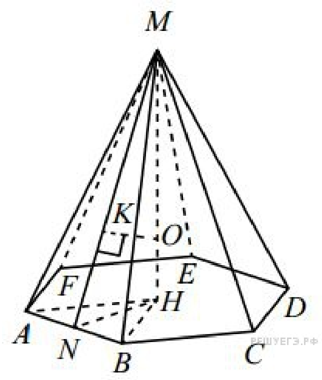
Круглые тела: цилиндр, конус, шар

1. Задание 14 № 502023. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.

Пусть MH — высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA = 10$, $MH = 6$, откуда

$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8.$$



Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB = AH = 8$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{21}.$$

В правильном треугольнике AHB высота $NH = \dfrac{AB\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

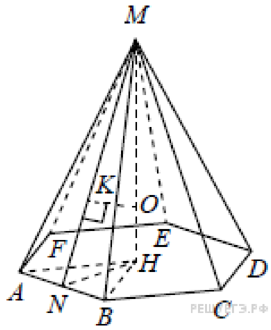
$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow (6-r)\cdot 4\sqrt{3} = 2\sqrt{21}\cdot r \Leftrightarrow r = 4\sqrt{7} - 8,$$

где r — радиус сферы. Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = 64(11 - 4\sqrt{7})\pi$.

Ответ: $64\left(11 - 4\sqrt{7}\right)\pi$.

2. Задание 14 № 502054. В правильную шестиугольную пирамиду, боковое ребро которой равно $\sqrt{5}$, а высота равна 1, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH— высота правильной шестиугольной пирамиды $MABCDEF$ с вершиной M, тогда треугольник AMH прямоугольный, $MA=\sqrt{5}$, $MH=1$, откуда

$$AH=\sqrt{MA^2-MH^2}=2.$$

Треугольник ABH равносторонний, следовательно, $AB=AH=2$. В треугольнике AMB высота

$$MN=\sqrt{MA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=2.$$

В правильном треугольнике AHB высота $HN=\dfrac{AB\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$

Центр O сферы, вписанной в правильную шестиугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK=MN:HN \Leftrightarrow (1-r)\cdot\sqrt{3}=2\cdot r \Leftrightarrow r=2\sqrt{3}-3,$$

где r — радиус сферы.

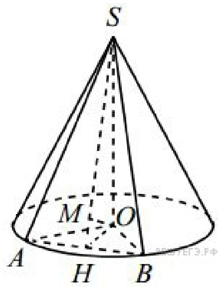
Площадь сферы $S=4\pi r^2=12(7-4\sqrt{3})\pi.$

Ответ: $12(7-4\sqrt{3})\pi.$

3. Задание 14 № 502075. Радиус основания конуса равен 6, а его высота равна 8. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 4. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.

Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 4$, — треугольник ASB.



В равных прямоугольных треугольниках SOA и SOB, где O — центр основания конуса, $OA = OB = 6$, $SO = 8$, откуда

$$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 10.$$

Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника ASB, $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{6}$. Тогда отрезок OH — высота и медиана равнобедренного треугольника AOB,

$$OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = 4\sqrt{2}.$$

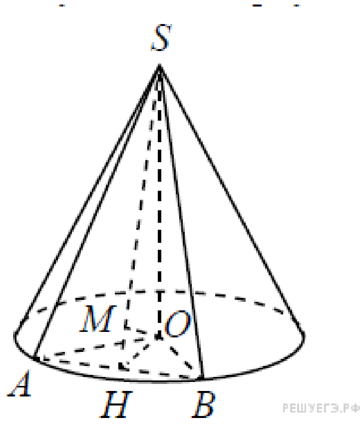
Прямые SH и OH перпендикулярны прямой AB, поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости ASB. Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника SOH, проведённой к гипотенузе:

$$OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{8\sqrt{3}}{3}.$$

Ответ: $\frac{8\sqrt{3}}{3}$.

4. Задание 14 № 502095. Радиус основания конуса равен 5, а его высота равна 12. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 6. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.

Решение.



Сечение конуса плоскостью, содержащей его вершину S и хорду $AB = 6,$ — треугольник $ASB.$

В равных прямоугольных треугольниках SOA и $SOB,$ где O — центр основания конуса, $OA = OB = 5, SO = 12,$ откуда

$$SA = SB = \sqrt{OB^2 + SO^2} = 13.$$

Пусть SH — высота и медиана равнобедренного треугольника $ASB,$ $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = 4\sqrt{10}.$ Тогда отрезок OH— высота и медиана равнобедренного треугольника AOB,

$$OH = \sqrt{OA^2 - \mathrm{AH}^2} = 4.$$

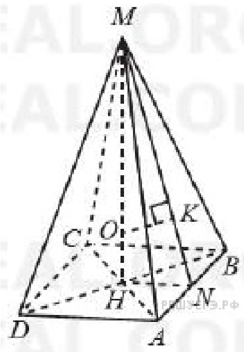
Прямые SH и OH перпендикулярны прямой $AB,$ поэтому плоскость SOH перпендикулярна плоскости $ASB.$ Следовательно, расстояние от точки O до плоскости ASB равно высоте OM прямоугольного треугольника $SOH,$ проведенной к гипотенузе:

$$OM = \frac{OH \cdot SO}{SH} = \frac{6\sqrt{10}}{5}.$$

Ответ: $\frac{6\sqrt{10}}{5}.$

5. Задание 14 № 503321. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 10, а высота равна 6, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M. тогда треугольник AMH прямоугольный. $MA = 10$, $MH = 6$, откуда

$$AH = \sqrt{MA^2 - MH^2} = 8.$$

Треугольник ABH прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB = AH\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. В треугольнике AMB высота

$$MN = \sqrt{MA^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2} = 2\sqrt{17}.$$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота

$$NH = \frac{AB}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO : OK = MN : HN \Leftrightarrow (6 - r)\cdot 4\sqrt{2} = 2\sqrt{17}\cdot r \Leftrightarrow r = \frac{4\sqrt{34} - 16}{3},$$

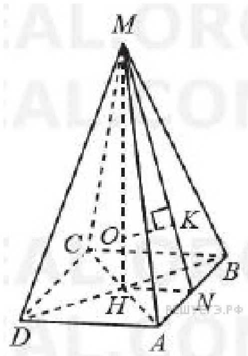
где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S = 4\pi r^2 = \dfrac{128\left(25 - 4\sqrt{34}\right)\pi}{9}$.

Ответ: $\dfrac{128\left(25 - 4\sqrt{34}\right)\pi}{9}$.

6. Задание 14 № 503361. В правильную четырёхугольную пирамиду, боковое ребро которой равно 17, а высота равна 7, вписана сфера. (Сфера касается всех граней пирамиды.) Найдите площадь этой сферы.

Решение.



Пусть MH — высота правильной четырёхугольной пирамиды $MABCD$ с вершиной M, тогда треугольник AMH — прямоугольный, $MA=17$, $MH=7$, откуда

$$AH=\sqrt{MA^2-MH^2}=4\sqrt{15}.$$

Треугольник ABH — прямоугольный равнобедренный, следовательно, $AB=AH\sqrt{2}=4\sqrt{30}$. В треугольнике AMB высота $MN=\sqrt{MA^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2}=13.$

В равнобедренном прямоугольном треугольнике ABH высота $HN=\frac{AB}{2}=2\sqrt{30}.$

Центр O сферы, вписанной в правильную четырёхугольную пирамиду, лежит на её высоте MH, точка K касания сферы и боковой грани AMB лежит на отрезке MN. Треугольники MOK и MNH подобны, поэтому

$$MO:OK=MN:HN \Leftrightarrow \frac{7-r}{r}=\frac{13}{2\sqrt{30}} \Leftrightarrow (7-r)\cdot 2\sqrt{30}=13\cdot r \Leftrightarrow r=\frac{26\sqrt{30}-120}{7},$$

где r — радиус сферы.

Площадь сферы $S=4\pi r^2=\frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}$.

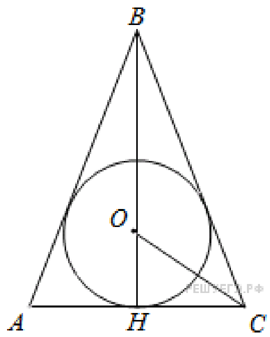
Ответ: $\frac{480(289-52\sqrt{30})\pi}{49}$.

7. Задание 14 № 505566. В конус, радиус основания которого равен 3, вписан шар радиуса 1,5.

а) Изобразите осевое сечение комбинации этих тел.

б) Найдите отношение площади полной поверхности конуса к площади поверхности шара.

Решение.



а) Осевым сечением является равнобедренный треугольник ABC, боковые стороны которого являются образующими конуса, а основанием — его диаметр, и вписанная в треугольник окружность, радиус которой равен радиусу шара (см. рис.).

б) Введём обозначения как показано на рисунке. Пусть O — центр вписанной окружности, отрезок CO — биссектриса угла ACB и пусть $\widehat{HCO}=\alpha$, имеем:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{OH}{HC}=\frac{1}{2},\quad \operatorname{tg}\widehat{HCB}=\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{4}{3}.$$

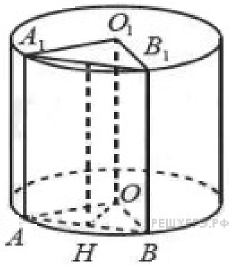
Тогда $BH=HC\operatorname{tg}\widehat{HCB}=4,\quad BC=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Для площадей поверхностей конуса и шара имеем: $S_{\text{кон}}=\pi R^2+\pi Rl=9\pi+15\pi=24\pi, S_{\text{ш}}=4\pi r^2=4\pi(1{,}5)^2=9\pi$. Тем самым, искомое отношение равно $\frac{24}{9}$ или 8:3.

Ответ: 8:3.

8. Задание 14 № 512871. Высота цилиндра равна 5, а радиус основания 10. Найдите площадь сечения цилиндра плоскостью, проходящей параллельно оси цилиндра на расстоянии 6 от неё.

Решение.

Сечение цилиндра плоскостью, проходящей параллельно его оси OO_1, — прямоугольник ABB_1A_1 (O и AB — соответственно центр и хорда нижнего основания цилиндра), $AA_1 = 5$. Расстояние от оси цилиндра до плоскости сечения равно высоте OH треугольника OAB. $OA = OB = 10$, $OH = 6$, откуда



$$AB = 2AH = 2\sqrt{OA^2 - OH^2} = 16.$$

Площадь прямоугольника ABB_1A_1

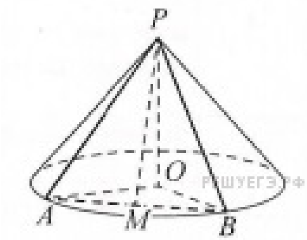
$$S = AA_1 \cdot AB = 80.$$

Ответ: 80.

9. Задание 14 № 505127. Радиус основания конуса с вершиной P равен 6, а длина его образующей равна 9. На окружности основания конуса выбраны точки A и B, делящие окружность на две дуги, длины которых относятся как 1 : 5. Найдите площадь сечения конуса плоскостью ABP.

Решение.

Пусть O — центр основания конуса, M — середина хорды AB. Дуга AB составляет шестую часть окружности основания, поэтому $\angle AOB = 60^\circ$. Треугольник AOB — равносторонний, следовательно, $AB = AO = 6$.



Равнобедренный треугольник APB — искомое сечение. Отрезок PM — его высота

$$PM = \sqrt{AP^2 - AM^2} = 6\sqrt{2}.$$

Площадь искомого сечения $S = \dfrac{1}{2}PM \cdot AB = 18\sqrt{2}.$

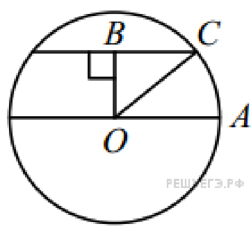
Ответ: $18\sqrt{2}$.

10. Задание 14 № 503253. Две параллельные плоскости, расстояние между которыми 2, пересекают шар. Одна из плоскостей проходит через центр шара. Отношение площадей сечений шара этими плоскостями равно 0,84. Найдите радиус шара.

Решение.

Сечение шара плоскостью — круг. Рассмотрим сечение плоскостью, проходящей через центры сечений. Обозначения даны на рисунке. OA — радиус шара, тогда $S_1 = \pi \cdot OA^2$ — площадь сечения шара плоскостью, проходящей через его центр. BC — радиус меньшего круга, полученного в сечении, тогда $S_2 = \pi \cdot BC^2$ — площадь сечения шара второй плоскостью.

Из отношения площадей сечений получаем: $\dfrac{BC}{OA} = \dfrac{\sqrt{21}}{5}$. OB — расстояние между плоскостями, равное 2.



В прямоугольном треугольнике OBC: $OC^2 = BC^2 + OB^2$, откуда получаем:

$$OA^2 = \left(\frac{\sqrt{21}}{5}OA\right)^2 + 4,\ OA = 5.$$

Ответ: 5.