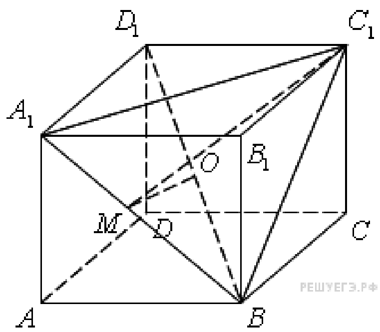
Угол между плоскостями

1. Задание 14 № 484562. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями BA_1C_1 и BA_1D_1.

Решение.

Пусть точка O — центр куба, а M — середина A_1B. $A_1D_1 \perp A_1B$, а MO — средняя линия треугольника BA_1D_1,, поэтому $MO \perp A_1B$. Треугольник BA_1C_1 — равносторонний, $C_1M \perp A_1B$, следовательно, искомый угол равен углу OMC_1.



Примем длины ребер куба за a. Найдем стороны треугольника OMC_1. Из треугольника BA_1D_1, находим $OM = \dfrac{a}{2}$, из равностороннего треугольника BA_1C_1 находим

$$MC_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A_1C_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a\sqrt{2} = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

поскольку O — середина диагонали AC_1, то $OC_1 = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Теперь применим к треугольнику OMC_1 теорему косинусов:

$$\cos\angle OMC_1 = \frac{OM^2 + MC_1^2 - OC_1^2}{2\cdot OM\cdot MC_1} = \frac{\frac{1}{4}a^2 + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{4}a^2}{2\cdot\frac{1}{2}a\cdot a\sqrt{\frac{3}{2}}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

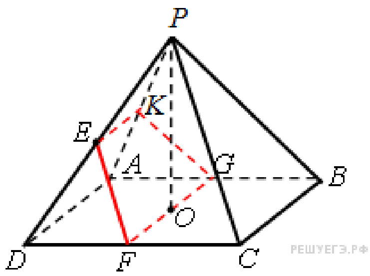
Ответ: $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

2. Задание 14 № 508254. В правильной четырехугольной пирамиде *PABCD*, все ребра которой равны 6, точка *K* — середина бокового ребра *AP*.

а) Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку *K* и параллельной плоскости *BCP*.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

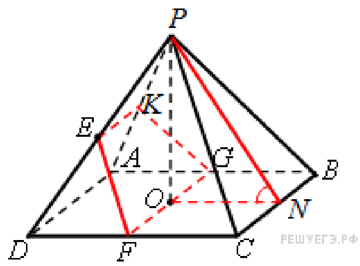
Решение.



а) В плоскости *ABP* через точку *K* проведем прямую, параллельную прямой *BP* до пересечения ее с прямой *AB* в точке *G*, а в плоскости *ABC* через точку *G* проведем прямую, параллельную прямой *BC* до пересечения ее с прямой *DC* в точке *F*. По признаку параллельности двух плоскостей плоскость *KFG* параллельна плоскости *BCP*. Прямая *FG* параллельна прямой *AD*, следовательно, она параллельна плоскости *APD*, а, значит, плоскость *KFG* пересекает плоскость *APD* по прямой, параллельной *FG*. Обозначим через *E* точку пересечения этой прямой с ребром *DP*.

Таким образом, искомое сечение — трапеция *EFGK*.

б) Плоскость *EFG* параллельна плоскости *BCP*, значит, $\angle((EFG);(ABC))=\angle((BCP);(ABC))$. Проведем высоту *PN* треугольника *BCP* и соединим точку *N* с основанием *O* высоты пирамиды. По теореме о трех перпендикулярах отрезок *ON* также перпендикулярен *BC*, а, значит, угол *PNO* — линейный угол двугранного угла *PBCO*.



Поскольку $ON=\dfrac{AB}{2}=3,\ PN=\dfrac{PB\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$ из прямоугольного треугольника *PNO* находим $\cos\angle PNO=\dfrac{ON}{PN}=\dfrac{1}{\sqrt{3}},$ откуда окончательно получаем $\angle((EFG);(ABC))=\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

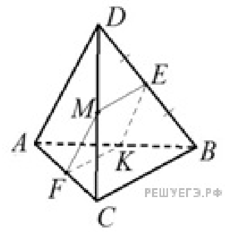
Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

3. Задание 14 № 509121. В пирамиде *DABC* прямые, содержащие ребра *DA* и *BC*, перпендикулярны.

а) Постройте сечение плоскостью, проходящей через точку *E* — середину ребра *DB*, и параллельно *DA* и *BC*. Докажите, что получившееся сечение является прямоугольником.

б) Найдите угол между диагоналями этого прямоугольника, если *DA* = 30, *BC* = 16.

Решение.



а) Построение $EK||\mathrm{DA}, EM||CB, KF||BC, EKFM$ — искомое сечение, параллелограмм $\mathrm{DA}\perp CB\Rightarrow EK\perp CB\Rightarrow EM\perp EK\ EK||DA;\ EM||CB$

Значит $EKMF$ — прямоугольник.

б) $EK||\mathrm{DA}$ и E — середина DB, тогда EK — средняя линия треугольника DBA, значит, $EK=\dfrac{1}{2}DA=15,$ аналогично $ME=\dfrac{1}{2}CB=8.$ $MK^2=ME^2+EK^2$, так как $EKMF$ прямоугольник. $MK^2=15^2+8^2=289,\ MK=17.$ Пусть MK пересекает EF в точке O.

$$MO=OK=EO=OF=\frac{1}{2}MK=\frac{17}{2}.$$

Заметим, что $ME<EK$. Применим теорему косинусов в треугольнике EOM:

$EM^2=MO^2+OE^2-2MO\cdot OE\cdot\cos\angle EOM$, следовательно, $\cos\angle EOM=\dfrac{2\cdot\dfrac{289}{4}-64}{2\cdot\dfrac{289}{4}}=\dfrac{161}{289}.$

Ответ: $\arccos\dfrac{161}{289}.$

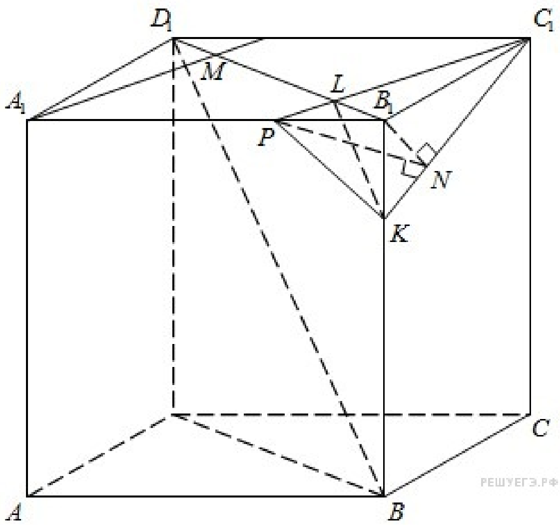
4. Задание 14 № 509202. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ все рёбра равны 4. На его ребре BB_1 отмечена точка K так, что $KB = 3$. Через точки K и C_1 построена плоскость α, параллельная прямой BD_1.

а) Докажите, что $A_1P : PB_1 = 2 : 1$, где P — точка пересечения плоскости α с ребром A_1B_1.

б) Найдите угол наклона плоскости α к плоскости грани BB_1C_1C.

Решение.

В плоскости BB_1D_1D через точку K проведем прямую параллельно BD_1. Пусть эта прямая пересекает диагональ B_1D_1 в точке L. В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ проведем прямую C_1L, пусть она пересекает сторону A_1B_1 в точке P. Треугольник KPC_1 — сечение, проходящее через точки K и C_1 параллельно прямой BD_1. Действительно, прямая BD_1 параллельна плоскости сечения, так как параллельна лежащей в нем прямой KL.



В плоскости основания $A_1B_1C_1D_1$ через точку A_1 проведем прямую параллельно C_1P. Пусть она пересекает D_1B_1 в точке M. Заметим, что $B_1L : B_1D_1 = 1 : 3$ и $D_1M : B_1D_1 = 1 : 3$, поэтому $ML : LB_1 = 2 : 1$. По теореме Фалеса параллельные прямые высекают на сторонах угла A_1B_1M пропорциональные отрезки, поэтому $A_1P : PB_1 = ML_1 : LB_1 = 2 : 1$. Что и требовалось доказать.

Пусть теперь точка N — основание высоты PN треугольника KB_1C_1, являющегося проекцией наклонной PN на плоскость BB_1C_1C. Тогда угол PNB_1 — линейный угол искомого двугранного угла. Имеем:

$$PB_1 = \frac{1}{3}A_1B_1 = \frac{4}{3}, \qquad S_{B_1C_1K} = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 1 = 2,$$

$$C_1K = \sqrt{4^2+1^2} = \sqrt{17}, \qquad B_1N = \frac{2S}{C_1K} = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\operatorname{tg}\widehat{PNB_1} = \frac{PB_1}{B_1N} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = \frac{\sqrt{17}}{3}.$$

Тем самым, $\widehat{PNB_1} = \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{17}}{3}$.

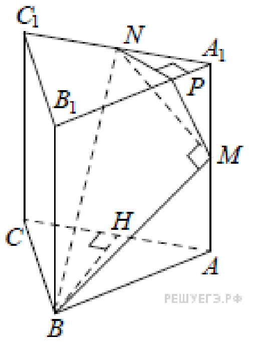
5. Задание 14 № 510019. Все рёбра правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину 6. Точки M и N— середины рёбер AA_1 и A_1C_1 соответственно.

а) Докажите, что прямые BM и MN перпендикулярны.

б) Найдите угол между плоскостями BMN и ABB_1.

Решение.

а) Пусть точка H — середина AC.



Тогда

$$BN^2 = BH^2 + NH^2 = (3\sqrt{3})^2 + 6^2 = 63.$$

Вместе с тем,

$$BM^2 + MN^2 = (3^2 + 6^2) + (3^2 + 3^2) = 63,$$

а тогда по теореме, обратной теореме Пифагора, треугольник BMN является прямоугольным с прямым углом M.

б) Проведём перпендикуляр NP к прямой A_1B_1.

Тогда $NP \perp A_1B_1$ и $NP \perp A_1A$. Следовательно, $NP \perp ABB_1$. Поэтому MP — проекция MN на плоскость ABB_1.

Прямая BM перпендикулярна MN, тогда по теореме о трёх перпендикулярах $BM \perp MP$. Следовательно, угол NMP — линейный угол искомого угла.

Длина NP равна половине высоты треугольника $A_1B_1C_1$, то есть $NP = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Поэтому

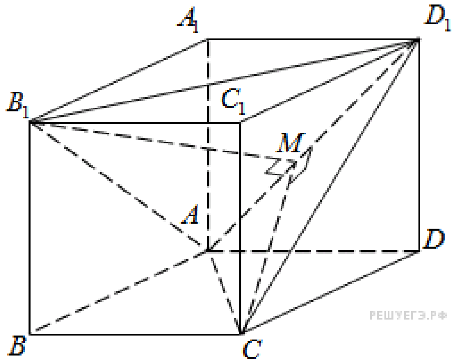
$$\sin NMP = \frac{NP}{MN} = \frac{3\sqrt{3}}{2 \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}}.$$

Следовательно, $NMP = \arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

Ответ: б) $\arcsin\sqrt{\dfrac{3}{8}}$.

6. Задание 14 № 507496. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение.



Пусть точка M — середина отрезка AD_1 Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1 :

$$AB_1=\sqrt{AB^2+BB_1^2}=a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1=CD_1=AD_1=AC=B_1C=a\sqrt{2}.$ Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1 треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M :

$$B_1M=\sqrt{AB_1^2-AM^2}=\sqrt{AB_1^2-\left(\frac{AD_1}{2}\right)^2}=\sqrt{2a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

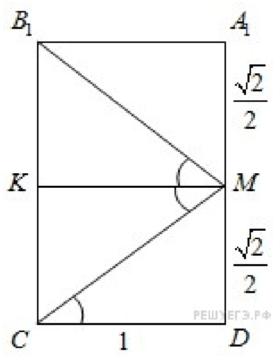
По теореме косинусов из треугольника B_1MC :

$$\cos\angle B_1MC=\frac{B_1M^2+MC^2-B_1C^2}{2B_1M\cdot MC}=\frac{\frac{3a^2}{2}+\frac{3a^2}{2}-2a^2}{2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, угол между плоскостями равен $\arccos\frac{1}{3}.$

Ответ: $\arccos\frac{1}{3}.$

Примечание.

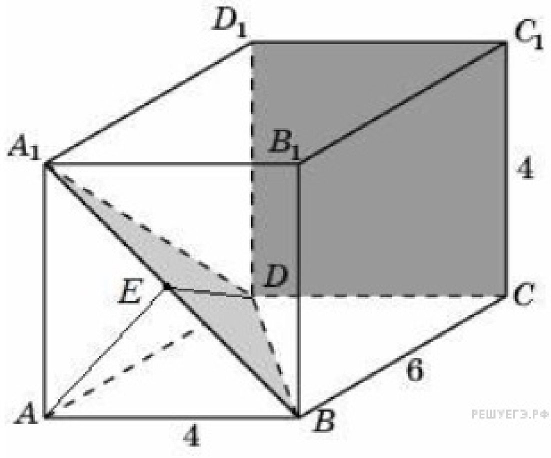


Укажем другой путь нахождения угла B_1MC. В прямоугольнике CDA_1B_1 проведём через точку M — середину боковой стороны DA_1 — отрезок MK, параллельный стороне CD (см. рис.). Тогда:

$$\widehat{B_1MC}=2\widehat{KMC}=2\widehat{MCD}=2\operatorname{arctg}\frac{MD}{DC}=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

7. Задание 14 № 507581.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 4$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями CDD_1 и BDA_1.



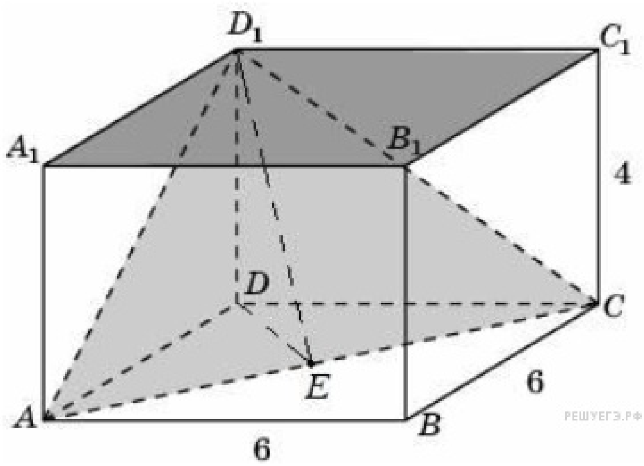
Решение.

Вместо плоскости CDD_1 возьмем параллельную ей плоскость ABB_1. Пусть E — середина BA_1. $DE \perp BA_1$, $AE \perp BA_1$. Значит, угол DEA — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника DAE находим $\operatorname{tg}\angle DEA = \dfrac{AD}{AE} = \dfrac{6}{2\sqrt{2}} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

8. Задание 14 № 507592.

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AB = 6$, $BC = 6$, $CC_1 = 4$, найдите тангенс угла между плоскостями ACD_1 и $A_1B_1C_1$.



Решение.

Вместо плоскости $A_1B_1C_1$ возьмем параллельную ей плоскость ABC. Пусть E — середина AC. $D_1E \perp AC$, $DE \perp AC$. Значит, угол DED_1 — линейный угол искомого угла. Из прямоугольного треугольника D_1DE находим $\operatorname{tg}\angle DED_1 = \dfrac{DD_1}{DE} = \dfrac{4}{3\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

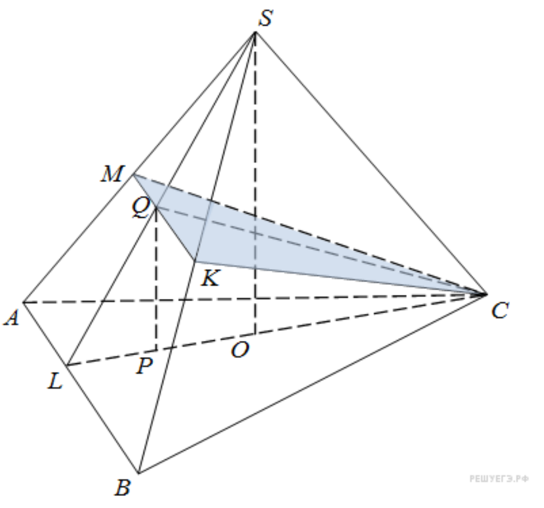
Ответ: $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

9. Задание 14 № 485978. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 6$, $BC = 4$.

Решение.

Отрезок MK — средняя линия треугольника SAB, следовательно, $MK \parallel AB$. Значит, через MK можно провести плоскость параллельную плоскости ABC и, так как $MK \subset CMK$, MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC.

Треугольник CMK — равнобедренный. Проведем перпендикуляр CQ к MK, Q — середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на CL — медиане треугольника ABC, P — середина LO. $CL \perp AB$, следовательно, $CL \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Таким образом, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла.



Далее находим:

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{6^2 - \left(\frac{4 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{23}{3}}.$$

Откуда $QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{\frac{23}{3}}$, $CL = \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}$.

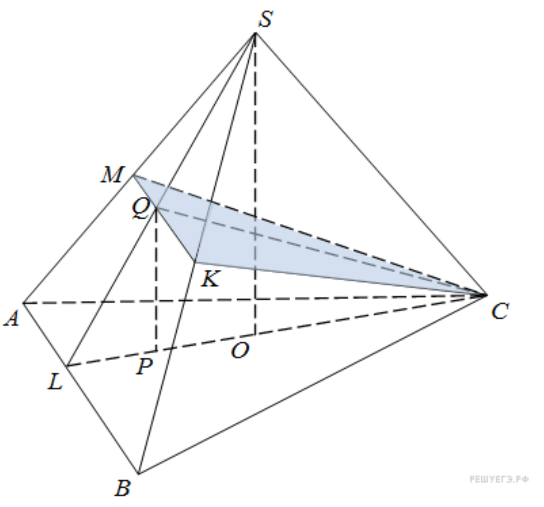
Поскольку $CP = \frac{5}{6}CL = \frac{5}{3}\sqrt{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}$, имеем: $\operatorname{tg}\angle QCP = \frac{\sqrt{23} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{\sqrt{23}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{23}}{5}$.

10. Задание 14 № 486000. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием ABC точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SB. Найдите угол между плоскостями CMK и ABC, если $SC = 8, AB = 6$.

Решение.

Проведем перпендикуляр CQ к MK, так как треугольник CMK — равнобедренный, то Q — середина MK. Из точки Q опустим перпендикуляр QP на плоскость основания. Точка P лежит на медиане CL треугольника ABC. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей CMK и ABC, $QP \perp MK$ и $CQ \perp MK$. Следовательно, $\angle QCP$ — линейный угол искомого угла между плоскостями.



Далее находим:

$$CO = \frac{2}{3}CL = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}BC = 2\sqrt{3}.$$

$$SO = \sqrt{SC^2 - CO^2} = \sqrt{8^2 - (2 \cdot \sqrt{3})^2} = 2\sqrt{13}.$$

$$QP = \frac{1}{2}SO = \sqrt{13}, CP = \frac{1}{2}OL + OC = \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} = \frac{5}{2}\sqrt{3}.$$

Откуда

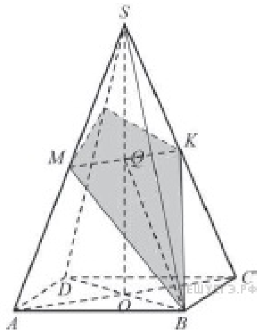
$$\operatorname{tg}\angle QCP = \frac{\sqrt{13} \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 5} = \frac{2\sqrt{39}}{15}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{39}}{15}$.

11. Задание 14 № 507639. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 4$, $SC = 7$.

Решение.

Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK$, OB. Следовательно, $\angle QBO$ — линейный угол искомого угла. Найдём QO.



$BO = 2\sqrt{2}$,

$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{7^2 - \left(2\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{49-8} = \sqrt{41}$,

$QO = \frac{1}{2}SO = \frac{\sqrt{41}}{2}$.

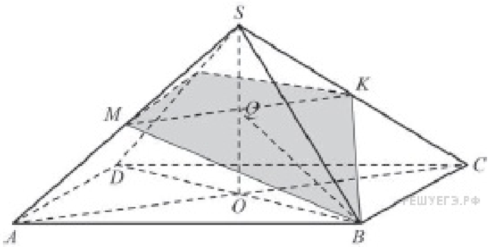
Значит, $\operatorname{tg}\angle QBO = \frac{\sqrt{41}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{82}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{82}}{8}$.

12. Задание 14 № 507705. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$с основанием $ABCD$ точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB = 8$, $SC = 6$.

Решение.

Проведём из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой пересечения плоскостей, $QB \perp MK$, $OB \perp MK$. Следовательно, $\angle QBO$ — линейный угол искомого угла. Найдём QO.



$$BO = 4\sqrt{2};$$
$$SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{6^2 - \left(4\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{36-32} = 2;$$
$$QO = \frac{1}{2}SO = 1.$$

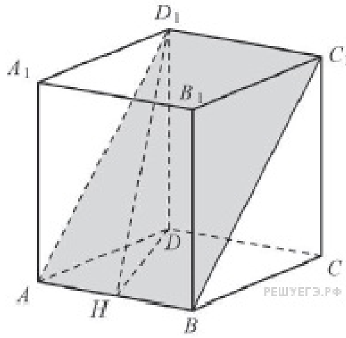
Значит, $\operatorname{tg}\angle QBO = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{8}$.

13. Задание 14 № 507695. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 4 и острым углом 60°. Высота призмы равна 5. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

Решение.

Построим сечение призмы плоскостью AC_1B. Получим параллелограмм ABC_1D_1. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$, следовательно,



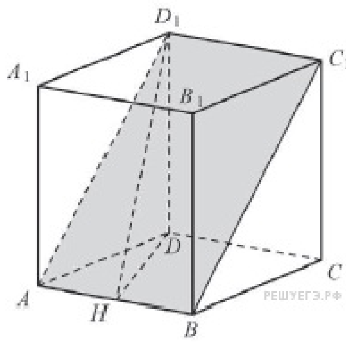
$$\mathrm{tg}\angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{6}.$$

Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{5\sqrt{3}}{6}$.

14. Задание 14 № 507699. Дана прямая призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Основание призмы — ромб со стороной 8 и острым углом 45°. Высота призмы равна 6. Найдите угол между плоскостью AC_1B и плоскостью ABD.

Решение.

Построим сечение призмы плоскостью AC_1B. Получим параллелограмм ABC_1D_1. Из точки D проведём перпендикуляр DH к прямой AB. Тогда по теореме о трех перпендикулярах $D_1H \perp AB$. Плоский угол DHD_1 — искомый. $DH = AD \cdot \sin 45^\circ = 4\sqrt{2}$. Следовательно,



$$\mathrm{tg}\angle DHD_1 = \frac{DD_1}{DH} = \frac{6}{4\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}.$$

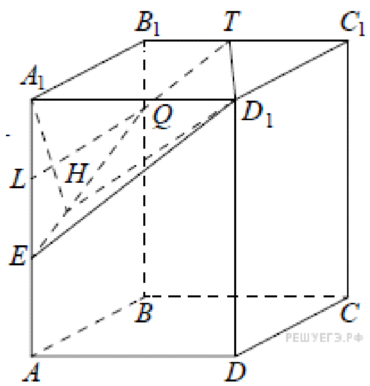
Ответ: $\mathrm{arctg}\,\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

15. Задание 14 № 508972. На ребре AA_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взята точка E так, что $A_1E : EA = 3 : 4$. Точка T — середина ребра B_1C_1. Известно, что $AB = 9$, $AD = 6$, $AA_1 = 14$.

а) В каком отношении плоскость ETD_1 делит ребро BB_1?

б) Найдите угол между плоскостью ETD_1 и плоскостью AA_1B_1.

Решение.



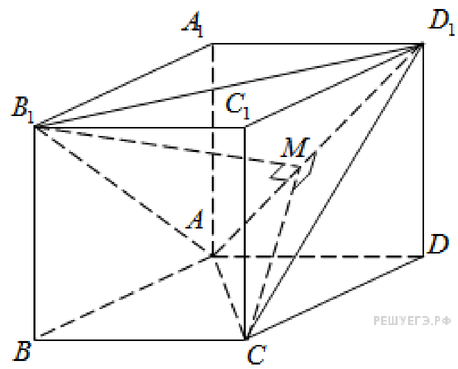
а) Так как $A_1E : EA = 3 : 4$ и $AA_1 = 14$, то $AE = 8$ и $EA_1 = 6$. Плоскость сечения пересекает параллельные плоскости DAA_1 и BCC_1 по параллельным прямым, поэтому она пересекает ребро BB_1 в такой точке Q, что прямая TQ параллельна прямой ED_1. Значит, ттреугольники EA_1D_1 и QB_1T подобны, а поскольку $EA_1 = A_1D_1 = 6$, то и $QB_1 = B_1T = 3$. Значит, $QB = 11$ и $QB_1 : QB = 3 : 11$.

б) Так как прямая A_1D_1 перпендикулярна плоскости AA_1B_1, опустим перпендикуляр A_1H из точки A_1 на прямую EQ пересечения этих плоскостей. Угол A_1HD_1 будет искомым. Найдём A_1H. Для этого проведём в трапеции EA_1B_1Q высоту $QL = 9$ (очевидно, L — середина EA_1). Теперь, вычисляя двумя способами площадь треугольника EQA_1, найдём $A_1H \cdot EQ = A_1E \cdot QL$, то есть $A_1H = \dfrac{QL \cdot A_1E}{QE} = \dfrac{9 \cdot 6}{\sqrt{9^2+3^2}} = \dfrac{18}{\sqrt{10}}$. Тогда $\operatorname{tg} A_1HD_1 = \dfrac{6}{\frac{18}{\sqrt{10}}} = \dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

Ответ: а) $3 : 11$; б) $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{10}}{3}$.

16. Задание 14 № 505549. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите косинус угла между плоскостями AB_1D_1 и ACD_1.

Решение.



Пусть точка M — середина отрезка AD_1 Примем длины ребер куба за a. Из прямоугольного треугольника ABB_1 по теореме Пифагора найдём AB_1 :

$$AB_1 = \sqrt{AB^2 + BB_1^2} = a\sqrt{2}.$$

Аналогично, $B_1D_1 = CD_1 = AD_1 = AC = B_1C = a\sqrt{2}$. Опустим перпендикуляры B_1H и CK на сторону AD_1 треугольники AB_1D_1 и ACD_1 равносторонние, поэтому перпендикуляры B_1H и CK также являются биссектрисами и медианами, поэтому точки H, K и M совпадают. Угол B_1MC — искомый. Из прямоугольного треугольника AB_1M :

$$B_1M = \sqrt{AB_1^2 - AM^2} = \sqrt{AB_1^2 - \left(\frac{AD_1}{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}.$$

По теореме косинусов из треугольника B_1MC :

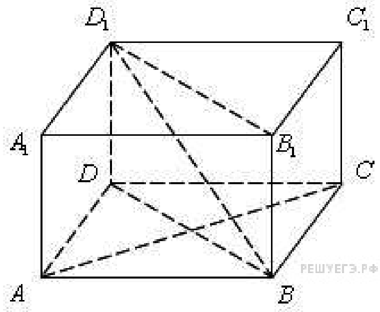
$$\cos\angle B_1MC = \frac{B_1M^2 + MC^2 - B_1C^2}{2B_1M \cdot MC} = \frac{\frac{3a^2}{2} + \frac{3a^2}{2} - 2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{3}$.

17. Задание 14 № 485981. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 12, AD = 5$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно 13.

Решение.

Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна 13.



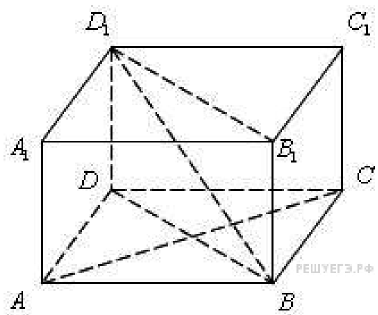
Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Поэтому искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1. Рассмотрим прямоугольный треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1 = 13, BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 13$. Значит, $\angle BD_1D = 45°$.

Ответ: $45°$.

18. Задание 14 № 485997. Основание прямой четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — прямоугольник $ABCD$, в котором $AB = 5$, $AD = \sqrt{11}$. Найдите угол между плоскостью основания призмы и плоскостью, проходящей через середину ребра AD перпендикулярно прямой BD_1, если расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно $2\sqrt{3}$.

Решение.

Расстояние между прямыми AC и B_1D_1 равно расстоянию между основаниями, то есть высоте призмы. Значит, высота призмы равна $2\sqrt{3}$. Угол между плоскостями равен углу между прямыми, перпендикулярными этим плоскостям. Следовательно, искомый угол равен углу между ребром DD_1 и прямой BD_1.



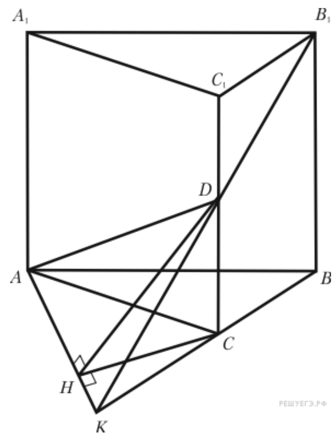
Рассмотрим треугольник BDD_1. Его катеты равны $DD_1 = 2\sqrt{3}$, $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = 6$. Поэтому

$$\angle BD_1D = \operatorname{arctg}\frac{6}{2\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = 60°.$$

Ответ: $60°$.

19. Задание 14 № 500064. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение.



Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH), по теореме о трех перпендикулярах, перпендикулярен прямой AK. Угол CHD является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и ADB_1.

Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = \frac{3}{2}$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем: $CK = B_1C_1 = 2$.

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен 120°, $AC = CK = 2$, высота CH является высотой и биссектрисой, откуда $CH = AC \cdot \cos 60^\circ = 1$.

Из прямоугольного треугольника CDH с прямым углом C получаем:

$$\operatorname{tg} \angle CHD = \frac{CD}{CH} = \frac{3}{2}, \text{ тогда } \angle CHD = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}.$$

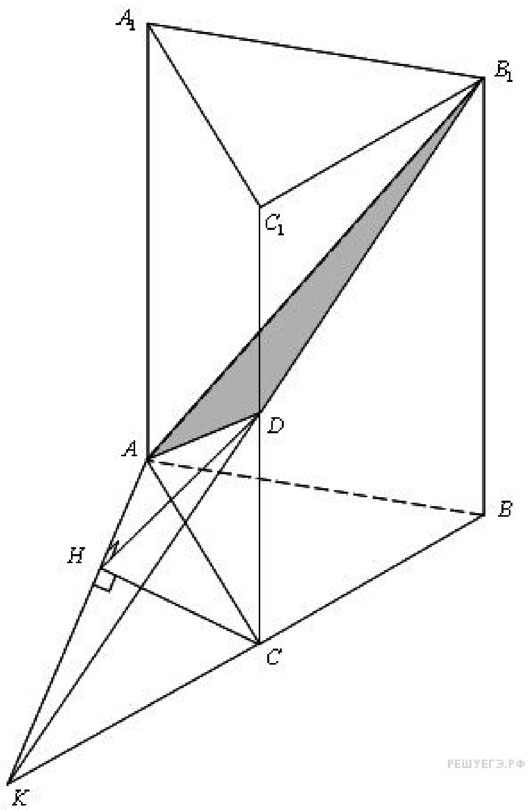
Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.

Замечание: Ответ может быть представлен и в другой форме: $\sin \angle CHD = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Leftrightarrow \angle CHD = \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}$, $\cos \angle CHD = \frac{2\sqrt{13}}{13} \Leftrightarrow \angle CHD = \arccos \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

20. Задание 14 № 500347. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 1, боковые ребра равны 2, точка D — середина ребра CC_1. Найдите угол между плоскостями ABC и ADB_1.

Решение.

Прямая B_1D пересекает прямую BC в точке K. Плоскости ABC и ADB_1 пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Угол CHD является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и ADB_1.



Точка D — середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = 1$.

Из равенства треугольников B_1C_1D и KCD получаем:

$$CK = B_1C_1 = 1.$$

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен 120°, $AC = CK = 1$, высота CH является биссектрисой, откуда

$$CH = AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Из прямоугольного треугольника CDH с прямым углом C получаем:

$$\operatorname{tg} \angle CHD = \frac{CD}{CH} = 2, \text{ тогда } \angle CHD = \operatorname{arctg} 2.$$

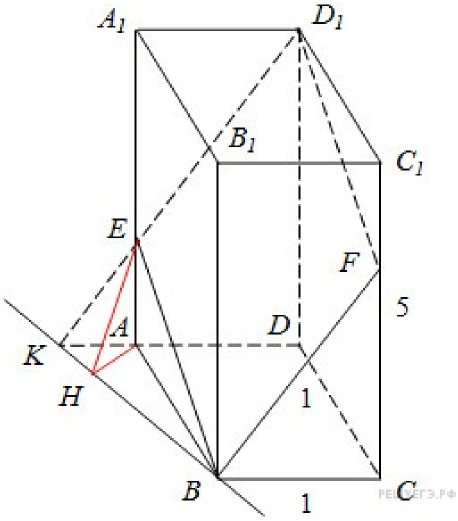
Ответ может быть представлен и в другой форме: $\sin \angle CHD = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \angle CHD = \arcsin \frac{2\sqrt{5}}{5}$;
$\cos \angle CHD = \frac{\sqrt{5}}{5} \Leftrightarrow \angle CHD = \arccos \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} 2$.

21. Задание 14 № 500588. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 1, а боковые рёбра равны 5. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 2 : 1$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.

Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.



Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB по теореме о трех перпендикулярах. Угол EHA является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 2 : 1$, получаем:

$$AE = \frac{2AA_1}{3} = \frac{10}{3}, EA_1 = AA_1 - AE = \frac{5}{3}.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 2.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 1$, $AK = 2$, $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2 \cdot 1}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

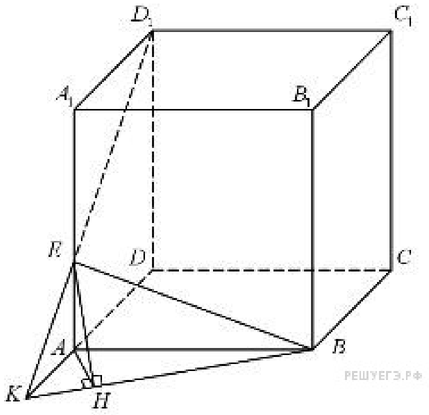
Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{5\sqrt{5}}{3} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5}}{3}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{5}}{3}$.

22. Задание 14 № 500132. В правильной четырёхугольной призме $ABCDA_1B_1C_1D_1$ стороны основания равны 2, а боковые рёбра равны 3. На ребре AA_1 отмечена точка E так, что $AE : EA_1 = 1 : 2$. Найдите угол между плоскостями ABC и BED_1.

Решение.



Прямая D_1E пересекает прямую AD в точке K. Плоскости ABC и BED_1 пересекаются по прямой KB.

Из точки E опустим перпендикуляр EH на прямую KB, тогда отрезок AH (проекция EH) перпендикулярен прямой KB. Угол AHE является линейным углом двугранного угла, образованного плоскостями ABC и BED_1.

Поскольку $AE : EA_1 = 1 : 2$, получаем:

$$AE = \frac{AA_1}{3} = 1; EA_1 = AA_1 - AE = 2.$$

Из подобия треугольников A_1D_1E и AKE находим:

$$AK = \frac{AE}{EA_1} \cdot A_1D_1 = 1.$$

В прямоугольном треугольнике AKB с прямым углом A: $AB = 2$; $AK = 1$; $BK = \sqrt{AB^2 + AK^2} = \sqrt{5}$, откуда высота

$$AH = \frac{AK \cdot AB}{BK} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника AHE с прямым углом A получаем:

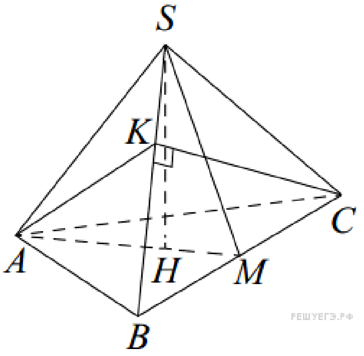
$$\operatorname{tg} \angle AHE = \frac{AE}{AH} = \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow \angle AHE = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Ответ может быть представлен и в другой форме: $\angle AHE = \arcsin \frac{\sqrt{5}}{3}$ или $\angle AHE = \arccos \frac{2}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{2}$.

23. Задание 14 № 505237. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{3}}{4}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

Решение.



Пусть $SABC$ — данная пирамида с вершиной S, SH — ее высота, M — середина BC, CK — высота треугольника BSC. Угол SMH — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.

Пусть $SM = 4a$. тогда

$$MH = SM\cos\angle SMH = \sqrt{3}a;\ AM = 3\sqrt{3}a;$$

$$BC = 6a;\ SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 5a.$$

Найдем площадь треугольника BSC. двумя способами: $\frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{1}{2}CK \cdot SB$.

Значит, $CK = \frac{24}{5}a$.

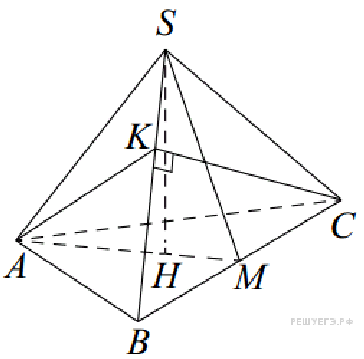
Ребро AC перпендикулярно плоскости SBH, поэтому SB и AC перпендикулярны, следовательно, плоскость AKC перпендикулярна ребру SB. Искомый угол между боковыми гранями равен углу при вершине равнобедренного треугольника AKC :

$$\cos\angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{7}{32}.$$

Ответ: $\arccos\frac{7}{32}$.

24. Задание 14 № 505247. Косинус угла между боковой гранью и основанием правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\sqrt{6}}{6}$. Найдите угол между боковыми гранями этой пирамиды.

Решение.



Пусть $SABC$ — данная пирамида с вершиной S, SH — ее высота, M — середина BC, CK — высота треугольника BSC. Угол SMH — угол между боковой гранью пирамиды и основанием.

Пусть $SM = 6a$. тогда

$$MH = SM\cos\angle SMH = a\sqrt{6},\quad AM = 3a\sqrt{6},$$
$$BC = 6a\sqrt{2},\ SB = \sqrt{BM^2 + SM^2} = 3a\sqrt{6}.$$

Найдем площадь треугольника BSC. двумя способами: $\frac{1}{2}SM \cdot BC = \frac{1}{2}CK \cdot SB$.

Значит, $CK = 4a\sqrt{3}$.

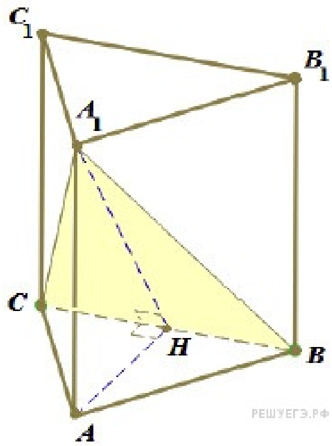
Ребро AC перпендикулярно плоскости SBH, поэтому SB и AC перпендикулярны, следовательно, плоскость AKC перпендикулярна ребру SB. Искомый угол между боковыми гранями равен углу при вершине равнобедренного треугольника AKC :

$$\cos\angle AKC = \frac{2KC^2 - AC^2}{2KC^2} = \frac{1}{4}.$$

Ответ: $\arccos\frac{1}{4}$.

25. Задание 14 № 500816. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

Решение.



Обозначим H середину ребра BC. Так как треугольник ABC равносторонний, а треугольник A_1BC — равнобедренный, отрезки AH и A_1H перпендикулярны BC. Следовательно, $\angle A_1HA$ — линейный угол двугранного угла с гранями BCA и BCA_1. Из треугольника A_1AB найдем $AA_1=\sqrt{5-4}=1$. В треугольнике AHB найдем высоту $AH=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Из треугольника HAA_1 найдем: $\operatorname{tg}\angle A_1HA=\dfrac{AA_1}{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

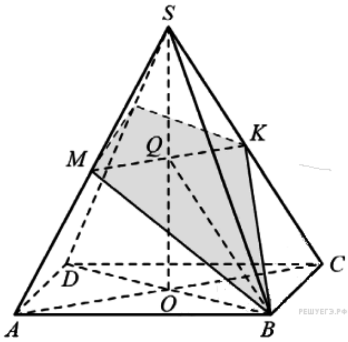
Искомый угол равен 30°.

Ответ: 30°.

26. Задание 14 № 501045. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ точка S — вершина. Точка M — середина ребра SA, точка K — середина ребра SC. Найдите угол между плоскостями BMK и ABC, если $AB=8$, $SC=10$.

Решение.

Проведем из точки B перпендикуляр BQ к MK, Q — середина MK. Точка Q является серединой высоты SO. Прямая MK параллельна прямой прямой пересечения плоскостей BMK и ABC, $QO\perp MK$, $OB\perp MK$, Следовательно, $\widehat{QBO}$ — искомый линейный угол. Найдем QO:



$$BO=4\sqrt{2};$$
$$SO=\sqrt{SB^2-OB^2}=\sqrt{10^2-(4\sqrt{2})^2}=2\sqrt{17};$$
$$QO=\frac{1}{2}SO=\sqrt{17}.$$

Значит, $\operatorname{tg}\widehat{QBO}=\dfrac{\sqrt{17}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{34}}{8}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{34}}{8}$.

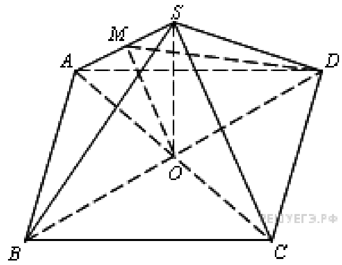
27. Задание 14 № 484565. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите синус угла между плоскостью SAD и плоскостью, проходящей через точку A перпендикулярно прямой BD.

Решение.

Пусть точка O — центр основания, а M — середина ребра AS. Поскольку $AC \perp BD$ и $SO \perp BD$, плоскость SAC перпендикулярна прямой BD. Это значит, что плоскость SAC и есть плоскость, проходящая через точку A перпендикулярно BD.

Проведем отрезки MD и MO. Так как треугольник SAD правильный, $MD \perp AS$. Так как треугольник ASO — равнобедренный, $OM \perp AS$. Следовательно, искомый угол равен углу OMD. Найдем стороны треугольника OMD:

$$OD = \frac{1}{\sqrt{2}},\ OM = \frac{OA}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2},\ MD = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot AD = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$



По теореме косинусов:

$$\cos\angle OMD = \frac{OM^2 + MD^2 - OD^2}{2 \cdot OM \cdot DM} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Отсюда

$$\sin\angle OMD = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

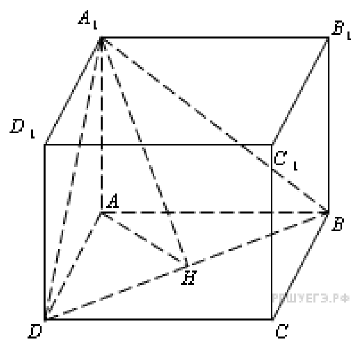
Примечание.

Решение существенно упрощается, если заметить, что треугольник MOD — прямоугольный: $\sin\angle OMD = \frac{OD}{MD}$.

28. Задание 14 № 484561. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны ребра: $AB = 6, AD = 8, CC_1 = 16$. Найдите угол между плоскостями ABC и A_1DB.

Решение.

Плоскости ABC и A_1DB имеют общую прямую BD. Проведем перпендикуляр AH к BD. По теореме о трех перпендикулярах $A_1H \perp BD$. Значит, линейный угол двугранного угла, образованного плоскостями ABC и A_1DB, — это угол A_1HA. Из прямоугольного треугольника BAD находим:



$$AH = \frac{AB \cdot AD}{BD} = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}.$$

Из прямоугольного треугольника A_1AH находим:

$$\operatorname{tg}\angle A_1HA = \frac{AA_1}{AH} = \frac{16 \cdot 5}{24} = \frac{10}{3}.$$

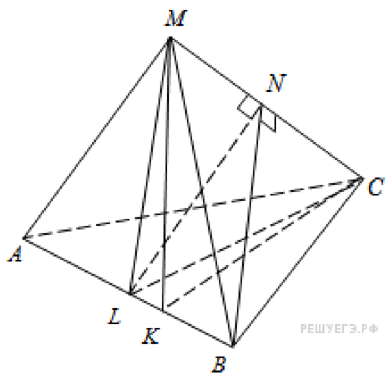
Значит, искомый угол равен $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

Ответ: $\operatorname{arctg}\frac{10}{3}$.

29. Задание 14 № 505429. В правильной треугольной пирамиде $MABC$ с вершиной M сторона основания AB равна 6. На ребре AB отмечена точка K. Сечение MKC является равнобедренным треугольником с основанием MC. Найдите угол между плоскостями MLC и MBC, где L — середина AB.

Решение.

В прямоугольных треугольниках MKL и CKL сторона KL — общая и $MK = CK$. Значит, эти треугольники равны и $ML = CL = 3\sqrt{3}$. Прямоугольные треугольники MBL и CBL равны по двум катетам. Значит, $MC = MB = AB = 6$. Пусть N — середина MC. Тогда прямая MC перпендикулярна BN и LN, поэтому искомый угол между плоскостями равен углу BNL. В прямоугольном треугольнике BNL имеем $BL = 3$, $BN = 3\sqrt{3}$. Значит,



$$\sin\angle BNL = \frac{BL}{BN} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{3}$.