Задачи на оптимальный выбор

1. Задание 17 № 508236. В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю девочек — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждая девочка в классе из 22 человек составляет $\frac{1}{22}$ от общего числа учащихся в этом классе, а в классе из 23 человек — $\frac{1}{23}$ от общего числа учащихся. Значит, если поменять местами девочку из большего класса и мальчика из меньшего, суммарный процент девочек вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из девочек, а в большем классе — 3 девочки и 20 мальчиков.

Решение 2. Пусть в меньший класс распределено x девочек (где $2 \le x \le 22$), тогда в больший класс попало $(25-x)$ девочек. Значит, суммарная доля девочек в двух классах равна $\frac{x}{22}+\frac{25-x}{23}=\frac{x}{506}+\frac{25}{23}$ и представляет собой линейную функцию с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [2; 22], то есть при $x=22.$ Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Ответ: В одном классе — 22 девочки, в другом — 3 девочки и 20 мальчиков.

2. Задание 17 № 513301. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение.

Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, а рабочие первой области одинаково эффективно добывают и алюминий, и никель, они могут добывать любой из металлов. За сутки ими будет добыто 160 · 5 · 0,1 = 80 кг металла.

Пусть во второй области алюминий добывают x рабочих, а никель — 160 − x рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5x}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-x)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{5x}+\sqrt{800-5x}$ для натуральных x, не больших 160. Имеем:

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x}}-\frac{5}{2\sqrt{800-5x}}=\frac{5}{2}\frac{\sqrt{800-5x}-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}\cdot\sqrt{800-5x}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5x}=\sqrt{5x}\underset{x\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}800-5x=5x\Leftrightarrow x=80.$$

При x меньших 80 производная положительна, а при x больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max}=40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу угля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 120 кг металла.

Ответ: 120 кг.

3. Задание 17 № 513302. На каждом из двух комбинатов работает по 100 человек. На первом комбинате один рабочий изготавливает за смену 3 детали A или 1 деталь B. На втором комбинате для изготовления t деталей (и A, и B) требуется t^2 человеко-смен. Оба эти комбината поставляют детали на комбинат, где собирают изделие, причем для его изготовления нужна 1 деталь A и 3 детали B. При этом комбинаты договариваются между собой изготавливать детали так, чтобы можно было собрать наибольшее количество изделий. Сколько изделий при таких условиях может собрать комбинат за смену?

Решение.

Пусть на первом комбинате x рабочих, а на втором комбинате y рабочих заняты на производстве детали A. Внесем данные из условия в таблицу.

	Деталь A		**Деталь B**	
	Количество человек	**Количество деталей**	**Количество человек**	**Количество деталей**
Первая комбинат	x	$3x$	$100-x$	$100-x$
Второй комбинат	y	$\sqrt{y}$	$100-y$	$\sqrt{100-y}$
Всего		$3x+\sqrt{y}$		$100-x+\sqrt{100-y}$

Для производства изделий деталей типа B должно быть в три раза больше деталей типа A:

$$3(3x+\sqrt{y}) = 100-x+\sqrt{100-y} \Leftrightarrow x = 10+0,1\sqrt{100-y}-0,3\sqrt{y} \quad (*)$$

Пусть s шт — количество изделий, оно равно количеству деталей типа A: $s=3x+\sqrt{y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3x+\sqrt{y}=3(10+0,1\sqrt{100-y}-0,3\sqrt{y})+\sqrt{y})=30+0,1(\sqrt{y}+3\sqrt{100-y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y)=\sqrt{y}+3\sqrt{100-y}$ при натуральных значениях y не больших 100. Имеем:

$$f'(y)=\frac{1}{2\sqrt{y}}-\cdot\frac{3}{2\sqrt{100-y}}=\frac{\sqrt{100-y}-3\sqrt{y}}{2\sqrt{100-y}\cdot\sqrt{y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{100-y}=3\sqrt{y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}100-y=9y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области, равным $f(10)=\sqrt{10}+3\sqrt{90}=10\sqrt{10},$ при этом $s=30+\sqrt{10}.$ Количество деталей должно быть натуральным числом, $3<\sqrt{10}<4,$ поэтому рабочие могут произвести, самое большее, 33 детали типа A.

Из (*) находим $x=10$ чел. Это означает, что 10 рабочих первого комбината и 10 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве детали A, за сутки они произведут их 33 шт, оставшиеся 90 рабочих первого комбината и 90 рабочих второго комбината должны быть заняты на производстве деталей B, за сутки они произведут их 99 шт.

Ответ: 33 изделия.

4. Задание 17 № 508257. В 1-е классы поступает 43 человека: 23 мальчика и 20 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 21. После распределения посчитали процент мальчиков в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение.

Решение 1. Вместо суммарного процента будем считать суммарную долю мальчиков — очевидно, эти числа отличаются в 100 раз и достигают своего максимума одновременно. Каждый мальчик в классе из 22 человек составляет $\frac{1}{22}$ от общего числа учащихся в этом классе, а в классе из 21 человек — $\frac{1}{21}$ от общего числа учащихся. Значит, если поменять местами девочку из меньшего класса и мальчика из большего, суммарный процент мальчиков вырастет. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из мальчиков, а в большем классе — 20 девочек и 2 мальчика.

Решение 2. Пусть в меньший класс распределено x мальчиков (где $1 \le x \le 21$), тогда в больший класс попало ($23 - x$) мальчиков. Значит, суммарная доля мальчиков в двух классах равна $\frac{x}{21} + \frac{23-x}{22} = \frac{x}{462} + \frac{23}{22}$ и представляет собой линейную функцию с положительным угловым коэффициентом. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [1; 21], то есть при $x = 21.$ Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из мальчиков, а в большем классе должно быть 20 девочки и 2 мальчика.

Ответ: В одном классе — 21 мальчик, в другом — 20 девочек и 2 мальчика.

5. Задание 17 № 509095. Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	Себестоимость (за 1 тонну)	Отпускная цена (за 1 тонну)	Производственные возможности
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение.

Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x + y = 1$, при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geq 15$ откуда $x \geq \frac{1}{6}$, а $75y \geq 15$, откуда $y \geq \frac{1}{5}$. Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна $100 - 70 = 30$ тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна $135 - 100 = 35$ тыс. руб., а общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y$.

Таким образом, в переводе на математический язык, нам необходимо найти наибольшее значение выражения $75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении следующих условий:

$$(*) \qquad \begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6},\ y \geq \frac{1}{5}. \end{cases}$$

Чтобы найти те x и y, для которых достигается максимум выражения $36x + 35y$ при условиях (*), преобразуем систему (*), выразив y через x:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6},\ y \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ \frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}. \end{cases}$$

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$, получаем: $36x + 35(1 - x) = 35 + x$. Очевидно, что выражение $35 + x$ при условиях $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ принимает наибольшее значение при $x = \frac{4}{5}$.

Значит, наибольшее значение выражения $36x + 35y$ при выполнении условий системы (*) достигается при $x = \frac{4}{5}$, $y = \frac{1}{5}$. Поэтому максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5}\right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс.руб.}$$

Ответ: 2685 тыс. руб.

6. Задание 17 № 509124. Консервный завод выпускает фруктовые компоты в двух видах тары — стеклянной и жестяной. Производственные мощности завода позволяют выпускать в день 90 центнеров компотов в стеклянной таре или 80 центнеров в жестяной таре. Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции в каждом из видов тары должно быть выпущено не менее 20 центнеров. В таблице приведены себестоимость и отпускная цена завода за 1 центнер продукции для обоих видов тары.

Вид тары	Себестоимость, 1 ц.	Отпускная цена, 1 ц.
стеклянная	1500 руб.	2100 руб.
жестяная	1100 руб.	1750 руб.

Предполагая, что вся продукция завода находит спрос (реализуется без остатка), найдите максимально возможную прибыль завода за один день (прибылью называется разница между отпускной стоимостью всей продукции и её себестоимостью).

Решение.

Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство компотов в стеклянной таре, а y — доля мощностей, занятых под производство компотов в жестяной банке. Тогда $x+y=1,$ при этом компотов в стеклянной таре производится $90x$ центнеров, а в жестяной таре — $80y$ центнеров. Прибыль завода с 1 центнера продукции в стеклянной таре равна $2100-1500=600$ руб., прибыль с 1 центнера в жестяной таре равна $1750-1100=650$ руб., а общая прибыль с произведённой за день продукции равна $60\cdot 90x+650\cdot 80y=54000x+52000y=2000(27x+26y).$

Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x\geq 20$ и $80y\geq 20,$ то есть $x\geq\frac{2}{9}$ и $y\geq\frac{1}{4}.$

Таким образом, в переводе на математический язык, нам необходимо найти наибольшее значение выражения $2000\cdot(27x+26y)$ при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ x\geq\dfrac{2}{9}, \\ y\geq\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-x, \\ \dfrac{2}{9}\leq x\leq\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

Подставляя $y=1-x$ в выражение $27x+26y,$ получаем: $27x+26(1-x)=26+x.$ очевидно, что это выражение принимает наибольшее значение при $x=\frac{3}{4}$ и, следоваиельно, $y=\frac{1}{4}.$ Поэтому максимально возможная прибыль завода за день равна

$$2000\cdot\left(27\cdot\frac{3}{4}+26\cdot\frac{1}{4}\right)=2000\cdot\frac{107}{4}=53\ 500 \text{ руб.}$$

Ответ: 53 500 руб.

7. Задание 17 № 509184. Первичная информация разделяется по серверам №1 и №2 и обрабатывается на них. С сервера №1 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $20t$ Гбайт, а с сервера №2 при объёме t^2 Гбайт входящей в него информации выходит $21t$ Гбайт обработанной информации; $25 < t < 55$. Каков наибольший общий объём выходящей информации при общем объёме входящей информации в 3364 Гбайт?

Решение.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ Гбайт информации. Требуется найти максимум суммы $20x+21y$ при условии

$$x^2+y^2=3364, \quad 25\le x\le 55, \quad 25\le y\le 55.$$

Так как $3364=58^2$, то $x=58\cos\alpha,\ y=58\sin\alpha$ для некоторого угла $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Так как $20^2+21^2=29^2$, то

$$20x+21y=58(20\cos\alpha+21\sin\alpha)=58\cdot 29\left(\frac{20}{29}\cos\alpha+\frac{21}{29}\sin\alpha\right)=58\cdot 29\sin(\alpha+\varphi)$$

для некоторого вспомогательного угла φ с $\cos\varphi=\frac{21}{29}, \sin\varphi=\frac{20}{29}$. Следовательно, наибольшее значение суммы $20x+21y=58\cdot 29=1682$. Оно достигается при $\cos\alpha=\frac{20}{29}$, $\sin\alpha=\frac{21}{29}$, $x=40$, $y=42$, то есть для значений, удовлетворяющих условиям $25<x<55, 25<y<55$.

Приведём другое решение.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $20x+21y$ Гбайт информации. Выразим y через $x: y=\sqrt{3364-x^2}$. Требуется найти наибольшее значение функции $f(x)=20x+21\sqrt{3364-x^2}$.

$$f'(x)=20-\frac{21x}{\sqrt{3364-x^2}}=0\Leftrightarrow 400=\frac{441x^2}{3364-x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{400\cdot 3364}{841}=1600\Leftrightarrow x=40.$$

Нетрудно заметить, что $x=40$ — точка максимума функции, при этом $y=\sqrt{3364-1600}=42$. Условия $25\le x\le 55,\ 25\le y\le 55$ выполнены. Значит, $f_{\text{наиб}}=f(40)=20\cdot 40+21\cdot 42=1682$.

Приведём третий вариант решения.

Пусть на сервере №1 обрабатывается x^2, а на сервере №2 обрабатывается y^2 Гбайт из всей первичной информации. Тогда $x^2+y^2=3364$, а обработано будет $C=20x+21y$ Гбайт информации.

Так как $3364=58^2$, то уравнение $x^2+y^2=3364$ задает окружность радиуса 58 с центром в начале координат. Заметим, что уравнение $C=20x+21y$ задает семейство параллельных прямых. Мы ищем наибольшее значение C такое, что прямая $C=20x+21y$ имеет общие точки с окружностью. Из всех прямых семейства пересекающих окружность, наибольшее значение C будет достигаться в случае касания.

Проведем из начала координат в первый координатный квадрант вектор $\vec{a}(20;21)$ перпендикулярный прямым $20x+21y=C$. Луч, коллинеарный вектору $\vec{a}$, пересечёт окружность ω в точке $A(40;42)$. Это и будет точка касания в которой достигается наибольшее значение C. Условия $25<x<55, 25<y<55$ для точки $A(40;42)$ выполнены. Значит, $C_{\text{наиб}}=20\cdot 40+21\cdot 42=1682$.

Ответ: 1682.

8. Задание 17 № 509824. Антон является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производится абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производт t единиц товара.

За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Антон платит рабочему 250 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей.

Антон готов выделять 900 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение.

Пусть на оплату труда рабочих первого завода выделено x руб., а второго — оставшиеся (900 000 − x) руб. Тогда на первом заводе можно оплатить $\frac{x}{250}$ часов работы, а на втором — $\frac{900000-x}{200}$ часов работы. Количество произведённого за неделю товара равно квадратным корням из этих величин, поэтому для ответа на вопрос задачи требуется найти наибольшее значение функции

$$f=\sqrt{\frac{x}{250}}+\sqrt{\frac{900000-x}{200}}=\frac{\sqrt{10x}}{50}+\frac{\sqrt{1800000-2x}}{20}=\frac{1}{100}(2\sqrt{10x}+5\sqrt{1800000-2x})$$

на отрезке $0\le x\le 900000.$ Найдём производную:

$$f'=\frac{1}{100}\left(\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt{1800000-2x}}\right)=\frac{1}{100}\,\frac{\sqrt{18000000-20x}-5\sqrt{x}}{\sqrt{18000000-20x}\sqrt{x}}.$$

Решая уравнение $f'=0,$ получаем:

$$\sqrt{18000000-20x}-5\sqrt{x}=0\Leftrightarrow 18000000-20x=25x\Leftrightarrow x=400000.$$

Поскольку производная непрерывной функции f положительна на интервале (0; 400 000), равна нулю в точке 400 000 и отрицательна на интервале (400 000; 900 000), функция f достигает наибольшего на отрезке [0; 900 000] значения в точке 400 000. Найдём его:

$$f(400000)=\sqrt{\frac{400000}{250}}+\sqrt{\frac{500000}{200}}=\sqrt{1600}+\sqrt{2500}=40+50=90.$$

Тем самым, наибольшее возможное количество товара, которое могут произвести рабочие за неделю при заданном размере оплаты труда, равно 90 единицам.

Ответ: 90.

9. Задание 17 № 509205. Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей.

Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение.

Требуется найти максимум суммы $s = 3x + 4y$ при условии

$$500(x^2 + y^2) = 5\,000\,000 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 10\,000.$$

Выразим y из первого соотношения $y = \frac{1}{4}(s - 3x)$, получим уравнение

$$x^2 + \left(\frac{1}{4}(s-3x)\right)^2 = 10\,000 \Leftrightarrow 25x^2 - (6s)x + (s^2 - 160\,000) = 0.$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4} = 9s^2 - 25(s^2 - 160\,000) \geq 0 \Leftrightarrow -500 \leq s \leq 500.$$

Тем самым, наибольшее возможное значение $s = 3x + 4y$ равно 500.

10. Задание 17 № 510075. Владимир является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудтся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $5t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Владимир платит рабочему 500 рублей. Владимиру нужно каждую неделю производить 580 единиц товара. Какую наименьшую сумму придется тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение.

Допустим, что на заводе, расположенном в первом городе, рабочие трудятся x^2 часов, а на заводе, расположенном во втором городе, y^2 часов. Тогда в неделю будет произведено $2x + 5y$ единиц товара, а затраты на оплату труда составят $500(x^2 + y^2)$ рублей. В этом случае нужно найти наименьшее значение $500(x^2 + y^2)$ при условии $2x + 5y = 580$. Выразим y через x:

$$y = \frac{580 - 2x}{5},\ 0 \leq x \leq 290.$$

Таким образом, нам нужно найти наименьшее значение функции

$$S(x) = 500\left(x^2 + \left(\frac{580-2x}{5}\right)^2\right)$$

при $0 \leq x \leq 290$. После преобразования получаем:

$$S(x) = 20(29x^2 - 2320x + 336\ 400).$$

Наименьшее значение квадратного трёхчлена $29x^2 - 2320x + 336\ 400$ достигается при $x = \frac{2320}{2 \cdot 29} = 40,$ причём $40 \in [0; 290]$. При этом значении получаем: $S(40) = 5\ 800\ 000.$

Ответ: 5 800 000.

11. Задание 17 № 512339. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + x + 7) = -0,5x^2 + (p-1)x - 7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p - 1$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-1)^2}{2} - 7$. Через 3 года прибыль составит не менее 75 млн рублей при

$$\frac{(p-1)^2}{2} - 7 \geq \frac{75}{3} \Leftrightarrow (p-1)^2 \geq 64,$$
$$(p-9)(p+7) \leq 0,$$

то есть при $p \geq 9$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 9$.

Ответ: $p = 9$.

12. Задание 17 № 512381. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + 2x + 5$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через четыре года суммарная прибыль составит не менее 52 млн рублей?

Решение.

Прибыль (в млн рублей) за один год выражается как

$$px - (0,5x^2 + 2x + 5) = -0,5x^2 + (p-2)x - 5.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом и достигает своего наибольшего значения при $x = p - 2$. Наибольшее значение равно $\frac{(p-2)^2}{2} - 5$. Через 4 года прибыль составит не менее 52 млн рублей при

$$\frac{(p-2)^2}{2} - 5 \geq \frac{52}{4} \Leftrightarrow (p-2)^2 \geq 36 \Leftrightarrow (p-8)(p+4) \leq 0,$$

то есть при $p \geq 8$, поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, наименьшее значение $p = 8$.

Ответ: $p = 8$.

13. Задание 17 № 513288. Строительство нового завода стоит 78 млн рублей. Затраты на производство x тыс. ед. продукции на таком заводе равны $0,5x^2+2x+6$ млн рублей в год. Если продукцию завода продать по цене p тыс. рублей за единицу, то прибыль фирмы (в млн рублей) за один год составит $px-(0,5x^2+2x+6)$. Когда завод будет построен, фирма будет выпускать продукцию в таком количестве, чтобы прибыль была наибольшей. При каком наименьшем значении p строительство завода окупится не более, чем за 3 года?

Решение.

Чтобы прибыль за три года была не меньше 78 млн руб. необходимо, чтобы ежегодная прибыль была не меньше 26 млн руб., то есть, чтобы выполнялось неравенство

$$px-(0,5x^2+2x+6)\geq 26,$$

откуда, используя неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим, получаем:

$$p\geq\frac{0,5x^2+2x+32}{x}=0,5x+\frac{32}{x}+2\geq 2\sqrt{0,5x\cdot\frac{32}{x}}+2=2\sqrt{16}+2=10.$$

Тем самым, искомое значение параметра равно 10.

14. Задание 17 № 513287. Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта — по 30 руб., третьего сорта — по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение.

Пусть x кг — масса яблок 1-го сорта, y кг — масса яблок 2-го сорта, оставшиеся $91-(x+y)$ кг — масса яблок 3-го сорта. Для величины выручки имеем:

$$40x+30y+20\cdot(91-x-y)=2170\Leftrightarrow 2x+y=35,$$

откуда $y=35-2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта имеем:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{91-(x+y)}.$$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x}=\frac{35-2x}{x+56}\underset{0<x<17,5}{\Leftrightarrow}x(x+56)=(35-2x)^2\Leftrightarrow 3x^2-196x+1225=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=7,\\ x=\dfrac{175}{3}\end{array}\right.\underset{x<17,5}{\Leftrightarrow}x=7.$$

Тем самым, садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, $35-14=21$ кг яблок второго сорта.

Ответ: 21.

15. Задание 17 № 513292. У фермера есть два поля, каждое площадью 10 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и свёклу, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 500 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность свёклы на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором – 500 ц/га.

Фермер может продать картофель по цене 5000 руб. за центнер, а свёклу — по цене 8000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение.

Продавать свеклу более выгодно, поэтому второе поле, где ее урожайность выше, следует засадить только свеклой. Она принесет доход 10 га · 500 ц/га · 8000 руб/ц = 40 млн руб.

На первом более урожайность свеклы составляет 300/500 = 0,6 урожайности картофеля, а стоимость свеклы 8000/5000 = 1,6 стоимости картофеля. Произведение этих показателей меньше 1, поэтому выращивать свеклу невыгодно: потери от меньшей урожайности не компенсируются более высокой выручкой. Следовательно, все поле следует засеять картофелем, он принесет доход 10 га · 500 ц/га · 5000 руб/ц = 25 млн руб.

Тем самым, наибольший возможный доход фермера равен 65 млн руб.

Ответ: 65 млн руб.

16. Задание 17 № 512995. Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение.

Пусть в отеле будет x номеров площадью 27 кв. м и y номеров площадью 45 кв. м. Тогда $27x+45y\leq 981$ или $3x+5y\leq 109$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $2000x+4000y$ или $2000(x+2y)$. Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x+2y$. Пусть $s=x+2y$, тогда $x=s-2y$, откуда, подставляя в (*), получаем:

$$3(s-2y)+5y\leq 109\Leftrightarrow 3s\leq y+109,$$

а значит, наибольшему значению суммы s соответствует наибольшее значение величины y. Тем самым, в отеле должно быть как можно больше номеров площадью 45 кв. м. Поскольку 981 = 45 · 21 + 36, для получения наибольшей прибыли в гостинице необходимо открыть 21 номер люкс и 1 стандартный номер, которые будут приносить предпринимателю доход $2000(1+2\cdot 21)=86000$ руб. в сутки.

Ответ: 86 000 руб.

17. Задание 17 № 513299. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение.

Пусть в первой шахте x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20 - x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 5 часов в сутки, один рабочий добывает 5 кг алюминия или 10 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут $5x$ кг алюминия и $10(20 - x)$ кг никеля.

Пусть во второй шахте y рабочих заняты на добыче алюминия, а $100 - y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 5 часов в сутки, один рабочий добывает 10 кг алюминия или 5 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут $10y$ кг алюминия и $5(100 - y)$ кг никеля.

Всего будет произведено $5x+10y$ кг алюминия (1) и $10(20-x)+5(100-y)=700-10x-5y$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$$5x+10y=2(700-10x-5y)\Leftrightarrow 25x=1400-20y\Leftrightarrow 5x=280-4y. \quad (*)$$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля: $s=3(700-10x-5y).$ Найдем наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3(700-10x-5y)=3(700-2(280-4y)-5y)=3(140+3y).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y. Из (*) ясно, что наибольшее возможное y равно 70, при этом $x = 0$, $s=3(140+3\cdot 70)=1050.$ Это означает, что все 20 рабочих первой шахты и 70 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 30 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Ответ: 1050 кг.

18. Задание 17 № 513300. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 60 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 2 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 260 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 2 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение.

Пусть в первой шахте x рабочих заняты на добыче алюминия, а $60 - x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 5 часов в сутки, один рабочий добывает 10 кг алюминия или 15 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут $10x$ кг алюминия и $15(60 - x)$ кг никеля.

Пусть во второй шахте y рабочих заняты на добыче алюминия, а $260 - y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 5 часов в сутки, один рабочий добывает 15 кг алюминия или 10 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут $15y$ кг алюминия и $10(260 - y)$ кг никеля.

Всего будет произведено $10x+15y$ кг алюминия (1) и $15(60-x)+10(260-y)=3500-15x-10y$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$$10x+15y=2(3500-15x-10y) \Leftrightarrow 40x=7000-35y \Leftrightarrow x=175-\frac{7}{8}y. \quad (*)$$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля: $s=3(3500-15x-10y)$. Найдем наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3(3500-15x-10y)=3\left(3500-15\left(175-\frac{7}{8}y\right)-10y\right)=3\left(875+\frac{25}{8}y\right).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y. Из (*) ясно, что наибольшее возможное y равно 200, при этом $x = 0$, $s=3(3500-2000)=4500$. Это означает, что все 60 рабочих первой шахты и 200 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 60 рабочих второй шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 3000 кг алюминия и 1500 кг никеля, а масса сплава будет равна 4500 кг.

Ответ: 4500 кг.

19. Задание 17 № 513294. В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение.

Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, один рабочий добывает 1 кг алюминия или 1 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут x кг алюминия и $(20-x)$ кг никеля.

Пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, n рабочих добывают $\sqrt{10\cdot n}$ кг любого из металлов, поэтому вместе бригады добудут $\sqrt{10y}$ кг алюминия и $\sqrt{10(20-y)}$ кг никеля.

Всего будет произведено $x+\sqrt{10y}$ кг алюминия (1) и $20-x+\sqrt{200-10y}$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать втрое больше никеля, имеем:

$$x+\sqrt{10y}=3(20-x+\sqrt{200-10y})\Leftrightarrow 4x=60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}\quad (*)$$

Количеству никеля $s=20-x+\sqrt{200-10y}$ соответствует количество сплава $4s$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$4s=80-4x+4\sqrt{200-10y}=80-(60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y})+4\sqrt{200-10y}=$$
$$=20+3(\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y)=\sqrt{200-10y}+\sqrt{10y}$ при натуральных y не больших 20. Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{\sqrt{10y}}-\frac{5}{\sqrt{200-10y}}=5\cdot\frac{\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}}{\sqrt{200-10y}\cdot\sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}200-10y=10y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10)=20,$ $4s=120,$ $s=30,$ из (*) $x=20.$ Это означает, что все рабочие первой области должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они произведут его 20 кг, а рабочие второй области бригадами по 10 и 10 человек должны быть заняты на добыче алюминия и никеля, они добудут их по 10 кг. Всего будет добыто 30 кг алюминия и 10 кг никеля, из них будет произведено 40 кг сплава.

Ответ: 40 кг.

20. Задание 17 № 513297. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи у кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение.

Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $100 - x$ рабочих заняты на добыче никеля, и пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $100 - y$ рабочих заняты на добыче никеля. Внесем данные из условия в таблицу.

	Алюминий		**Никель**	
	Количество человек	**Масса за смену**	**Количество человек**	**Масса за смену**
Первая область	x	$10\cdot 0,3\cdot x$	$100-x$	$10\cdot 0,1\cdot(100-x)$
Вторая область	y	$\sqrt{10y}$	$100-y$	$\sqrt{10\cdot(100-y)}$
Всего		$3x+\sqrt{10y}$		$100-x+\sqrt{10\cdot(100-y)}$

Для производства сплава масса добытого алюминия должна быть равна массе добытого никеля:

$$3x+\sqrt{10y}=100-x+\sqrt{1000-10y})\Leftrightarrow 4x=100+\sqrt{1000-10y}-\sqrt{10y}\quad (*)$$

Пусть s кг — масса сплава, она равна сумме масс алюминия и никеля: $s=100+2x+\sqrt{1000-10y}-\sqrt{10y}$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=100+2x+\sqrt{1000-10y}-\sqrt{10y}=$$
$$=100+\frac{1}{2}\left(100+\sqrt{1000-10y}-\sqrt{10y}\right)+\sqrt{1000-10y}-\sqrt{10y}=$$
$$=150+\frac{1}{2}\left(\sqrt{10y}+3\sqrt{1000-10y}\right).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение $f(y)=3\sqrt{1000-10y}+\sqrt{10y}$ при натуральных y не больших 100. Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{\sqrt{10y}}-3\cdot\frac{5}{\sqrt{1000-10y}}=5\cdot\frac{\sqrt{1000-10y}-3\sqrt{10y}}{\sqrt{1000-10y}\cdot\sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{1000-10y}=3\sqrt{10y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}1000-10y=90y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10)=100$, $s=150+50=200$ кг, из (*) находим $x=30$ чел. Это означает, что 30 рабочих первой области и 10 из второй должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они добудут 90 + 10 = 100 кг алюминия, оставшиеся 70 рабочих первой области и 90 рабочих второй области должны быть заняты на добыче никеля, за сутки они добудут 70 + 30 = 100 кг никеля. Из добытых металлов будет произведено 200 кг сплава.

Ответ: 200 кг.

21. Задание 17 № 513298. В двух областях есть по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение.

Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, и необходимо произвести наибольшее количество металла, все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто 160 · 5 · 0,3 = 240 кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают x рабочих, а никель — $160 - x$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5x}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160-x)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{5x}+\sqrt{800-5x}$ для натуральных x, не больших 160. Имеем:

$$f'(x)=\frac{5}{2\sqrt{5x}}-\frac{5}{2\sqrt{800-5x}}=\frac{5}{2}\frac{\sqrt{800-5x}-\sqrt{5x}}{\sqrt{5x}\cdot\sqrt{800-5x}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800-5x}=\sqrt{5x}\underset{x\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}800-5x=5x\Leftrightarrow x=80.$$

В точке 80 производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max}=40$, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу угля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ: 280 кг.

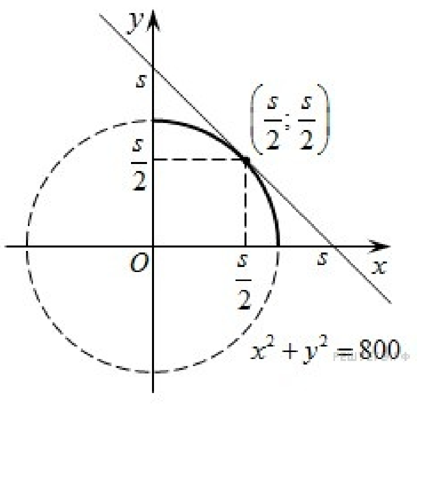
Примечание.

Для нахождения наибольшего значения функции $f(x)=\sqrt{5x}+\sqrt{800-5x}$ можно было бы воспользоваться следующей теоремой. Наибольшее значение функции $y(x)=\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x},$ на отрезке $[a;b]$ достигается в точке $\frac{a+b}{2}$ и равно $\sqrt{2(b-a)}.$

В нашем случае $a=0,$ $b=800,$ поэтому $f_{\text{наиб}}=\sqrt{1600}=40,$ что достигается в точке, где $5x=400$ то есть при $x=80.$

Приведём решение без производной.

Пусть во второй области на добычу алюминия будет отведено x^2 человеко-часов, а на добычу никеля — y^2 человеко-часов. Всего рабочих 160, работая по 5 часов, они вырабатывают 800 человеко-часов в сутки, поэтому $x^2+y^2=800.$ Для таких значений переменных требуется определить наибольшее значение количества добытого металла $s=x+y.$ Тем самым, необходимо определить наибольшее значение параметра s при котором прямая, задаваемая уравнением $y=s-x,$ будет иметь с окружностью $x^2+y^2=800$ общие точки, лежащие в первой координатной четверти.



Из рисунка видно, что точка касания является серединой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника. Координаты точки касания $(0,5s;0,5s)$ должны удовлетворять уравнению окружности. Тогда $0,25s^2+0,25s^2=800,$ откуда $s=40.$