Расстояние между прямыми и плоскостями

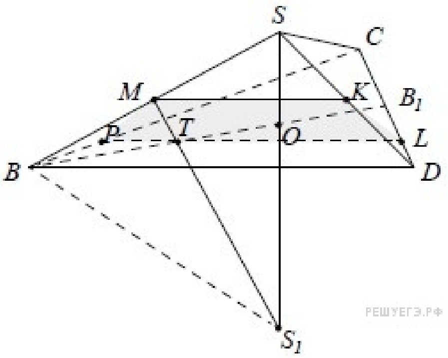
1. Задание 14 № 512399. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 18.

Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.



Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает медиану BB_1 основания BCD в точке T. Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$, поскольку BB_1 также является медианой треугольника SS_1B.

Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD.

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобокая трапеция.

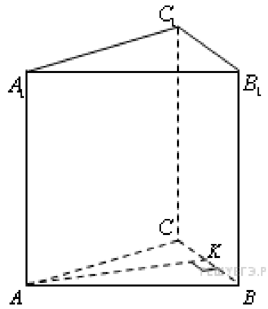
б) Большее основание PL трапеции равно 14, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 9, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD. Следовательно, средняя линия трапеции равна $\dfrac{14+9}{2} = 11,5.$

Ответ: 11,5.

2. Задание 14 № 484577. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми AA_1 и BC_1.

Решение.

Так как прямая BC_1 пересекается с прямой BB_1 параллельной прямой AA_1 и лежит в плоскости BCC_1, параллельной AA_1, то расстояние между прямыми AA_1 и BC_1 равно расстоянию от прямой AA_1 до плоскости BCC_1.



Пусть AK — высота треугольника ABC. AK перпендикулярна плоскости BCC_1, так как перпендикулярна двум пересекающимся прямым (BC и BB_1), лежащим в плоскости BCC_1. Таким образом, искомое расстояние — длина отрезка AK. Из равностороннего треугольника ABC находим:

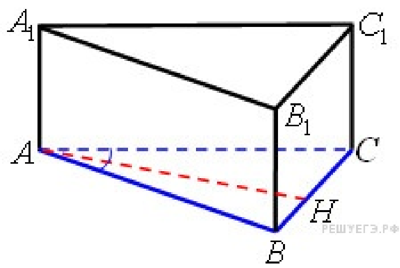
$$AK = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Задание 14 № 501216. Расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равно 5, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно 8. Найдите расстояние от прямой AA_1 до плоскости BC_1C, если известно, что двугранный угол призмы при ребре AA_1 равен 60°.

Решение.

Поскольку $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма, ее боковые грани — прямоугольники, следовательно, расстояние между боковыми ребрами AA_1 и BB_1 равно AB, а расстояние между боковыми ребрами AA_1 и CC_1 равно AC. Кроме того, угол BAC — линейный угол двугранного угла при ребре AA_1.



Таким образом, $AB=5, AC=8, \angle BAC=60^\circ$.

Пусть отрезок AH — высота основания ABC (см. рисунок). Поскольку $AH\perp BC$ и $AH\perp BB_1$, то $AH\perp(BC_1C)$, и, значит, длина отрезка AH и есть искомое расстояние от прямой AA_1 до параллельной ей плоскости BC_1C.

Рассматривая треугольник ABC, находим:

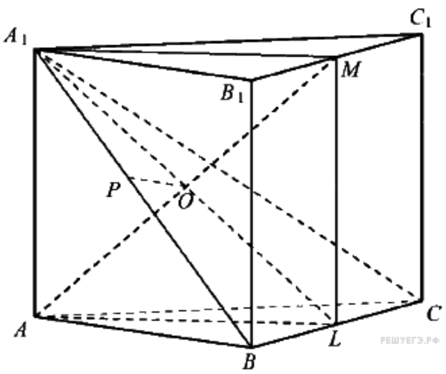
$$BC=\sqrt{AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\angle BAC}=\sqrt{25+64-2\cdot5\cdot8\cdot0,5}=7.$$
$$2S_{\Delta ABC}=AB\cdot AC\cdot\sin\angle BAC=5\cdot8\cdot\sin60^\circ=20\sqrt{3}.$$
$$AH=\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}=\frac{20\sqrt{3}}{7}.$$

Ответ: $\frac{20\sqrt{3}}{7}$.

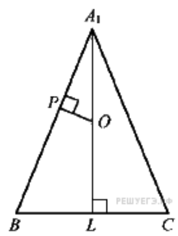
4. Задание 14 № 503000. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все рёбра основания которой равны $2\sqrt{7}$. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда диагонали перпендикулярны: $AM\perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM\perp BC$. Следовательно, $AM\perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP\perp A_1B$ и $OP\perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL=\sqrt{21}$, а его диагональ $A_1L=\sqrt{42}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC=2\sqrt{7}$, боковая сторона $A_1B=7$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём



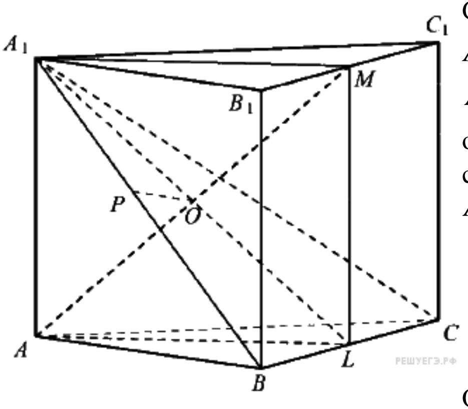
$$OP=\frac{A_1O\cdot LB}{A_1B}=\frac{A_1L\cdot BC}{4A_1B}=\frac{\sqrt{42}\cdot2\sqrt{7}}{4\cdot7}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

5. Задание 14 № 503128. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, все ребра основания которой равны 2. Сечение, проходящее через боковое ребро AA_1 и середину M ребра B_1C_1, является квадратом. Найдите расстояние между прямыми A_1B и AM.

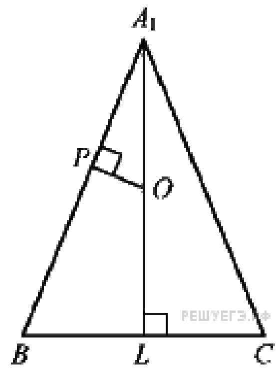
Решение.

Пусть данное сечение призмы — квадрат AA_1ML. Тогда диагонали перпендикулярны: $AM \perp A_1L$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AM \perp BC$. Следовательно, $AM \perp A_1BC$. Отсюда следует, что искомым расстоянием между прямыми A_1B и AM является длина перпендикуляра OP, опущенного из точки O пересечения диагоналей квадрата AA_1ML на прямую A_1B, так как $OP \perp A_1B$ и $OP \perp AM$.



Сторона квадрата AA_1ML равна высоте треугольника ABC, то есть $AL = \sqrt{3}$, а его диагональ $A_1L = \sqrt{6}$. В равнобедренном треугольнике A_1BC основание $BC = 2$, боковая сторона $A_1B = \sqrt{7}$. Отсюда, используя подобие треугольников A_1OP и A_1BL, найдём

$$OP = \frac{A_1O \cdot LB}{A_1B} = \frac{A_1L \cdot BC}{4A_1B} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}.$$



Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2\sqrt{7}}$.