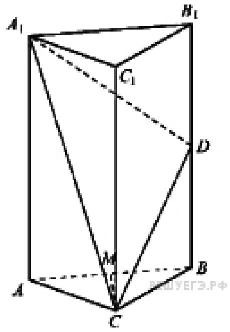
Объёмы многогранников

1. Задание 14 № 501436. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $8\sqrt{3}$, а ребро основания равно 1. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $ABCA_1D$.

Решение.

Пусть CM — высота треугольника ABC. Тогда $CM \perp ABB_1A_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $AA_1 \perp ABC$ и, значит, $CM \perp AA_1$. Пятигранник $ABCA_1D$ — четырехугольная пирамида с вершиной в точке C и основанием $ABDA_1$ — прямоугольной трапецией. Высота пирамиды $CM = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Площадь основания равна

$$\frac{AA_1 + BD}{2} \cdot AB = \frac{8\sqrt{3} + 4\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3},$$
$$V = \frac{1}{3} S_{ABDA_1} \cdot CM = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3.$$



Ответ: 3.

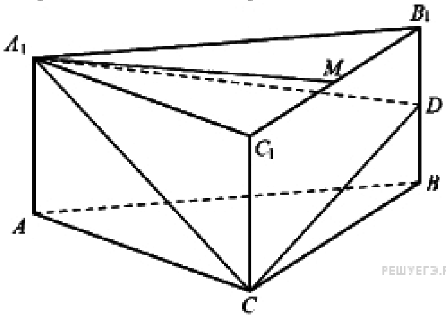
2. Задание 14 № 501456. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ боковое ребро равно $\sqrt{3}$, а ребро основания равно 4. Точка D — середина ребра BB_1. Найдите объём пятигранника $A_1B_1C_1CD$.

Решение.

Пусть A_1M — высота треугольника $A_1B_1C_1$, тогда $A_1M \perp BCC_1$ по признаку перпендикулярности прямой и плоскости, поскольку в правильной призме $CC_1 \perp A_1B_1C_1$ и, значит, $A_1M \perp CC_1$. Пятигранник $A_1B_1C_1CD$ — четырёхугольная пирамида с вершиной в точке A_1 и основанием DB_1C_1C — прямоугольной трапецией.

Высота пирамиды $A_1M = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$. Площадь основания равна $\frac{CC_1 + B_1D}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \cdot 4 = 3\sqrt{3}$,

$$V = \frac{1}{3} S_{DB_1C_1C} \cdot A_1M = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3} = 6.$$

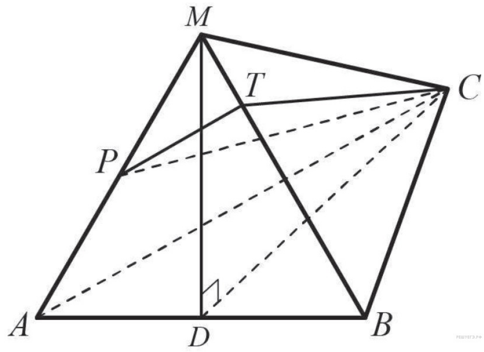


Ответ: 6.

3. Задание 14 № 501549. Правильные треугольники ABC и ABM лежат в перпендикулярных плоскостях, $AB = 10\sqrt{3}$. Точка P — середина AM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 3 : 1$. Вычислите объём пирамиды $MPTC$.

Решение.

Проведём высоту CD треугольника ABC. В тоже время CD — высота пирамиды $MPTC$, опущенная из вершины C на плоскость основания MPT.



$$CD = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = \frac{10\sqrt{3}\sqrt{3}}{2} = 15.$$

$$\frac{MP}{MA} = \frac{1}{2}, \frac{MT}{MB} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{S_{MPT}}{S_{MAB}} = \frac{MP \cdot MT}{MA \cdot MB} = \frac{1}{8}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{1}{8}S_{ABM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{AB^2\sqrt{3}}{32} = \frac{300\sqrt{3}}{32} = \frac{75\sqrt{3}}{8}.$$

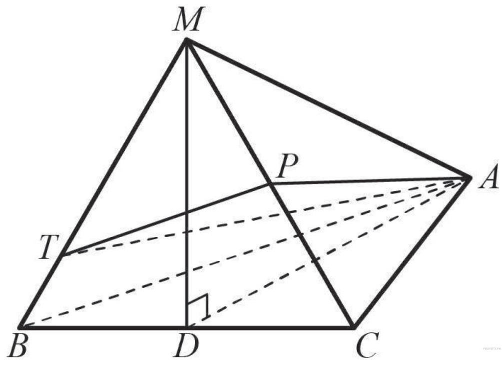
Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT} \cdot CD = \frac{1}{3} \cdot \frac{75\sqrt{3}}{8} \cdot 15 = \frac{375\sqrt{3}}{8}.$$

Ответ: $\frac{375\sqrt{3}}{8}$.

4. Задание 14 № 501555. Правильные треугольники ABC и MBC лежат в перпендикулярных плоскостях, $BC = 8$. Точка P — середина CM, а точка T делит отрезок BM так, что $BT : TM = 1 : 3$. Вычислите объём пирамиды $MPTA$.

Решение.



Проведём высоту AD треугольника ABC. В тоже время AD — высота пирамиды $MPTA$, опущенная из вершины A на плоскость основания MPT.

$$AD = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$

Площадь треугольника MPT составляет $\frac{3}{8}S_{BCM}$. Следовательно,

$$S_{MPT} = \frac{3BC^2\sqrt{3}}{32} = \frac{3\cdot 64\sqrt{3}}{32} = 6\sqrt{3}.$$

Найдём объём пирамиды:

$$V = \frac{1}{3}S_{MPT}\cdot AD = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} = 24.$$

Ответ: 24.

Приведём другое решение:

$V_{MPTA} = \frac{1}{3}S_{MPT}\cdot AD,$ где D — середина BC.

а) Поскольку AD — медиана треугольника ABC, AD — его высота. Поскольку $AD\perp BC$ и $AH\perp MH$ (т. к. по условию $(ABC)\perp(MBC)$), $AD\perp(ABC)$, т. е. является высотой пирамиды $MPTA$.

б) $S_{MPT} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot S_{MBC} = \frac{3}{8}\cdot\frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$

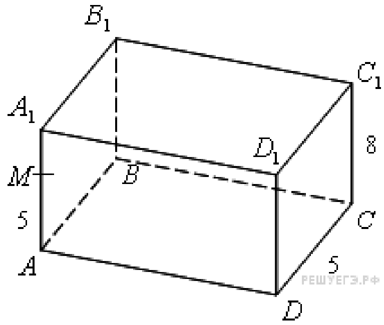
в) $AD = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

г) $V_{MPTA} = \frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{3}\cdot 4\sqrt{3} = 24.$

Ответ: 24.

5. Задание 14 № 484558. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ заданы длины ребер $AD=12, AB=5, AA_1=8.$ Найдите объем пирамиды $MB_1C_1D,$ если M — точка на ребре AA_1, причем $AM=5.$

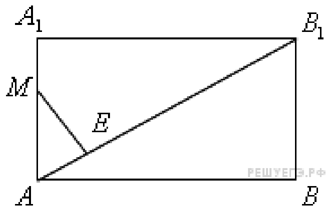
Решение.



Заметим, что $V_{MB_1C_1D}=\frac{1}{3}S_{B_1C_1D}\cdot h_M.$ Площадь прямоугольного треугольника, лежащего в основании, равна половине произведения катетов: $S_{B_1C_1D}=6\sqrt{89}.$

Основание пирамиды лежит в плоскости $AB_1C_1D,$ поэтому высотой пирамиды будет являться перпендикуляр, опущенный из точки M на эту плоскость. Опустим перпендикуляр ME на прямую $AB_1.$ Поскольку $ME\perp AB_1$ и $ME\perp AD($ в силу того, что $(AD)\perp(AA_1B_1B)),$ отрезок ME является высотой пирамиды: $ME=h_M.$

Треугольник AME подобен треугольнику $ABB_1,$ значит,



$$ME=\frac{AM\cdot AB}{AB_1}=\frac{25}{\sqrt{89}},$$
$$V_{MB_1C_1D}=\frac{1}{3}\cdot 6\sqrt{89}\cdot\frac{25}{\sqrt{89}}=50.$$

Ответ: 50.