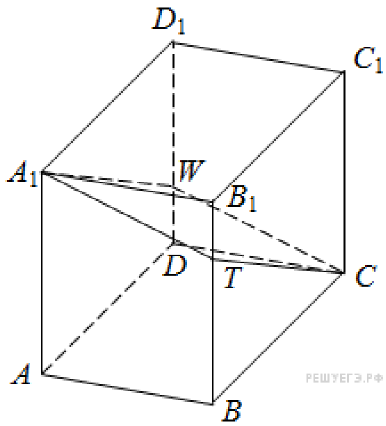
Сечения многогранников

1. Задание 14 № 501752. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны рёбра $AB=8, AD=7, AA_1=5.$ Точка W принадлежит ребру DD_1 и делит его в отношении $1:4,$ считая от вершины $D.$ Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки C, W и $A_1.$

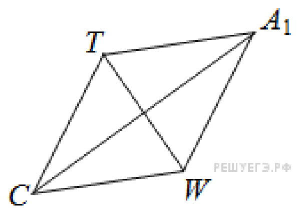
Решение.

Отрезок CT параллелен A_1W (точка T принадлежит ребру BB_1). Плоскость сечения пересекает плоскость AA_1B_1 по прямой $A_1T,$ параллельной $CW,$ следовательно, искомое сечение — параллелограмм CTA_1W (рис. 1).



Треугольники CBT и A_1D_1W равны, следовательно,

$$BT=D_1W=\frac{4}{5}DD_1=4, DW=DD_1-D_1W=1,$$
$$CT=\sqrt{BC^2+BT^2}=\sqrt{65}, CW=\sqrt{CD^2+DW^2}=\sqrt{65},$$



значит, CTA_1W — ромб со стороной $\sqrt{65}$ и диагональю $CA_1=\sqrt{CB^2+BA^2+AA_1^2}=\sqrt{138}$ (рис. 2). Тогда диагональ

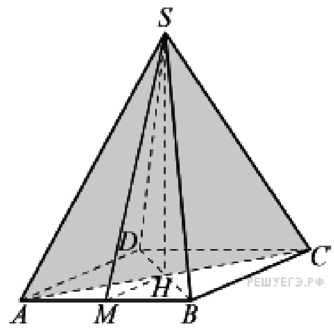
$$WT=2\sqrt{CT^2-\left(\frac{CA_1}{2}\right)^2}=\sqrt{122}, S_{CTA_1W}=\frac{CA_1\cdot WT}{2}=\sqrt{4209}.$$

Ответ: $\sqrt{4209}.$

2. Задание 14 № 507319. Площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 108, а площадь полной поверхности этой пирамиды равна 144. Найдите площадь сечения, проходящего через вершину S этой пирамиды и через диагональ её основания.

Решение.

Площадь основания пирамиды равна $144-108=36$, поэтому $AB=6$. Площадь боковой грани равна $\frac{108}{4}=27.$ Пусть SM — высота грани $SAB.$ Тогда $S_{SAB}=\frac{SM\cdot AB}{2}=SM\cdot 3=27,$ поэтому $SM=9$. Пусть SH — высота пирамиды. Имеем



$$SH=\sqrt{SM^2-MH^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}.$$

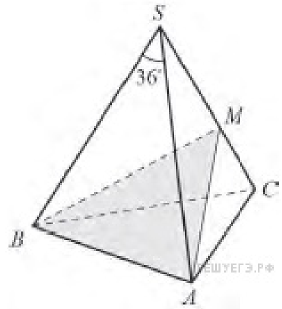
Тогда $S_{SAC}=\frac{SH\cdot AC}{2}=6\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}=36.$

Ответ: 36.

3. Задание 14 № 507596. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B, равна $25\sqrt{3}$. Найдите сторону основания.

Решение.

Нужное сечение — треугольник AMB.



Рассмотрим треугольник ASC. Он равнобедренный, и $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

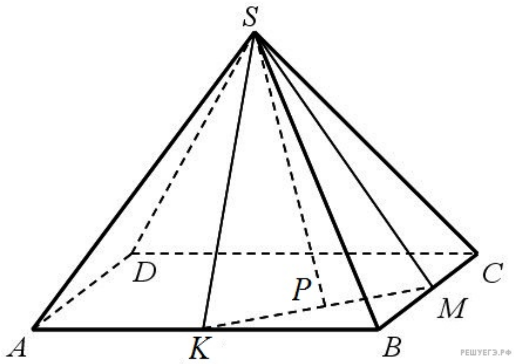
Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов 180°, значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AC=AM$. Аналогично находим, что $BM=BC$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний, и его сторона AB одновременно является стороной основания. По условию составим уравнение $\dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, откуда $AB = 10$.

4. Задание 14 № 507830. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.

Изобразим указанное в условии сечение — треугольник SKM;



$$KM = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}.$$

Проведём в треугольнике SKM высоту SP. Точка P — середина KM.

Значит, $KP = \dfrac{1}{2}KM = \sqrt{2}.$

Из треугольника SKA находим

$$SK = \sqrt{SA^2 - AK^2} = \sqrt{25-4} = \sqrt{21}.$$

Из треугольника SPK

$$SP = \sqrt{SK^2 - KP^2} = \sqrt{21-2} = \sqrt{19}.$$

Тогда

$$S_{SKM} = \frac{1}{2}KM\cdot SP = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot\sqrt{19} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

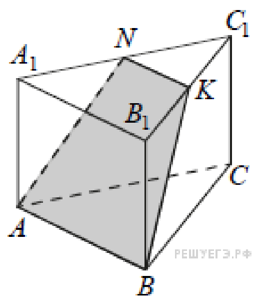
5. Задание 14 № 507887. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 6. Высота призмы равна 4. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите периметр этого сечения.

Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.



б) Имеем $A_1N = 3$, так как точка N — середина ребра A_1C_1. Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$. Аналогично $BK = 5$.

Далее $NK = 3$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$. Следовательно, искомый периметр сечения равен 6 + 5 + 5 + 3 = 19.

Ответ: 19.

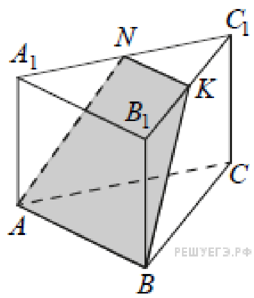
6. Задание 14 № 507910. В основании правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит треугольник со стороной 8. Высота призмы равна 3. Точка N — середина ребра A_1C_1.

а) Постройте сечение призмы плоскостью BAN.

б) Найдите площадь этого сечения.

Решение.

а) Проведём через точку N прямую, параллельную прямой AB, до пересечения с прямой B_1C_1 в точке K. Трапеция $ABKN$ — искомое сечение.



б) Имеем $A_1N = 4$, так как точка N — середина ребра A_1C_1. Значит, $AN = \sqrt{16+9} = 5$, кроме того, $NK = 4$ как средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$.

Опустим из точки N высоту NH на сторону AB. Имеем: $AH = \dfrac{AB - NK}{2} = 2$. Высота NH равна $\sqrt{AN^2 - AH^2} = \sqrt{21}$. Следовательно, искомая площадь сечения равна

$$\frac{AB+NK}{2}\cdot NH = \frac{8+4}{2}\cdot\sqrt{21} = 6\sqrt{21}.$$

Ответ: $6\sqrt{21}$.

7. Задание 14 № 508233. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$, все ребра которой равны 4, точка K — середина бокового ребра AP.

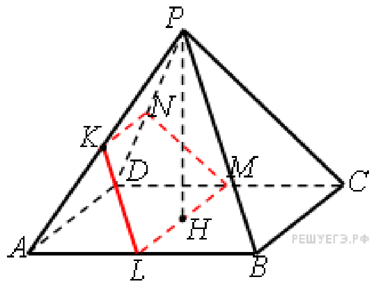
а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку K и параллельной прямым PB и BC.

б) Найдите площадь сечения.

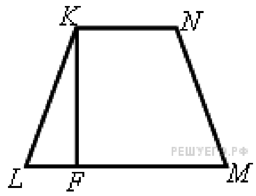
Решение.

а) В плоскости ABP через точку K проведем прямую, параллельную прямой PB до пересечения ее с прямой AB в точке L, а в плоскости ABC через точку L проведем прямую, параллельную прямой BC до пересечения ее с прямой CD в точке M. По признаку параллельности прямой и плоскости плоскость KLM параллельна прямым PB и BC. Прямая LM параллельна прямой AD, следовательно, она параллельна плоскости APD, а, значит, плоскость KLM пересекает плоскость APD по прямой, параллельной LM. Обозначим через N точку пересечения этой прямой с ребром PD.

Таким образом, искомое сечение — трапеция $KLMN$.



б) Отрезки KL и MN равны, как средние линии равных правильных треугольников ABP и DCP, а отрезок LM — средняя линия квадрата $ABCD$, следовательно, построенное сечение — равнобедренная трапеция, в которой $LM = 4$, $KL = KN = MN = 2$. Проведем высоту KF этой трапеции. Тогда $LF = \dfrac{LM - KN}{2} = 1$, и из прямоугольного треугольника KLF находим $KF = \sqrt{KL^2 - LF^2} = \sqrt{3}$.



Окончательно получаем $S_{KLMN} = \dfrac{LM+KN}{2}\cdot KF = 3\sqrt{3}$.

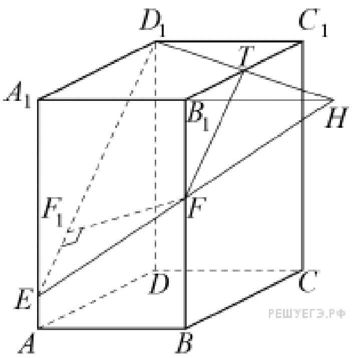
Ответ: $3\sqrt{3}$.

8. Задание 14 № 509022. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 6EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 12$, $AA_1 = 14$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $4:3$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{6A_1A}{7AD} = \frac{6\cdot 14}{7\cdot 12} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 6.$ Тогда $FB = 14-6=8$ и $BF : FB_1 = 4:3.$

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 12\sqrt{2},\quad FT = FB_1\cdot\sqrt{2} = 6\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = 2\sqrt{17}.$$

Высота равнобедренной трапеции $FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2} = \sqrt{(2\sqrt{17})^2 - (3\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$

Тогда $S_{EFTD_1} = 5\sqrt{2}\cdot\dfrac{12\sqrt{2}+6\sqrt{2}}{2} = 90.$

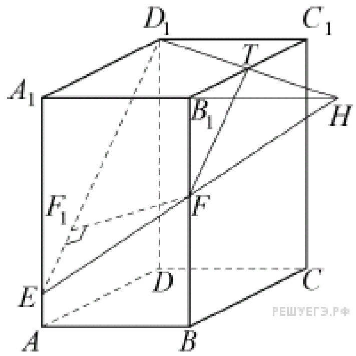
Ответ: б) 90.

9. Задание 14 № 509159. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E = 4EA$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 3\sqrt{2},\ AD = 16,\ AA_1 = 20$.

а) Докажите, что плоскость ETD_1 делит ребро BB_1 в отношении $3:2$.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью ETD_1.

Решение.



а) Проведём отрезок ED_1 и в плоскости грани BB_1C_1C проведём через точку T прямую, параллельную ED_1. Эта прямая пересечёт ребро BB_1 в точке F. Точка F лежит в плоскости ETD_1 и делит BB_1 на две части. Треугольники EA_1D_1 и FB_1T подобны. Следовательно,

$$\frac{B_1F}{B_1T} = \frac{A_1E}{A_1D_1} = \frac{4A_1A}{5AD} = \frac{4\cdot 20}{5\cdot 16} = 1.$$

Таким образом, $B_1F = B_1T = \frac{1}{2}B_1C_1 = 8$. Тогда $FB = 20 - 8 = 12$ и $BF : FB_1 = 3:2$.

б) Четырёхугольник ED_1TF — сечение параллелепипеда плоскостью ETD_1. Поскольку стороны FT и ED_1 параллельны, но не равны. Четырёхугольник ED_1TF — трапеция. Продолжим боковые стороны EF и D_1T до пересечения в точке H. Точка T — середина B_1C_1, поэтому отрезок FT — средняя линия треугольника ED_1H. Из равенства треугольников A_1D_1H и A_1EH получаем $D_1H = EH$, откуда $D_1T = EF$, то есть трапеция ED_1TF — равнобедренная.

Найдём стороны трапеции:

$$ED_1 = EA_1\sqrt{2} = 16\sqrt{2},\quad FT = FB_1\cdot\sqrt{2} = 8\sqrt{2},$$

$$EF = D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + TC_1^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + 8^2} = \sqrt{82}.$$

Проведём в трапеции высоту FF_1. Имеем:

$$EF_1 = \frac{ED_1 - FT}{2} = 4\sqrt{2};\quad FF_1 = \sqrt{EF^2 - EF_1^2}\sqrt{82 - (4\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}.$$

Площадь трапеции равна $5\sqrt{2}\cdot\dfrac{16\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2} = 120.$

Ответ: б) 120.

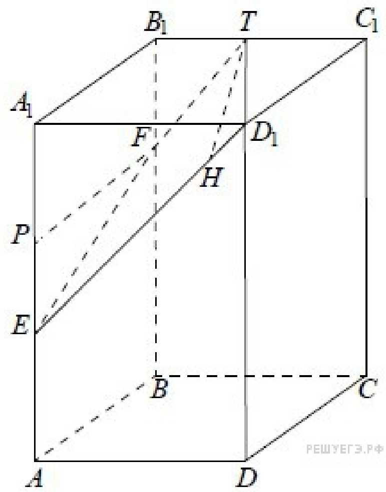
10. Задание 14 № 509580. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 5 : 3$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 5 : 11$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 6\sqrt{2}$, $AD = 10$, $AA_1 = 16$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение.

а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.



$$TB_1 = 5,\ B_1F = \frac{5}{16}\cdot 16 = 5,\ A_1E = \frac{5}{8}\cdot 16 = 10,\ A_1D_1 = 10.$$

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1, то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT. Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT — трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB. Получим точку P на ребре AA_1.

$$PE = A_1E - B_1F = 5,\ PF = 6\sqrt{2}.$$

Тогда

$$EF = \sqrt{PE^2+PF^2} = \sqrt{25+72} = \sqrt{97};$$
$$D_1T = \sqrt{D_1C_1^2+C_1T^2} = \sqrt{72+25} = \sqrt{97}.$$

Следовательно, $EF = D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ равнобедренная. Проведём в ней высоту TH.

$$D_1H = \frac{D_1E - TF}{2} = \frac{10\sqrt{2}-5\sqrt{2}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2};$$
$$TH = \sqrt{D_1T^2 - D_1H^2} = \sqrt{97-\frac{25}{2}} = \sqrt{\frac{169}{2}} = \frac{13\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(D_1E+TF)\cdot TH = \frac{1}{2}(10\sqrt{2}+5\sqrt{2})\cdot\frac{13\sqrt{2}}{2} = \frac{15\cdot 13}{2} = \frac{195}{2} = 97{,}5.$$

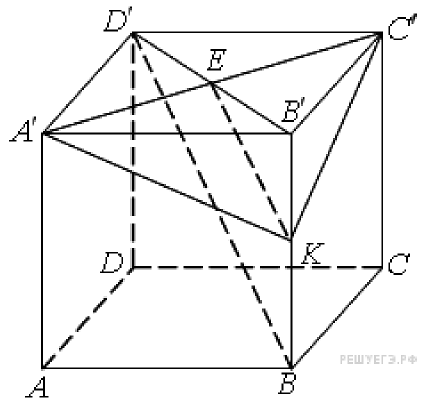
Ответ: б) 97,5.

11. Задание 14 № 509821. Основанием прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$ со стороной $3\sqrt{2}$, высота призмы равна $2\sqrt{7}$. Точка K — середина ребра BB_1. Через точки K и C_1 проведена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что сечение призмы плоскостью α является равнобедренным треугольником.

б) Найдите периметр треугольника, являющегося сечением призмы плоскостью α.

Решение.



а) Проведём KE — среднюю линию треугольника $BB'D'$, проведём прямую CE, прямая CE содержит диагональ верхнего основания, поэтому проходит через точку A'. Треугольник $A'C'K$ является искомым сечением по признаку параллельности прямой и плоскости.

Прямоугольные треугольники $A'B'K$ и $C'B'K$ равны по двум катетам, поэтому $A'K = C'K$, следовательно, треугольник $A'C'K$ — равнобедренный.

б) Далее имеем:

$$B'K = \frac{1}{2}\cdot BB_1 = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{7} = \sqrt{7},$$

$$A'K = C'K = \sqrt{B'K^2 + B'C_1^2} = \sqrt{\sqrt{7}^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{7+18} = 5,$$

$$A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2} = \sqrt{18+18} = 6,$$

$$P_{A'KC'} = 5+5+6 = 16.$$

Ответ: б) 16.

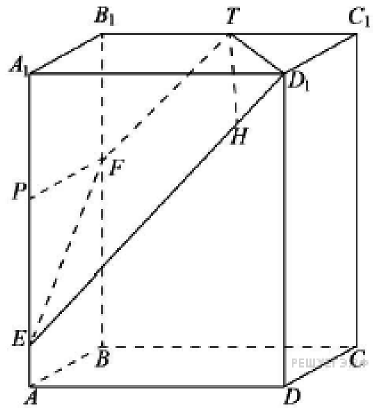
12. Задание 14 № 509927. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 6 : 1$, на ребре BB_1 — точка F так, что $B_1F : FB = 3 : 4$, а точка T − середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 4\sqrt{2}$, $AD = 30$, $AA_1 = 35$.

а) Докажите, что плоскость EFT проходит через вершину D_1.

б) Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью EFT.

Решение.

а) Плоскость EFT пересекает грани BB_1C_1C и AA_1D_1D по параллельным отрезкам.



$$TB_1 = 15,\ B_1F = \frac{3}{7}\cdot 35 = 15,\ A_1E = \frac{6}{7}\cdot 35 = 30,\ A_1D_1 = 30.$$

Значит, треугольники D_1A_1E и TB_1F подобны, причём прямые D_1A_1 и B_1C_1 параллельны, прямые A_1E и B_1F тоже параллельны. Поэтому прямые ED_1 и FT также параллельны. Если плоскость EFT не проходит через точку D_1, то получается, что в плоскости AA_1D_1D через точку E проходят две различные прямые, параллельные прямой FT. Получили противоречие.

б) Сечение параллелепипеда плоскостью EFT — трапеция. Проведём через точку F прямую, параллельную прямой AB. Получим точку P на ребре AA_1.

$$PE = A_1E - B_1F = 15,\ PF = 4\sqrt{2}.$$

Тогда

$$EF = \sqrt{PE^2 + PF^2} = \sqrt{225+32} = \sqrt{257};$$
$$D_1T = \sqrt{D_1C_1^2 + C_1T^2} = \sqrt{32+225} = \sqrt{257}.$$

Следовательно, $EF = D_1T$, и трапеция $EFTD_1$ равнобедренная. Проведём в ней высоту TH.

$$D_1H = \frac{D_1E - TF}{2} = \frac{30\sqrt{2} - 15\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2};$$
$$TH = \sqrt{D_1T^2 - D_1H^2} = \sqrt{257 - \frac{225}{2}} = \sqrt{\frac{289}{2}} = \frac{17\sqrt{2}}{2}.$$

Тогда площадь трапеции равна

$$\frac{1}{2}(D_1E + TF)\cdot TH = \frac{1}{2}(30\sqrt{2} + 15\sqrt{2})\cdot\frac{17\sqrt{2}}{2} = \frac{45\cdot 17}{2} = \frac{765}{2} = 382,5.$$

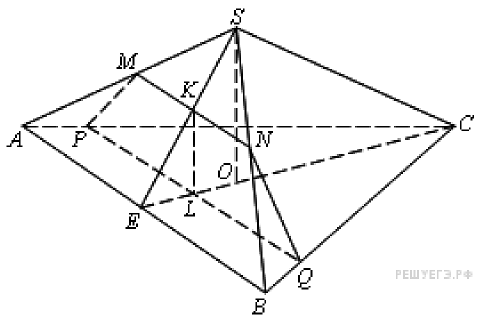
Ответ: б) 382,5.

13. Задание 14 № 510100. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 12, а боковое ребро SA равно 13. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 : 1. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.

б) В трапеции $MNQP$ имеем:

$$MN = \frac{AB}{2} = 6, \ PQ = \frac{5AB}{6} = 10, \ KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{11}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNPQ$ равна $\dfrac{MN+PQ}{2} \cdot KL = 44.$

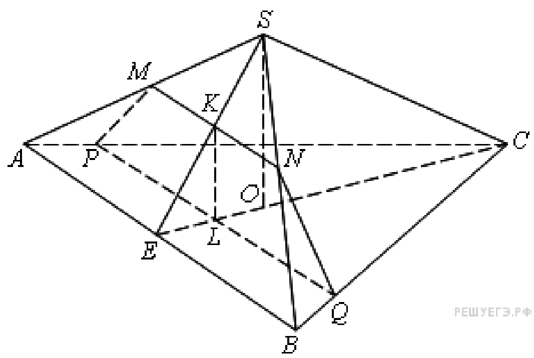
Ответ: б) 44.

14. Задание 14 № 510107. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания AB равна 24, а боковое ребро SA равно 19. Точки M и N — середины рёбер SA и SB соответственно. Плоскость α содержит прямую MN и перпендикулярна плоскости основания пирамиды.

а) Докажите, что плоскость α делит медиану CE основания в отношении 5 : 1, считая от точки C.

б) Найдите площадь многоугольника, являющегося сечением пирамиды $SABC$ плоскостью α.

Решение.



а) Прямая MN параллельна плоскости ABC, поэтому сечение пересекает плоскость ABC по прямой PQ, параллельной MN. Рассмотрим плоскость SCE. Пусть K — точка пересечения этой плоскости и прямой MN, L — точка пересечения этой плоскости и прямой PQ, O — центр основания пирамиды. Плоскости SCE и MNQ перпендикулярна плоскости ABC, поэтому прямая KL перпендикулярна плоскости ABC, а значит, параллельна прямой SO. Поскольку MN — средняя линия треугольника ASB, точка K является серединой ES. Значит, L — середина EO. Медиана CE треугольника ABC делится точкой O в отношении 2 : 1. Значит, $CL : LE = 5 : 1$.

б) В трапеции $MNQP$ имеем:

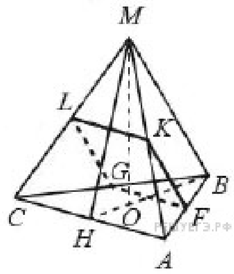
$$MN = \frac{AB}{2} = 12, \quad PQ = \frac{5AB}{6} = 20, \quad KL = \frac{SO}{2} = \frac{\sqrt{SC^2 - CO^2}}{2} = \frac{13}{2}.$$

Значит, площадь трапеции $MNPQ$ равна $\dfrac{MN+PQ}{2} \cdot KL = 104.$

Ответ: б) 104.

15. Задание 14 № 512883. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 9, а боковые рёбра равны 15. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AB и BC параллельно прямой MB.

Решение.



Пусть F и G — середины рёбер AB и BC соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MB, где точки K и L — середины рёбер MA и MC соответственно. Поскольку $FK=\dfrac{MB}{2}=GL,$ искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.

Пусть MH — высота и медиана треугольника MAC, BH — медиана и высота треугольника ABC, значит, прямая MB перпендикулярна прямой AC. Отрезок FK параллелен MB, отрезок FG параллелен AC, следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO = 9$, $MB = 15$, откуда $OB = 12$. В правильном треугольнике ABC, где O — его центр, $AC=OB\sqrt{3}=12\sqrt{3}.$

В прямоугольнике $FGLK$

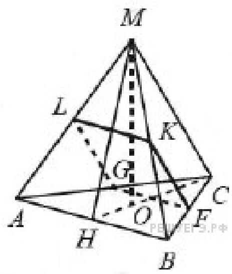
$$FG=\frac{AC}{2}=6\sqrt{3}; \qquad FK=\frac{MB}{2}=\frac{15}{2};$$

$$S_{FGLK}=FG\cdot FK=45\sqrt{3}.$$

Ответ: $45\sqrt{3}$.

16. Задание 14 № 512889. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M высота равна 6, а боковые рёбра равны 9. Найдите площадь сечения этой пирамиды плоскостью, проходящей через середины сторон AC и BC параллельно прямой MC.

Решение.



Пусть F и G — середины рёбер BC и AC соответственно. Отрезки FK и GL параллельны MB, где точки K и L — середины рёбер MB и MA соответственно. Поскольку $FK=\dfrac{MC}{2}=GL,$ искомое сечение — параллелограмм $FGLK$.

Пусть MH — высота и медиана треугольника MAB, CH — медиана и высота треугольника ABC, тогда плоскость MHC перпендикулярна плоскости ABC, значит, прямая MC перпендикулярна прямой AB, следовательно, $FGLK$ — прямоугольник.

Пусть MO — высота пирамиды, тогда $MO = 6$, $MC = 9$, откуда $OC=3\sqrt{5}$. В правильном треугольнике ABC, где O — его центр, $AB=OC\sqrt{3}=3\sqrt{15}.$

В прямоугольнике $FGLK$

$$FG=\frac{AB}{2}=\frac{3\sqrt{15}}{2}; \qquad FK=\frac{MC}{2}=\frac{9}{2};$$

$$S_{FGLK}=FG\cdot FK=\frac{27\sqrt{15}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{27\sqrt{15}}{4}$.

17. Задание 14 № 501885. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, известны рёбра: $AB = 3, AD = 2, AA_1 = 5$. Точка O принадлежит ребру BB_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины B. Найдите площадь сечения этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A, O и C_1.

Решение.

Сечение плоскостью AOC_1 пересекает ребро DD_1 в точке P. Отрезок AP параллелен C_1O, отрезок C_1P параллелен AO. Следовательно, искомое сечение — параллелограмм AOC_1P (рис. 1). Далее имеем:

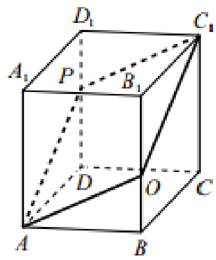


Рис. 1

$$BO = \frac{2}{5}BB_1 = 2,\ B_1O = 3,$$
$$C_1O = \sqrt{C_1B_1{}^2 + B_1O^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13},$$
$$AO = \sqrt{AB^2 + BO^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}.$$

Значит, AOC_1P — ромб. Найдем его диагонали:

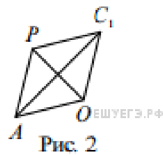


Рис. 2

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + BC^2 + CC_1{}^2} = \sqrt{9+4+25} = \sqrt{38},$$
$$OP = 2\sqrt{AO^2 - \frac{1}{4}AC_1^2} = \sqrt{4\cdot 13 - 38} = \sqrt{14}.$$

Площадь ромба равна половине произведения его диагоналей. Поэтому

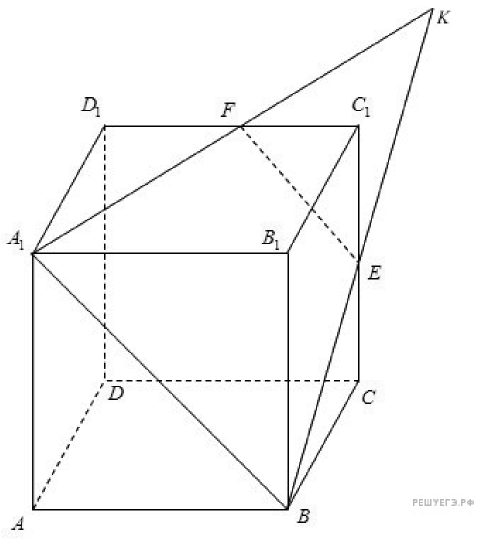
$$S_{AOC_1P} = \frac{AC_1\cdot OP}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{38}\cdot\sqrt{14} = \sqrt{133}.$$

Ответ: $\sqrt{133}$.

18. Задание 14 № 500193. Точка E — середина ребра CC_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью A_1BE, если ребра куба равны 2.

Решение.

Прямая BE пересекает прямую B_1C_1 в точке K. Прямая A_1K пересекает ребро C_1D_1 в его середине — точке F. A_1BEF — сечение куба плоскостью A_1BE.



Равнобедренный треугольник A_1BK подобен треугольнику KFE. $A_1K = BK = 2BE = 2\sqrt{5}, A_1B = \sqrt{2}\cdot AB = 2\sqrt{2}$ и высота

$$KH = \sqrt{BK^2 - \left(\frac{A_1B}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Поскольку EF — средняя линия треугольника A_1BK, получаем:

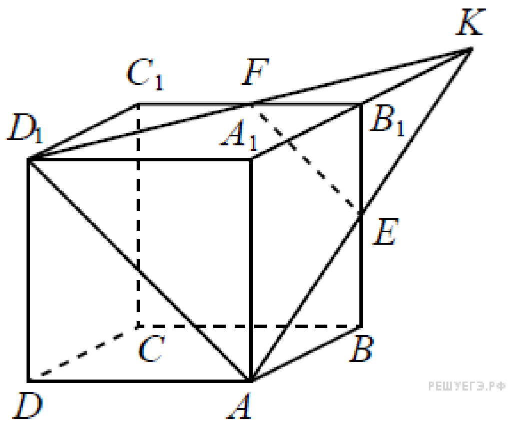
$$S_{KEF} = \frac{1}{4}S_{A_1BK},$$

$$S_{A_1BEF} = S_{A_1BK} - S_{KEF} = \frac{3}{4}S_{A_1BK} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot KH\cdot A_1B = 4,5.$$

Ответ: 4,5.

19. Задание 14 № 500474. Точка E — середина ребра BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите площадь сечения куба плоскостью D_1AE, если ребра куба равны 4.

Решение.



Прямая AE пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Прямая D_1K пересекает ребро B_1C_1 в его середине — точке F. $AEFD_1$ — сечение куба плоскостью D_1AE.

В равнобедренном треугольнике AKD_1 имеем $D_1K = AK = 2AE = 4\sqrt{5}$, $AD_1 = \sqrt{2} \cdot AD = 4\sqrt{2}$ и высота $h = \sqrt{AK^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = 6\sqrt{2}$.

Поскольку EF — средняя линия треугольника AKD_1, получаем:

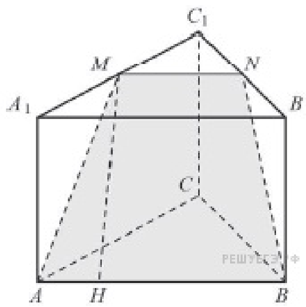
$$S_{KEF} = \frac{1}{4} S_{AKD_1},$$

$$S_{AEFD_1} = S_{AKD_1} - S_{KEF} = \frac{3}{4} S_{AKD_1} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot AD_1 = 18.$$

Ответ: 18.

20. Задание 14 № 500962. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 6, боковые рёбра равны 4. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, B и середину ребра A_1C_1. Найдите его площадь.

Решение.



Обозначим через M и N средины ребер A_1C_1 и B_1C_1 соответственно.

По Теореме о средней линии треугольника $MN || A_1B_1 || AB$, так что прямые MN и AB лежат в одной плоскости. Искомое сечение — это равнобедренная трапеция $AMNB$.

Основания трапеции $AB = 6$, $MN = 3$, по теореме Пифагора найдем боковую сторону:

$$AM = \sqrt{AA_1^2 + A_1M^2} = \sqrt{16+9} = 5.$$

Проведем в трапеции высоту MH. Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции:

$$AH = \frac{AB - MN}{2} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, высота трапеции $MH = \sqrt{5^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{91}}{2}$. Зная её, находим площадь трапеции:

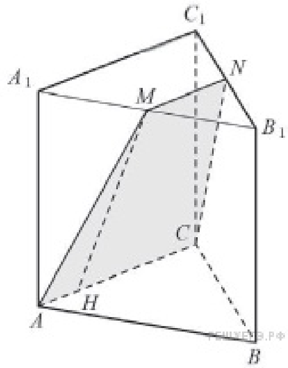
$$S_{AMNB} = \frac{MN + AB}{2} \cdot MH = \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{91}}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{91}.$$

Ответ: $\frac{9}{4}\sqrt{91}$.

21. Задание 14 № 500968. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 8, боковые рёбра равны $\sqrt{13}$. Изобразите сечение, проходящее через вершины A, C и середину ребра A_1B_1. Найдите его площадь.

Решение.

Обозначим через M и N средины ребер A_1B_1 и B_1C_1 соответственно.



По теореме о средней линии треугольника $MN||A_1C_1||AC$, так что прямые MN и AC лежат в одной плоскости. Сечение про которое спрашивается в условии, − это сечение призмы этой плоскостью. Оно представляет собой равнобокую трапецию $AMNC$.

Основания трапеции $AC=8,\ MN=4;$ по теореме Пифагора найдем боковую сторону:

$$AM=\sqrt{AA_1^2+A_1M^2}=\sqrt{13+16}=\sqrt{29}.$$

Проведем в трапеции высоту MH. Отрезок AH равен полуразности оснований трапеции:

$$AH=\frac{AC-MN}{2}=2.$$

Следовательно, высота трапеции $MH=\sqrt{29-2^2}=5.$ Зная её, находим площадь трапеции:

$$S_{AMNC}=\frac{MN+AC}{2}\cdot MH=\frac{4+8}{2}\cdot 5=30.$$

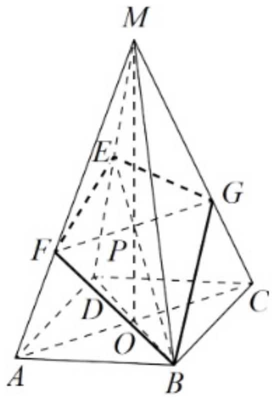
Ответ: 30.

22. Задание 14 № 501690. В правильной четырехугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 15, а боковые ребра равны 16. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.

Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO=2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA=MG:GC=MP:PO=2:1,$$
$$FG=\frac{2}{3}AC=\frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3}=10\sqrt{2}.$$



Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

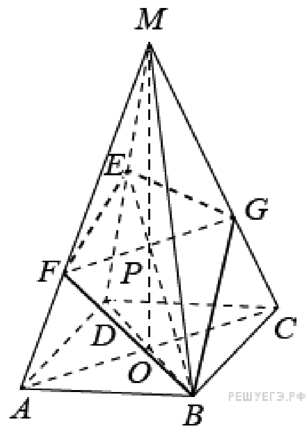
$$BE=\frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2}=\frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2}=17.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно, $S_{BFEG}=\frac{BE\cdot FG}{2}=85\sqrt{2}.$

Ответ: $85\sqrt{2}$.

23. Задание 14 № 501945. В правильной четырёхугольной пирамиде $MABCD$ с вершиной M стороны основания равны 3, а боковые рёбра равны 8. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку B и середину ребра MD параллельно прямой AC.

Решение.



Пусть точка E — середина ребра MD. Отрезок BE пересекает плоскость MAC в точке P. В треугольнике MBD точка P является точкой пересечения медиан, следовательно, $MP:PO = 2:1$, где O — центр основания пирамиды. Отрезок FG параллелен AC и проходит через точку P (точка F принадлежит ребру MA, G — ребру MC), откуда

$$MF:FA = MG:GC = MP:PO = 2:1,$$
$$FG = \frac{2}{3}AC = \frac{2\sqrt{2}\cdot AB}{3} = 2\sqrt{2}.$$

Четырёхугольник $BFEG$ — искомое сечение. Отрезок BE — медиана треугольника MBD, значит,

$$BE = \frac{\sqrt{2BD^2+2MB^2-MD^2}}{2} = \frac{\sqrt{4AB^2+MB^2}}{2} = 5.$$

Поскольку прямая BD перпендикулярна плоскости MAC, диагонали BE и FG четырёхугольника $BFEG$ перпендикулярны, следовательно,

$$S_{BFEG} = \frac{BE\cdot FG}{2} = 5\sqrt{2}.$$

Ответ: $5\sqrt{2}$.

24. Задание 14 № 501710. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 20, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка M принадлежит ребру A_1D_1 и делит его в отношении $2:3$, считая от вершины D_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и M.

Решение.

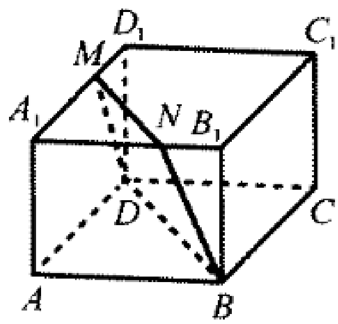


Рис. 1

Отрезок MN параллелен диагонали BD (точка N принадлежит ребру A_1B_1), следовательно, искомое сечение — трапеция $BDMN$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, MN параллелен B_1D_1.

Треугольники NA_1M и $B_1A_1D_1$ подобны, следовательно,

$$A_1N:A_1B_1 = A_1M:A_1D_1 = MN:B_1D_1 = 3:5.$$

Значит, $BD = B_1D_1 = 20\sqrt{2}$, $MN = 12\sqrt{2}$.

В равных прямоугольных треугольниках BB_1N и DD_1M,

$$DM = BN = \sqrt{BB_1^2 + B_1N^2} = \sqrt{113},$$

значит, трапеция $BDMN$ равнобедренная.

Пусть NH — высота трапеции $BDMN$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

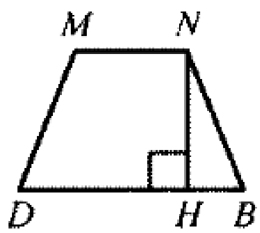


Рис. 2

$$BH = \frac{BD-MN}{2} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow NH = \sqrt{BN^2-BH^2} = 9 \Leftrightarrow$$
$$S_{BDMN} = \frac{BD+MN}{2}\cdot NH = 144\sqrt{2}.$$

Ответ: $144\sqrt{2}$.

25. Задание 14 № 502294. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ сторона основания равна 11, а боковое ребро $AA_1 = 7$. Точка K принадлежит ребру B_1C_1 и делит его в отношении $8:3$, считая от вершины B_1. Найдите площадь сечения этой призмы плоскостью, проходящей через точки B, D и K.

Решение.

Пусть L — точка, в которой плоскость сечения пересекает ребро C_1D_1. Так как плоскости $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ параллельны, то плоскость сечения пересекает их по параллельным прямым, следовательно, отрезок KL параллелен диагонали BD. Искомое сечение — трапеция $BDLK$ (рис. 1). Плоскость сечения пересекает нижнее основание по прямой BD, параллельной B_1D_1, значит, KL параллельно B_1D_1.

Треугольники LC_1K и $D_1C_1B_1$ подобны, следовательно,

$$C_1L : C_1D_1 = C_1K : C_1B_1 = KL : B_1D_1 = 3 : 11.$$

Значит, $BD = B_1D_1 = 11\sqrt{2},\ KL = 3\sqrt{2}.$

В равных прямоугольных треугольниках DD_1L и BB_1K имеем $BK = DL = \sqrt{DD_1^2 + D_1L^2} = \sqrt{113}$, значит, трапеция $BDLK$ равнобедренная.

Пусть LH — высота трапеции $BDLK$, проведённая к основанию BD (рис. 2), тогда:

$$DH = \frac{BD - KL}{2} = 4\sqrt{2},\ LH = \sqrt{DL^2 - DH^2} = 9.$$

$$S_{BDLK} = \frac{BD + KL}{2} \cdot LH = 63\sqrt{2}.$$

Ответ: $63\sqrt{2}$.

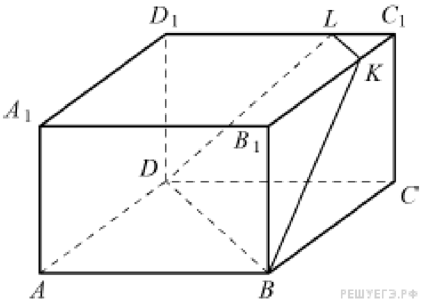


Рис. 1

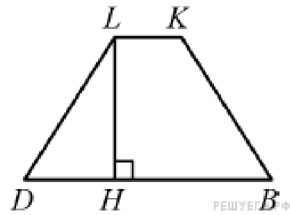
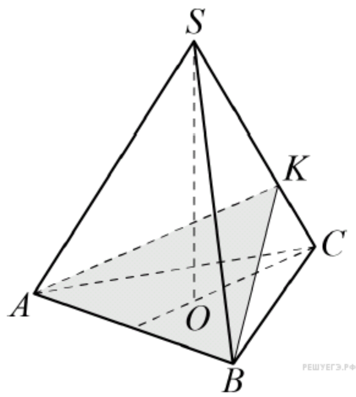


Рис. 2

26. Задание 14 № 504416. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 5$, а сторона основания $AB = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC.

Решение.



В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём

$$\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SK+\frac{1}{3}\cdot Q\cdot CK=\frac{1}{3}\cdot Q\cdot SC=\frac{5Q}{3}$$

равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$SO=\sqrt{SC^2-OC^2}=\sqrt{25-\frac{16}{3}}=\frac{\sqrt{59}}{\sqrt{3}}$$

Объём пирамиды $SABC$ равен

$$\frac{1}{3}\cdot SO\cdot S_{ABC}=\frac{\sqrt{59}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{16\sqrt{3}}{4}=\frac{4\sqrt{59}}{3}$$

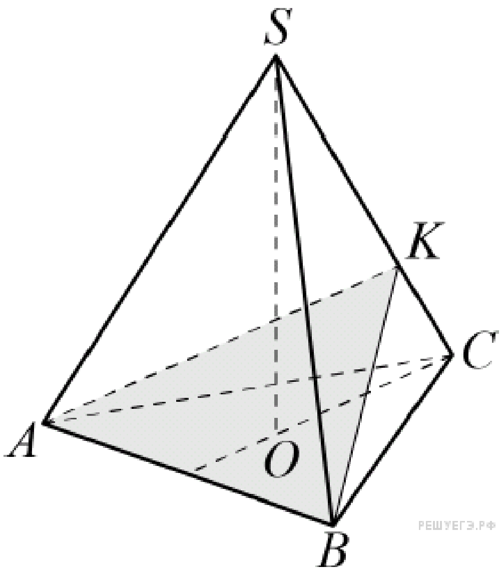
Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

$$Q=\frac{4\sqrt{59}}{5}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{59}}{5}$.

27. Задание 14 № 504437. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ боковое ребро $SA = 6$, а сторона основания $AB = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через ребро AB перпендикулярно ребру SC.

Решение.



В треугольнике BCS проведём высоту BK, тогда искомое сечение — треугольник ABK. Пусть Q — площадь треугольника ABK. Сечение из условия разбивает пирамиду на тетраэдры $CAKB$ и $SAKB$. Их суммарный объём

$$\frac{1}{3} \cdot Q \cdot SK + \frac{1}{3} \cdot Q \cdot CK = \frac{1}{3} \cdot Q \cdot SC = 2Q$$

равен объёму пирамиды.

Пусть — SO высота пирамиды. В треугольнике SCO имеем:

$$CO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{36 - \frac{16}{3}} = \frac{2\sqrt{69}}{3}$$

Объём пирамиды $SABC$ равен

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2\sqrt{69}}{3} \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} = \frac{8\sqrt{23}}{3}.$$

Приравнивая два найденных значения для объёма, получаем

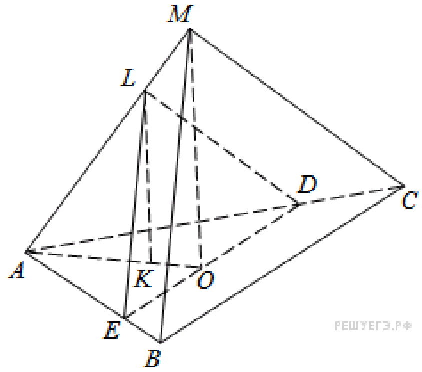
$$Q = \frac{4\sqrt{23}}{3}.$$

Ответ: $\frac{4\sqrt{23}}{3}$.

28. Задание 14 № 505417. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 10. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AE = LM = 4$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.

Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем:



$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{1}.$$

Значит, $DE = \frac{2}{3}BC = 4$, отрезок DE делит медиану, проведённую из вершины A, в отношении $2:1$, то есть содержит точку O. Кроме того, O — середина DE.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AMO. В нём $AO = 2\sqrt{3}$. Опустим из точки L перпендикуляр LK на сторону AO. Тогда

$$AK = \frac{3}{5}AO = \frac{6\sqrt{3}}{5},\ KO = \frac{2}{5}AO = \frac{4\sqrt{3}}{5}.$$

Значит,

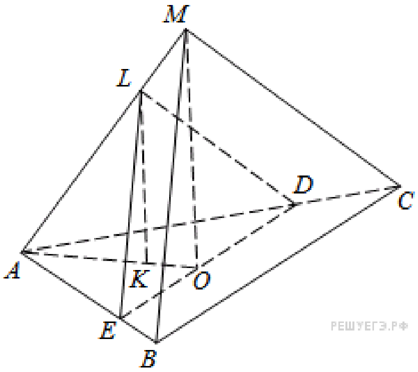
$$LK = \sqrt{LA^2 - AK^2} = \frac{6\sqrt{22}}{5},\ LO = \sqrt{LK^2 + KO^2} = \frac{2\sqrt{210}}{5}.$$

Равнобедренный треугольник DLE — искомое сечение, а LO — его высота. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}LO \cdot DE = \frac{4\sqrt{210}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{210}}{5}$.

29. Задание 14 № 505423. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с основанием ABC стороны основания равны 6, а боковые рёбра 8. На ребре AC находится точка D, на ребре AB находится точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $CD = BE = LM = 2$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.



Пусть O — центр основания пирамиды. В треугольнике ABC имеем:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{2}{1}.$$

Значит, $DE = \frac{2}{3}BC = 4$, отрезок DE делит медиану, проведённую из вершины A, в отношении $2:1$, то есть содержит точку O. Кроме того, O — середина DE.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AMO. В нём $AO = 2\sqrt{3}$. Опустим из точки L перпендикуляр LK на сторону AO. Тогда

$$AK = \frac{3}{4}AO = \frac{3\sqrt{3}}{2},\ KO = \frac{1}{4}AO = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$LK = \sqrt{LA^2 - AK^2} = \frac{3\sqrt{13}}{2},\ LO = \sqrt{LK^2 + KO^2} = \sqrt{30}.$$

Равнобедренный треугольник DLE — искомое сечение, а LO — его высота. Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{2}LO \cdot DE = 2\sqrt{30}.$

Ответ: $2\sqrt{30}$.

30. Задание 14 № 502115. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 8. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 5. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

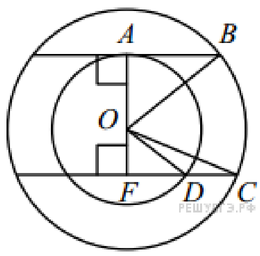
Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов. Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.

FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 8$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 5$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α.



Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF. Из прямоугольных треугольников получаем:

$$OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2,$$

откуда $CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$

Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 13.$$

Ответ: 13.

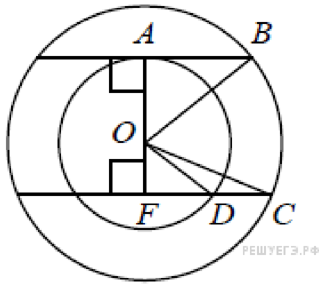
31. Задание 14 № 502135. Плоскость α пересекает два шара, имеющих общий центр. Площадь сечения меньшего шара этой плоскостью равна 6. Плоскость β, параллельная плоскости α, касается меньшего шара, а площадь сечения этой плоскостью большего шара равна 4. Найдите площадь сечения большего шара плоскостью α.

Решение.

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение, проходящее через общий центр шаров и центры кругов.

Обозначение центра, точки касания и точек пересечения поверхностей шаров с плоскостями α и β дано на рисунке.



FD — радиус круга, полученного в сечении меньшего шара плоскостью α, тогда $S_\alpha = \pi \cdot FD^2 = 6$ — площадь сечения меньшего шара плоскостью α.

AB — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью β, тогда $S_\beta = \pi \cdot AB^2 = 4$ — площадь сечения большего шара плоскостью β.

CF — радиус круга, полученного в сечении большего шара плоскостью α. Параллельные прямые AB и CF перпендикулярны прямой AF. Из прямоугольных треугольников получаем: $OF^2 = OC^2 - CF^2 = OD^2 - FD^2$, откуда

$$CF^2 = OC^2 - OD^2 + FD^2 = OB^2 - OA^2 + FD^2 = AB^2 + FD^2.$$

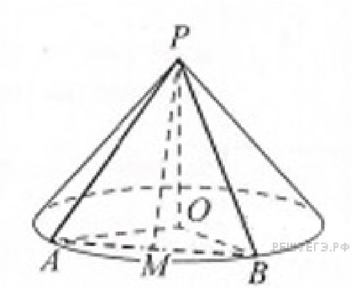
Площадь сечения большего шара плоскостью α:

$$S = \pi \cdot CF^2 = \pi \cdot AB^2 + \pi \cdot FD^2 = 10.$$

Ответ: 10.

32. Задание 14 № 505103. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1:3. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

Решение.



Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB. Дуга AB составляет четверть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 90°$. Треугольник AOB равнобедренный, следовательно,

$$AB = 2AM = 2AO\sin\frac{\angle AOB}{2} = 6\sqrt{2}.$$

Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение. Отрезок PM — его высота, $PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = 3\sqrt{7}$.

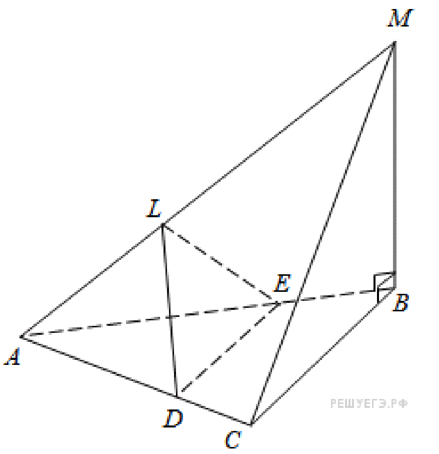
Площадь искомого сечения равна

$$\frac{1}{2}PM \cdot AB = 9\sqrt{14}.$$

Ответ: $9\sqrt{14}$.

33. Задание 14 № 505471. В треугольной пирамиде $MABC$ основанием является правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 3, а ребро $MA = 6$. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка L. Известно, что $AD = AL = 2$, и $BE = 1$. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и L.

Решение.



Рассмотрим треугольники AMB и CMB, они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC, следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 6$. Рассмотрим треугольник AMC, воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM :

$$\cos\angle CAM = \frac{AM^2+AC^2-MC^2}{2\cdot AC\cdot AM} = \frac{36+9-36}{2\cdot 3\cdot 6} = \frac{1}{4}.$$

Из треугольника ADL найдём сторону LD :

$$LD = \sqrt{AD^2+AL^2-2AL\cdot AD} = \sqrt{4+4-2\cdot 2\cdot 2\frac{1}{4}} = \sqrt{6}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. Найдём косинус угла MAB :
$\cos\angle MAB = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$

Из треугольника ALE найдём сторону LE :

$$LE = \sqrt{AL^2+AE^2-2\cdot AL\cdot AE} = \sqrt{4+4-2\cdot 2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}} = 2.$$

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен $60°$, значит, $\angle AED = \angle ADE = 60°$. Следовательно, треугольник ADE — равносторонний, $AD = AE = DE = 2$.

Опустим высоту EH в равнобедренном треугольнике LDE на основание LD. Найдём EH :

$$EH = \sqrt{LE^2-\left(\frac{LD}{2}\right)^2} = \sqrt{4-\frac{6}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2}.$$

Треугольник DLE — искомое сечение, найдём его площадь:

$$S_{DLE} = \frac{1}{2}EH\cdot LD = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}\cdot\sqrt{6} = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Примечание.

Площадь треугольника DLE можно было найти по формуле Герона:

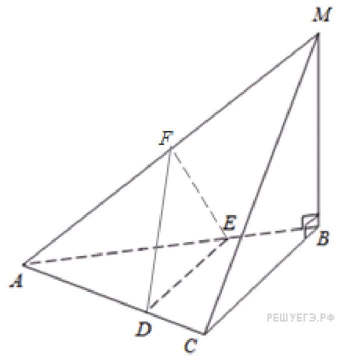
$$S_{DLE} = \sqrt{\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-2\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-2\right)\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}\right)} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2\left(2+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)\left(2-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)} = \sqrt{\frac{6}{4}\left(4-\frac{6}{4}\right)} = \frac{\sqrt{15}}{2}.$$

34. Задание 14 № 505493. В треугольной пирамиде $MABC$, в основаниии которой лежит правильный треугольник ABC, ребро MB перпендикулярно плоскости основания, стороны основания равны 6, а ребро MA равно 11. На ребре AC находится точка D, на ребре AB точка E, а на ребре AM — точка F. Известно, что $AD = 4$ и $BE = 2$, F — середина AM. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точки E, D и F.

Решение.

Рассмотрим треугольники AMB и CMB: они прямоугольные, имеют общую сторону MB и равные стороны AB и BC, следовательно, эти треугольники равны по двум катетам, значит, $AM = MC = 11$. Рассмотрим треугольник AMC, воспользовавшись теоремой косинусов найдём косинус угла CAM:



$$\cos\angle CAM = \frac{AM^2 + AC^2 - MC^2}{2\cdot AC\cdot AM} = \frac{121+36-121}{2\cdot 6\cdot 11} = \frac{3}{11}.$$

Из треугольника ADF найдём сторону FD:

$$FD = \sqrt{AD^2 + AF^2 - 2AF\cdot AD\cos\angle CAM} = \sqrt{16 + \frac{121}{4} - 2\cdot 4\cdot \frac{11}{2}\frac{3}{11}} = \frac{\sqrt{137}}{2}.$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABM. Найдём косинус угла MAB: $\cos\angle MAB = \frac{6}{11}$.

Из треугольника AFE найдём сторону FE:

$$FE = \sqrt{AF^2 + AE^2 - 2\cdot AF\cdot AE\cos\angle MAB} = \sqrt{\frac{121}{4} + 16 - 2\cdot\frac{11}{2}\cdot 4\cdot\frac{6}{11}} = \frac{\sqrt{89}}{2}.$$

В треугольнике ADE $AE = ED$, следовательно, он равнобедренный, углы при основании равны. Угол CAB равен 60°, значит, $\angle AED = \angle ADE = 60^\circ$. Следовательно, треугольник ADE — равносторонний, $AD = AE = DE = 4$.

Найдём косинус угла FED:

$$\cos\angle FED = \frac{FE^2 + DE^2 - FD^2}{2FE\cdot DE} = \frac{\frac{89}{4} + 16 - \frac{137}{4}}{2\cdot\frac{\sqrt{89}}{2}\cdot 4} = \frac{1}{\sqrt{89}}.$$

Следовательно, $\sin\angle FED = \sqrt{1-\cos^2\angle FED} = \sqrt{1-\frac{1}{89}} = \frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{89}}$

Треугольник DFE — искомое сечение, найдём его площадь:

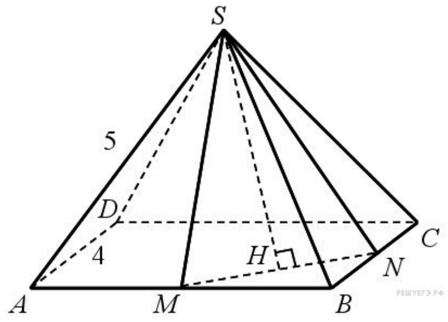
$$S_{DFE} = \frac{1}{2}EF\cdot ED\sin\angle FED = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{89}}{2}\cdot 4\cdot\frac{2\sqrt{22}}{\sqrt{89}} = 2\sqrt{22}.$$

Ответ: $2\sqrt{22}$.

35. Задание 14 № 500643. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины рёбер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если боковое ребро пирамиды равно 5, а сторона основания равна 4.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, SN и MN. SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Так как эти треугольники равнобедренные (поскольку пирамида правильная),



$$SM = SN = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}AB\right)^2} = \sqrt{SB^2 - \left(\frac{1}{2}BC\right)^2} = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 2. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $2\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, которая, по теореме Пифагора, равна $\sqrt{19}$, и вычислим площадь:

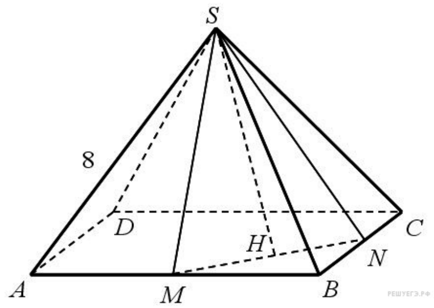
$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{19} \cdot 2\sqrt{2} = \sqrt{38}.$$

Ответ: $\sqrt{38}$.

36. Задание 14 № 500639. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с основанием $ABCD$ проведено сечение через середины ребер AB и BC и вершину S. Найдите площадь этого сечения, если все ребра пирамиды равны 8.

Решение.

Пусть M — середина AB, а N — середина BC. Тогда площадь сечения равна площади треугольника SMN. Найдем последовательно SM, MN и SN. SM и SN — медианы треугольников SAB и SBC соответственно. Т. к. эти треугольники равносторонние (поскольку все ребра пирамиды одинаковой длины),



$$SM = SN = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 8 = 4\sqrt{3}.$$

Найдем теперь MN из прямоугольного треугольника MBN. В нем катеты равны 4. Гипотенуза MN, по теореме Пифагора, будет равна $4\sqrt{2}$.

Теперь найдем площадь равнобедренного треугольника SMN. Для этого проведем высоту SH, по теореме Пифагора равную $2\sqrt{10}$, и вычислим площадь:

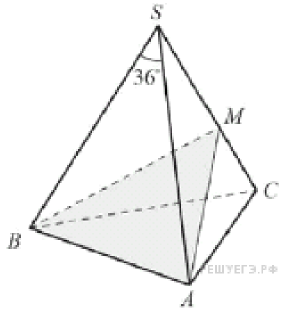
$$S = \frac{1}{2} \cdot SH \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot 4\sqrt{2} = 8\sqrt{5}.$$

Ответ: $8\sqrt{5}$.

37. Задание 14 № 500918. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC сторона основания равна 8, а угол ASB равен 36°. На ребре SC взята точка M так, что AM — биссектриса угла SAC. Найдите площадь сечения пирамиды, проходящего через точки A, M и B.

Решение.

Нужное сечение — треугольник AMB.



Рассмотрим треугольник ASC, он равнобедренный: $\angle ASC = \angle ASB = 36^\circ$, поэтому $\angle SAC = \angle SCA = 72^\circ$. Значит, $\angle MAC = 36^\circ$.

Рассмотрим теперь треугольник CAM. Сумма его углов 180°, значит, $\angle AMC = 72^\circ$. Следовательно, треугольник CAM равнобедренный, и поэтому $AM = AC = 8$. Аналогично находим, что $BM = 8$.

Таким образом, треугольник AMB равносторонний со стороной 8. Его площадь равна

$$S = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}.$$

Ответ: $16\sqrt{3}$.

38. Задание 14 № 507202. Площадь основания правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$ равна 64.

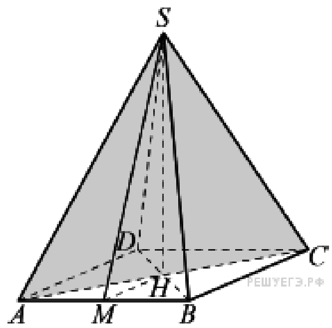
а) Постройте прямую пересечения плоскости SAC и плоскости, проходящей через вершину S этой пирамиды, середину стороны AB и центр основания.

б) Найдите площадь боковой поверхности этой пирамиды, если площадь сечения пирамиды плоскостью SAC равна 64.

Решение.

Сторона основания пирамиды равна 8. Тогда диагональ основания $AC = 8\sqrt{2}$.

а) Пусть SH — высота пирамиды. Тогда H — середина основания пирамиды. Значит, SH — искомая прямая.



б) Площадь сечения, проходящего через S и диагональ AC, равна $\frac{1}{2}AC \cdot SH = 64$, откуда $SH = \frac{2 \cdot 64}{8\sqrt{2}}$. Пусть SM — высота грани SAB. Тогда

$$SM = \sqrt{SH^2 + HM^2} = \sqrt{128 + 16} = 12.$$

Следовательно, $S_{SAB} = \frac{SM \cdot AB}{2} = 12 \cdot 4 = 48$. Поэтому $S_{\text{бок}} = 48 \cdot 4 = 192$.

Ответ: 192.