Исследование частных

1. Задание 12 № 77467. Найдите точку максимума функции $y=-\frac{x^2+289}{x}$.

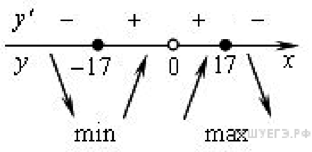
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x^2+289}{x}\right)'=-\left(x+\frac{289}{x}\right)'=-\left(1-\frac{289}{x^2}\right)=\frac{289-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2=289\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17,\\x=-17.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=17$.

Ответ: 17.

2. Задание 12 № 77468. Найдите точку минимума функции $y=-\frac{x^2+1}{x}$.

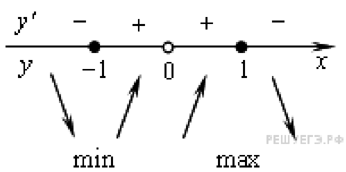
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x^2+1}{x}\right)'=-\left(x+\frac{1}{x}\right)'=-\left(1-\frac{1}{x^2}\right)=-1+\frac{1}{x^2}=\frac{1-x^2}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1-x^2=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-1.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



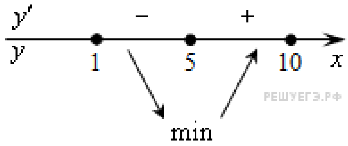
Искомая точка минимума $x=-1$.
Ответ: −1.

3. Задание 12 № 77469. Найдите наименьшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[1;10]$.

Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+25}{x}\right)'=\left(x+\frac{25}{x}\right)'=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и −5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5)=\frac{25+25}{5}=10.$$

Ответ: 10.

4. Задание 12 № 77470. Найдите наибольшее значение функции $y=\frac{x^2+25}{x}$ на отрезке $[-10;\ -1]$.

Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(\frac{x^2+25}{x}\right)'=\left(x+\frac{25}{x}\right)'=1-\frac{25}{x^2}=\frac{x^2-25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и −5, заданному отрезку принадлежит только число −5.

Наибольшим значением функции на заданном отрезке будет наибольшее из чисел $y(-1)$, $y(-5)$ и $y(-10)$. Найдем их:

$$y(-10)=\frac{100+25}{-10}=-12,5,$$
$$y(-5)=\frac{25+25}{-5}=-10.$$
$$y(-1)=\frac{1+25}{-1}=-26.$$

Ответ: −10.

5. Задание 12 № 77471. Найдите точку максимума функции $y=\frac{16}{x}+x+3$.

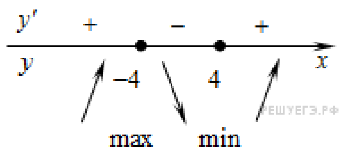
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=1-\frac{16}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1-\frac{16}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=16 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-4$.
Ответ: −4.

6. Задание 12 № 77472. Найдите точку минимума функции $y=\frac{25}{x}+x+25$.

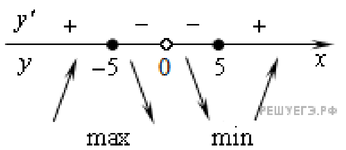
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=1-\frac{25}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$1-\frac{25}{x^2}=0 \Leftrightarrow x^2=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5, \\ x=-5. \end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=5$.

Ответ: 5.

7. Задание 12 № 77473. Найдите наименьшее значение функции $y = x + \frac{36}{x}$ на отрезке $[1;\ 9]$.

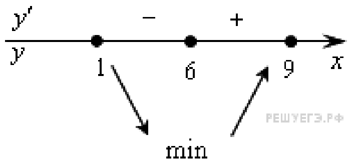
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{36}{x^2}.$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 1 - \frac{36}{x^2} = 0, \\ 1 \le x \le 9. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 36, \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = -6, \end{array}\right. \\ 1 \le x \le 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = 6.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 6$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение: $y(6) = 6 + 6 = 12$.

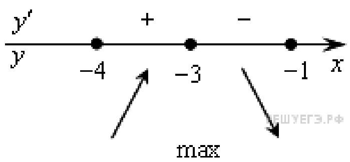
Ответ: 12.

8. Задание 12 № 77474. Найдите наибольшее значение функции $y = x + \frac{9}{x}$ на отрезке $[-4; -1]$.

Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 1 - \frac{9}{x^2} = \frac{x^2 - 9}{x^2}.$$

Найденная производная обращается в нуль в точках 3 и −3, из них на отрезке [−4; −1] лежит только точка −3.
Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -3$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-3) = -3 - 3 = -6.$$

Ответ: −6.

9. Задание 12 № 77500. Найдите точку максимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+289}$.

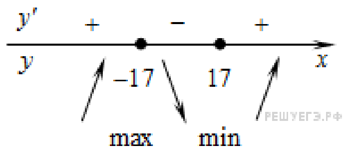
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+289}\right)'=-\frac{1\cdot\left(x^2+289\right)-x\cdot(2x)}{\left(x^2+289\right)^2}=\frac{x^2-289}{\left(x^2+289\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-289=0\Leftrightarrow x^2=289\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=17,\\x=-17.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка максимума $x=-17$.

Ответ: −17.

10. Задание 12 № 77501. Найдите точку минимума функции $y=-\dfrac{x}{x^2+1}$.

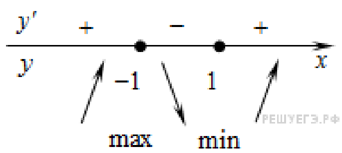
Решение.
Найдем производную заданной функции:

$$y'=-\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=-\frac{\left(x^2+1\right)-x(2x)}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{x^2-1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Найдем нули производной:

$$x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=-1.\end{array}\right.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



Искомая точка минимума $x=1$.

Ответ: 1.