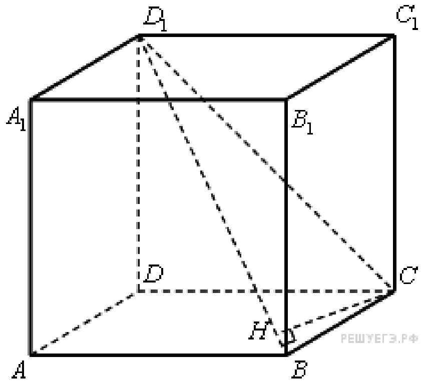
Расстояние от точки до прямой и до плоскости

1. Задание 14 № 484570. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой BD_1.

Решение.

Проведем отрезок CD_1 и опустим перпендикуляр CH на BD_1.



Искомое расстояние равно высоте CH прямоугольного треугольника BCD_1 с прямым углом C:

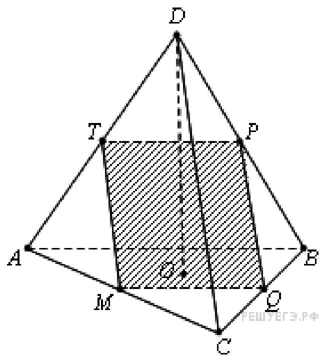
$$CH = \frac{2S_{BCD_1}}{BD_1} = \frac{CD_1 \cdot BC}{BD_1} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

2. Задание 14 № 484573. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{43}$, высота равна $\sqrt{31}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AD соответственно.

Решение.

Пусть P — середина ребра BD, Q — середина ребра BC. По теореме о средней линии треугольника $MT \,||\, CD \,||\, QP$, следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости.



$MT = \frac{1}{2}CD = QP$, следовательно, $MTPQ$ — параллелограмм. Кроме того, $PT \,||\, AB$, а по теореме о трёх перпендикулярах $AB \perp CD$ (так как $AB \perp CO$), поэтому этот параллелограмм — прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка PT. По теореме Пифагора

$$AO = \sqrt{AD^2 - DO^2} = 2\sqrt{3}.$$

Тогда

$$AB = \sqrt{3} \cdot AO = 6, \text{ а } PT = \frac{1}{2}AB = 3.$$

Ответ: 3.

3. Задание 14 № 512357. Все рёбра правильной треугольной пирамиды $SBCD$ с вершиной S равны 9.

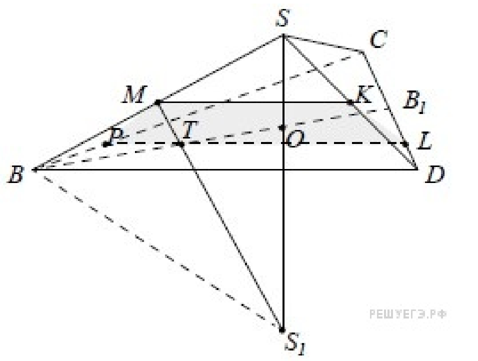
Основание O высоты SO этой пирамиды является серединой отрезка SS_1, M — середина ребра SB, точка L лежит на ребре CD так, что $CL : LD = 7 : 2$.

а) Докажите, что сечение пирамиды $SBCD$ плоскостью S_1LM — равнобокая трапеция.

б) Вычислите длину средней линии этой трапеции.

Решение.

Проведём медиану S_1M треугольника SS_1B, которая пересекает медиану BB_1 основания BCD в точке T. Тогда $BT : TB_1 = 4 : 5$, поскольку BB_1 также является медианой треугольника SS_1B.



Точка L, в свою очередь, делит отрезок B_1D в отношении $DL : LB_1 = 4 : 5$, так как $LD : LC = 2 : 7$ и отрезок BB_1 — медиана треугольника BCD.

Следовательно, сторона сечения, проходящая через точки L и T, параллельна стороне BD основания BCD. Пусть прямая LT пересекает BC в точке P.

Проведём через точку M среднюю линию в треугольнике SBD, пусть она пересекает сторону SD в точке K. Тогда $PMKL$ — искомое сечение, причём $BP = DL$ и $BM = KD$. Из равенства треугольников BMP и DKL получим $MP = KL$, а значит, $PMKL$ — равнобокая трапеция.

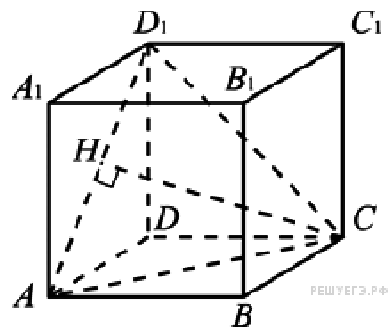
б) Большее основание PL трапеции равно 7, поскольку треугольник LPC правильный. Второе основание MK равно 4,5, поскольку MK — средняя линия правильного треугольника SBD. Следовательно, средняя линия трапеции равна $\dfrac{7+4,5}{2} = 5,75.$

Ответ: 5,75.

4. Задание 14 № 507651. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все ребра равны 1. Найдите расстояние от точки C до прямой AD_1

Решение.

Проведем отрезки CD_1 и AC. Искомое расстояние равно длине перпендикуляра CH, проведенного к прямой AD_1. Этот перпендикуляр является медианой равностороннего треугольника ACD_1 со стороной $\sqrt{2}$.



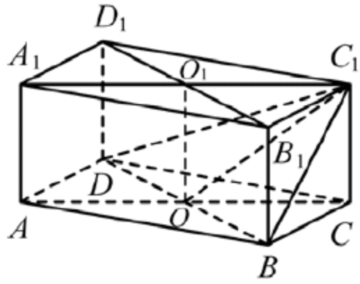
$$CH = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

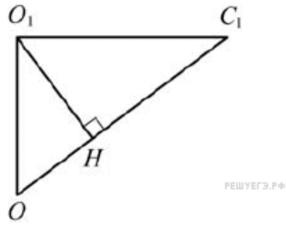
Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

5. Задание 14 № 507458. Основанием прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, у которого AB = 10, BD = 12. Высота призмы равна 6. Найдите расстояние от центра грани $A_1B_1C_1D_1$ до плоскости BDC_1.

Решение.

Пусть O_1 — центр грани $A_1B_1C_1D_1$. Плоскость AA_1C_1 пересекает плоскость BDC_1 по прямой C_1O, где O — середина отрезка BD. Прямая BD перпендикулярна плоскости AA_1C_1 поскольку перпендикулярна прямым OO_1 и AC. Следовательно, плоскости AA_1C_1 и BDC_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки O_1 до плоскости BDC_1 равно высоте O_1H прямоугольного треугольника OO_1C_1.





Из условия следует, что

$$OO_1 = 6,\ O_1D_1 = 6,\ O_1C_1 = \sqrt{C_1D_1^2 - O_1D_1^2} = 8.$$

Откуда:

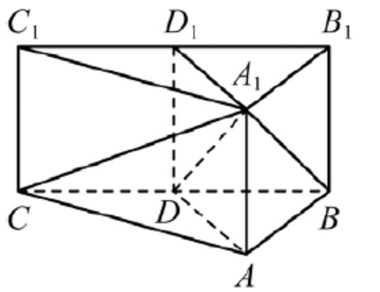
$$O_1H = \frac{O_1C_1 \cdot OO_1}{\sqrt{O_1C_1^2 + OO_1^2}} = \frac{8 \cdot 6}{10} = 4{,}8.$$

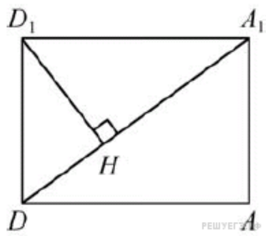
Ответ: 4,8.

6. Задание 14 № 507690. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC = 5$, $BC = 6$. Высота призмы равна 3. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до плоскости BCA_1.

Решение.

Пусть A_1D_1 — высота треугольника $A_1B_1C_1$, тогда D_1 — середина стороны B_1C_1. Прямая C_1D_1 параллельная плоскости BCA_1, поэтому расстояние от точек C_1 и D_1 до плоскости BCA_1 равны. Плоскость AA_1D_1 пересекает плоскость BCA_1 по прямой A_1D, где D — середина отрезка BC. Прямая BC перпендикулярна плоскости AA_1D_1 поскольку перпендикулярна прямым DD_1 и A_1D_1. Следовательно, плоскости AA_1D_1 и BCA_1 перпендикулярны. Поэтому расстояние от точки D_1 до плоскости BCA_1 равно высоте D_1H прямоугольного треугольника A_1D_1D.





Из условия следует, что $DD_1 = 3,\ C_1D_1 = 3,\ A_1D_1\sqrt{A_1C_1^2{}_{C1}D_1^2} = 4.$ Откуда:

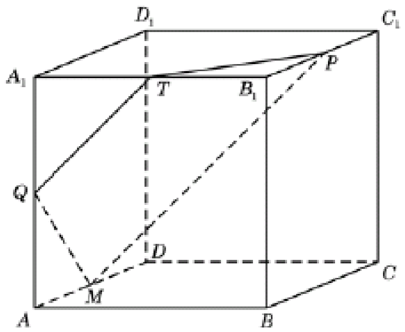
$$D_1H = \frac{A_1D_1 \cdot DD_1}{\sqrt{A_1D_1^2 + DD_1^2}} = \frac{4 \cdot 3}{5} = 2{,}4.$$

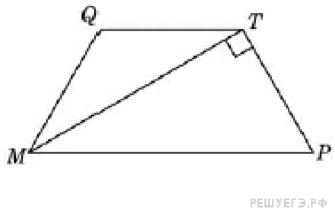
Ответ: 2,4.

7. Задание 14 № 507490. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром $2\sqrt{2}$. Найдите расстояние от середины ребра B_1C_1 до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AD и A_1B_1 соответственно.

Решение.

Пусть P — середина ребра B_1C_1, а Q — середина ребра AA_1. Заметим, что $PMQT$ — трапеция, так как $QT \parallel B_1A \parallel PM$.





Получаем:

$$TQ = QM = PT = \frac{1}{2}B_1A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}AB = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2} = 2.$$

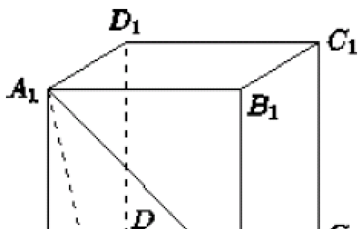
Заметим, что $MP = 4$. Продлим прямые MQ и PT и обозначим точку их пересечения N. В треугольнике MNP $QT||MP, QT = \frac{1}{2}MP$ значит QT является средней линией, и T - середина NP. Треугольник MNP - правильный. MT - медиана и высота. Значит, PT - перпендикуляр к MT и искомое расстояние равно $PT = 2$.

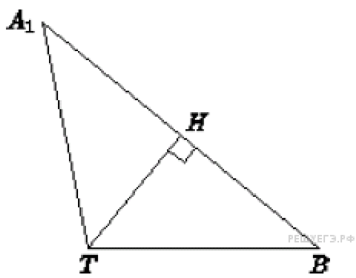
Ответ: 2.

8. Задание 14 № 507666. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром 1. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BT, где T — середина ребра AD.

Решение.

Пусть h — искомое расстояние. Найдём двумя способами объём пирамиды A_1ATB. С одной стороны, он равен $\frac{1}{3}\cdot AA_1\cdot S_{ATB} = \frac{1}{12}$. С другой стороны, он равен $\frac{1}{3}h\cdot S_{A_1TB}$. Треугольник A_1BT — равнобедренный, его основание A_1B равно $\sqrt{2}$, а боковые стороны равны $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Если H — середина основания A_1B, то $TH = \frac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $S_{A_1BT} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Следовательно, объём пирамиды A_1ATB равен $h\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}$. Приравняем выражения для объёма: $h\cdot\frac{\sqrt{6}}{12} = \frac{1}{12}$, откуда $h = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

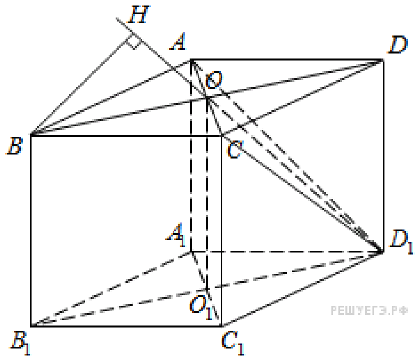




Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{6}$.

9. Задание 14 № 507645. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение.



Плоскость ACD_1 проходит через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость $A_1B_1C_1$. Точка O_1 является точкой пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отрезок OO_1 равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника OO_1D_1 по теореме Пифагора найдём OD_1 :

$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Найдём синус угла ODO_1 :

$$\sin\angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр BH на плоскость ACD_1, он попадёт на продолжение отрезка D_1O. Длина отрезка BH и будет являться расстоянием от точки B до плоскости ACD_1. Рассмотрим четырёхугольник BB_1D_1D : $BB_1||DD_1$, $BB_1 = DD_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следовательно, BB_1D_1D — прямоугольник, откуда $BD||B_1D_1$. Прямая HD — секущая при параллельных прямых BD и B_1D_1, поэтому углы HOB и ODO_1 равны. Из прямоугольного треугольника OBH найдём BH :

$$BH = OB\sin\angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. Задание 14 № 507502. В основании прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной $2\sqrt{10}$, высота призмы равна $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости BCM, где M — середина ребра A_1C_1.

Решение.

Пусть C_1P — высота треугольника CC_1M. Плоскость BCM пересекает плоскость $A_1B_1C_1$ по прямой ML, параллельной прямым BC и B_1C_1. Поскольку призма прямая и $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1 = 90^\circ$, прямая LM перпендикулярна грани ACC_1A_1, и, значит, $C_1P \perp LM$, и, следовательно, BCM. Отсюда следует, что расстояние от точки C_1 до плоскости BCM равно длине отрезка C_1P.

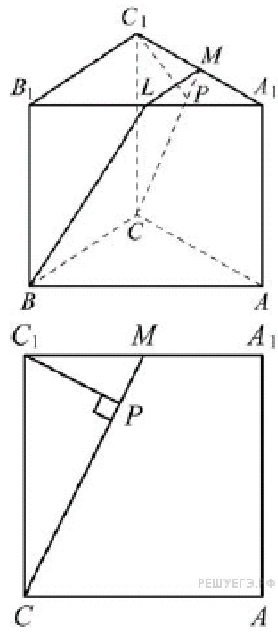
Найдём C_1P из треугольника CC_1M :

$$C_1M = \frac{1}{2}A_1C_1 = \frac{1}{2}AB\frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{5}.$$

По теореме Пифагора: $CM = \sqrt{CC_1^2 + C_1M^2} = 5$. Найдём C_1P :

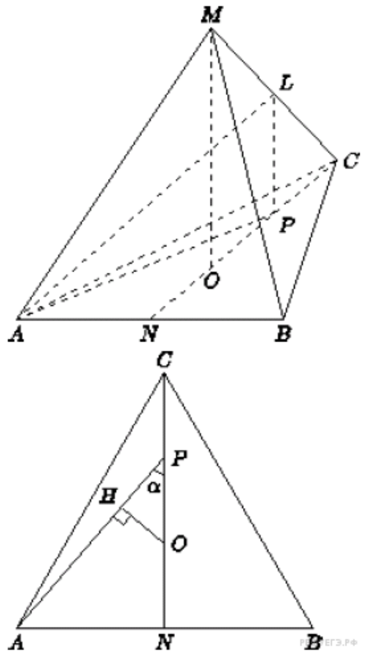
$$C_1P = \frac{C_1C \cdot C_1M}{CM} = \frac{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}{5} = 2.$$

Ответ: 2.



11. Задание 14 № 507669. Дан правильный тетраэдр $MABC$ с ребром 1. Найдите расстояние между прямыми AL и MO, где L — середина ребра MC, O — центр грани ABC.

Решение.



Пусть N — середина ребра AB, а P — середина отрезка OC. Прямая AL лежит в плоскости APL, параллельной прямой MO. Поэтому искомое расстояние равно расстоянию от прямой MO до плоскости APL.

Опустим из точки O перпендикуляр OH на прямую AP. Тогда $OH \perp APL$, и нам остаётся найти длину отрезка OH. Отношение $CO : ON = 2 : 1$, поэтому точки P и O делят отрезок CN на три равные части длиной $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ каждая. Пусть $\angle APN = \angle\alpha$. В треугольнике APN :

$$AN = \frac{1}{2}, \quad PN = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad AP = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{3}}.$$

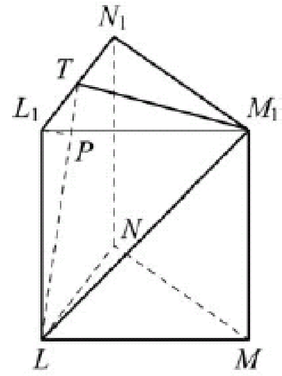
Следовательно, $\sin\alpha = \sqrt{\frac{3}{7}}.$ Из треугольника OPH находим, что $OH = OP \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{14}.$

Ответ: $\frac{\sqrt{7}}{14}$.

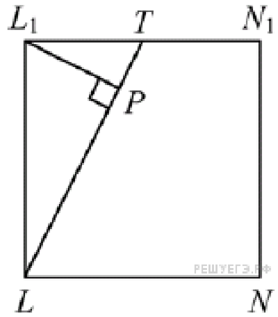
12. Задание 14 № 507681. Ребро основания правильной треугольной призмы $LMNL_1M_1N_1$ равно её высоте и равно $2\sqrt{5}$. Найдите расстояние от точки L_1 до плоскости LM_1T, где T — середина ребра L_1N_1.

Решение.

Пусть L_1P — высота треугольника LL_1T. Призма — прямая, поэтому прямая M_1T перпендикулярна плоскости LNN_1 и, значит, $M_1T \perp L_1P$. Следовательно, $L_1P \perp LM_1T$. Отсюда следует, что расстояние от точки L_1 до плоскости LM_1T равно длине отрезка L_1P. По теореме Пифагора $LT = \sqrt{LL_1^2 + L_1T^2} = 5$. Найдём L_1P :



$$L_1P = \frac{L_1L \cdot L_1T}{LT} = \frac{2\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{5} = 2.$$

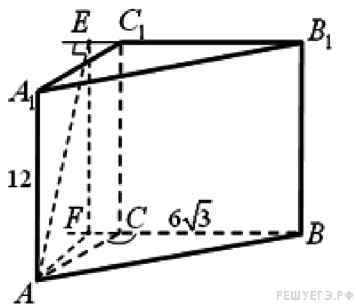


Ответ: 2.

13. Задание 14 № 500007. Основанием прямой призмы $ABCA_1B1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, боковая сторона которого равна $6\sqrt{3}$, а угол ACB равен $120°$. Найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1, если известно, что боковое ребро данной призмы равно 12.

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую B_1C_1 и проведем в плоскости грани CBB_1C_1 прямую EF, параллельную прямой C_1C. Так как $C_1C \perp ABC$, то и $EF \perp ABC$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC. Поскольку $B_1C_1 \parallel BC$, то $AE \perp BC$, а, следовательно, и $AF \perp CB$ согласно теореме о трех перпендикулярах.



Далее находим:

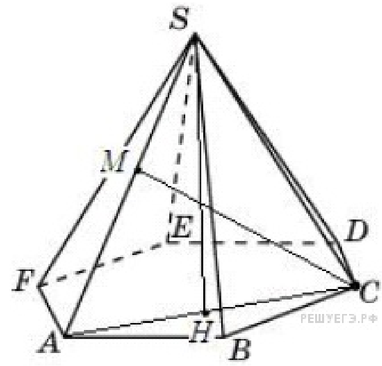
1) из ΔACF : $AF = AC \sin\angle ACF = 6\sqrt{3} \sin 60° = 9$;

2) из ΔAEF : $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 15$.

Ответ: 15.

14. Задание 14 № 507763. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SA.

Решение.



В треугольнике ASC проведём высоты CM и SH. Искомое расстояние — длина отрезка CM. Ясно, что, $AC \cdot SH = AS \cdot CM$, откуда $CM = \dfrac{AC \cdot SH}{AS}$. Треугольник ASC равнобедренный, $AS = SC = 2,\ AC = \sqrt{3}$. Тогда

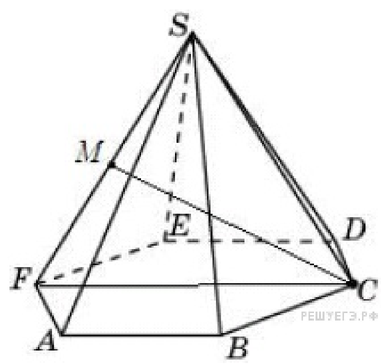
$$SH = \sqrt{2^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}.$$

Следовательно, $CM = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{13}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{39}}{4}$.

15. Задание 14 № 507766. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найдите расстояние от точки C до прямой SF.

Решение.

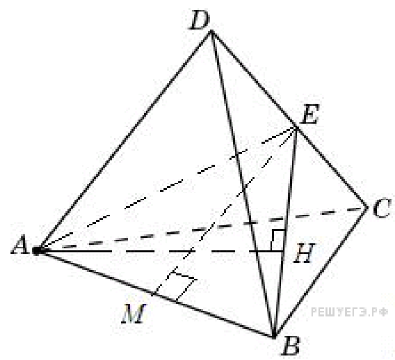


Радиус описанной около правильного шестиугольника окружности равен стороне шестиугольника. Значит, $FC = 2$. Поэтому треугольник FSC — равносторонний. Следовательно, высота CM этого треугольника равна $\dfrac{FS \cdot \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

16. Задание 14 № 507769. В тетраэдре $ABCD$, все рёбра которого равны 1, найдите расстояние от точки A до прямой, проходящей через точку B и середину E ребра CD.

Решение.



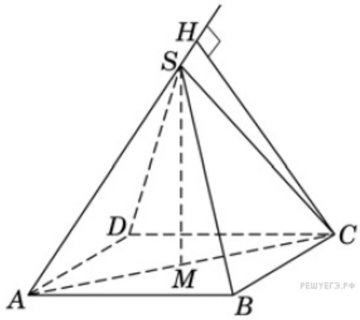
Рассмотрим равнобедренный треугольник AEB и его высоты AH и EM. Составим равенство: $AH \cdot BE = EM \cdot AB$. Заметим, что $AE = EB = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, поэтому $EM = \sqrt{\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда $AH = \dfrac{EM \cdot AB}{BE} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \cdot \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

17. Задание 14 № 507775. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$, сторона основания равна 1, а боковое ребро равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Найдите расстояние от точки C до прямой SA.

Решение.

Рассмотрим треугольник ASC и его высоты CH и SM. Составим равенство



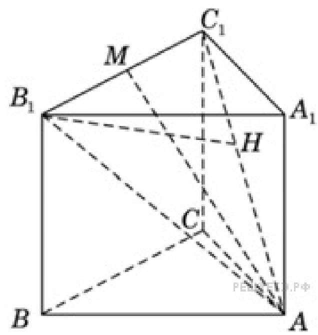
$CH \cdot AS = SM \cdot AC,\ AC = \sqrt{2};\ AM = \frac{\sqrt{2}}{2}$, поэтому $SM = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

Тогда $CH = \frac{SM \cdot AC}{AS} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

18. Задание 14 № 507778. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 2, сторона основания равна 1. Найдите расстояние от точки B_1 до прямой AC_1.

Решение.



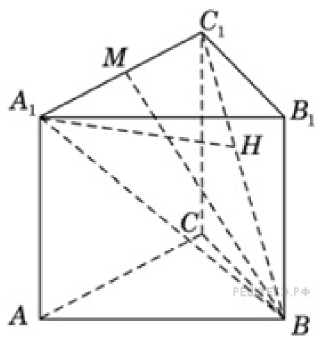
Искомое расстояние равно высоте B_1H треугольника AB_1C_1. Треугольник равнобедренный, поскольку $B_1A = AC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану AM. Найдём её длину: $AM = \sqrt{B_1A^2 - B_1M^2} = \sqrt{5 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

Площадь треугольника B_1AC равна $\frac{1}{2}B_1C_1 \cdot AM = \frac{1}{2}AC_1 \cdot B_1H$, откуда получаем уравнение $\frac{\sqrt{19}}{2} = \sqrt{5} \cdot B_1H$. Следовательно, $B_1H = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{95}}{10}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{95}}{10}$.

19. Задание 14 № 507785. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ высота равна 1, а ребро основания равно 2. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой BC_1.

Решение.



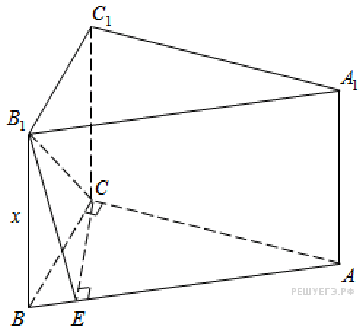
Искомое расстояние равно высоте A_1H треугольника A_1BC_1. Треугольник равнобедренный, поскольку $A_1B = BC_1 = \sqrt{5}$. Дополнительно проведём высоту и медиану BM. Найдём её длину: $BM = \sqrt{A_1B^2 - A_1M^2} = \sqrt{5-1} = 2$. Тогда $S_{A_1BC_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot BM = \frac{1}{2}BC_1 \cdot A_1H$, откуда получаем уравнение $2 = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot A_1H$. Следовательно, $A_1H = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

20. Задание 14 № 507794. В основании прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ лежит прямоугольный треугольник ABC, у которого угол C равен 90°, угол A равен 30°, $AC = 10\sqrt{3}$. Диагональ боковой грани B_1C составляет угол 30° с плоскостью AA_1B_1. Найдите высоту призмы.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Вспомним, что по определению угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Поэтому опустим перпендикуляр CE на плоскость AA_1B_1, тогда B_1E — проекция прямой B_1C на плоскость AA_1B_1, следовательно, угол CB_1E — угол между наклонной CB_1 и плоскостью AA_1B_1, значит, этот угол равен 30°. Из прямоугольного треугольника ABC :



$$BC = AC\operatorname{tg}\angle BAC = 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 10.$$

Углы BAC и BCE равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из прямоугольного треугольника BEC находим:

$$BE = BC\sin\angle BCE = 10\cdot\frac{1}{2} = 5,\ CE = BC\cos\angle BCE = 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}.$$

Обозначим искомое расстояние x. Из прямоугольного треугольника BB_1C по теореме Пифагора: $CB_1 = \sqrt{x^2+100}$. Из прямоугольного треугольника BB_1E по теореме Пифагора: $B_1E = \sqrt{x^2+25}$. Рассмотрим треугольник B_1CE, по теореме косинусов:

$$EC^2 = CB_1^2 + B_1E^2 - 2\cdot B_1E_1\cos\angle CB_1E \Leftrightarrow 75 = 100 + x^2 + x^2 + 25 - 2\sqrt{100+x^2}\sqrt{x^2+25}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{3(x^2+100)(x^2+25)} = 2x^2+50 \Leftrightarrow 3(x^4+125x^2+2500) = 4x^4+200x^2+2500 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 175x^2 - 5000 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 200, \\ x^2 = -25. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10\sqrt{2}, \\ x = -10\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

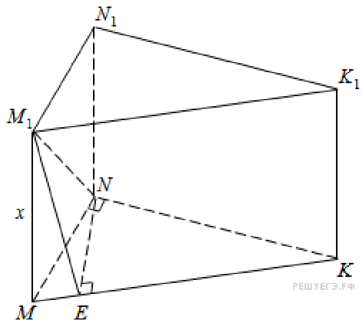
По смыслу задачи подходит только корень $10\sqrt{2}$.

Ответ: $10\sqrt{2}$.

21. Задание 14 № 507800. Основанием прямой призмы $MNKM_1N_1K_1$ является прямоугольный треугольник MNK, у которого угол N равен 90°, угол M равен 60°, $NK = 18$. Диагональ боковой грани M_1N составляют угол 30° с плоскостью MM_1K_1. Найдите высоту призмы.

Решение.

Введём обозначения как показано на рисунке. Вспомним, что по определению угол между прямой и плоскостью — это угол между прямой и её проекцией на плоскость. Поэтому опустим перпендикуляр NE на плоскость MM_1K_1, тогда M_1E — проекция прямой M_1N на плоскость KK_1M_1, следовательно, угол NM_1E — угол между наклонной NM_1 и плоскостью KK_1M_1, значит, этот угол равен 30°. Из прямоугольного треугольника KMN :



$$MN = KN\operatorname{tg}\angle MKN = 18\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 6\sqrt{3}.$$

Углы MKN и MNE равны как углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Из прямоугольного треугольника MEN находим:

$$NE = MN\sin\angle NME = 6\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 9.$$

Обозначим искомое расстояние x. Из прямоугольного треугольника MM_1N по теореме Пифагора: $NM_1 = \sqrt{x^2+108}$. Рассмотрим треугольник M_1NE, он прямоугольный и $\angle NM_1E = 30°$.

$$NM_1 = 2NE \Leftrightarrow \sqrt{x^2+108} = 18 \Leftrightarrow x^2 = 216 \Leftrightarrow x = \pm 6\sqrt{6}$$

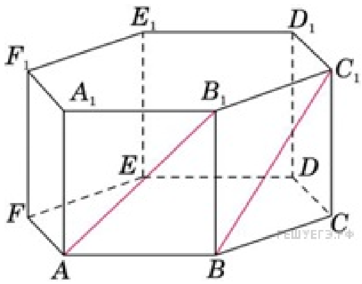
По смыслу задачи подходит только корень $6\sqrt{6}$.

Ответ: $6\sqrt{6}$.

22. Задание 14 № 507816. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 1, найдите косинус угла между прямыми AB_1 и BC_1.

Решение.

$$\cos\alpha = \frac{(\sqrt{2})^2+\sqrt{2}^2-1^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2+2-1}{2\cdot 2} = \frac{3}{4} = 0{,}75$$



Ответ: 0,75.

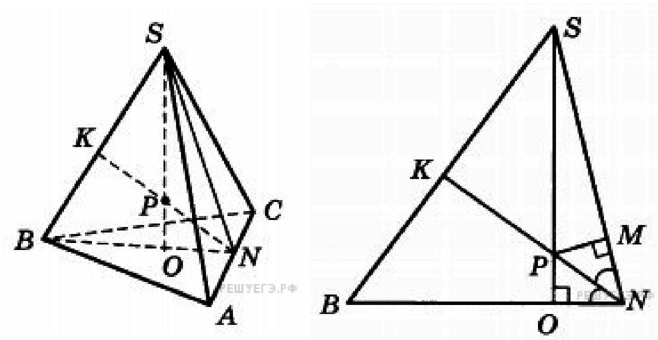
23. Задание 14 № 511106. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с вершиной S? все рёбра которой равны 4, точка N — середина ребра AC, точка O центр основания пирамиды, точка P делит отрезок SO в отношении 3:1, считая от вершины пирамиды.

а) Докажите, что прямая NP перпендикулярна прямой BS.

б) Найдите расстояние от точки B до прямой NP.

Решение.

а) Точка O принадлежит отрезку BN, значит, точка P, лежащая на отрезке SO, находится в плоскости SBN и пересекает SB в точке K. Треугольник SNB равнобедренный, поскольку отрезки SN и BN — медианы одинаковых равносторонних треугольников SAC и BAC. Поэтому $SN = BN$. В точке O пересекаются медианы основания, значит, $ON = \frac{1}{3}BN = \frac{1}{3}SN$. Опустим перпендикуляр из точки P на сторону SN. Пусть он пересекает SN в точке M. Треугольники SPM и SNO подобны, поэтому $\frac{SP}{PM} = \frac{SN}{ON} = 3$. Значит, $PM = \frac{1}{3}SP = PO$. Следовательно, треугольники NPO и NPM равны и PN — биссектриса угла SNB. В равнобедренном треугольнике биссектриса является медианой и высотой. Значит, $NK \perp BS$.



б) Так как BS перпендикулярно NK, то искомое расстояние равно длине отрезка BK. Так как NK является медианой треугольника SNB, то $BK = \frac{1}{2}BS = 2$.

Ответ: 2.

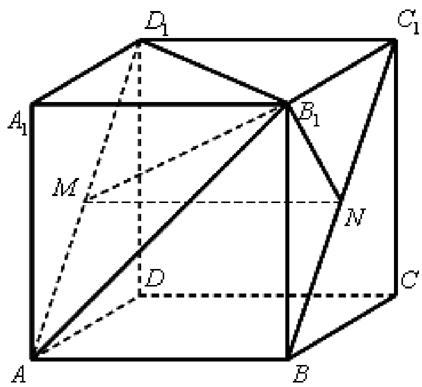
24. Задание 14 № 484571. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Длина ребра куба равна 1. Найдите расстояние от середины отрезка BC_1 до плоскости AB_1D_1.

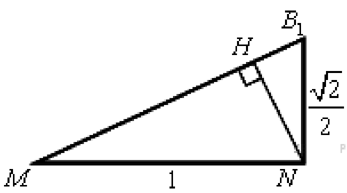
Решение.

Пусть M — середина AD_1, N — середина BC_1, $BC_1 || AD_1$, $B_1C \perp BC_1$, значит, $B_1N \perp AD_1$. Кроме того, $MN \perp AD_1$, следовательно, плоскость $MB_1N \perp AD_1$. Опустим перпендикуляр NH из точки N на прямую MB_1, кроме этого, $NH \perp AD_1$ (так как лежит в плоскости MB_1N), следовательно, $NH \perp AB_1D_1$ и является искомым расстоянием.

Искомый отрезок NH является высотой прямоугольного треугольника MNB_1 с прямым углом N.

Поэтому



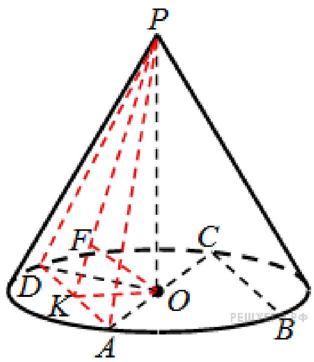


$$NH = \frac{NB_1 \cdot NM}{MB_1} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

25. Задание 14 № 504830. Отрезок AC — диаметр основания конуса, отрезок AP — образующая этого конуса и $AP = AC$. Хорда основания BC составляет с прямой AC угол 60°. Через AP проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой BC. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

Решение.



Пусть отрезок AD — хорда основания, параллельная BC. Тогда треугольник ADP является искомым сечением, так как плоскость ADP содержит прямую AP и прямую AD, параллельную BC. Опустим перпендикуляр PK на прямую AD. Согласно теореме о трех перпендикулярах OK также является перпендикуляром к AD, значит, $AD \perp (OPK)$. Высота OF треугольника OPK лежит в плоскости OPK, следовательно, $OF \perp AD$ и $OF \perp PK$, значит, $OF \perp (ADP)$.

Далее находим:

1) из условия $AD||BC: \angle DAC = \angle BCA = 60^\circ$;

2) из правильного треугольника $AOD: OK = \dfrac{AO\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника $APO: PO^2 = AP^2 - AO^2 = 4R^2 - R^2 = 3$;

4) из прямоугольного треугольника KPO:

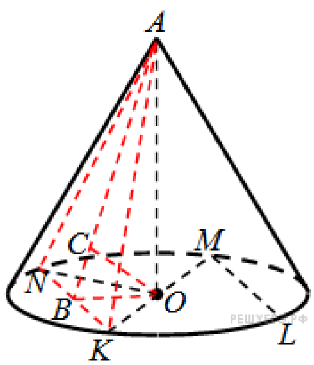
а) $KP = \sqrt{PO^2 + KO^2} = \dfrac{\sqrt{15}}{2}$;

б) $OF = \dfrac{OK \cdot OP}{PK} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot 2}{2 \cdot \sqrt{15}} = \dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

Ответ: $\dfrac{3}{\sqrt{15}}$.

26. Задание 14 № 504851. Отрезок KM — диаметр основания конуса, отрезок AK — образующая этого конуса, которая в 3 раза больше радиуса его основания. Хорда основания ML составляет с прямой KM угол 45°. Через AK проведено сечение конуса плоскостью, параллельной прямой ML. Найдите расстояние от центра основания конуса O до плоскости сечения, если радиус основания конуса равен 1.

Решение.



Пусть отрезок KN — хорда основания, параллельная ML. Тогда треугольник AKN окажется искомым сечением, так как плоскость AKN содержит прямую AK и прямую KN, параллельную ML. Опустим перпендикуляр AB на прямую KN. Согласно теореме о трех перпендикулярах OB также является перпендикуляром к KN, значит, $KN \perp (ABO)$. Высота OC треугольника ABO лежит в плоскости ABO, следовательно, $OC \perp AB$ и $OC \perp KN$, значит, $OC \perp (AKN)$.

Далее находим:

1) из условия $KN||ML: \angle NKM = \angle KML = 45^\circ$;

2) из прямоугольного треугольника $KON: OB = \dfrac{KO\sqrt{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

3) из прямоугольного треугольника $AKO: AO^2 = AK^2 - KO^2 = 9R^2 - R^2 = 8$;

4) из прямоугольного треугольника ABO:

а) $AB = \sqrt{OB^2 + AO^2} = \dfrac{\sqrt{34}}{2}$;

б) $OC = \dfrac{OB \cdot OA}{AB} = \dfrac{\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2}{2\sqrt{34}} = \dfrac{4}{\sqrt{34}}$.

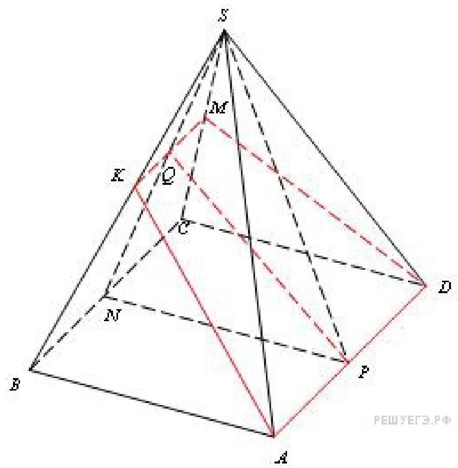
Ответ: $\dfrac{4}{\sqrt{34}}$.

27. Задание 14 № 485988. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA=\sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки B до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.

Решение.

Построим сечение $ADMK$, где K — середина ребра SB. Прямая BC параллельна AD, значит, искомое расстояние равно расстоянию от точки N до плоскости ADM, где N — середина BC.

Пусть P — середина AD. Рассмотрим сечение NSP.



$$SN=SP=\sqrt{SA^2-AP^2}=\sqrt{5-1}=2.$$

Значит, треугольник SNP равносторонний. Искомое расстояние равно расстоянию от N до PQ, где Q — середина SN, PQ — медиана и высота треугольника SNP. Поэтому искомое расстояние равно $NQ=\frac{1}{2}SN=1$.

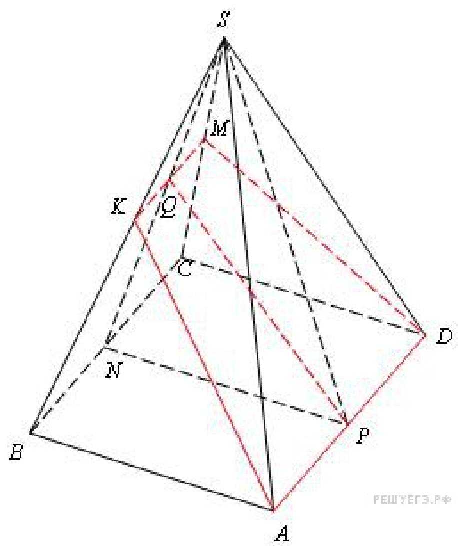
Ответ: 1.

28. Задание 14 № 485992. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$. Боковое ребро $SA=\sqrt{5}$, сторона основания равна 2. Найдите расстояние от точки S до плоскости ADM, где M — середина ребра SC.

Решение.

Построим сечение $ADMK$, где K — середина ребра SB и $KM \parallel BC \parallel AD$ — средняя линия треугольника SBC. Покажем, что искомое расстояние равно длине SQ, где Q — середина SN — высоты боковой грани SBC.

Рассмотрим плоскость SNP, где P — середина стороны AD.



$$SN=SP=\sqrt{SA^2-AP^2}=\sqrt{5-1}=2.$$

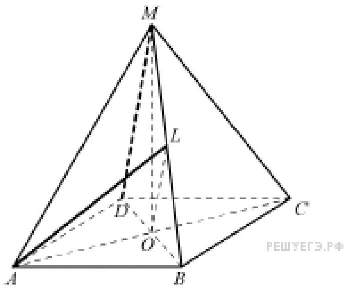
Значит, треугольник SNP — равносторонний и медиана PQ является также высотой. Следовательно, $PQ \perp SQ$, учитывая, что средняя линия $KM \perp SQ$, можем сделать вывод, что $SQ \perp ADM$, значит искомое расстояние $SQ=\frac{1}{2}SN=1$.

Ответ: 1.

29. Задание 14 № 504241. Дана правильная четырёхугольная пирамида $MABCD$, рёбра основания которой равны $5\sqrt{2}$. Тангенс угла между прямыми DM и AL равен $\sqrt{2}$, L — середина ребра MB. Найдите высоту данной пирамиды.

Решение.

Обозначим угол между DM и AL буквой α. Пусть MO — высота пирамиды $MABCD$. Тогда OL — средняя линия треугольника BDM, следовательно, $OL || MD$. Поэтому $\angle ALO = \alpha$. По условию $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.



Основание $ABCD$ — квадрат со стороной, равной $5\sqrt{2}$. Следовательно, $OA \perp OB$, $OL \perp OA$, $OA = 5$. Далее, из прямоугольного треугольника AOL находим:

$$OL = \frac{OA}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{5}{\sqrt{2}}.$$

Боковое ребро $MD = 2OL = 5\sqrt{2}$, поскольку OL — средняя линия треугольника BDM. Далее, из прямоугольного треугольника MOD находим искомую высоту MO пирамиды $MABCD$:

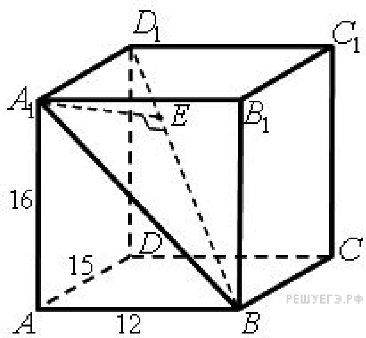
$$MO = \sqrt{MD^2 - OD^2} = \sqrt{MD^2 - OD^2} = 5.$$

Ответ: 5.

30. Задание 14 № 501396. Длины ребер AB, AA_1 и AD прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 12, 16 и 15. Найдите расстояние от вершины A_1 до прямой BD_1.

Решение.

Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1E на прямую BD_1. Так как $A_1D_1 \perp (A_1AB)$, то $A_1D_1 \perp A_1B$, а, значит, отрезок A_1E — высота прямоугольного треугольника A_1BD_1, откуда $A_1E = \dfrac{A_1B \cdot A_1D_1}{BD_1}$. Далее находим:



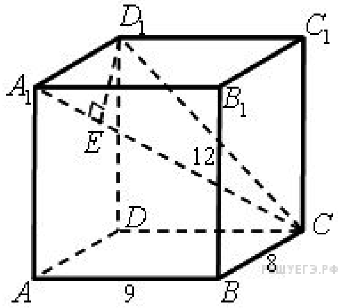
$$A_1B = \sqrt{A_1A^2 + AB^2} = 20,\ BD_1 = \sqrt{A_1A^2 + AB^2 + A_1D_1^2} = 25,$$

$$A_1E = \frac{20 \cdot 15}{25} = 12.$$

Ответ: 12.

31. Задание 14 № 501416. Длины ребер BC, BB_1 и BA прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны соответственно 8, 12 и 9. Найдите расстояние от вершины D_1 до прямой A_1C.

Решение.



Опустим из точки D_1 перпендикуляр D_1E на прямую A_1C. Так как $A_1D_1 \perp (D_1DC)$, то $A_1D_1 \perp D_1C$, а, значит, отрезок D_1E — высота прямоугольного треугольника A_1CD_1, откуда $D_1E = \dfrac{D_1C \cdot A_1D_1}{A_1C}$. Далее находим:

$$D_1C = \sqrt{D_1D^2 + DC^2} = 15,$$
$$A_1C = \sqrt{CD^2 + DD_1{}^2 + A_1D_1{}^2} = 17,$$
$$D_1E = \frac{8 \cdot 15}{17} = \frac{120}{17}.$$

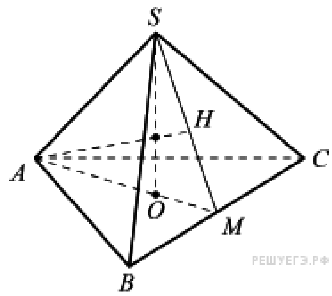
Ответ: $\dfrac{120}{17}$.

32. Задание 14 № 505153. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 5, а сторона основания равна 6. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение.

Пусть SO – высота пирамиды. Тогда, так как треугольник ABC равносторонний,

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3},\ SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{25-12} = \sqrt{13}.$$



Пусть V – объём пирамиды, тогда $V = \dfrac{1}{3} \cdot SO \cdot \dfrac{AB^2\sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{39}.$

С другой стороны, $V = \dfrac{1}{3} \cdot h \cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{25-9} = 4.$

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC} = \dfrac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 12.$ Получаем, что

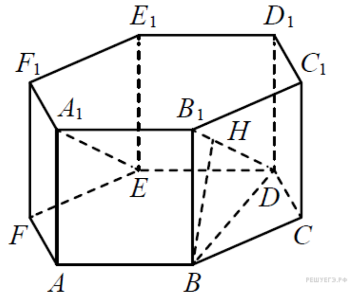
$$h = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{39}}{12} = \frac{3\sqrt{39}}{4}.$$

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{39}}{4}$.

33. Задание 14 № 500448. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра равны 1. Найдите расстояние от точки B до плоскости DEA_1.

Решение.

Прямые BB_1 и DB перпендикулярны прямой ED. Плоскость DEA_1, содержащая прямую ED, перпендикулярна плоскости BB_1D. Значит, искомое расстояние равно высоте BH прямоугольного треугольника BB_1D, в котором $BB_1 = 1$, $BD = \sqrt{3}$, $B_1D = 2$:



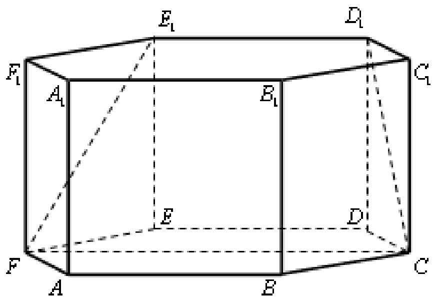
$$BH = \frac{BB_1 \cdot BD}{B_1D} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

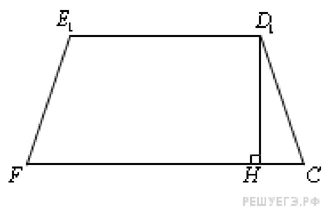
Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

34. Задание 14 № 484575. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ стороны основания которой равны 3, а боковые ребра равны 4, найдите расстояние от точки C до прямой D_1E_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ правильный шестиугольник, то прямые FC и DE параллельны, параллельны также прямые D_1E_1 и DE, следовательно, прямые D_1E_1 и FC параллельны. Расстояние от точки C до прямой D_1E_1, равно расстоянию между прямыми D_1E_1 и FC.





В трапеции FE_1D_1C:

$$D_1E_1 = 3, FC = 6, FE_1 = CD_1 = 5, CH = \frac{FC - E_1D_1}{2} = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2},$$

тогда

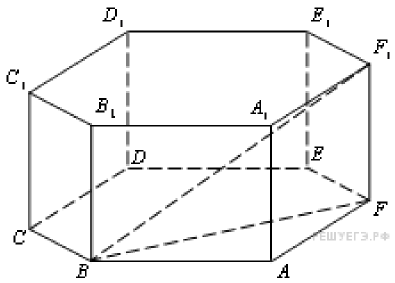
$$D_1H = \frac{\sqrt{91}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{91}}{2}$.

35. Задание 14 № 484566. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, все ребра которой равны 1 найдите расстояние от точки B до прямой E_1F_1.

Решение.

Проведем отрезки BF и BF_1, $BF \perp BC$, поскольку $\angle CBA = 120^\circ$, а $\angle ABF = 30^\circ$. BF — проекция BF_1 на плоскость основания. По теореме о трех перпендикулярах $BF_1 \perp E_1F_1$. Таким образом искмое расстояние — длина отрезка BF_1.



Рассмотрим треугольник BFF_1. Он прямоугольный, $BF = \sqrt{3}$, $FF_1 = 1$.

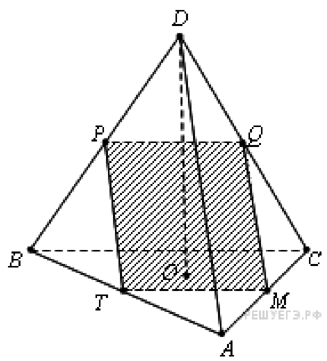
По теореме Пифагора находим: $BF_1 = \sqrt{3+1} = 2$.

Ответ: 2.

36. Задание 14 № 484574. Дана правильная треугольная пирамида $DABC$ с вершиной D. Сторона основания пирамиды равна $\sqrt{6}$, высота равна $\sqrt{30}$. Найдите расстояние от середины бокового ребра BD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер AC и AB соответственно.

Решение.

Пусть Q — середина ребра CD, P — середина ребра BD. По теореме о средней линии треугольника $TP || AD || MQ$, следовательно, точки M, T, P, Q лежат в одной плоскости.



$TP = \frac{1}{2}AD = MQ$, следовательно, точки M, T, P, Q являются вершинами параллелограмма. Кроме того, $PQ || BC$, а по теореме о трёх перпендикулярах, так как $AO \perp BC$, получим $AD \perp BC$, поэтому этот параллелограмм — прямоугольник. Значит, искомое расстояние есть длина отрезка PT. Отрезок AO равен $AB/\sqrt{3} = \sqrt{2}$.

По теореме Пифагора

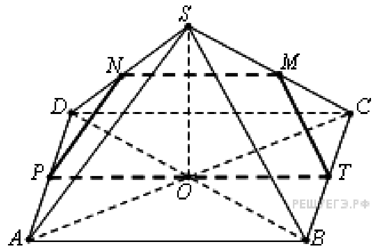
$$AD = \sqrt{AO^2 + DO^2} = 4\sqrt{2},\ PT = \frac{1}{2}AD = 2\sqrt{2}.$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

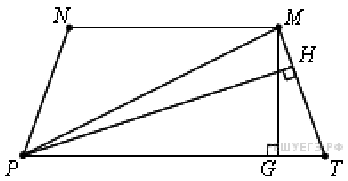
37. Задание 14 № 484572. Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Ребро основания пирамиды равно $\sqrt{6}$, высота — $\sqrt{33}$. Найдите расстояние от середины ребра AD до прямой MT, где точки M и T — середины ребер CS и BC соответственно.

Решение.

Пусть O — центр основания, а N — середина ребра SD, P — середина ребра AD. Тогда $MN||CD||TP$, поэтому точки P, N, M, T лежат в одной плоскости и являются вершинами трапеции.



По теореме о средней линии треугольника $NP = \dfrac{1}{2}AS = \dfrac{1}{2}BS = MT$, так что трапеция равнобедренная.



Так как $AO = \dfrac{AB}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, $AS = \sqrt{OA^2 + OS^2} = \sqrt{3+33} = 6$, $NP = MT = 3$.

Основания трапеции равны $PT = \sqrt{6}$, $MN = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$. В треугольнике PMT проведем высоты MG и PH. Тогда

$$GT = \frac{PT - MN}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4},\ MG = \sqrt{MT^2 - GT^2} = \sqrt{9 - \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{69}{8}}.$$

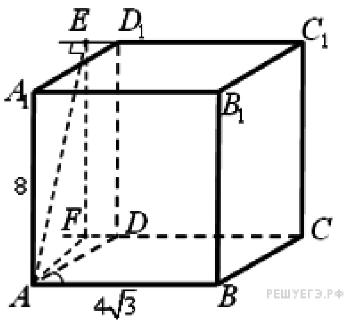
Заметим, что $MG \cdot PT = 2 \cdot S_{PMT} = PH \cdot MT$, поэтому $PH = \dfrac{MG \cdot PT}{MT} = \dfrac{1}{2}\sqrt{23}$.

Ответ: $\dfrac{1}{2}\sqrt{23}$..

38. Задание 14 № 500001. Основанием прямого параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является ромб $ABCD$, сторона которого равна $4\sqrt{3}$ а угол BAD равен 60°. Найдите расстояние от точки A до прямой C_1D_1, если известно, что боковое ребро данного параллелепипеда равно 8.

Решение.

Опустим из точки A перпендикуляр AE на прямую C_1D_1 и проведем в плоскости грани CDD_1C_1 прямую EF, параллельную прямой D_1D. Так как $D_1D \perp (ACD)$, то и $EF \perp (ACD)$, а, значит, прямая AF является проекцией прямой AE на плоскость ABC. Поскольку $D_1C_1 \parallel DC$, то $AE \perp CD$, а, следовательно, и $AF \perp CD$ согласно теореме о трех перпендикулярах.



Далее находим:

1) из ΔADF: $AF = AD \sin\angle ADF = 4\sqrt{3}\sin 60^\circ = 6$;

2) из ΔAEF: $AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = 10$.

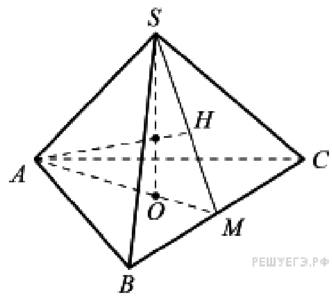
Ответ: 10.

39. Задание 14 № 505174. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC боковое ребро равно 3, а сторона основания равна 2. Найдите расстояние от вершины A до плоскости SBC.

Решение.

Пусть SO – высота пирамиды. Тогда

$$AO = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \; SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{9 - \frac{4}{3}} = \frac{\sqrt{69}}{3}.$$



Пусть V – объём пирамиды, тогда $V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{23}}{3}.$

С другой стороны, $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{SBC}$, где h – искомое расстояние.

В треугольнике SBC высота SM равна $\sqrt{SB^2 - MB^2} = \sqrt{9-1} = 2\sqrt{2}.$

Площадь треугольника SBC равна $S_{SBC} = \frac{1}{2} \cdot SM \cdot BC = 2\sqrt{2}.$ Получаем, что

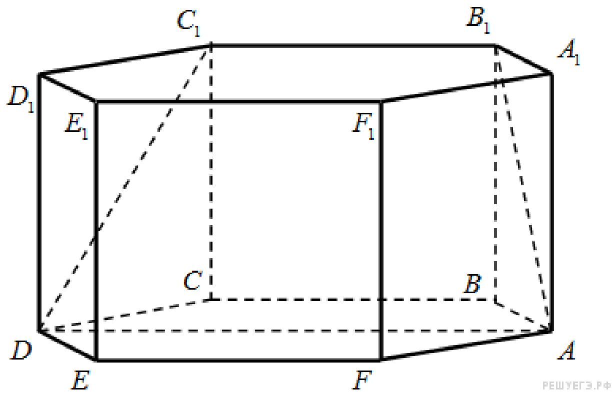
$$h = \frac{3V}{S_{SBC}} = \frac{\sqrt{23}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{46}}{4}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{46}}{4}$.

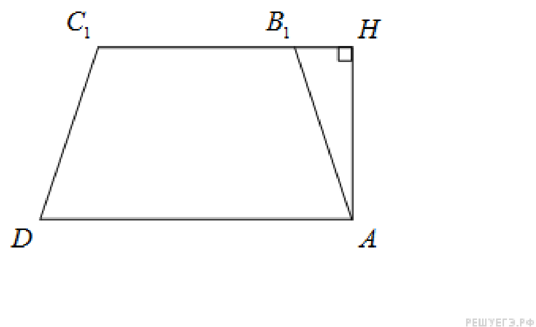
40. Задание 14 № 485941. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F$, все рёбра которой равны 4, найдите расстояние от точки A до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, то прямые AD и BC параллельны.



Параллельны также прямые BC и B_1C_1, и следовательно, прямые AD и B_1C_1 параллельны. Расстояние от точки A до прямой B_1C_1 равно расстоянию между прямыми AD и B_1C_1.



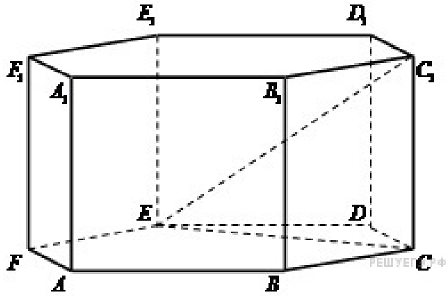
В трапеции DC_1B_1A имеем $B_1C_1 = 4$, $DA = 8$, $DC_1 = B_1A = 4\sqrt{2}.$ Значит, $B_1H = \frac{DA - C_1B_1}{2} = \frac{8-4}{2} = 2$, тогда $AH = \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}.$

Ответ: $2\sqrt{7}$.

41. Задание 14 № 485955. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все рёбра которой равны 10, найдите расстояние от точки E до прямой B_1C_1.

Решение.

Так как $ABCDEF$ — правильный шестиугольник, прямые BC и CE перпендикулярны. Поскольку прямые BC и B_1C_1 параллельны, CE перпендикулярно B_1C_1. Тогда по теореме о трёх перпендикулярах EC_1 перпендикулярна B_1C_1, поэтому длина отрезка EC_1 равна искомому расстоянию.



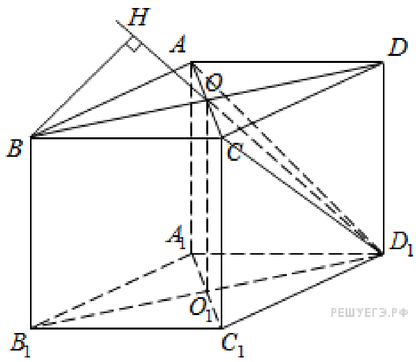
По условию $CC_1 = 10$, диагональ правильного шестиугольника $CE = 10\sqrt{3}$. Тогда по теореме Пифагора для треугольника ECC_1 находим, что $EC_1 = 20$.

Ответ: 20.

42. Задание 14 № 505524. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости ACD_1.

Решение.

Плоскость ACD_1 проходит через точку пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Опустим перпендикуляр OO_1 на плоскость $A_1B_1C_1$. Точка O_1 является точкой пересечения диагоналей квадрата $A_1B_1C_1D_1$. Диагонали квадрата в $\sqrt{2}$ раз больше стороны квадрата и делятся точкой пересечения пополам. Поэтому $OB = O_1D_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отрезок OO_1 равен стороне квадрата. Из прямоугольного треугольника OO_1D_1 по теореме Пифагора найдём OD_1 :



$$OD_1 = \sqrt{OO_1^2 + O_1D_1^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Найдём синус угла ODO_1 :

$$\sin\angle OD_1O_1 = \frac{OO_1}{OD_1} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Опустим перпендикуляр BH на плоскость ACD_1, он попадёт на продолжение отрезка D_1O. Длина отрезка BH и будет являться расстоянием от точки B до плоскости ACD_1. Рассмотрим четырёхугольник BB_1D_1D : $BB_1 || DD_1$, $BB_1 = DD_1$ и $BB_1 \perp A_1B_1C_1D_1$, следовательно, BB_1D_1D — прямоугольник, откуда $BD || B_1D_1$. Прямая HD — секущая при параллельных прямых BD и B_1D_1, поэтому углы HOB и OD_1O_1 равны. Из прямоугольного треугольника OBH найдём BH :

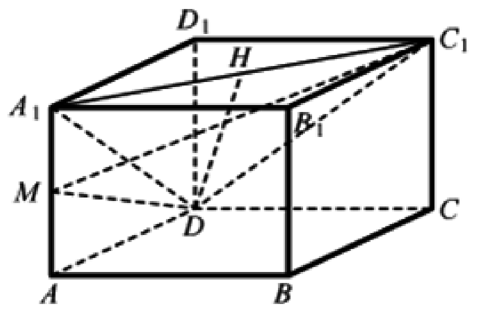
$$BH = OB\sin\angle BOH = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

43. Задание 14 № 485966. В правильной четырехугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ высота равна 1, а сторона основания равна $\sqrt{2}$. Точка M — середина ребра AA_1. Найдите расстояние от точки M до плоскости DA_1C_1.

Решение.

Рассмотрим треугольную пирамиду MDA_1C_1. Ее объем можно выразить двумя способами:



1) $V = \frac{1}{3}S_{MA_1D} \cdot C_1D_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot A_1M \cdot C_1D_1 =$
$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{6}.$

2) $V = \frac{1}{3}S_{DA_1C_1} \cdot h$, где h искомое расстояние.

Приравняем выражения для объемов и выразим его:

$$h = \frac{1}{2S_{DA_1C_1}}.$$

Найдем площадь равнобедренного треугольника DA_1C_1. Проведем в нем высоту DH.

$$DA_1 = \sqrt{D_1A_1^2 + DD_1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

$$A_1H = \frac{A_1D_1}{\sqrt{2}} = 1, A_1C_1 = A_1D_1 \cdot \sqrt{2} = 2.$$

$$DH = \sqrt{DA_1^2 - A_1H^2} = \sqrt{3-1} = \sqrt{2}.$$

$$S_{DA_1C_1} = \frac{1}{2}A_1C_1 \cdot DH = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2}.$$

Следовательно, искомое расстояние $H = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.