{ (руб.)}$$

Ответ: 749 000.

30. Задание 17 № 506957. Сергей взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную Сергеем. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.

Сколько процентов от суммы кредита составила общая сумма, уплаченная Сергеем банку (сверх кредита)?

Решение.

Предложение «Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину» означает: Сергей взятую сумму, без учета процентов, возвращал равными долями.

Общая сумма, уплаченная Сергеем банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки.

В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла $0,12S$, во втором — $0,12\cdot\frac{8}{9}S$, в третьем — $0,12\cdot\frac{7}{9}S, \ldots$, в восьмом — $0,12\cdot\frac{2}{9}S$, наконец, в последнем — $0,12\cdot\frac{1}{9}S$.

Всего за 9 месяцев:

$$0,12S\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+\ldots+\frac{1}{9}\right)=0,12S\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{9}\right)}{2}\cdot 9=0,12S\cdot\frac{9+1}{2}=0,6S.$$

Искомое процентное отношение есть 60 $(0,6S:S\cdot 100)$.

Ответ: 60.

31. Задание 17 № 508975. Алексей взял кредит в банке на срок 12 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r% этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 13 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{11S}{12},\ \ldots,\frac{2S}{12},\ \frac{S}{12},\ 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{11kS}{12},\ \ldots,\frac{2kS}{12},\ \frac{kS}{12}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{12},\ \frac{11(k-1)S+S}{12},\ \ldots,\frac{2(k-1)S+S}{12},\ \frac{(k-1)S+S}{12}.$$

Всего следует выплатить:

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{11}{12}+\ldots+\frac{2}{12}+\frac{1}{12}\right)=S\left(1+\frac{13(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 13% больше суммы, взятой в кредит, поэтому:

$$13(k-1)=0,26\Leftrightarrow k=1,02.$$

Откуда получаем, что $r=2$.

Ответ: 2.

32. Задание 17 № 509004. Алексей взял кредит в банке на срок 17 месяцев. По договору Алексей должен вернуть кредит ежемесячными платежами. В конце каждого месяца к оставшейся сумме долга добавляется r% этой суммы и своим ежемесячным платежом Алексей погашает эти добавленные проценты и уменьшает сумму долга. Ежемесячные платежи подбираются так, чтобы долг уменьшался на одну и ту же величину каждый месяц (на практике такая схема называется «схемой с дифференцированными платежами»). Известно, что общая сумма, выплаченная Алексеем банку за весь срок кредитования, оказалась на 27 % больше, чем сумма, взятая им в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию долг Алексея должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{16S}{17},\ \ldots,\frac{2S}{17},\ \frac{S}{17},\ 0.$$

К концу каждого месяца к сумме долга добавляется $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$. Тогда последовательность сумм долга вместе с процентами такова:

$$kS,\ \frac{16kS}{17},\ \ldots,\frac{2kS}{17},\ \frac{kS}{17}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{17},\ \frac{16(k-1)S+S}{17},\ \ldots,\frac{2(k-1)S+S}{17},\ \frac{(k-1)S+S}{17}.$$

Всего следует выплатить:

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{16}{17}+\ldots+\frac{2}{17}+\frac{1}{17}\right)=S\left(1+\frac{18(k-1)}{2}\right).$$

Общая сумма выплат оказалась на 27% больше суммы, взятой в кредит, поэтому:

$$9(k-1)=0,27 \Leftrightarrow k=1,03.$$

Откуда получаем, что $r=3$.

Ответ: 3.

33. Задание 17 № 509025. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10 %. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(2k+5)\cdot 1,1^{30-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(2k+5)\cdot(1,1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1,1)^{30-k}(2k+5-1,1\cdot(2(k-1)+5))=(1,1)^{30-k}(1,7-0,2k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 8$ и $b_k<0$ при $k>8$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=8$.

Ответ: в течение восьмого года.

Приведем другое решение.

Продать ценную бумагу нужно в том момент, когда 10% от стоимости станут составлять не меньше чем 2 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 20 тыс. рублей.

Это произойдет через семь лет после покупки ценной бумаги (7 + 7 · 2 = 21).

Таким образом ценную бумагу нужно продать в течении восьмого года (сразу по прошествии семи лет)

34. Задание 17 № 509162. Алексей приобрёл ценную бумагу за 8 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 1 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 8%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через двадцать пять лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение.

Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через двадцать пять лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(k+7)\cdot(1,08)^{25-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(k+7)\cdot(1,08)^{25-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 25. Рассмотрим приращение

$$b_k=a_k-a_{k-1}=(1,08)^{25-k}(k+7-1,08\cdot((k-1)+7))=(1,08)^{25-k}(0,52-0,08k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\leq 6$ и $b_k<0$ при $k>6$. Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=6$.

Ответ: в течение шестого года.

Приведем другое решение.

Продать ценную бумагу нужно в том момент, когда 8% от стоимости станут составлять не меньше чем 1 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 12,5 тыс. рублей.

Это произойдет через пять лет после покупки ценной бумаги (8 + 5 · 1 = 13).

Таким образом ценную бумагу нужно продать в течении шестого года (сразу по прошествии пяти лет)

35. Задание 17 № 509972. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшиться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39},\ldots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на $r\%$. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39},\ldots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S+S}{39},\ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{39},\ \frac{(k-1)S+S}{39}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{38}{39}+\cdots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S\left(1+20(k-1)\right).$$

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1)=0,2\Leftrightarrow k=1,01\Leftrightarrow r=1.$$

Ответ: 1.

36. Задание 17 № 510103. 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшиться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{18S}{19},\ \ldots,\ \frac{2S}{19},\ \frac{S}{19},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{18kS}{19},\ \ldots,\ \frac{2kS}{19},\ \frac{kS}{19}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{19},\ \frac{18(k-1)S+S}{19},\ \ldots,\ \frac{2(k-1)S+S}{19},\ \frac{(k-1)S+S}{19}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{18}{19}+\ldots+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right)=S(1+10(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$10(k-1)=0,3\Leftrightarrow k=1,03\Leftrightarrow r=3.$$

Ответ: 3.

Примечание Дмитрия Гущина.

Укажем общие формулы для решения задач этого типа. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S, причём каждый платежный период долг сначала возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за всё время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П}=\frac{r}{100}\cdot\frac{n+1}{2}S,\qquad \text{В}=S+\text{П}=S\left(1+\frac{r(n+1)}{200}\right).$$

В условиях нашей задачи получаем: $\frac{r(n+1)}{200}S=0,3S$, откуда для $n=19$ устно находим $r=3$.

Доказательство формул, например, немедленно следует из вышеприведённого решения задачи путём замены 19 месяцев на n месяцев и использовании формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии.

37. Задание 17 № 510110. 15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на r% по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите r.

Решение.

Пусть сумма кредита равна S. По условию, долг перед банком по состоянию на 15-е число должен уменьшиться до нуля равномерно:

$$S,\ \frac{38S}{39},\ \dots,\ \frac{2S}{39},\ \frac{S}{39},\ 0.$$

Первого числа каждого месяца долг возрастает на r%. Пусть $k=1+\frac{r}{100}$, тогда последовательность размеров долга на 1-ое число каждого месяца такова:

$$kS,\ \frac{38kS}{39},\ \dots,\ \frac{2kS}{39},\ \frac{kS}{39}.$$

Следовательно, выплаты должны быть следующими:

$$(k-1)S+\frac{S}{39},\ \frac{38(k-1)S+S}{39},\ \dots,\ \frac{2(k-1)S+S}{39},\ \frac{(k-1)S+S}{39}.$$

Всего следует выплатить

$$S+S(k-1)\left(1+\frac{38}{39}+\dots+\frac{2}{39}+\frac{1}{39}\right)=S(1+20(k-1)).$$

Общая сумма выплат на 20% больше суммы, взятой в кредит, поэтому

$$20(k-1)=0,2;\ k=1,01;\ r=1.$$

Ответ: 1.

38. Задание 17 № 513107. В июле планируется взять кредит в банке на сумму 28 млн рублей на некоторый срок (целое число лет). Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг возрастает на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

— в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на июль предыдущего года.

Чему будет равна общая сумма выплат после полного погашения кредита, если наибольший годовой платёж составит 9 млн рублей?

Решение.

Пусть кредит планируется взять на n лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$28,\ \frac{28(n-1)}{n},\ldots,\frac{28\cdot 2}{n},\ \frac{28}{n},\ 0.$$

По условию, каждый январь долг возрастает на 25%, значит, последовательность размеров долга (в млн рублей) в январе такова:

$$35,\ \frac{35(n-1)}{n},\ldots,\frac{35\cdot 2}{n},\ \frac{35}{n}.$$

Следовательно, выплаты (в млн рублей) должны быть следующими:

$$7+\frac{28}{n},\ \frac{7(n-1)+28}{n},\ldots,\frac{\cdot 2+28}{n},\ \frac{7+28}{n}.$$

Получаем: $7+\frac{28}{9}$, откуда $n=14.$ Значит, всего следует выплатить

$$28+7\left(1+\frac{13}{14}+\ldots+\frac{2}{14}+\frac{1}{14}\right)=28+7\cdot\frac{15}{2}=80,5$$ (млн. рублей).

Ответ: 80,5.

Приведём другое решение:

По условию долг уменьшается по арифметической прогрессии:

$$28,\ 28-d,\ 28-2d,\ldots,0.$$

Первая выплата равна $28\cdot 1,25-(28-d)=7+d.$

Вторая выплата равна $(28-d)\cdot 1,25-(28-2d)=7+0,75d.$

Третья выплата равна $(28-2d)\cdot 1,25-(28-3d)=7+0,5d.$

Четвертая выплата равна $(28-3d)\cdot 1,25-(28-4d)=7+0,25d$ и так далее.

Значит, наибольшая выплата — первая, $d=2$, выплат — 14 штук и они составляют арифметическую прогрессию, но с разностью $-0,25d=-0,5.$

Общая выплата равна $9+8,5+8+\ldots+2,5=11,5\cdot 7=80,5.$

Ответ: 80,5.

39. Задание 17 № 512360. По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 10 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 11 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, т. е. умножается на коэффициент 1,1.

Тогда через три года сумма на вкладе «А» равна $1{,}1^3S = 1{,}331S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}11^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S = 1{,}2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}2321\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}331S \Leftrightarrow n > 100\frac{13310-12321}{12321} = 8{,}02... \Leftrightarrow n = 9.$$

Ответ: 9.

40. Задание 17 № 512402. По вкладу «А» банк в течение трёх лет в конце каждого года увеличивает на 20 % сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает на 21 % в течение каждого из первых двух лет. Найдите наименьшее целое число процентов за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад всё ещё останется выгоднее вклада «А».

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 20%, т. е. умножается на коэффициент 1,2.

Тогда через три года сумма на вкладе «А» равна $1{,}2^3S = 1{,}728S$. Аналогично на вкладе «Б» сумма через три года будет равна

$$1{,}21^2\left(1+\frac{n}{100}\right)S = 1{,}4641\left(1+\frac{n}{100}\right)S,$$

где n — натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее целое решение неравенства

$$1{,}4641\left(1+\frac{n}{100}\right)S > 1{,}728S \Leftrightarrow n > 100\frac{17280-14641}{14641} = 18{,}02... \Leftrightarrow n = 19.$$

Ответ: 19.

41. Задание 17 № 513106. 15-го января был выдан полугодовой кредит на развитие бизнеса. В таблице представлен график его погашения.

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в процентах от кредита)	100%	90%	80%	70%	60%	50%	0%

В конце каждого месяца, начиная с января, текущий долг увеличивался на 5%, а выплаты по погашению кредита происходили в первой половине каждого месяца, начиная с февраля. На сколько процентов общая сумма выплат при таких условиях больше суммы самого кредита?

Решение.

Не снижая общности рассуждений, примем начальную сумму кредита за 100 руб. и будем считать, что выплаты производились 10 числа каждого месяца. Составим таблицу выплат:

Дата	14.02	14.03	14.04	14.05	14.06	14.07
Долг, руб.	105	94,5	84	73,5	63	52,5
Выплата, руб.	15	14,5	14	13,5	13	52,5
Остаток долга на день выплаты, руб.	90	80	70	60	50	0
Остаток долга на день выплаты, %	90%	80%	70%	60%	50%	0%

Тем самым, полная сумма выплат равна 15 + 14,5 +14 +13,5 +13 + 52,5 = 122,5 руб., переплата составила 22,5%.

Ответ: 22,5.

42. Задание 17 № 513350. По вкладу «А» банк в конце каждого года планирует увеличивать на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивать эту сумму на 5% в первый год и на одинаковое целое число n процентов и за второй, и за третий годы. Найдите наименьшее значение n, при котором за три года хранения вклад «Б» окажется выгоднее вклада «А» при одинаковых суммах первоначальных взносов.

Решение.

Пусть на каждый тип вклада была внесена одинаковая сумма S. На вкладе «А» каждый год сумма увеличивается на 10%, то есть умножается на коэффициент 1,1. Поэтому через три года сумма на вкладе «А» будет равна

$$1,1^3S = 1,331S.$$

Аналогично сумма на вкладе «Б» будет равна

$$1,05\left(1+\frac{n}{100}\right)^2S,$$

где n — некоторое натуральное число.

По условию требуется найти наименьшее натуральное решение неравенства

$$1,05\cdot(1+\frac{n}{100})^2S > 1,331S, \qquad \left(1+\frac{n}{100}\right)^2 > \frac{1331}{1050} = 1,26...$$

При $n = 13$ неравенство

$$1,13^2 > 1,26...; \quad 1,2769 > 1,26...$$

верно, а при $n = 12$ неравенство

$$1,12^2 > 1,26...; \quad 1,2544 > 1,26...$$

неверно, как и при всех меньших n.

Ответ: 13.