Неравенства с логарифмами по переменному основанию

1. Задание 15 № 507646. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(8x)\cdot\log_{0,125x}2}{\log_{0,5x}16}\le\dfrac{1}{4}.$

Решение.

Левая часть неравенства имеет смысл при $x>0,\ 0,5x\ne 1$ и $0,125x\ne 1,$ то есть при $x>0,\ x\ne 2$ и $x\ne 8.$ При этих условиях получаем:

$$\frac{\log_2(8x)\cdot\frac{1}{\log_2(0,125x)}}{\frac{4}{\log_2(0,5x)}}\le\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{(\log_2 8+\log_2 x)(\log_2 0,5+\log_2 x)}{\log_2 0,125+\log_2 x}\le 1\Leftrightarrow\frac{(\log_2 x+3)(\log_2 x-1)}{\log_2 x-3}\le 1.$$

Сделаем замену $t=\log_2 x,$ тогда

$$\frac{(t+3)(t-1)}{t-3}\le 1\Leftrightarrow\frac{t(t+1)}{t-3}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t\le -1,\\ 0\le t<3.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\left[\begin{array}{l}0<x\le 0,5,\\ 1\le x<8.\end{array}\right.$$

Из полученного набора нужно ещё исключить точку 2. Таким образом, множество решений исходного неравенства: $(0;\ 0,5]\cup[1;\ 2)\cup(2;\ 8).$

Ответ: $(0;\ 0,5]\cup[1;\ 2)\cup(2;\ 8).$

2. Задание 15 № 508255. Решите неравенство $\log_2^2(3x-1)+\log_{3x-1}^2 2-\log_2(3x-1)^2-\log_{3x-1}4+2\le 0$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1)+\frac{1}{\log_2^2(3x-1)}\right)-2\left(\log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\right)+2\le 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2(3x-1)}=t,$ тогда $\log_2^2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2^2(3x-1)}+2=t^2$ и, следовательно, $\log_2^2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2^2(3x-1)}=t^2-2.$

Далее имеем: $t^2-2t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 2,$ откуда

$$0\le\log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\le 2\Leftrightarrow\log_2(3x-1)=1\Leftrightarrow 3x-1=2\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $\{1\}.$

Замечание: Не трудно заметить, что полученный корень удовлетворяет ОДЗ.

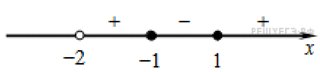
3. Задание 15 № 508451. Решите неравенство: $(x-1)\log_{x+3}(x+2)\cdot\log_3(x+3)^2\le 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов. Найдём ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}x+3>0,\\ x+3\ne 1,\\ x+2>0,\\ x+3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow x>-2.$$

Определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, множество решений неравенства: $[-1;\ 1].$

Ответ: $[-1;\ 1].$

4. Задание 15 № 508456. Решите неравенство: $\log_{x+1}(2x-5)+\log_{2x-5}(x+1)\le 2.$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$\log_{x+1}(2x-5)+\frac{1}{\log_{x+1}(2x-5)}\le 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{x+1}(2x-5)$:

$$y+\frac{1}{y}\le 2; \frac{(y-1)^2}{y}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0, \\ y=1. \end{array}\right.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5)=1$, то

$$\begin{cases} x+1=2x-5, \\ x+1>0, \\ x+1\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow x=6.$$

Если $\log_{x+1}(2x-5)<0$, то

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5-1}{x+1-1}<0, \\ x+1>0, \\ 2x-5>0, \\ x+1\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x}<0, \\ x>\dfrac{5}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{2}<x<3.$$

Решение первого неравенства: $\frac{5}{2}<x<3$ или $x=6.$

Ответ: $\left(\frac{5}{2};\ 3\right)\cup\{6\}.$

5. Задание 15 № 508476. Решите неравенство: $\log_2 16x\ge \log_{0,5x}2\cdot\log_4 16x^4.$

Решение.

Сделаем замену $z=\log_2 x.$

$$z+4\ge\frac{2z+2}{z-1}\Leftrightarrow\frac{z^2+z-6}{z-1}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -3\le z<1, \\ z\ge 2. \end{array}\right.$$

Тогда $-3\le\log_2 x<1$ или $\log_2 x\ge 2$, откуда находим решение неравенства: $\left[\frac{1}{8};\ 2\right)\cup[4;\ +\infty).$

Ответ: $\left[\frac{1}{8};\ 2\right)\cup[4;\ +\infty).$

6. Задание 15 № 508485. Решите неравенство: $\log_{\log_x 2x}(6x-2)\ge 0.$

Решение.

Область допустимых значений неравенства задается соотношениями:

$$\begin{cases} \log_x 2x>0, \\ \log_x 2x\ne 1, \\ 6x-2>0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \frac{1}{3}<x<\frac{1}{2}, \\ x>1. \end{array}\right.$$

На области допустимых значений справедливы равносильности:

$$\log_a b\ge 0\Leftrightarrow\frac{b-1}{a-1}\ge 0, \log_a b-\log_a c\ge 0\Leftrightarrow\frac{b-c}{a-1}\ge 0, a^b-a^c\ge 0\Leftrightarrow(a-1)(b-c)\ge 0.$$

Поэтому на ОДЗ имеем:

$$\log_{\log_x 2x}(6x-2)\ge 0\Leftrightarrow\frac{6x-3}{\log_x 2x-1}\ge 0\Leftrightarrow\frac{3(2x-1)}{\log_x 2x-\log_x x}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2x-1}{x(x-1)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 0<x\le\frac{1}{2}, \\ x>1. \end{array}\right.$$

С учетом ОДЗ получаем ответ.

Ответ: $\left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right)\cup(1;\ +\infty).$

7. Задание 15 № 508488. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x+1)^2 \le 1$.

Решение.

Первый способ:

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \le x^2 \Leftrightarrow 2x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \le -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x < -1$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \ge x^2 \Leftrightarrow 2x+1 \le 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $-\frac{1}{2} \le x < 0$ или $0 < x < 1$.

Множество решений неравенства системы: $(-\infty;\ -1) \cup \left[-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left[-\frac{1}{2};\ 0\right) \cup (0;\ 1)$.

Второй способ:

$$\log_{x^2}(x+1)^2 \le 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)^2}{\lg x^2} \le 1 \Leftrightarrow \frac{\lg(x+1)^2 - \lg x^2}{\lg x^2} \le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x^2-1} \le 0, \\ x \ne -1, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+1}{(x-1)(x+1)} \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1, \\ -\dfrac{1}{2} \le x < 0, \\ 0 < x < 1. \end{array}\right.$$

8. Задание 15 № 508490. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1$.

Решение.

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \le x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $x > 1$.

Второй случай: $0 < x^2 < 1$.

$$\log_{x^2}(x-1)^2 \le 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge x^2 \Leftrightarrow 2x-1 \le 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{2}.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right]$.

Решение неравенства: $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

Ответ: $(-1, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$.

9. Задание 15 № 508492. Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{3}}\left(3x^2 - 2x + 1\right) \ge 0$.

Решение.

Заметим, что $3x^2 - 2x + 1 > 0$ при всех x. При условиях $x > 0$ и $x \ne 3$ получаем неравенство

$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)\left(3x^2 - 2x + 1 - 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow x(x-3)(3x-2) \ge 0.$$

С учётом указанных условий получаем ответ: $0 < x \le \frac{2}{3}$ или $x > 3$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{2}{3}\right] \cup (3;\ +\infty)$.

10. Задание 15 № 508494. Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{2}}\left(4x^2-3x+1\right)\geq 0.$

Решение.

Выражение $4x^2-3x+1>0$ при всех x. При условиях $x>0$ и $x\neq 2$ исходное неравенство эквивалентно

$$\frac{4x^2-3x+1-1}{\frac{x}{2}-1}\geq 0\Leftrightarrow \frac{x(4x-3)}{x-2}\geq 0.$$

При указанных условиях множество решений неравенства: $\left(0;\ \frac{3}{4}\right]\cup(2;\ +\infty).$

Ответ: $\left(0;\ \frac{3}{4}\right]\cup(2;\ +\infty).$

11. Задание 15 № 508496. Решите неравенство: $\log_{\frac{x}{3}}\left(3x^2-2x+1\right)\geq 0.$

Решение.

Решим второе неравенство. Заметим, что $3x^2-2x+1>0$ при всех x. При условиях $x>0$ и $x\neq 3$ получаем неравенство:

$$\left(\frac{x}{3}-1\right)\left(3x^2-2x+1-1\right)\geq 0\Leftrightarrow x(x-3)(3x-2)\geq 0.$$

При указанных условиях получаем: $0<x\leq\frac{2}{3}$ или $x>3.$

Ответ: $\left(0;\ \frac{2}{3}\right]\cup(3;\ +\infty).$

12. Задание 15 № 508498. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x+2)\leq 1.$

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2>1.$

$$\log_{x^2}(x+2)\leq 1\Leftrightarrow 0<x+2\leq x^2\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2\geq 0,\\ x+2>0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)(x-2)\geq 0,\\ x>-2\end{cases}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-2<x\leq -1,\\ x\geq 2.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $x^2>1$, получаем: $-2<x<-1$ или $x\geq 2.$

Второй случай: $0<x^2<1.$

$$\log_{x^2}(x+2)\leq 1\Leftrightarrow x+2\geq x^2\Leftrightarrow (x-2)(x+1)\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 2.$$

Учитывая условие $0<x^2<1$, получаем: $-1<x<0$ или $0<x<1.$

Множество решений исходного неравенства: $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup[2;\ +\infty).$

Ответ: $(-2;\ -1)\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup[2;\ +\infty).$

13. Задание 15 № 508500. Решите неравенство: $\log_{x^2}(2-x)\leq 1.$

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x^2>1.$

$$\log_{x^2}(2-x)\leq 1\Leftrightarrow 0<2-x\leq x^2\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+x-2\geq 0,\\ 2-x>0;\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)(x-1)\geq 0,\\ x<2.\end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2>1$, получаем: $x\leq -2$ или $1<x<2.$

Второй случай: $0<x^2<1.$

$$\log_{x^2}(2-x)\leq 1\Leftrightarrow 2-x\geq x^2\Leftrightarrow (x+2)(x-1)\leq 0\Leftrightarrow \quad -2\leq x\leq 1.$$

Учитывая условие $0<x^2<1$, получаем: $-1<x<0$ или $0<x<1.$

Множество решений второго неравенства: $(-\infty;\ -2]\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2).$

Ответ: $(-\infty;\ -2]\cup(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)\cup(1;\ 2).$

14. Задание 15 № 508502. Решите неравенство: $\log_{2x} 0,25 \le \log_2 32x - 1.$

Решение.

Заметим, что в ОДЗ данного неравенства входят все положительные числа за исключением $\frac{1}{2}$. Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{\log_{0,25} 2x} \le \log_2 32x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x + 1} \le \log_2 x + 4.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$.

$$-\frac{2}{z+1} \le z+4 \Leftrightarrow \frac{z^2+5z+6}{z+1} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le z \le -2, \\ z > -1 \end{array}\right.$$

Откуда получаем:

$$\left[\begin{array}{l} -3 \le \log_2 x \le -2, \\ \log_2 x > -1. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{8} \le x \le \frac{1}{4}, \\ x > \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{8};\ \frac{1}{4}\right] \cup \left(\frac{1}{2};\ +\infty\right).$

15. Задание 15 № 508504. Решите неравенство: $\log_{2x} 0,25 \ge \log_2 32x - 1.$

Решение.

Заметим, что в ОДЗ данного неравенства входят все положительные числа за исключением $\frac{1}{2}$. Преобразуем неравенство:

$$\frac{1}{\log_{0,25} 2x} \ge \log_2 32x - 1 \Leftrightarrow -\frac{2}{\log_2 x + 1} \ge \log_2 x + 4.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$; имеем:

$$-\frac{2}{z+1} \ge z+4 \Leftrightarrow \frac{z^2+5z+6}{z+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(z+2)(z+3)}{z+1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z \le -3 \\ -2 \le z < -1. \end{array}\right.$$

Тогда $\log_2 x \le -3$ или $-2 \le \log_2 x < -1$, откуда получаем множество решений неравенства: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right).$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{2}\right).$

16. Задание 15 № 508506. Решите неравенство: $\log_{x^2}\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) \le 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство: $\log_{x^2} \frac{x+2}{x^2} \le 0 \Leftrightarrow \log_{x^2}(x+2) \le 1.$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $x^2 > 1.$

$$\log_{x^2}(x+2) \le 1 \Leftrightarrow 0 < x+2 \le x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 \ge 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(x+1) \ge 0, \\ x+2 > 0. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2 > 1$, получаем: $-2 < x < -1$ или $x \ge 2.$

Второй случай: $0 < x^2 < 1.$

$$\log_{x^2}(x+2) \le 1 \Leftrightarrow x+2 \ge x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 \le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \le 0 \Leftrightarrow -1 \le x \le 2.$$

Итак, учитывая условие $0 < x^2 < 1$, получаем: $-1 < x < 0$ или $0 < x < 1.$

Множество решений неравенства: $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup [2;\ +\infty).$

Ответ: $(-2;\ -1) \cup (-1;\ 0) \cup (0;\ 1) \cup [2;\ +\infty).$

17. Задание 15 № 508508. Решите неравенство: $\log_{x^2}\left(-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)\le 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство: $\log_{x^2}\frac{2-x}{x^2}\le 0 \Leftrightarrow \log_{x^2}(2-x)\le 1.$

Рассмотрим два случая.

а) $x^2>1$.

$$\log_{x^2}(2-x)\le 1 \Leftrightarrow 0<2-x\le x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-2\ge 0, \\ 2-x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)(x-1)\ge 0, \\ x<2. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $x^2>1$, находим: $x\le -2$ или $1<x<2$.

б) $0<x^2<1$.

$$\log_{x^2}(2-x)\le 1 \Leftrightarrow 2-x\ge x^2 \Leftrightarrow x^2+x-2\le 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)\le 0 \Leftrightarrow -2\le x\le 1.$$

Учитывая условие $0<x^2<1$, получаем: $-1<x<0$ или $0<x<1$.

Множество решений неравенства: $(-\infty,\,-2]\cup(-1,\,0)\cup(0,\,1)\cup(1,\,2)$.

Ответ: $(-\infty,\,-2]\cup(-1,\,0)\cup(0,\,1)\cup(1,\,2)$.

18. Задание 15 № 508510. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{x+3}(x^2-x+30)}{\log_{x+3}(x^2-x-1)}\ge\dfrac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}.$

Решение.

Заметим, что при $x>-3$ и $x\ne -2$ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\lg(x^2-x+30)}{\lg(x^2-x-1)}\ge\frac{\lg(x^4-2x^3+x^2)}{\lg(x^2-x-1)}.$$

Положив в последнем неравенстве $y=x^2-x$, получаем:

$$\frac{\lg(y+30)}{\lg(y-1)}\ge\frac{\lg y^2}{\lg(y-1)} \Leftrightarrow \frac{\lg y^2-\lg(y+30)}{\lg(y-1)-\lg 1}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2-y-30}{y-2}\le 0, \\ y>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(y-6)(y+5)}{y-2}\le 0, \\ y>1. \end{cases} \Leftrightarrow 2<y\le 6.$$

Таким образом, имеем:

$$\begin{cases} x^2-x>2, \\ x^2-x\le 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2>0, \\ x^2-x-6\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ x>2. \end{array}\right. \\ -2\le x\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2\le x<-1, \\ 2<x\le 3. \end{array}\right.$$

Учитывая то, что $x\ne -2$, получаем множество решений неравенства: $(-2;\ -1)\cup(2;\ 3]$.

Ответ: $(-2;\ -1)\cup(2;\ 3]$.

19. Задание 15 № 508512. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{x+5}(x^2+2x+56)}{\log_{x+5}(x^2+2x-2)}\ge\dfrac{\log_2(x^4+4x^3+4x^2)}{\log_2(x^2+2x-2)}.$

Решение.

Заметим, что при $x>-5$ и $x\ne -4$ исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\frac{\log_2(x^2+2x+56)}{\log_2(x^2+2x-2)}\ge\frac{\log_2(x^4+4x^3+4x^2)}{\log_2(x^2+2x-2)}.$$

Положив в последнем неравенстве $y=x^2+2x$, получаем:

$$\frac{\log_2(y+56)}{\log_2(y-2)}\ge\frac{\log_2 y^2}{\log_2(y-2)} \Leftrightarrow \frac{\log_2 y^2-\log_2(y+56)}{\log_2(y-2)-\log_2 1}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y^2-y-56}{y-3}\le 0, \\ y>2 \end{cases} \Leftrightarrow 3<y\le 8.$$

Далее имеем:

$$\begin{cases} x^2+2x>3, \\ x^2+2x\le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3>0, \\ x^2+2x-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-3, \\ x>1, \end{array}\right. \\ -4\le x\le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4\le x<-3, \\ 1<x\le 2. \end{array}\right.$$

Учитывая то, что $x\ne -4$, получаем решение исходного неравенства: $(-4;-3)\cup(1;2]$.

Ответ: $(-4;-3)\cup(1;2]$.

20. Задание 15 № 508513. Решите неравенство: $\log_{4-x}\dfrac{(x-4)^8}{(x+5)}\geq 8.$

Решение.
Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\log_{4-x}\frac{(x-4)^8}{(x+5)}\geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x}(4-x)^8-\log_{4-x}(x+5)\geq 8 \Leftrightarrow \log_{4-x}(x+5)\leq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\leq 0,\\ 0<4-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5\geq 1,\\ 3<x<4\end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Второй случай: $4-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\leq 0,\\ 4-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+5\leq 1,\\ x<3\end{cases} \Leftrightarrow -5<x\leq -4.$$

Решение неравенства: $-5<x\leq -4$ или $3<x<4.$

Ответ: $(-5;\ -4]\cup(3;\ 4).$

21. Задание 15 № 508515. Решите неравенство: $\log_{5-x}(x+3)\leq 0.$
Решение.
Рассмотрим два случая. Первый случай $0<5-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+3)\leq 0,\\ 0<5-x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3\geq 1,\\ 4<x<5,\end{cases} \Leftrightarrow 4<x<5.$$

Второй случай: $5-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+3)\leq 0,\\ 5-x>1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+3\leq 1,\\ x<4,\end{cases} \Leftrightarrow -3<x\leq -2.$$

Решение первого неравенства исходной системы: $-3<x\leq -2$ или $4<x<5.$

Ответ: $(-3;\ -2]\cup(4;\ 5).$

22. Задание 15 № 508517. Решите неравенство: $\log_{7-x}(2x+9)\leq 0.$
Решение.
Рассмотрим два случая.
Первый случай: $0<7-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{7-x}(2x+9)\leq 0,\\ 0<7-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+9\geq 1,\\ 6<x<7\end{cases} \Leftrightarrow 6<x<7.$$

Второй случай: $7-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{7-x}(2x+9)\leq 0,\\ 7-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<2x+9\leq 1,\\ x<6\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{9}{2}<x\leq -4.$$

Множество решений неравенства: $\left(-\dfrac{9}{2};\ -4\right]\cup(6;\ 7).$

Ответ: $\left(-\dfrac{9}{2};\ -4\right]\cup(6;\ 7).$

23. Задание 15 № 508520. Решите неравенство: $x \cdot \log_{x+3}(7-2x) \geq 0.$

Решение.

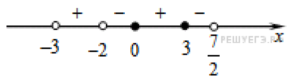
Решим неравенство методом интервалов. Найдём ОДЗ:

$$\begin{cases} x+3>0, \\ x+3 \neq 1, \\ 7-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-3, \\ x \neq -2, \\ x<\dfrac{7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<x<\dfrac{7}{2}, \\ x \neq -2. \end{cases}$$

Найдём корни:

$$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=3. \end{array}\right.$$

Определим знаки левой неравенства на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, множество решений неравенства: $(-3;\ -2) \cup [0;\ 3].$

24. Задание 15 № 508521. Решите неравенство: $\log_{6x^2-x-1}\left(2x^2-5x+3\right) \geq 0.$

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0<6x^2-x-1<1.$ Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2-x-1>0, \\ 6x^2-x-1<1, \\ 2x^2-5x+3>0, \\ 2x^2-5x+3 \leq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-1)(3x+1)>0, \\ (2x+1)(3x-2)<0, \\ (x-1)(2x-3)>0, \\ (x-2)(2x-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x<\frac{2}{3}.$$

Второй случай: $6x^2-x-1>1.$ Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6x^2-x-1>1, \\ 2x^2-5x+3 \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+1)(3x-2)>0, \\ (x-2)(2x-1) \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-\dfrac{1}{2}, \\ x \geq 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}\right) \cup [2;\ +\infty).$

25. Задание 15 № 508526. Решите неравенство: $\log_{x+6}\left(\dfrac{x-4}{x}\right)^2+\log_{x+6}\dfrac{x}{x-4} \leq 1.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x+6}\frac{x-4}{x}-\log_{x+6}\frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{x+6}\frac{x-4}{x} \leq 1.$$

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x+6>1 \Leftrightarrow x>-5$.

$$\log_{x+6}\frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow 0<\frac{x-4}{x} \leq x+6 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+5x+4}{x} \geq 0, \\ \dfrac{x-4}{x}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+1)(x+4)}{x} \geq 0, \\ \dfrac{x-4}{x}>0, \end{cases}$$

откуда находим: $[-4,\ -1] \cup (4,\ +\infty).$ Полученные значения переменной удовлетворяют условию $x>-5.$

Второй случай: $0<x+6<1 \Leftrightarrow -6<x<-5$. Имеем:

$$\log_{x+6}\frac{x-4}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{x-4}{x} \geq x+6 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x+4)}{x}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -4, \\ -1 \leq x<0. \end{array}\right.$$

Учитывая условие $0<x+6<1$, получаем: $-6<x<-5.$ Решение неравенства: $(-6,\ -5) \cup [-4,\ -1] \cup (4,\ +\infty).$

Ответ: $(-6,\ -5) \cup [-4,\ -1] \cup (4,\ +\infty).$

26. Задание 15 № 508527. Решите неравенство: $\log_{x+7}\left(\frac{3-x}{x+1}\right)^2 \le 1-\log_{x+7}\frac{x+1}{x-3}.$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$2\log_{x+7}\frac{x-3}{x+1} \le 1+\log_{x+7}\frac{x-3}{x+1} \Leftrightarrow \log_{x+7}\frac{x-3}{x+1} \le 1.$$

Рассмотрим два случая.
Первый случай: $x+7>1$.

$$\log_{x+7}\frac{x-3}{x+1} \le 1 \Leftrightarrow 0<\frac{x-3}{x+1} \le x+7 \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}\dfrac{x^2+7x+10}{x+1} \ge 0,\\ \dfrac{x-3}{x+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x+2)(x+5)}{x+1} \ge 0,\\ \dfrac{x-3}{x+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-5 \le x \le -2,\\ x>3.\end{array}\right.$$

Все полученные значения переменной удовлетворяют условию $x+7>1$.
Второй случай: $0<x+7<1$.

$$\log_{x+7}\frac{x-3}{x+1} \le 1 \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} \ge x+7 \Leftrightarrow \frac{x^2+7x+10}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x+5)}{x+1} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \le -5,\\ -2 \le x < -1.\end{array}\right.$$

Учитывая условие $0<x+7<1$, получаем: $-7<x<-6$. Множество решений второго неравенства исходной системы: $(-7;\ -6)\cup[-5;\ -2]\cup(3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-7;\ -6)\cup[-5;\ -2]\cup(3;\ +\infty)$.

27. Задание 15 № 508529. Решите неравенство: $\log_{4-x}(16-x^2) \le 1$.

Решение.
Решим первое неравенство системы:

$$\log_{4-x}(16-x^2) \le 1 \ \Leftrightarrow\ \log_{4-x}(4-x)(4+x) \le 1 \Leftrightarrow\ \log_{4-x}(4+x) \le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+4) \le 0,\\ 0<4-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4 \ge 1,\\ 3<x<4,\end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Второй случай: $4-x>1$.

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+4) \le 0,\\ 4-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+4 \le 1,\\ x<3,\end{cases} \Leftrightarrow -4<x \le -3.$$

Множество решений неравенства: $(-4;\ -3]\cup(3;\ 4)$.

Ответ: $(-4;\ -3]\cup(3;\ 4)$.

28. Задание 15 № 508531. Решите неравенство: $\log_{4-x}\dfrac{-5-x}{x-4}\le -1.$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\log_{4-x}\frac{-5-x}{x-4}\le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(5+x)-\log_{4-x}(4-x)\le -1 \Leftrightarrow \log_{4-x}(x+5)\le 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<4-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\le 0,\\ 0<4-x<1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+5\ge 1,\\ 3<x<4,\end{cases} \Leftrightarrow 3<x<4.$$

Второй случай: $4-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+5)\le 0,\\ 4-x>1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+5\le 1,\\ x<3,\end{cases} \Leftrightarrow -5<x\le -4.$$

Множество решений неравенства: $(-5;\ -4]\cup(3;\ 4).$

Ответ: $(-5;\ -4]\cup(3;\ 4).$

29. Задание 15 № 508533. Решите неравенство: $\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4}\ge -4.$

Решение.
Имеем:

$$\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4}\ge -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2)-\log_{5-x}(x-5)^4\ge -4 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+2)\ge 0,\\ 0<5-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+2\le 1,\\ 0<5-x<1\end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай: $5-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+2)\ge 0,\\ 5-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2\ge 1,\\ x<4,\end{cases} \Leftrightarrow -1\le x<4.$$

Таким образом, множество решений данного уравнения: $[-1;\ 4).$

Ответ: $[-1;\ 4).$

30. Задание 15 № 508535. Решите неравенство: $\log_{3-x}\dfrac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2.$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\log_{3-x}\frac{x+4}{(x-3)^2}\ge -2 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4)-\log_{3-x}(x-3)^2\ge -2 \Leftrightarrow \log_{3-x}(x+4)\ge 0.$$

Рассмотрим два случая.
а) $0<3-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 0<3-x<1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}0<x+4\le 1,\\ 2<x<3.\end{cases}$$

Эта система решений не имеет.
б) $3-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{3-x}(x+4)\ge 0,\\ 3-x>1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+4\ge 1,\\ x<2\end{cases} \Leftrightarrow -3\le x<2.$$

Ответ: $-3\le x<2$

31. Задание 15 № 508537. Решите неравенство: $\log_{5-x}\dfrac{x+2}{(x-5)^4}\geq -4.$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\log_{5-x}\frac{x+2}{(x-5)^4}\geq -4\Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2)-\log_{5-x}(x-5)^4\geq -4\Leftrightarrow \log_{5-x}(x+2)\geq 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0<5-x<1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+2)\geq 0,\\ 0<5-x<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+2\leq 1,\\ 0<5-x<1\end{cases}\text{решений нет.}$$

Второй случай: $5-x>1.$

$$\begin{cases}\log_{5-x}(x+2)\geq 0,\\ 5-x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2\geq 1,\\ x<4,\end{cases}\Leftrightarrow -1\leq x<4.$$

Ответ: $[-1;\ 4).$

32. Задание 15 № 508539. Решите неравенство: $\log_x(x^3-8)\leq\log_x(x^3+2x-13).$

Решение.
Последовательно получаем:

$$\log_x(x^3-8)\leq\log_x(x^3+2x-13)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-8\leq x^3+2x-13,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 5,\\ x>2\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2,5.$$

Ответ: $[2,5;\ +\infty).$

33. Задание 15 № 508541. Решите неравенство: $\log_x(x^3-1)\leq\log_x(x^3+2x-4).$

Решение.
Решим первое неравенство системы:

$$\log_x(x^3-1)\leq\log_x(x^3+2x-4)\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-1\leq x^3+2x-4,\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x\geq 3,\\ x>1\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 1,5.$$

Ответ: $[1,5;+\infty).$

34. Задание 15 № 508544. Решите неравенство: $\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}}7^{\frac{2}{x^2+x}}\leq\dfrac{4}{2x+1}.$

Решение.
Преобразуем неравенство, используя свойства логарифма:

$$\log_{(\sqrt{7})^{x+\frac{1}{2}}}7^{\frac{2}{x^2+x}}\leq\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{4}{2x+1}\cdot\log_7 7^{\frac{2}{x^2+x}}\leq\frac{4}{2x+1}\Leftrightarrow\frac{4}{2x+1}\cdot\left(\frac{2}{x^2+x}-1\right)\leq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2-x-x^2}{(2x+1)(x^2+x)}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(x+2)(x-1)}{x(2x+1)(x+1)}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2\leq x<-1,\\ -\frac{1}{2}<x<0,\\ x\geq 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-2;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty).$

35. Задание 15 № 508546. Решите неравенство: $\log_{x-1}\left(\dfrac{x+1}{5}\right)\leq 0.$

Решение.
Решим неравенство, используя теорему о знаке логарифма:

$$\log_{x-1}\left(\frac{x+1}{5}\right)\leq 0\Leftrightarrow\begin{cases}1<x,\\ x\neq 2,\\ (x-2)\left(\dfrac{x+1}{5}-1\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1<x,\\ x\neq 2,\\ (x-2)\cdot\dfrac{x-4}{5}\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 2<x\leq 4.$$

Ответ: $(2;\ 4].$

36. Задание 15 № 508547. Решите неравенство: $\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\le 0.$

Решение.

Значения x, при которых определено первое неравенство: $-4<x<3,\ 3<x<4.$ Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-4<x<3.$ Получаем, что $\log_{x+5}(6-x)>0;\ 4-x>1.$ Тогда

$$\begin{cases}\log_{4-x}(x+4)\cdot\log_{x+5}(6-x)\le 0,\\ -4<x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{4-x}(x+4)\le 0,\\ -4<x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+4\le 1,\\ -4<x<3\end{cases}\Leftrightarrow -4<x\le -3.$$

Второй случай: $3<x<4$. Получаем, что $\log_{4-x}(x+4)<0;\ \log_{x+5}(6-x)>0,$ следовательно, при $3<x<4$ первое неравенство исходной системы верно.

Таким образом, решение неравенства: $(-4;\ -3]\cup(3;\ 4).$

Ответ: $(-4;\ -3]\cup(3;\ 4).$

37. Задание 15 № 508550. Решите неравенство: $\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0.$

Решение.

Значения x, при которых определено первое неравенство: $-5<x<-4$ и $-4<x<9.$ Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-4<x<9.$ Получаем, что $\log_{11-x}(x+7)>0;\ x+5>1.$ Тогда

$$\begin{cases}\log_{11-x}(x+7)\cdot\log_{x+5}(9-x)\le 0,\\ -4<x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{x+5}(9-x)\le 0,\\ -4<x<9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<9-x\le 1,\\ -4<x<9\end{cases}\Leftrightarrow 8\le x<9.$$

Второй случай: $-5<x<-4$. Получаем, что $\log_{x+5}(9-x)<0;\ \log_{11-x}(x+7)>0,$ следовательно, при $-5<x<-4$ первое неравенство исходной системы верно.

Таким образом, решение неравенства: $(-5;\ -4)\cup[8;\ 9).$

Ответ: $(-5;\ -4)\cup[8;\ 9).$

38. Задание 15 № 508551. Решите неравенство: $\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0.$

Решение.

Значения x, при которых определено первое неравенство: $-2<x<1$ и $1<x<2.$ Рассмотрим два случая.

Первый случай: $-2<x<1.$ Получаем, что $\log_{x+3}(3-x)>0;\ 2-x>1.$ Тогда:

$$\begin{cases}\log_{2-x}(x+2)\cdot\log_{x+3}(3-x)\le 0,\\ -2<x<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_{2-x}(x+2)\le 0,\\ -2<x<-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x+2\le 1,\\ -2<x<1\end{cases}\Leftrightarrow -2<x\le -1.$$

Второй случай: $1<x<2$. Получаем, что $\log_{2-x}(x+2)<0;\ \log_{x+3}(3-x)>0,$ следовательно, при $1<x<2$ неравенство верно.

Ответ: $(-2;\ -1]\cup(1;\ 2).$

39. Задание 15 № 508553. Решите неравенство: $\log_{2x-1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x-1)\leq 2.$

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_{2x-1}(4x-5)+\frac{1}{\log_{2x-1}(4x-5)}\leq 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{2x-1}(4x-5)$:

$$y+\frac{1}{y}\leq 2\Leftrightarrow\frac{(y-1)^2}{y}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1\\ y<0.\end{array}\right.$$

Если $\log_{2x-1}(4x-5)=1$, то

$$\begin{cases}2x-1=4x-5,\\ 2x-1>0,\\ 2x-1\neq 1.\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Если $\log_{2x-1}(4x-5)<0$, то

$$\begin{cases}\dfrac{4x-5-1}{2x-1-1}<0,\\ 2x-1>0,\\ 4x-5,\\ 2x-1\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2x-3}{x-1}<0,\\ x>\dfrac{5}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}.$$

Значит, решение данного неравенства $\frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}$ или $x=2.$

Ответ: $\left(\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right)\cup\{2\}.$

40. Задание 15 № 508558. Решите неравенство: $\log_{3x}\frac{1}{27}\cdot\log_3 27x+9\geq 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$\frac{\log_3 27x}{\log_{\frac{1}{27}}3x}+9\geq 0\Leftrightarrow\frac{\log_3 x+3}{-\frac{1}{3}(\log_3 x+1)}+9\geq 0\Leftrightarrow 9-\frac{3(\log_3 x+3)}{\log_3 x+1}\geq 0\Leftrightarrow\frac{\log_3 x+3}{\log_3 x+1}\leq 3.$$

Сделаем замену $z=\log_3 x$:

$$\frac{z+3}{z+1}\leq 3\Leftrightarrow-\frac{2z}{z+1}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z<-1,\\ z\geq 0.\end{array}\right.$$

Тогда $\log_3 x<-1$ или $\log_3 x\geq 0$, откуда $0<x<\frac{1}{3}$ или $x\geq 1.$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{3}\right)\cup[1;\ +\infty).$

41. Задание 15 № 508560. Решите неравенство: $\log_{0,25(x+1)^2}\left(\frac{x+7}{4}\right) \le 1.$

Решение.
Рассмотрим два случая.
Первый случай: $0,25(x+1)^2 > 1 \Leftrightarrow |x+1| > 2.$

$$\log_{0,25(x+1)^2}\left(\frac{x+7}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{x+7}{4} \le 0,25(x+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+x-6 \ge 0, \\ x+7 > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+3)(x-2) \ge 0, \\ x > -7. \end{cases}$$

Откуда, учитывая условие $|x+1| > 2,$ получаем: $-7 < x < -3$ или $x \ge 2.$
Второй случай: $0 < |x+1| < 2.$

$$\log_{0,25(x+1)^2}\left(\frac{x+7}{4}\right) \le 1 \Leftrightarrow \frac{x+7}{4} \ge 0,25(x+1)^2 \Leftrightarrow (x+3)(x-2) \le 0 \Leftrightarrow -3 \le x \le 2.$$

Учитывая условие $0 < |x+1| < 2,$ получаем: $-3 < x < -1$ или $-1 < x < 1.$
Множество решений неравенства: $(-7, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty).$

Ответ: $(-7, -3) \cup (-3, -1) \cup (-1, 1) \cup [2, +\infty).$

42. Задание 15 № 508562. Решите неравенство: $\log_{x^2}(x+2) \le 1.$
Решение.
Рассмотрим два случая.
Первый случай: $x^2 > 1.$

$$\log_{x^2}(x+2) \le 1 \Leftrightarrow 0 < x+2 \le x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-2 \ge 0, \\ x+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(x-2) \ge 0, \\ x > -2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2 < x \le -1, \\ x \ge 2. \end{array}\right.$$

Учитывая условие $x^2 > 1,$ получаем: $(-2, -1) \cup [2, +\infty).$
Второй случай: $0 < x^2 < 1.$

$$\log_{x^2}(x+2) \le 1 \Leftrightarrow x+2 \ge x^2 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) \le 0 \Leftrightarrow \quad -1 \le x \le 2.$$

Учитывая условие $0 < x^2 < 1,$ получаем : $(-1, 0) \cup (0, 1).$
Таким образом, решение неравенства: $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup [2, +\infty).$

Ответ: $(-2, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, 1) \cup [2, +\infty).$

43. Задание 15 № 508565. Решите неравенство: $\log_{3x+1}(4x-6)+\log_{4x-6}(3x+1)\le 2.$

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифма:

$$\log_{3x+1}(4x-6)+\frac{1}{\log_{3x+1}(4x-6)}\le 2.$$

Сделаем замену $y=\log_{3x+1}(4x-6)$:

$$y+\frac{1}{y}\le 2 \Leftrightarrow \frac{(y-1)^2}{y}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y<0. \end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной.

Первый случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+1=4x-6, \\ 3x+1>0, \\ 3x+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=7.$$

Второй случай:

$$\log_{3x+1}(4x-6)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-7}{3x}<0, \\ 3x+1>0, \\ 4x-6>0, \\ 3x+1\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-7}{x}<0, \\ x>\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}.$$

Итак, решение неравенства: $\frac{3}{2}<x<\frac{7}{4}$ или $x=7.$

Ответ: $\left(\frac{3}{2};\ \frac{7}{4}\right)\cup\{7\}.$

44. Задание 15 № 508570. Решите неравенство: $\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)-\log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\ge 0.$

Решение.

Заметим, что выражение, стоящее под знаком логарифма, не меньше 1:

$$x^2-12|x|+37=(|x|-6)^2+1\ge 1.$$

При положительных значениях переменной справедливы неравенства: $1-\frac{x^2}{37}<1$ и $1+\frac{x^2}{37}>1$, а значит,

$$\log_{1-\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\le 0 \text{ и } \log_{1+\frac{x^2}{37}}(x^2-12|x|+37)\ge 0.$$

Тем самым, неравенство выполнено в том и только в том случае, когда оба выражения равны нулю.

Следовательно,

$$x^2-12|x|+37=1 \Leftrightarrow (|x|-6)^2+1=1 \Leftrightarrow |x|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6, \\ x=-6. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-6;\ 6\}.$

45. Задание 15 № 508572. Решите неравенство: $\log_2 0,5x \geq \log_{16x} 2 \cdot \log_4 16x^4$.

Решение.

Решим второе неравенство системы:

$$\log_2 0,5x \geq \frac{\log_4 16x^4}{\log_2 16x} \Leftrightarrow \log_2 x - 1 \geq \frac{2\log_2 x + 2}{\log_2 x + 4}.$$

Сделаем замену $z = \log_2 x$:

$$z - 1 \geq \frac{2z+2}{z+4} \Leftrightarrow \frac{z^2+z-6}{z+4} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < z \leq -3, \\ z \geq 2. \end{array}\right.$$

Тогда $-4 < \log_2 x \leq -3$ или $\log_2 x \geq 2$, откуда находим решение неравенства: $\frac{1}{16} < x \leq \frac{1}{8}$ или $x \geq 4$.

Ответ: $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right] \cup [4; +\infty)$.

46. Задание 15 № 508574. Решите неравенство: $\log_{2x-3}(10-3x) \geq 0$.

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0 < 2x - 3 < 1$.

$$\begin{cases} 0 < 2x - 3 < 1, \\ \log_{2x-3}(10-3x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} < x < 2, \\ 0 < 10 - 3x \leq 1. \end{cases}$$

В первом случае решений нет.

Второй случай: $2x - 3 > 1$.

$$\begin{cases} 2x - 3 > 1, \\ \log_{2x-3}(10-3x) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 10 - 3x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \leq 3.$$

Решение неравенства: $2 < x \leq 3$.

Ответ: $(2; 3]$.

47. Задание 15 № 508576. Решите неравенство: $\log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2$.

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{2x^2+9x+7}{(x+1)^4} \leq -2 \Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7) \cdot \log_{x+1} \frac{(2x+7)(x+1)}{(x+1)^4} \leq -2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+1}(2x+7) \cdot (\log_{x+1}(2x+7) - 3) \leq -2.$$

Пусть $t = \log_{x+1}(2x+7)$, тогда неравенство примет вид:

$$t(t-3) \leq -2 \Leftrightarrow t^2 - 3t + 2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq \log_{x+1}(2x+7) \leq 2.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < x + 1 < 1$.

$$\log_{x+1}(2x+7) \geq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7 \leq x + 1, \\ 2x + 7 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -6 \\ x > -\frac{7}{2} \end{cases} \text{решений нет.}$$

Второй случай: $x + 1 > 1$.

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x+7) \geq 1, \\ \log_{x+1}(2x+7) \leq 2, \\ x + 1 > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 7 \geq x + 1, \\ 2x + 7 \leq (x+1)^2, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -6, \\ x^2 - 6 \geq 0, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \sqrt{6}.$$

Решение неравенства: $x \geq \sqrt{6}$.

Ответ: $[\sqrt{6}; +\infty)$.

48. Задание 15 № 508578. Решите неравенство: $\log_{(\sqrt{5})^{x+\frac{1}{3}}} 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \le \frac{6}{3x+1}.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{(\sqrt{5})^{x+\frac{1}{3}}} 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \le \frac{6}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{6}{3x+1}\cdot\log_5 5^{\frac{4}{x^2+3x}} \le \frac{6}{3x+1} \Leftrightarrow \frac{6}{3x+1}\cdot\left(\frac{4}{x^2+3x}-1\right)\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-3x-x^2}{(3x+1)(x^2+3x)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+4)}{x(3x+1)(x+3)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le x < -3, \\ -\frac{1}{3} < x < 0, \\ x \ge 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-4;\ -3)\cup\left(-\frac{1}{3};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty).$

49. Задание 15 № 508579. Решите неравенство: $\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\log_{5-x}\frac{x+4}{(x-5)^{10}} \ge -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4)-\log_{5-x}(x-5)^{10} \ge -10 \Leftrightarrow \log_{5-x}(x+4) \ge 0.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай: $0 < 5-x < 1.$

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \le 0, \\ 0 < 5-x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x+4 \le 1, \\ 4 < x < 5 \end{cases} \quad \text{решений нет.}$$

Второй случай: $5-x > 1.$ Имеем:

$$\begin{cases} \log_{5-x}(x+4) \le 0, \\ 5-x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4 \ge 1, \\ x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x < 4.$$

Ответ: $[-3;\ 4).$

50. Задание 15 № 508973. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 \le \log_{\frac{x}{2}} 5.$

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x > 0$ и $\frac{x}{x-1} > 0.$ Отсюда следует, что $x-1>0,$ то есть $x>1.$ При этом условии $\frac{x}{x-1} > 1,$ значит, $\log_{\frac{x}{x-1}} 5 > 0.$ Тогда исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_5\frac{x}{x-1} \ge \log_5\frac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-1} \ge \frac{x}{2} > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2, \\ 2x \ge x(x-1). \end{cases}$$

Следовательно, $x>2$ и $x-1 \le 2,$ откуда получаем, что $2 < x \le 3.$

Ответ: $(2;\ 3].$

51. Задание 15 № 509065. Решите неравенство $\log_2^2(3x-1)+\log_{3x-1}^2 2-\log_2(3x-1)^2-\log_{3x-1}4+2\le 0.$

Решение.

Данное неравенство равносильно неравенству

$$\left(\log_2^2(3x-1)+\frac{1}{\log_2^2(3x-1)}\right)-2\left(\log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\right)+2\le 0.$$

Пусть $\log_2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2(3x-1)}=t$, тогда $\log_2^2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_2^2(3x-1)}+2=t^2$ и, следовательно,

$$\log_2^2(3x-1)+\frac{1}{\log_2^2(3x-1)}=t^2-2.$$

Далее имеем: $t^2-2t\le 0\Leftrightarrow 0\le t\le 2,$ откуда

$$0\le \log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}\le 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_2(3x-1)}=2\Leftrightarrow \log_2(3x-1)=1\Leftrightarrow 3x-1=2\Leftrightarrow x=1.$$

Ответ: $\{1\}$.

52. Задание 15 № 509581. Решите неравенство $\dfrac{\log_{1-2x}\left((x+1)(1-4x+4x^2)\right)}{\log_{x+1}(1-2x)}\le -1.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases}\left(\log_{1-2x}(x+1)+\log_{1-2x}(1-2x)^2\right)\cdot\log_{1-2x}(x+1)\le -1,\\ x+1\ne 1.\end{cases}$$

Сделаем замену $y=\log_{1-2x}(x+1).$ Получаем: $(y+2)y\le -1;\ (y+1)^2\le 0;\ y=-1.$

Сделаем обратную замену: $\log_{1-2x}(x+1)=-1.$ Тогда

$$\begin{cases}(1-2x)(x+1)=1,\\ x+1>0,\\ 1-2x\ne 1,\\ x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2x^2-x=0,\\ x>-1,\\ x\ne 0,\end{cases}$$

откуда $x=-0{,}5$.

Ответ: $-0{,}5$.

53. Задание 15 № 509928. Решите неравенство $\dfrac{\log_{1-x}\left((3x+1)(1-2x+x^2)\right)}{\log_{3x+1}(1-x)}\le -1.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases}(\log_{1-x}(3x+1)+\log_{1-x}(1-x)^2)\cdot\log_{1-x}(3x+1)\le -1,\\ 3x+1\ne 1.\end{cases}$$

Сделаем замену $y=\log_{1-x}(3x+1).$ Получаем: $(y+2)y\le -1;\ (y+1)^2\le 0;\ y=-1.$

Сделаем обратную замену: $\log_{1-x}(3x+1)=-1.$ Тогда

$$\begin{cases}(3x+1)(1-x)=1,\\ 1-x>0,\\ 1-x\ne 1,\\ 3x+1\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3x^2+2x=0,\\ x<1,\\ x\ne 0,\end{cases}$$

откуда $x=\dfrac{2}{3}.$

Ответ: $x=\dfrac{2}{3}.$

54. Задание 15 № 510150. Решите неравенство $\log_{\frac{x}{x-3}} 7 \leq \log_{\frac{x}{3}} 7.$

Решение.

Неравенство имеет смысл при $x > 0$ и $\dfrac{x}{x-3} > 0.$ Отсюда следует, что $x - 3 > 0,$ то есть $x > 3.$ При этом условии $\dfrac{x}{x-3} > 1,$ значит, $\log_{\frac{x}{x-1}} 7 > 0.$ Тогда исходное неравенство равносильно неравенству:

$$\log_7 \frac{x}{x-1} \geq \log_7 \frac{x}{3} > 0 \Leftrightarrow \frac{x}{x-3} \geq \frac{x}{3} > 1.$$

Следовательно, $x > 3$ и $x - 3 \leq 3,$ откуда получаем, что $3 < x \leq 6.$

Ответ: $(3;\ 6].$

55. Задание 15 № 512483. Решите неравенство $0,5\log_{x-2}(x^2 - 10x + 25) + \log_{5-x}(-x^2 + 7x - 10) \geq 3.$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\log_{x-2}(x-5)^2 + \log_{5-x}((5-x)(x-2)) \geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 5 - x > 0, \\ x - 2 \neq 1, \\ 5 - x \neq 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 2 < x < 5, \\ x \neq 3, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-2}(5-x) + \log_{5-x}(x-2) \geq 2.$$

Замена: $\log_{x-2}(5-x) = z.$ Получаем $z + \dfrac{1}{z} \geq 2,$ откуда z > 0. Обратная замена:

$$\log_{(x-2)}(5-x) > 0 \Leftrightarrow \frac{(5-x)-1}{(x-2)-1} > 0 \Leftrightarrow 3 < x < 4.$$

Ответ: (3; 4).

56. Задание 15 № 512485. Решите неравенство $0,5\log_{x-1}(x^2-8x+16)+\log_{4-x}(-x^2+5x-4)\geq 3.$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$\frac{1}{2}\log_{x-1}(x-4)^2+\log_{4-x}((4-x)(x-1))\geq 3.$$

Любое решение неравенства удовлетворяет системе

$$\begin{cases} x-1>0, \\ 4-x>0, \\ x-1\neq 1, \\ 4-x\neq 1, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} 1<x<4, \\ x\neq 2, \\ x\neq 3. \end{cases}$$

Для таких x имеем неравенство

$$\log_{x-1}(4-x)+\log_{4-x}(x-1)\geq 2.$$

Замена: $\log_{x-1}(4-x)=z.$ Получаем $z+\frac{1}{z}\geq 2,$ откуда z > 0. Обратная замена:

$$\log_{(x-1)}(4-x)>0\Leftrightarrow\frac{(4-x)-1}{(x-1)-1}>0\Leftrightarrow 2<x<3.$$

Ответ: (2; 3).

57. Задание 15 № 484578. Решите неравенство $\log_{3x-3}3+\log_{(x-1)^2}27\geq 2.$

Решение.

Перейдем к основанию 3 и упростим левую часть неравенства:

$$\log_{3x-3}3+\log_{(x-1)^2}27\geq 2\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3(3x-3)}+\frac{3}{\log_3(x-1)^2}\geq 2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3(3(x-1))}+\frac{3}{\log_3(x-1)^2}\geq 2\Leftrightarrow\frac{1}{1+\log_3(x-1)}+\frac{3}{2\log_3(x-1)}\geq 2.$$

Обозначим $t=\log_3(x-1),$ тогда $\frac{1}{1+t}+\frac{3}{2t}\geq 2.$ Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{1+t}+\frac{3}{2t}\geq 2\Leftrightarrow\frac{5t+3}{2t^2+2t}\geq 2\Leftrightarrow\frac{4t^2-t-3}{2t(1+t)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -1<t\leq-\frac{3}{4}, \\ 0<t\leq 1. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} -1<\log_3(x-1)\leq-\frac{3}{4}, \\ 0<\log_3(x-1)\leq 1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \frac{4}{3}<x\leq 1+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}, \\ 2<x\leq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3};\ 1+\frac{1}{\sqrt[4]{27}}\right]\cup(2;\ 4].$

58. Задание 15 № 484582. Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{(x-1)^2}-1}\left(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)\right)}{\log_{2^{(x-1)^2}-1}(x^2+4x+5)}\geq 0.$

Решение.

Чтобы был определен логарифм по основанию $2^{(x-1)^2-1}$, это выражение должно быть положительно и отлично от 1. Находим: $(x-1)^2-1\neq 0,$ откуда $x\neq 0,$ $x\neq 2.$ Упростим неравенство: $\log_{x^2+4x+5}\left(\log_{2x^2-2x+3}(x^2-4x+3)\right)\geq 0.$

Заметим, что $x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1,$ причем равенство достигается только при $x=-2.$

При $x\neq -2$ получаем: $\log_{2x^2-2x+3}\left(x^2-4x+3\right)\geq 1.$

Выделим полный квадрат в основании логарифма: $2x^2-2x+3=2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{5}{2}.$ Это выражение больше 1 при всех допустимых x.

Таким образом, $x^2-4x+3\geq 2x^2-2x+3.$

Тогда $x^2+2x\leq 0,$ откуда $-2\leq x\leq 0.$ Учитывая, что $x\neq 0$ и $x\neq -2,$ получаем $-2<x<0.$

Ответ: $(-2,0).$

59. Задание 15 № 484581. Решите неравенство $\dfrac{\log_{2^{(x+1)^2}-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)}{\log_{2^{(x+1)^2}-1}(x^2+6x+10)}\geq 0.$

Решение.

Заметим, что

1. $2^{(x+1)^2}-1\geq 0$ и обращается в ноль только при $x=-1,$ то есть и $2^{(x+1)^2}-1>0$ при $x\neq -1.$
2. $2^{(x+1)^2}-1\neq 1$ при $x\neq 0$ и $x\neq -2.$
3. $2x^2+2x+3=(x+1)^2+x^2+2>1.$
4. $x^2+6x+10=(x+3)^2+1\geq 1$ и $(x+3)^2+1=1$ при $x=-3,$ то есть $(x+3)^2+1>1$ при $x\neq -3.$

Следовательно, при $x\neq -3, x\neq -2, x\neq -1, x\neq 0$ имеем:

$$\frac{\log_{2^{(x+1)^2}-1}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)}{\log_{2^{(x+1)^2}-1}(x^2+6x+10)}\geq 0\Leftrightarrow \log_{x^2+6x+10}\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\geq 1\Leftrightarrow x^2-2x\geq 2x^2+2x+3\quad\Leftrightarrow x^2+4x+3\leq 0\Leftrightarrow -3\leq x\leq -1.$$

Откуда с учетом выколотых точек, получаем $-3<x<-2$ или $-2<x<-1.$

Ответ: $(-3;\ -2)\cup(-2;\ -1).$

60. Задание 15 № 485947. Решите неравенство $\dfrac{\log_{7^{x+3}}49}{\log_{7^{x+3}}(-49x)}\leq\dfrac{1}{\log_7\log_{\frac{1}{7}}7^x}$

Решение.

Решение ищем на множестве: $\begin{cases} x\neq -1,\\ x\neq -\dfrac{1}{49},\\ x\neq -3,\\ x<0.\end{cases}$

Пусть $\log_7(-x)=t,$ тогда

$$\frac{2}{2+t}\leq\frac{1}{t}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\infty<t<-2,\\ 0<t\leq 2.\end{array}\right.$$

Значит, $-49\leq x<-1$ или $-\dfrac{1}{49}<x<0.$

С учетом рассмотренных выше ограничений получаем множество решений исходного неравенства: $[-49;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{49};\ 0\right).$

Ответ: $[-49;\ -3)\cup(-3;\ -1)\cup\left(-\dfrac{1}{49};\ 0\right).$

61. Задание 15 № 484583. Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \le 0.$

Решение.

Запишем неравенство в виде:

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 3x} - \frac{6}{\log_3 9x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1+\log_3 x} - \frac{6}{2+\log_3 x} \le 0.$$

Сделаем замену $y = \log_3 x$ и приведем левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{1}{y} + \frac{2}{1+y} - \frac{6}{2+y} \le 0 \Leftrightarrow \frac{y^2+3y+2+2y^2+4y-6y^2-6y}{y(y+1)(y+2)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-3y^2+y+2}{y(y+1)(y+2)} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(3y+2)}{y(y+1)(y+2)} \ge 0.$$

Решением полученного неравенства является множество $(-2;\ -1) \cup \left[-\frac{2}{3};\ 0\right) \cup [1;\ +\infty)$. Возвращаясь к переменной x, находим множество решений исходного неравенства: $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}};\ 1\right) \cup [3;\ +\infty)$.

Ответ: $\left(\frac{1}{9};\ \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}};\ 1\right) \cup [3;\ +\infty)$.

62. Задание 15 № 513429. Решите неравенство $\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \ge \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5-2^x)$.

Решение.

Заметим, что $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5} > 1$, поскольку равносильны следующие неравенства

$$5-\sqrt{2} < \sqrt{13} \Leftrightarrow 27-10\sqrt{2} < 13 \Leftrightarrow 14 < 10\sqrt{2} \Leftrightarrow 49 < 50.$$

С учётом этого имеем

$$\log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} 4 \ge \log_{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{13}}{5}} (5-2^x) \Leftrightarrow 4 \ge 5-2^x > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \le 1, \\ 2^x < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 0, \\ x < \log_2 5. \end{cases}$$

Ответ: $[0;\ \log_2 5)$.