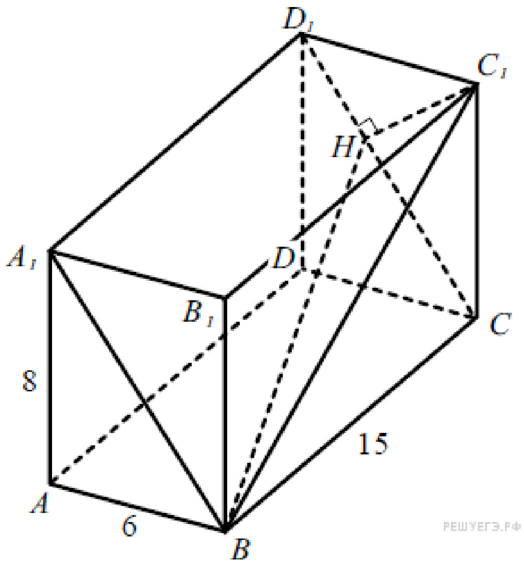
Угол между прямой и плоскостью

1. Задание 14 № 507576. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью A_1BC и прямой BC_1, если $AA_1 = 8$, $AB = 6$, $BC = 15$.

Решение.

Сечение плоскостью A_1BC есть прямоугольник A_1BCD_1

Из точки C_1 проведем перпендикуляр C_1H к CD_1. BH — проекция BC_1 на плоскость A_1BC. Значит, нужно найти угол C_1BH.



В прямоугольном треугольнике D_1C_1C находим: $C_1H = \dfrac{D_1C_1 \cdot C_1C}{D_1C} = \dfrac{24}{5}$.

В прямоугольном треугольнике BCC_1 находим: $BC_1 = 17$.

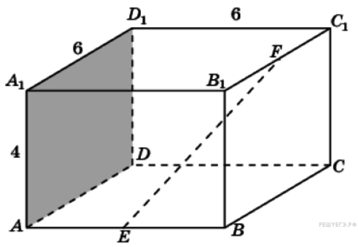
В прямоугольном треугольнике C_1HB находим: $\sin B = \dfrac{C_1H}{BC_1} = \dfrac{24}{85}$.

Ответ: $\arcsin \dfrac{24}{85}$.

2. Задание 14 № 507611. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 4$, $A_1D_1 = 6$, $C_1D_1 = 6$, найдите тангенс угла между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины ребер AB и B_1C_1.

Решение.

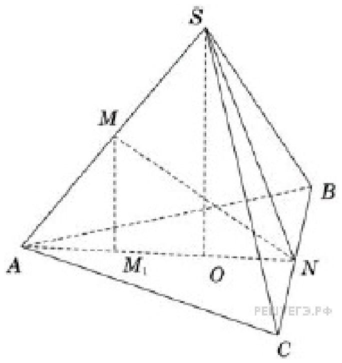
Найдем угол между прямой EF и плоскостью BB_1C_1C. Точка B — проекция точки E на эту плоскость. Искомый угол есть $\angle EFB$. $EB = \dfrac{6}{2} = 3$. $FB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. $\operatorname{tg} \angle EFB = \dfrac{3}{5}$.



Ответ: $\dfrac{3}{5}$.

3. Задание 14 № 507621. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны рёбра: $AB=21\sqrt{3}$, $SC=29$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины рёбер AS и BC.

Решение.



Пусть M и N — середины рёбер AS и BC соответственно. Прямая AS проектируется на плоскость основания в прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 — искомый. Заметим, что $MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника ASO, а поэтому M_1 — середина AO.

Тогда $AM_1=\frac{1}{3}AN=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}AB=\frac{21}{2}$ и $M_1N=2AM_1=21$. Из прямоугольного треугольника AM_1M находим:

$$MM_1=\sqrt{AM^2-AM_1^2}=\sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2-\left(\frac{21}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{29}{2}-\frac{21}{2}\right)\left(\frac{29}{2}+\frac{21}{2}\right)}=10.$$

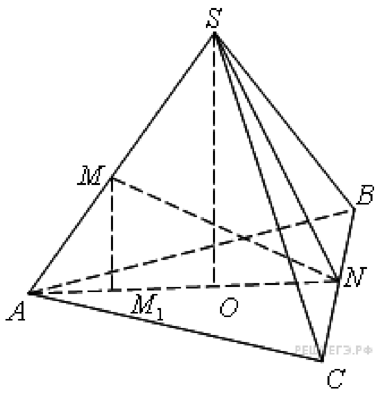
Из прямоугольного треугольника MM_1N находим: $\operatorname{tg}\angle MNM_1=\frac{MM_1}{M_1N}=\frac{10}{21}$. Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{10}{21}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{10}{21}$.

4. Задание 14 № 484559. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 7\sqrt{3}$, $SC = 25$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.

Пусть M и N — середины ребер AS и BC соответственно. AN — медиана правильного треугольника ABC, следовательно, находится по формуле $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{21}{2}$. Прямая AS проецируется на плоскость основания и прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 — искомый.



$MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника ASO поэтому $AM_1 = \frac{1}{2}AO$. Тогда $AM_1 = \frac{1}{3}AN = \frac{7}{2}$ и $M_1N = \frac{2}{3}AN = 7$. Из прямоугольного треугольника AMM_1 находим:

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\frac{625}{4} - \frac{49}{4}} = 12.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

$$\operatorname{tg}\angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{12}{7}.$$

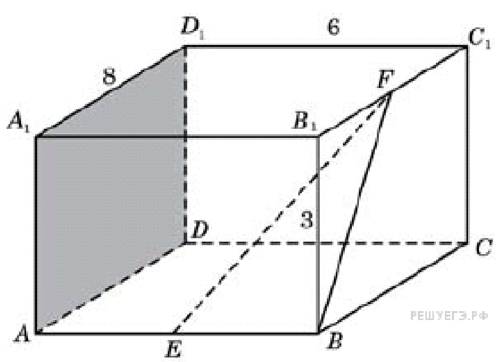
Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{12}{7}$.

5. Задание 14 № 507657. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AA_1 = 3$, $AD = 8$, $AB = 6$, найдите угол между плоскостью ADD_1 и прямой EF, проходящей через середины рёбер AB и B_1C_1.

Решение.

Найдём угол между прямой EF и плоскостью BCC_1, которая параллельна плоскости ADD_1. Точка B — проекция точки E на эту плоскость. Искомый угол равен углу EFB. Найдём тангенс угла EFB :



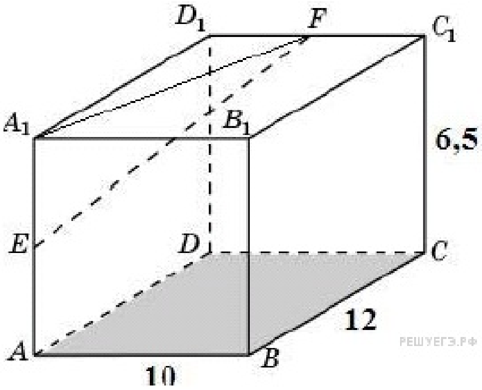
$$BE = \frac{6}{2} = 3, \quad B_1F = \frac{8}{2} = 4, \quad FB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5,$$
$$\operatorname{tg}\angle EFB = \frac{BE}{BF} = \frac{3}{5}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$.

6. Задание 14 № 507660. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 10$, $BC = 12$, $CC_1 = 6{,}5$; найдите угол между плоскостью ABC и прямой EF, проходящей через середины рёбер AA_1 и C_1D_1.

Решение.

Найдём угол между прямой EF и плоскостью грани $A_{B1}C_1D_1$ которая параллельна плоскости ABC. Точка A_1 — проекция точки E на эту плоскость. Искомый угол равен углу EFA_1. Найдём тангенс угла EFA_1 :



$$A_1E = \frac{6,5}{2} = \frac{13}{4}, \quad D_1F = \frac{10}{2} = 5, \quad A_1F = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13,$$

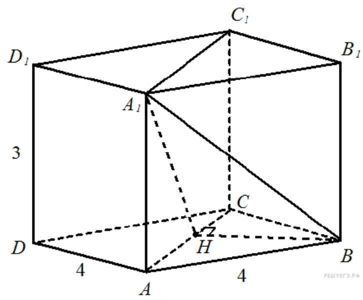
$$\operatorname{tg} \angle EFA_1 = \frac{A_1E}{A_1F} = \frac{13}{4 \cdot 13} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1}{4}$.

7. Задание 14 № 507703. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостью AA_1C и прямой A_1B, если $AA_1 = 3$, $AB = 4$, $BC = 4$.

Решение.

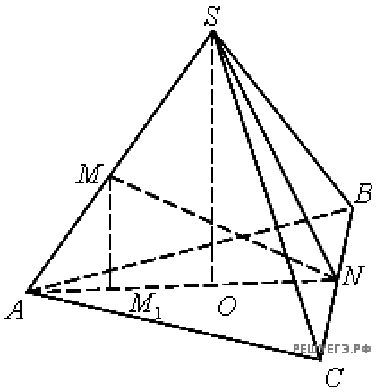
Из точки B проведём перпендикуляр BH к AC. A_1H — проекция A_1B на плоскость AA_1C. Значит, нужно найти угол BA_1H. В прямоугольном треугольнике ABC находим: $BH = 2\sqrt{2}$. В прямоугольном треугольнике A_1AB находим: $A_1B = 5$. В прямоугольном треугольнике A_1HB находим: $\sin \angle BA_1H = \frac{BH}{A_1B} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$.



Ответ: $\arcsin \frac{2\sqrt{2}}{5}$.

8. Задание 14 № 505535. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC известны ребра $AB = 15\sqrt{3}$, $SC = 17$. Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер AS и BC.

Решение.



Пусть M и N — середины ребер AS и BC соответственно. AN — медиана правильного треугольника ABC, следовательно, находится по формуле $AN = \frac{\sqrt{3}}{2}AB = \frac{45}{2}$. Прямая AS проецируется на плоскость основания и прямую AN. Поэтому проекция точки M — точка M_1 — лежит на отрезке AN. Значит, прямая AN является проекцией прямой MN, следовательно, угол MNM_1 — искомый. $MM_1 \parallel SO$, где O — центр основания, значит, MM_1 — средняя линия треугольника ASO поэтому $AM_1 = \frac{1}{2}AO$. Тогда $AM_1 = \frac{1}{3}AN = \frac{15}{2}$ и $M_1N = \frac{2}{3}AN = \frac{30}{2}$. Из прямоугольного треугольника AMM_1 находим:

$$MM_1 = \sqrt{AM^2 - AM_1^2} = \sqrt{\frac{289}{4} - \frac{225}{4}} = 4.$$

Из прямоугольного треугольника MM_1N находим:

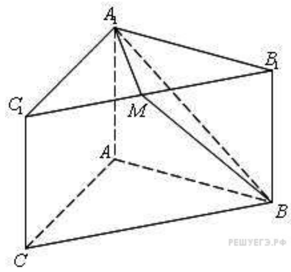
$$\mathrm{tg}\angle MNM_1 = \frac{MM_1}{M_1N} = \frac{4}{15}.$$

Значит, искомый угол равен $\mathrm{arctg}\frac{4}{15}$.

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{4}{15}$.

9. Задание 14 № 485934. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 8$. Высота призмы равна 3. Найдите угол между прямой A_1B и плоскостью BCC_1.

Решение.

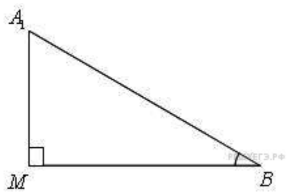


Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота A_1M треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости BCC_1. Поэтому прямая BM — проекция прямой A_1B на плоскость BCC_1. Значит, искомый угол равен углу A_1BM.

Так как $B_1M = 4, BB_1 = 3,$ имеем: $BM = 5, A_1M = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1M^2} = 3.$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\angle A_1BM = \frac{A_1M}{BM} = \frac{3}{5}$. Следовательно, $\angle A_1BM = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}$.

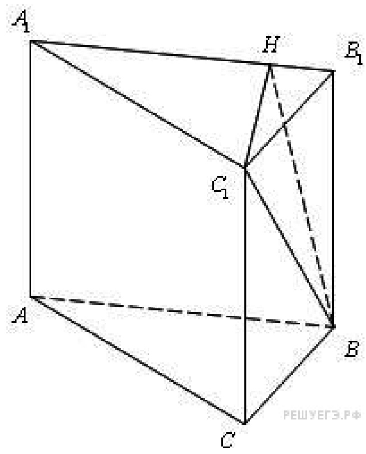
Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{3}{5}$.



10. Задание 14 № 485943. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник ABC, с гипотенузой $AB = 5$, и катетом $BC = \sqrt{5}$. Высота призмы равна $\sqrt{3}$. Найдите угол между прямой C_1B и плоскостью ABB_1.

Решение.

Поскольку призма $ABCA_1B_1C_1$ прямая, то высота C_1H треугольника $A_1B_1C_1$ перпендикулярна плоскости ABB_1. Поэтому прямая BH — проекция прямой C_1B на плоскость ABB_1. Значит, искомый угол равен углу C_1BH.



Так как $A_1C_1 = \sqrt{A_1B_1^2 - B_1C_1^2} = 2\sqrt{5}$, то

$$C_1H = \frac{A_1C_1 \cdot B_1C_1}{A_1B_1} = 2,\ BC_1 = \sqrt{BB_1^2 + B_1C_1^2} = 2\sqrt{2}.$$

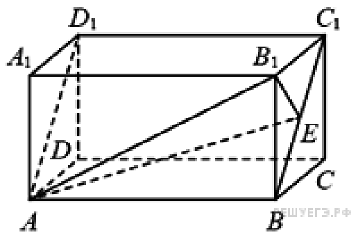
Рассмотрим прямоугольный треугольник C_1BH: $\angle C_1BH = \arcsin\dfrac{C_1H}{BC_1} = 45^\circ$.

Ответ: 45°.

11. Задание 14 № 500024. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны $AB = 2, AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE катет $B_1E = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, гипотенуза $AB_1 = \sqrt{5}$. Поэтому



$$\sin\angle B_1AE = \frac{B_1E}{AB_1} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Тогда $\angle B_1AE = \arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Примечание.

Возможны другие формы ответа: $\angle B_1AE = \arccos\dfrac{3}{\sqrt{10}} = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{3} = \operatorname{arcctg} 3$.

12. Задание 14 № 500025. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, известны $AB=1$, $AD=AA_1=2$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE. В прямоугольном треугольнике B_1AE с катетом $B_1E=\sqrt{2}$ и гипотенузой $AB_1=\sqrt{5}$ имеем:

$$\sin\angle B_1AE=\frac{B_1E}{AB_1}=\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Следовательно,

$$\angle B_1AE=\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5}$.

Примечание.

Возможны другие формы записи ответа:

$$\angle B_1AE=\arccos\frac{\sqrt{15}}{5}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}=\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

13. Задание 14 № 504565. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{4}{5}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

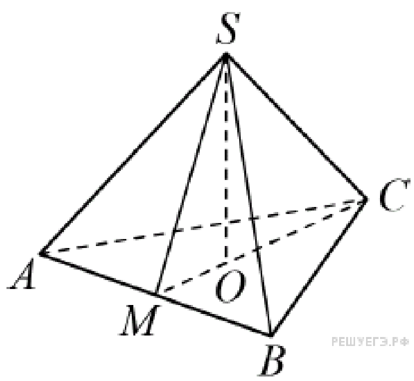
Решение.

Пусть $SO=4x$ и $SM=5x$.

Тогда

$$OM=x\sqrt{25-16}=3x,$$

$$OC=2\cdot OM=6x.$$



Из треугольника COS находим:

$$\operatorname{tg}\angle SCO=\frac{OS}{OC}=\frac{4x}{6x}=\frac{2}{3}.$$

Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2}{3}$.

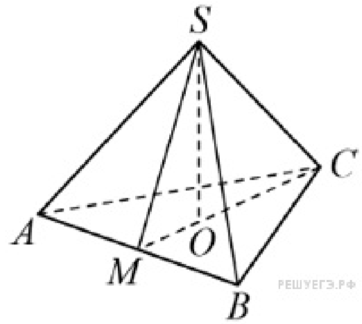
14. Задание 14 № 504544. Высота SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ составляет $\frac{5}{7}$ от высоты SM боковой грани SAB. Найдите угол между плоскостью основания пирамиды и её боковым ребром.

Решение.

Пусть $SO = 5x$ и $SM = 7x$. Тогда

$$OM = x\sqrt{49-25} = x\sqrt{24} = 2x\sqrt{6},$$

$$CO = 2OM = 4x\sqrt{6}.$$



Из треугольника COS находим:

$$\operatorname{tg}\angle SCO = \frac{OS}{OC} = \frac{5x}{4x\sqrt{6}} = \frac{5\sqrt{6}}{24}.$$

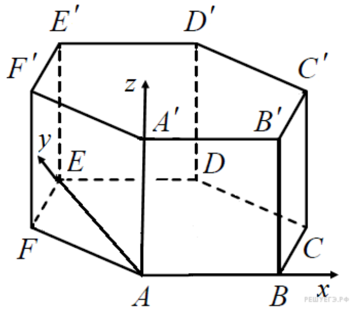
Тогда искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{5\sqrt{6}}{24}$.

15. Задание 14 № 501125. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA'B'C'D'E'F'$ все ребра равны 1. Найдите угол между прямой AC' и плоскостью ACD'.

Решение.

Введем прямоугольную систему координат, как показано на рисунке. В этой системе координат:



$$A(0;0;0),\ C\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};0\right),\ C'\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right),\ D'\left(1;\sqrt{3};1\right),\text{ откуда}$$

$$\vec{AC'}=\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};1\right).$$

Плоскость ACD' проходит через начало координат, ее уравнение имеет вид $Ax+By+Cz=0.$ Для координат точек C и D' имеем систему уравнений:

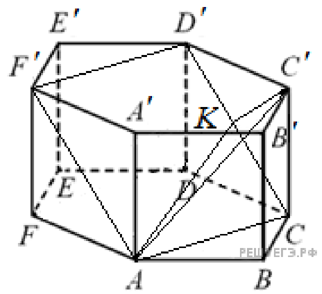
$$\begin{cases}\frac{3}{2}A+\frac{\sqrt{3}}{2}B+0C=0,\\ A+\sqrt{3}B+C=0.\end{cases}$$

Не теряя общности, положим $A=1$, тогда $B=-\sqrt{3},\ C=2.$ Уравнение плоскости ACD': $x-\sqrt{3}y+2z=0,$ вектор нормали к ней $\vec{n}=(1;-\sqrt{3};2).$ Тогда искомый угол между прямой AC' и плоскостью ACD' равен

$$\arcsin\frac{|\vec{AC}\cdot\vec{n}|}{|\vec{AC}||\vec{n}|}=\arcsin\frac{\left|\frac{3}{2}-\frac{3}{2}+2\right|}{\sqrt{8}\cdot\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}+1}}=\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Ответ: $\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

Приведем другое решение.



$\angle C'AK$ — искомый, так как это угол между прямой и ее проекцией AK. $\angle C'KA=90^\circ$, так как $ACD'\perp CC'D$ в силу того, что $AC\perp CC'$ и $AC\perp CD.$

Рассмотрим $\Delta AC'K$: $AC'=\sqrt{AC^2+CC'^2}=\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2;$

$KC'=\frac{1}{2}C'D=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ (т. к. $C'D$ — диагональ квадрата $CC'DD'$)

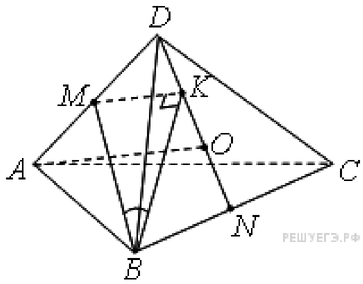
$\angle C'AK=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2}\right)=\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right).$

Ответ: $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}.$

16. Задание 14 № 484564. В правильном тетраэдре $ABCD$ найдите угол между медианой BM грани ABD и плоскостью BCD.

Решение.

Пусть, ребро тетраэдра a, DN — высота грани BCD, O — центр треугольника BCD, MK — средняя линия треугольника ADO. Тогда $AO \perp BCD$, $MK \parallel AO$, значит, $MK \perp (BCD)$ и, следовательно, $\angle MBK$ — искомый.



Кроме того, $ON = OK = DK = \frac{1}{3}DN$, откуда $KN = \frac{2}{3}DN = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Далее имеем:

$$BK = \sqrt{BN^2 + KN^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{7}}{2\sqrt{3}},\ BM = \frac{a\sqrt{3}}{2},\ \cos\angle MBK = \frac{BK}{BM} = \frac{a\sqrt{7}\cdot 2}{2\sqrt{3}\cdot a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7}}{3}.$$

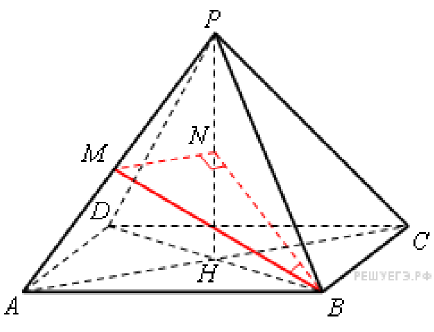
Ответ: $\arccos\frac{\sqrt{7}}{3}$.

17. Задание 14 № 484568. Длины всех ребер правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ с вершиной P равны между собой. Найдите угол между прямой BM и плоскостью BDP, если точка M — середина бокового ребра пирамиды AP.

Решение.

Пусть отрезок PH — высота пирамиды $PABCD$, отрезок MN — средняя линия треугольника APH (см. рисунок).

Поскольку $PABCD$ — правильная пирамида, точка H — центр квадрата $ABCD$, значит, $AH \perp BD$ и $AH \perp PH$, откуда $AH \perp BDP$. Но, $MN || AH$, следовательно, $MN \perp BDP$. Таким образом, прямая BN — проекция прямой BM на плоскость BDP, значит, угол между прямой BM и плоскостью BDP равен углу между прямой BM и прямой BN, то есть острому углу MBN прямоугольного треугольника MBN.



Примем длину ребра данной пирамиды за a, тогда медиана равностороннего треугольника $MB = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $AH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$, $MN = \frac{\sqrt{2}}{4}a$ и, следовательно, $\sin\angle MBN = \frac{MN}{MB} = \frac{\sqrt{6}}{6}$, $\angle MBN = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ответ: $\angle MBN = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{6}$.