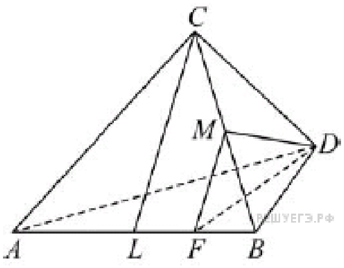
Угол между скрещивающимися прямыми

1. Задание 14 № 507634. Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна 1. Найдите угол между прямыми DM и $CL,$ где M — середина ребра $BC,$ L — середина ребра $AB.$

Решение.

Пусть MF прямая параллельная прямой CL и F точка ее пересечения с $AB.$ Тогда искомый угол между прямыми DM и CL равен углу $DMF.$ Обозначим угол DMF буквой α. MF — средняя линия треугольника $BCL,$ поэтому:



$$MF=\frac{1}{2}CL=\frac{\sqrt{3}}{4},\quad BF=\frac{1}{2}BL=\frac{1}{4}.$$

Выразим квадрат отрезка DF по теореме косинусов в двух треугольниках: DMF и BDF:

$$DF^2=DM^2+MF^2-2DM\cdot MF\cos\alpha=BD^2+BF^2-2BD\cdot BF\cos 60^\circ.$$

Поскольку $DM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $BD=1,$ подставляя числовые данные, получим:

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{16}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\alpha=1+\frac{1}{16}-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}.$$

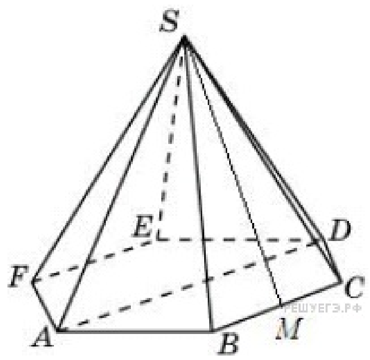
Откуда $\cos\alpha=\frac{1}{6}.$

Ответ: $\arccos\frac{1}{6}.$

2. Задание 14 № 507675. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите косинус угла между прямыми SB и $AD.$

Решение.

Прямая AD параллельна прямой $BC.$ Следовательно, искомый угол — $SBC.$ В равнобедренном треугольнике SBC проведём медиану и высоту $SM.$ Имеем:



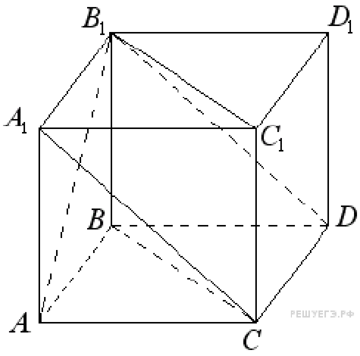
$$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника SBM получаем: $\cos\angle SBM=\frac{BM}{SB}=\frac{1}{4}.$

Ответ: $\frac{1}{4}.$

3. Задание 14 № 507788. Сторона правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 8. Высота этой призмы равна 6. Найти угол между прямыми CA_1 и AB_1.

Решение.



Рассмотрим призму в основании которой лежит ромб $ABDC$. Эта призма является прямым параллелепипедом. Поэтому $B_1D \parallel A_1C$. Значит, искомый угол AB_1D. Из прямоугольного треугольника AA_1B_1 по теореме Пифагора находим: $AB_1 = 10$. Аналогично, $B_1D = 10$. В равнобедренном треугольнике AB_1D сторона AD равна $8\sqrt{3}$. Значит,

$$\angle AB_1D = 2\arcsin\frac{AD}{2\cdot AB_1} = 2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

Примечание.

Для нахождения угла можно было воспользоваться теоремой косинусов:

$$AD^2 = AB_1^2 + B_1D^2 - 2AB_1\cdot B_1D\cdot\cos\angle AB_1D \Leftrightarrow$$

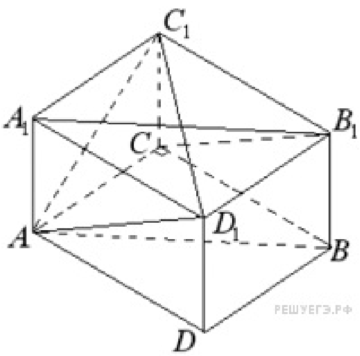
$$64\cdot 3 = 100+100-2\cdot 10\cdot 10\cdot\cos\angle AB_1D \Leftrightarrow \cos\angle AB_1D = 0,04.$$

Откуда $\angle AB_1D = \arccos 0,04$.

Ответ: $2\arcsin\frac{2\sqrt{3}}{5}$ или $\arccos 0,04$.

4. Задание 14 № 507791. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $8\sqrt{2}$. Высота призмы равна 6. Найдите угол между прямыми AC_1 и CB_1.

Решение.



Достроим призму до прямоугольного параллелепипеда с основанием $ACBD$ и верхним основанием $A_1C_1B_1D_1$. Прямая AD_1 параллельна прямой CB_1, поэтому искомый угол C_1AD_1. Из прямоугольного треугольника ACB находим: $AC = 8$. Значит, AD тоже равно 8. Из прямоугольных треугольников ACC_1 и ADD_1 получаем: $AC_1 = AD_1 = 10$, а диагональ C_1D_1 квадрата $A_1B_1C_1D_1$ равна $8\sqrt{2}$. Из равнобедренного треугольника C_1AD_1 получаем:

$$\angle C_1AD_1 = 2\arcsin\frac{CD_1}{2_1} = 2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}.$$

Примечание.

Для нахождения угла можно воспользоваться косинусов:

$$C_1D_1^2 = AC_1^2 + AD_1^2 - 2AC_1\cdot AD_1\cdot\cos\angle C_1AD_1 \Leftrightarrow 128 = 100+100-2\cdot 10\cdot 10\cdot\cos\angle C_1AD_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\angle C_1AD_1 = \frac{9}{25} = 0,36.$$

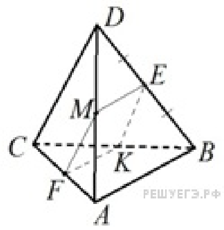
Ответ: $2\arcsin\frac{2\sqrt{2}}{5}$ или $\arccos 0,36$.

5. Задание 14 № 509092. В пирамиде $DABC$ прямые, содержащие ребра DC и AB, перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку E — середину ребра DB, и параллельно DC и AB. Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если $DC = 24$, $AB = 10$.

Решение.



а) Построим прямые EK, EM, KF, такие что: $EK \parallel DC, EM \parallel AB, KF \parallel AB$, тогда $MF \parallel DC$ искомое сечение параллелограмм $EKFM$. Покажем, что $EKFM$ прямоугольник:

$$EM \parallel AB, EK \parallel DC, DC \perp AB \Rightarrow EM \perp EK.$$

б) $EK \parallel DC$ и E — середина DB, тогда EK — средняя линия треугольника DBC, значит $EK = \frac{1}{2}DC = 12$, аналогично $ME = \frac{1}{2}AB = 5$. Так как $EKMF$ прямоугольник, получаем:

$$MK^2 = ME^2 + EK^2 \Leftrightarrow MK^2 = 12^2 + 5^2 \Leftrightarrow MK = 13.$$

Пусть прямая MK пересекает прямую EF в точке O, тогда: $MO = OK = EO = OF = \frac{1}{2}MK = \frac{13}{2}$.

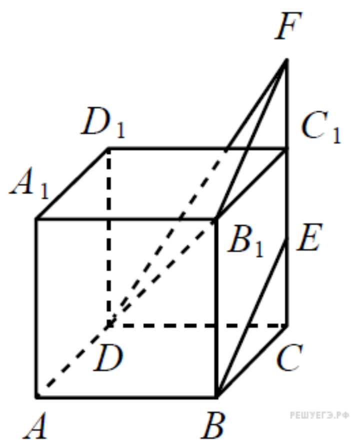
Заметим, что $EM < EK$. Применим теорему косинусов в треугольнике EOM :

$EM^2 = MO^2 + OE^2 - 2MO \cdot OE \cdot \cos\angle EOM$, следовательно, $\cos\angle EOM = \dfrac{2 \cdot \frac{169}{4} - 25}{2 \cdot \frac{169}{4}} = \dfrac{119}{169}$.

Ответ: $\arccos\frac{119}{169}$.

6. Задание 14 № 500408. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и B_1D.

Решение.



Примем ребро куба за a. Тогда $DB_1 = \sqrt{3}\,a$ Проведём через точку B_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает продолжение ребра CC_1 в точке F, причём $C_1F = \frac{1}{2}a$. Искомый угол равен углу DB_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике B_1C_1F с прямым углом C_1

$$B_1F = \sqrt{B_1C_1^2 + C_1F^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a.$$

В прямоугольном треугольнике DCF с прямым углом C

$$DF = \sqrt{DC^2 + CF^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a.$$

В треугольнике DB_1F по теореме косинусов

$$DF^2 = DB_1^2 + B_1F^2 - 2\cdot\cos\angle DB_1F\cdot DB_1\cdot B_1F,$$

откуда $\cos\angle DB_1F = \dfrac{DB_1^2 + B_1F^2 - DF^2}{2\cdot DB_1\cdot B_1F} = \dfrac{\sqrt{15}}{15}$, а тогда $\angle DB_1F = \arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{\sqrt{15}}{15}$.

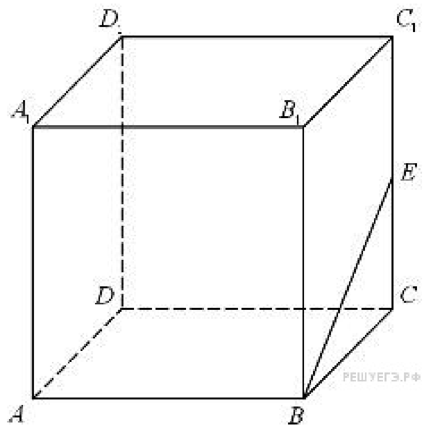
Примечание.

Ответ может быть представлен и в другом виде:

$$\angle DB_1F = \arcsin\frac{\sqrt{210}}{15} = \operatorname{arctg}\sqrt{14}.$$

7. Задание 14 № 500112. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между прямыми BE и AD.

Решение.



Примем ребро куба за единицу. Тогда $CE = \frac{1}{2}$.

Прямая AD параллельна прямой BC, значит, искомый угол равен углу CBE.

Из прямоугольного треугольника CBE с прямым углом C имеем:

$$\operatorname{tg} \angle CBE = \frac{CE}{BC} = \frac{1}{2},$$

тогда

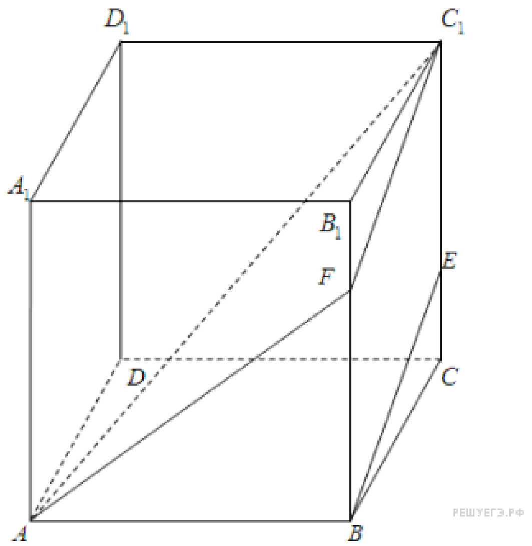
$$\angle CBE = \operatorname{arctg} \frac{1}{2}.$$

Ответ также может быть представлен в следующем виде: $\angle CBE = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{5}$ или $\angle CBE = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{2}$.

8. Задание 14 № 500213. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE : EC_1 = 1 : 2$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение.



Примем ребро куба за a. Тогда $AC_1 = a\sqrt{3}$.

Поскольку $CE : EC_1 = 1 : 2,$ получаем: $CE = \dfrac{CC_1}{3} = \dfrac{1}{3}a$ и $C_1E = CC_1 - CE = \dfrac{2}{3}a.$

Проведем через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке F, причем треугольники BCE и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1

$$C_1F = BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

В прямоугольном треугольнике ABF с прямым углом B

$$AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{AB^2 + C_1E^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$$

В треугольнике AC_1F

$$AF^2 = AC_1^2 + C_1F^2 - 2 \cdot \cos\angle AC_1F \cdot AC_1 \cdot C_1F$$

откуда

$$\cos\angle AC_1F = \frac{AC_1^2 + C_1F^2 - AF^2}{2 \cdot AC_1 \cdot C_1F} = \frac{3a^2 + \dfrac{10a^2}{9} - \dfrac{13a^2}{9}}{2 \cdot a\sqrt{3} \cdot \dfrac{a\sqrt{10}}{3}} = \frac{4}{\sqrt{30}} = \frac{2\sqrt{30}}{15}.$$

Тогда $\angle AC_1F = \arccos\dfrac{2\sqrt{30}}{15}.$

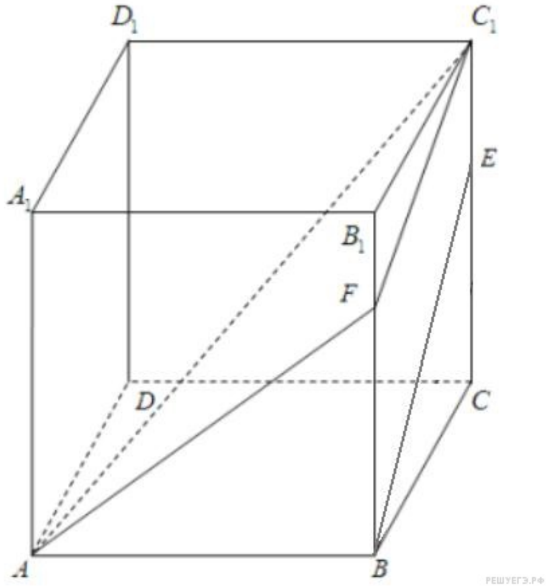
Ответ может быть представлен и в другом виде: $\angle AC_1F = \arcsin\dfrac{\sqrt{105}}{15}$ или $\angle AC_1F = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{14}}{4}.$

Ответ: $\arccos\dfrac{2\sqrt{30}}{15}.$

9. Задание 14 № 500387. На ребре CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена точка E так, что $CE:EC_1=2:1$. Найдите угол между прямыми BE и AC_1.

Решение.

Примем ребро куба за a. Тогда $AC_1=a\sqrt{3}$.



Поскольку $CE:EC_1=2:1$, получаем: $CE=\dfrac{2CC_1}{3}=\dfrac{2}{3}a$ и $C_1E=CC_1-CE=\dfrac{1}{3}a$.

Проведем через точку C_1 прямую, параллельную BE. Она пересекает ребро BB_1 в точке F, причем треугольники BCE и C_1FB_1 равны. Искомый угол равен углу AC_1F (или смежному с ним).

В прямоугольном треугольнике C_1FB_1 с прямым углом B_1

$$C_1F=BE=\sqrt{BC^2+CE^2}=\frac{a\sqrt{13}}{3}.$$

В прямоугольном треугольнике ABF с прямым углом B

$$AF=\sqrt{AB^2+BF^2}=\sqrt{AB^2+C_1E^2}=\frac{a\sqrt{10}}{3}.$$

В треугольнике AC_1F

$$AF^2=AC_1^2+C_1F^2-2\cdot\cos\angle AC_1F\cdot AC_1\cdot C_1F$$

откуда

$$\cos\angle AC_1F=\frac{AC_1^2+C_1F^2-AF^2}{2\cdot AC_1\cdot C_1F}=\frac{3a^2+\dfrac{13a^2}{9}-\dfrac{10a^2}{9}}{2\cdot a\sqrt{3}\cdot\dfrac{a\sqrt{13}}{3}}=\frac{5}{\sqrt{39}}=\frac{5\sqrt{39}}{39},$$

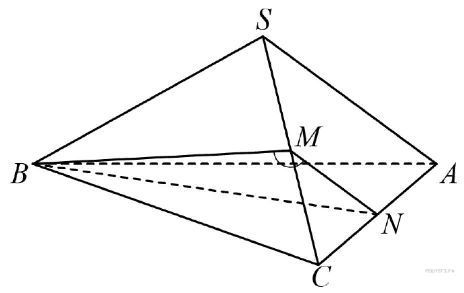
тогда $\angle AC_1F=\arccos\dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

Ответ может быть представлен и в другом виде: $\angle AC_1F=\arcsin\dfrac{\sqrt{546}}{39}$ или $\angle AC_1F=\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{14}}{5}$.

Ответ: $\arccos\dfrac{5\sqrt{39}}{39}$.

10. Задание 14 № 505387. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 6, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{1}{9}$. Точка M — середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

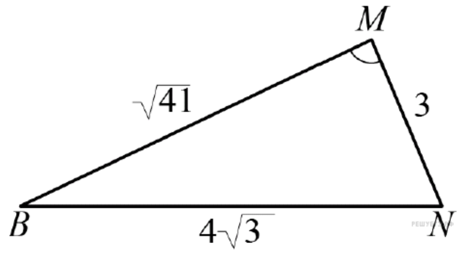
Решение.



Пусть N — середина AC. Поскольку $MN||SA$ по теореме о средней линии треугольника, угол BMN искомый. Найдём стороны треугольника BMN. По теореме о средней линии треугольника $MN=\frac{SA}{2}=3$. По теореме косинусов из треугольника BSM получаем:

$$BM=\sqrt{36+9-2\cdot 6\cdot 3\cdot \frac{1}{9}}=\sqrt{41}.$$

Чтобы найти BN, найдём сначала сторону основания по теореме косинусов из треугольника BSC:



$$BC=\sqrt{36+36-2\cdot 6\cdot 6\cdot \frac{1}{9}}=\sqrt{64}=8.$$

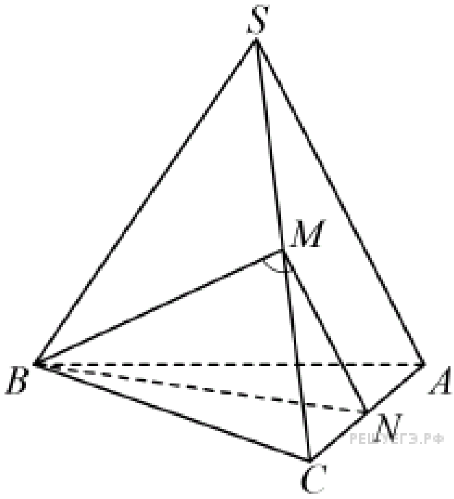
Теперь $BN=4\sqrt{3}$ как высота в равностороннем треугольнике со стороной 8. Осталось вычислить косинус нужного угла:

$$\cos\angle NMB=\frac{9+41-48}{2\cdot 3\cdot \sqrt{41}}=\frac{1}{3\sqrt{41}}.$$

Ответ: $\frac{1}{3\sqrt{41}}$.

11. Задание 14 № 505408. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды $SABC$ равно 10, а косинус угла ASB при вершине боковой грани равен $\frac{17}{25}$. Точка M — середина ребра SC. Найдите косинус угла между прямыми BM и SA.

Решение.



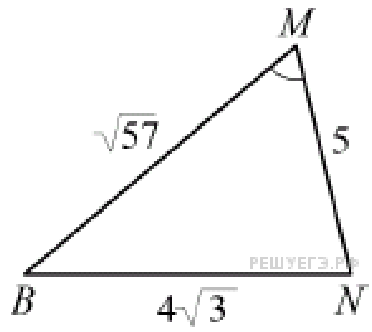
Пусть N — середина AC. Поскольку $MN||SA$ по теореме о средней линии треугольника, угол BMN искомый. Найдём стороны треугольника BMN. По теореме о средней линии треугольника $MN=\frac{SA}{2}=5$. По теореме косинусов из треугольника BSM получаем:

$$BM=\sqrt{100+25-2\cdot 10\cdot 5\cdot \frac{17}{25}}=\sqrt{57}.$$

Чтобы найти BN, найдём сначала сторону основания по теореме косинусов из треугольника BSC :

$$BC=\sqrt{100+100-2\cdot 10\cdot 10\cdot \frac{17}{25}}=\sqrt{64}=8.$$

Теперь $BN=4\sqrt{3}$ как высота в равностороннем треугольнике со стороной 8. Осталось вычислить косинус нужного угла:

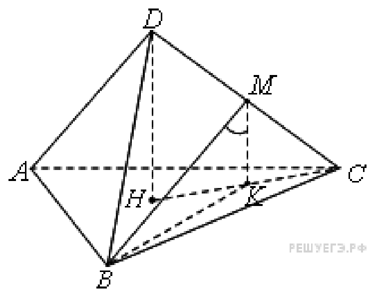


$$\cos\angle NMB=\frac{25+57-48}{2\cdot 5\cdot \sqrt{57}}=\frac{17}{5\sqrt{57}}.$$

Ответ: $\frac{17}{5\sqrt{57}}$.

12. Задание 14 № 484563. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между высотой тетраэдра DH и медианой BM боковой грани BCD.

Решение.



Пусть и MK — средняя линия треугольника CDH. Тогда $MK\parallel DH$, значит, $MK\perp(ABC)$ и, следовательно, $MK\perp BK$. Кроме того, $\angle(DH,BM)=\angle(KM,BM)=\angle BMK$.

Пусть длина ребра тетраэдра равна a, тогда имеем:

$$CH=\frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot AB=\frac{\sqrt{3}}{3}a=\frac{a}{\sqrt{3}},$$

$$DH=\sqrt{CD^2-CH^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{3}}=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=a\frac{\sqrt{6}}{3},\ KM=\frac{1}{2}DH=\frac{a\sqrt{6}}{6}=\frac{a}{\sqrt{6}}.$$

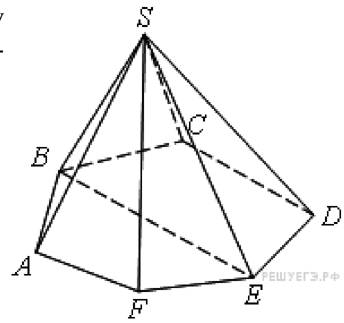
$$BM=\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2},\ \cos\angle BMK=\frac{KM}{BM}=\frac{a\cdot 2}{\sqrt{6}\cdot a\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{2}}{3}$.

13. Задание 14 № 484567. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$ стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны 2, найдите угол между прямыми SB и CD.

Решение.

Вместо прямой CD рассмотрим параллельную ей прямую BE. Искомый угол равен углу SBE. Треугольник SBE равносторонний, поскольку большая диагональ правильного шестиугольника вдвое больше его стороны: $BE=2CD$. Следовательно, $\widehat{SBE}=60^\circ$.



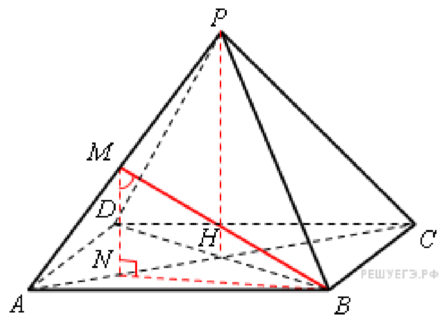
Ответ: 60°.

14. Задание 14 № 484569. Длины всех ребер правильной четырехугольной пирамиды $PABCD$ равны между собой. Найдите угол между прямыми PH и BM, если отрезок PH — высота данной пирамиды, точка M — середина ее бокового ребра AP.

Решение.

Пусть отрезок MN — средняя линия треугольника APH, параллельная его стороне PH (см. рисунок).

Поскольку $PABCD$ — правильная пирамида, точка H — центр квадрата $ABCD$. Так как $PH\perp(ABC)$ и $MN||PH$, то $MN\perp(ABC)$, а, значит, $MN\perp BN$, Прямые MN и PH параллельны, следовательно, угол между прямыми PH и BM равен углу между прямыми MN и BM, то есть острому углу BMN прямоугольного треугольника BMN.



Примем длину ребра данной пирамиды за a, тогда $MB=\frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH=PH=\frac{\sqrt{2}}{2}a$, $MN=\frac{1}{2}PH=\frac{\sqrt{2}}{4}a$ и, следовательно, $\cos\angle BMN=\frac{MN}{MB}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, $\angle BMN=\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\angle BMN=\arccos\frac{\sqrt{6}}{6}$.