Смешанные неравенства

1. Задание 15 № 484579. Решите неравенство

$$\log_2\left(\left(7^{-x^2}-3\right)\left(7^{-x^2+16}-1\right)\right)+\log_2\frac{7^{-x^2}-3}{7^{-x^2+16}-1}>\log_2\left(7^{7-x^2}-2\right)^2.$$

Решение.

Пусть $t=7^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2\left((t-3)\left(7^{16}t-1\right)\right)+\log_2\frac{t-3}{7^{16}t-1}>\log_2\left(7^7t-2\right)^2.$$

Так как $t-3<0$, имеем $7^{16}t-1<0$, а значит, $0<t<\frac{1}{7^{16}}<\frac{2}{7^7}$.

Получаем:

$$\begin{cases}\log_2(t-3)^2>\log_2(7^7t-2)^2,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t-3|>\left|7^7t-2\right|,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3-t>2-7^7t,\\ 0<t<\frac{1}{7^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{7^{16}}.$$

Поясним: неравенство $3-t>2-7^7t$ эквивалентно неравенству $(7^7-1)t>-1$ и выполнено для всех значений переменной. Итак,

$$7^{-x^2}<7^{-16}\Leftrightarrow x^2>16\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -4)\cup(4;\ +\infty)$.

2. Задание 15 № 507503. Решите неравенство $(2x+1)\log_5 10+\log_5\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 2x-1$.

Решение.

Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(2x+1)\log_5 10+\log_5\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 2x-1\Leftrightarrow\log_5\left(10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\right)\le\log_5 5^{2x-1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4^x-\frac{1}{10}>0,\\ 10^{2x+1}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le 5^{2x-1}.\end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$10\cdot 10^{2x}\cdot\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le\frac{5^{2x}}{5}\Leftrightarrow 4^x\left(4^x-\frac{1}{10}\right)\le\frac{1}{50}.$$

Пусть $4^x=y$, тогда имеем:

$$y^2-\frac{1}{10}y-\frac{1}{50}\le 0\Leftrightarrow-\frac{1}{10}\le y\le\frac{1}{5}.$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы, получаем:

$$\frac{1}{10}<4^x\le\frac{1}{5}\Leftrightarrow-\log_4 10<x\le-\log_4 5.$$

Ответ: $(-\log_4 10;\ -\log_4 5]$.

3. Задание 15 № 507652. Решите неравенство $5^{-|x-2|}\cdot\log_2(4x-x^2-2)\geq 1$.

Решение.

Покажем, что наибольшее значение левой части неравенства равно 1. Действительно,

$$0<5^{-|x-2|}\leq 5^0=1.$$

В силу тождества $4x-x^2-2=2-(x-2)^2$ имеем:

$$\log_2(4x-x^2-2)=\log_2(2-(x-2)^2)\leq\log_2 2=1.$$

Поскольку левая часть не больше 1, а правая равна 1, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1, откуда

$$\begin{cases}\log_2(4x-x^2-2)=1,\\ 5^{-|x-2|}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2-(x-2)^2=2,\\ |x-2|=0\end{cases}\Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

4. Задание 15 № 507676. Решите неравенство: $\dfrac{\log_4(2^x-1)}{x-1}\leq 1$.

Решение.

Пусть $y=2^x-1$, тогда $x=\log_2(y+1)$, и неравенство принимает вид

$$\frac{\log_4 y}{\log_2(y+1)-1}\leq 1\Leftrightarrow\frac{\log_4 y-\log_2(y+1)+1}{\log_2(y+1)-1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{\log_4\frac{4y}{(y+1)^2}}{\log_2\frac{y+1}{2}}\leq 0.$$

Перейдём к системе неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{\frac{4y}{(y+1)^2}-1}{\frac{y+1}{2}-1}\leq 0,\\ y+1>0,\\ y>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\dfrac{y^2-2y+1}{(y+1)^2(y-1)}\leq 0,\\ y>0.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(y-1)^2}{y-1}\geq 0,\\ y>0.\end{cases}\Leftrightarrow y>1.$$

Вернёмся к исходной переменной, тогда: $2^x-1>1\Leftrightarrow 2^x>2\Leftrightarrow x>1.$

Ответ: $(1;\ +\infty)$.

5. Задание 15 № 507682. Решите неравенство $(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le x-1.$

Решение.
Воспользуемся свойствами логарифмов:

$$(x+1)\log_3 6+\log_3\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le x-1 \Leftrightarrow \log_3\left(6^{x+1}\cdot\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\right)\le \log_3 3^{x-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x-\dfrac{1}{6}>0, \\ 6^{x+1}\cdot\left(2^x-\dfrac{1}{6}\right)\le 3^{x-1}. \end{cases}$$

Решим второе неравенство полученной системы:

$$6^{x+1}\cdot\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le 3^{x-1} \Leftrightarrow 2^x\left(2^x-\frac{1}{6}\right)\le\frac{1}{18}.$$

Пусть $2^x=y$, тогда неравенство примет вид:

$$y^2-\frac{1}{6}y-\frac{1}{18}\le 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6}\le y\le\frac{1}{3}.$$

Откуда, учитывая первое неравенство системы, получаем:

$$\frac{1}{6}<2^x\le\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\log_2 6<x\le -\log_2 3.$$

Ответ: $(-\log_2 6;\ -\log_2 3]$.

6. Задание 15 № 507691. Решите неравенство: $\dfrac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|} \geq \dfrac{\lg(-x^2-2x+2)^2}{x-1}$.

Решение.
Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|} \geq \frac{\lg(-x^2-2x+2)^2}{x-1} \Leftrightarrow \frac{(x^2+x)\lg(x^2+2x-2)}{|x-1|} \geq \frac{2\lg(x^2+2x-2)}{x-1}.$$

При $x>1$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x-2)\lg(x^2+2x-2)}{x-1} \geq 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-1)(x+2)\lg(x^2+2x-2)}{x-1} \geq 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+2x-2) \geq 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2 \geq 1, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) \geq 0, \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

При $x<1$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x+2)\lg(x^2+2x-2)}{1-x} \geq 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\lg(x^2+2x-2)}{1-x} \geq 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+2x-2) \geq 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-2 \geq 1, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x-3 \geq 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+3) \geq 0, \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3.$$

Таким образом, получаем, что решение неравенства — множество $(-\infty;\,-3]\cup(1;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-3]\cup(1;\,+\infty)$.

7. Задание 15 № 507693. Решите неравенство: $\dfrac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|} \geq \dfrac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2}$.

Решение.
Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|} \geq \frac{\log_8(-x^2-4x+4)^6}{x-2} \Leftrightarrow \frac{(x^2+x)\log_8(x^2+4x-4)}{|x-2|} \geq \frac{6\log_8(x^2+4x-4)}{x-2}.$$

При $x > 2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x-6)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2} \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+3)\log_8(x^2+4x-4)}{x-2} \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x^2+4x-4) \geq 0, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-4 \geq 1, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq 0, \\ x > 2. \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$$

При $x < 2$:

$$\begin{cases} \dfrac{(x^2+x+6)\log_8(x^2+4x-4)}{2-x} \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\log_8(x^2+4x-4)}{2-x} \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_8(x^2+4x-4) \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-4 \geq 1, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x-5 \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+5) \geq 0, \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -5, \\ 1 \leq x < 2. \end{array}\right.$$

Таким образом, получаем, что решение неравенства — множество $(-\infty; -5] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -5] \cup [1; 2) \cup (2; +\infty)$.

8. Задание 15 № 507779. Решите неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-4\log_8^2 x}}{\log_8 x}<2.$

Решение.

После замены $t=\log_8 x,$ получаем $\dfrac{1-\sqrt{1-4t^2}-2t}{t}<0.$ Значит,

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t>0,\\ t<0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t<0,\\ t>0.\end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t>0,\\ t<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4t^2<4t^2-4t+1,\\ 4t^2\le 1,\\ t<0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\le t<0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{8}}\le x<1.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-4t^2}-2t<0,\\ t>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-4t^2>4t^2-4t+1,\\ 4t^2\le 1,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1<x<\sqrt{8}.$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right)\cup(1;\ \sqrt{8}).$

Ответ: $\left[\dfrac{\sqrt{2}}{4};\ 1\right)\cup(1;\ \sqrt{8}).$

9. Задание 15 № 507786. Решите неравенство: $\dfrac{1-\sqrt{1-8\log_2^2 x}}{2\log_2 x}<1.$

Решение.

После замены $t=2\log_2 x,$ получаем $\dfrac{1-\sqrt{1-2t^2}-t}{t}<0.$ Значит,

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t>0,\\ t<0\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t<0,\\ t>0.\end{cases}$$

Решим первую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t>0,\\ t<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2t^2<t^2-2t+1,\\ 2t^2\le 1,\\ t<0\end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{2}}\le t<0 \Leftrightarrow 2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}}\le x<1.$$

Решим вторую систему неравенств:

$$\begin{cases}1-\sqrt{1-2t^2}-t<0,\\ t>0.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-2t^2>t^2-2t+1,\\ 2t^2\le 1,\\ t>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<t<\frac{2}{3} \Leftrightarrow 1<x<2^{\frac{1}{3}}.$$

Таким образом, получаем, что решением исходного неравенства является множество $\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}};\ 1\right)\cup(1;\ 2^{\frac{1}{3}}).$

Ответ: $\left[2^{-\frac{\sqrt{2}}{4}};\ 1\right)\cup\left(1;\ 2^{\frac{1}{3}}\right).$

10. Задание 15 № 507795. Решите неравенство: $\left(3^{\frac{x-2}{2}}-1\right)\sqrt{3^x-10\sqrt{3^x}+9}\geq 0.$

Решение.

Найдём, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{3^x}=t$:

$$t^2-10t+9\geq 0\Leftrightarrow (t-1)(t-9)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq 1, \\ t\geq 9. \end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3^x}\leq 1, \\ \sqrt{3^x}\geq 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x\leq 1, \\ 3^x\geq 81 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 0, \\ x\geq 4. \end{array}\right.$$

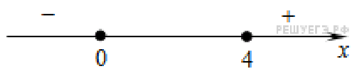
Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty;\ 0]\cup[4;\ +\infty)$.

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части:

$$3^{\frac{x-2}{2}}-1=0\Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=0\Leftrightarrow x=2,$$

$$3^x-10\sqrt{3^x}+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:



Таким образом, решение исходного неравенства: $\{0\}\cup[4;\ +\infty)$.

Ответ: $\{0\}\cup[4;\ +\infty)$.

11. Задание 15 № 507801. Решите неравенство: $\left(2^{\frac{x-4}{2}}-1\right)\sqrt{2^x-10\sqrt{2^x}+16}\geq 0.$

Решение.

Найдём, при каких значениях x подкоренное выражение неотрицательно. Пусть $\sqrt{2^x}=t$:

$$t^2-10t+16\geq 0\Leftrightarrow (t-2)(t-8)\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq 2, \\ t\geq 8. \end{array}\right.$$

Тогда:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2^x}\leq 2, \\ \sqrt{2^x}\geq 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^x\leq 4, \\ 2^x\geq 64 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq 2, \\ x\geq 6. \end{array}\right.$$

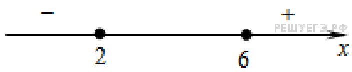
Тем самым, область определения неравенства: $(-\infty;\ 2]\cup[6;\ +\infty).$

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули левой части:

$$2^{\frac{x-4}{2}}-1=0\Leftrightarrow \frac{x-4}{2}=0\Leftrightarrow x=4,$$

$$2^x-10\sqrt{2^x}+16=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=6. \end{array}\right.$$

Расставим точки на прямой и определим знаки на области определения:



Таким образом, решение исходного неравенства: $\{2\}\cup[6;\ +\infty).$

Ответ: $\{2\}\cup[6;\ +\infty).$

12. Задание 15 № 507817. Решите неравенство $\log_x(\log_9(3^x-9))<1.$

Решение.

Поскольку $3^x>9$, сразу имеем $x>2$, и функция $\log_x$ возрастает. Поэтому $0<\log_9(3^x-9)<x.$ Это значит, что $1<3^x-9<9^x.$ Для первого неравенства имеем $x>\log_3 10.$ Второе неравенство выполнено всегда, так как $t^2-t+9>0$ при всех t из-за отрицательности дискриминанта (замена $3^x=t$). Таким образом, $(\log_3 10;+\infty).$

Ответ: $(\log_3 10;\ +\infty).$

13. Задание 15 № 507823. Решите неравенство $\dfrac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geq 1.$

Решение.

Имеем:

$$\frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)}{x}\geq 1\Leftrightarrow \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-x}{x}\geq 0\Leftrightarrow \frac{\log_2(3\cdot 2^{x-1}-1)-\log_2 2^x}{x}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{3\cdot 2^{x-1}-1-2^x}{x}\geq 0, \\ 3\cdot 2^{x-1}-1>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\frac{1}{2}\cdot 2^x-1}{x}\geq 0, \\ 2^{x-1}>\dfrac{1}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{2^x-2^1}{x}\geq 0, \\ 2^x>\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{x-1}{x}\geq 0, \\ x>\log_2\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} x\geq 1, \\ x<0. \end{array}\right. \\ x>\log_2\dfrac{2}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\dfrac{2}{3}<x<0, \\ x\geq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\log_2\dfrac{2}{3};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty).$

14. Задание 15 № 508428. Решите неравенство: $\dfrac{2}{5^x-1}+\dfrac{5^x-2}{5^x-3}\geq 2.$

Решение.

Пусть $z=5^x$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1<z\leq 2, \\ 3<z\leq 5. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $0<x\leq \log_5 2$ или $\log_5 3<x\leq 1.$

Ответ: $(0;\ \log_5 2]\cup(\log_5 3;\ 1].$

15. Задание 15 № 508443. Решите неравенство: $\dfrac{0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04}{3-x}\leq 0.$

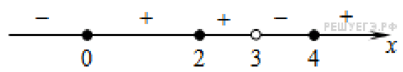
Решение.

Решим неравенство методом интервалов. Найдём нули числителя:

$$0,2^{|x^2-4x+2|}-0,04=0 \Leftrightarrow 0,2^{|x^2-4x+2|}=0,2^2 \Leftrightarrow |x^2-4x+2|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+2=2, \\ x^2-4x+2=-2. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x=0, \\ x^2-4x+4=0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Расставим знаки на числовой прямой:



Таким образом, множество решений второго уравнения: $(-\infty;\ 0]\cup\{2\}\cup(3;\ 4].$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup\{2\}\cup(3;\ 4].$

16. Задание 15 № 508445. Решите неравенство: $\dfrac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\geq 0.$

Решение.

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{3^{|x^2-2x-1|}-9}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^{|x^2-2x-1|}-3^2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(3-1)(|x^2-2x-1|-2)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{|x^2-2x-1|^2-2^2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2-2x-3)(x^2-2x+1)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(x-3)(x-1)^2}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1\leq x<0, \\ x=1, \\ x\geq 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-1;\ 0)\cup\{1\}\cup[3;\ +\infty).$

17. Задание 15 № 508458. Решите неравенство: $9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\geq 6.$

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x>0.$ Так как при этом условии $9^{\lg x}=3^{2\lg x}=(x^{\log_x 3})^{\frac{2}{\log_x 10}}=x^{2\lg 3},$ то получаем

$$9^{\lg x}\geq 3 \Leftrightarrow \lg x\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x\geq \sqrt{10}.$$

Ответ: $\left[\sqrt{10};\ +\infty\right).$

18. Задание 15 № 508460. Решите неравенство: $9^{\lg x}+x^{2\lg 3}\leq\frac{2}{3}$.

Решение.

Заметим, что $9^{\lg x}=3^{2\lg x}$, решим показательное неравенство, сводящееся к логарифмическому:

$$9^{\lg x}\leq 3^{-1}\Leftrightarrow 3^{2\lg x}\leq 3^{-1}\Leftrightarrow 2\lg x\leq -1\Leftrightarrow \lg x\leq -\frac{1}{2}\Leftrightarrow 0<x\leq\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{10}}\right]$.

19. Задание 15 № 508471. Решите неравенство: $5^{\log_5^2 x}+x^{\log_5 x}\geq 2\sqrt[4]{5}$.

Решение.

Приведем второе слагаемое к основанию 5:

$$x^{\log_5 x}=\left(5^{\log_5 x}\right)^{\log_5 x}=5^{\log_5^2 x}.$$

Неравенство принимает вид:

$$2\cdot 5^{\log_5^2 x}\geq 2\sqrt[4]{5}\Leftrightarrow 5^{\log_5^2 x}\geq 5^{0,25}\Leftrightarrow |\log_5 x|\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x\leq\frac{1}{\sqrt{5}},\\ x\geq\sqrt{5}.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup[\sqrt{5};\ +\infty)$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right]\cup[\sqrt{5};\ +\infty)$.

20. Задание 15 № 508473. Решите неравенство: $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}>2\sqrt[4]{3}$.

Решение.

Приведем второе слагаемое к основанию 3:

$$x^{\log_3 x}=\left(3^{\log_3 x}\right)^{\log_3 x}=3^{\log_3^2 x}.$$

Неравенство принимает вид $2\cdot 3^{\log_3^2 x}>2\sqrt[4]{3}\Leftrightarrow 3^{\log_3^2 x}>3^{0,25}\Leftrightarrow |\log_3 x|>\frac{1}{2}$.

Получаем: $0<x<\frac{1}{\sqrt{3}}$ или $x>\sqrt{3}$.

Ответ: $\left(0;\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cup(\sqrt{3};\ +\infty)$.

21. Задание 15 № 508475. Решите неравенство: $\frac{9^x-3^x-90}{3^x-82}\leq 1$.

Решение.

Пусть $y=3^x$:

$$\frac{y^2-y-90}{y-82}\leq 1\Leftrightarrow\frac{y^2-2y-8}{y-82}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(y-4)(y+2)}{y-82}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\leq -2,\\ 4\leq y<82.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0$, получаем: $4\leq 3^x<82$, откуда находим решение неравенства: $\log_3 4\leq x<\log_3 82$.

Ответ: $[\log_3 4;\ \log_3 82)$.

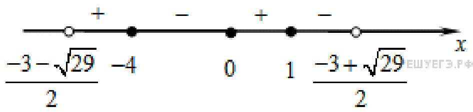
22. Задание 15 № 508482. Решите неравенство: $x \cdot \log_4(5-3x-x^2) \geq 0.$

Решение.

Решим второе неравенство методом интервалов. Поскольку корнями уравнения $5-3x-x^2=1$ являются числа −4 и 1, левая часть неравенства обращается в нуль в точках −4, 0 и 1. Учитывая, что

$$5-3x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2+3x-5<0 \Leftrightarrow \frac{-3-\sqrt{29}}{2}<x<\frac{-3+\sqrt{29}}{2},$$

определим знаки левой части на ОДЗ (см. рис.):



Тем самым, получаем ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup [0;\ 1].$

Ответ: $\left(\frac{-3-\sqrt{29}}{2};\ -4\right] \cup [0;\ 1].$

23. Задание 15 № 508497. Решите неравенство: $\frac{3-0,25^x}{2-2^{-x}} \geq 1,5.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^{-x}.$

$$\frac{3-y^2}{2-y} \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{y^2-1,5y}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-1,5)}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq 1,5 \\ y>2. \end{array}\right.$$

Тогда $0<2^{-x} \leq \frac{3}{2}$ или $2^{-x}>2,$ откуда находим: $x<-1$ или $x \geq -\log_2 1,5.$

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup [-\log_2 1,5;\ +\infty).$

24. Задание 15 № 508499. Решите неравенство: $\frac{3-4^x}{2-2^x} \geq \frac{3}{2}.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^x$:

$$\frac{3-y^2}{2-y} \geq 1,5 \Leftrightarrow \frac{y^2-\frac{3}{2}y}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y\left(y-\frac{3}{2}\right)}{y-2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \\ y>2. \end{array}\right.$$

Тогда $0 \leq 2^x \leq \frac{3}{2}$ или $2^x>2,$ откуда: $x \leq \log_2 \frac{3}{2}$ или $x>1.$

Ответ: $\left(-\infty;\ \log_2 \frac{3}{2}\right] \cup (1;\ +\infty).$

25. Задание 15 № 508505. Решите неравенство: $\dfrac{8^{-x}-5\cdot 0,5^{x}}{2^{-x}-2^{x+4}} \geq 0.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^{-x}, y>0.$

$$\frac{y^3-5y}{y-\dfrac{16}{y}} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y^2(y^2-5)}{y^2-16} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \leq |y| \leq \sqrt{5}, \\ |y|>4. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $y=2^{-x}>0,$ получаем $0<2^{-x} \leq \sqrt{5}$ или $2^{-x}>4,$ откуда находим множество решений первого неравенства системы: $(-\infty,\,-2)\cup[-\log_4 5,\,+\infty).$

Ответ: $(-\infty,\,-2)\cup[-\log_4 5,\,+\infty).$

26. Задание 15 № 508507. Решите неравенство: $\dfrac{8^{x}-5\cdot 2^{x}}{2^{x}-2^{4-x}} \geq 0.$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=2^{x}, y>0.$

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{y^3-5y}{y-\dfrac{16}{y}} \geq 0, \\ y>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{y^4-5y^2}{y^2-16} \geq 0, \\ y>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(y-\sqrt{5})(y+\sqrt{5})}{(y-4)(y+4)} \geq 0, \\ y>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<y \leq \sqrt{5}, \\ y>4. \end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $x \leq \log_4 5$ или $x>2.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_4 5]\cup(2;\ +\infty).$

27. Задание 15 № 508540. Решите неравенство: $\sqrt{2\cdot 9^{x}-7\cdot 3^{x+1}+10} \geq 3^{x}-10.$

Решение.

Пусть $3^{x}=t,\ t>0$ тогда данное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{2t^2-21t+10} \geq t-10.$$

Область определения этого неравенства задается неравенством:

$$2t^2-21t+10 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \leq \dfrac{1}{2}, \\ t \geq 10. \end{array}\right.$$

При $t \leq \dfrac{1}{2}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t \leq \dfrac{1}{2}$. Далее имеем:

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{2t^2-21t+10} \geq t-10, \\ t \geq 10. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t-10)(2t-1) \geq (t-10)^2, \\ t \geq 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (t-10)(t+9) \geq 0, \\ t \geq 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow t \geq 10.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 3^{x} \leq 2^{-1}, \\ 3^{x} \geq 10 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\log_3 2, \\ x \geq \log_3 10. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_3 2]\cup[\log_3 10;\ +\infty).$

28. Задание 15 № 508542. Решите неравенство: $\sqrt{3\cdot 4^x-5\cdot 2^{x+1}+3}\geq 2^x-3.$

Решение.

Пусть $2^x=t,\ t>0$, тогда данное неравенство принимает вид:

$$\sqrt{3t^2-10t+3}\geq t-3.$$

Область определения этого неравенства задается условием:

$$3t^2-10t+3\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\leq \dfrac{1}{3},\\ t\geq 3.\end{array}\right.$$

При $t\leq \dfrac{1}{3}$ левая часть неравенства неотрицательна, а правая отрицательна, следовательно, неравенство выполняется при всех $t\leq \dfrac{1}{3}$.

Имеем:

$$\begin{cases}\sqrt{3t^2-10t+3}\geq t-3,\\ t\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(t-3)(3t-1)\geq (t-3)^2,\\ t\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}(t-3)(2t+2)\geq 0,\\ t\geq 3\end{cases}\Leftrightarrow t\geq 3.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 2^x\leq 3^{-1},\\ 2^x\geq 3.\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\log_2 3,\\ x\geq \log_2 3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_2 3]\cup[\log_2 3;\ +\infty)$.

29. Задание 15 № 508556. Решите неравенство: $\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}+\left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)}\leq 2.$

Решение.

Так как $x^2+1>0$ и $7x^2-3x+1>0$ для любого x, воспользовавшись тождеством $x^{\log_a y}=y^{\log_a x}$ и методом интервалов, получаем:

$$\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}+\left(7x^2-3x+1\right)^{\lg\left(x^2+1\right)}\leq 2\Leftrightarrow \left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}\leq 1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \lg\left(\left(x^2+1\right)^{\lg\left(7x^2-3x+1\right)}\right)\leq \lg 1\Leftrightarrow \lg\left(7x^2-3x+1\right)\lg\left(x^2+1\right)\leq 0\Leftrightarrow 0\leq x\leq \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\left[0;\ \dfrac{3}{7}\right]$.

30. Задание 15 № 508561. Решите неравенство: $\dfrac{36-9^{-x}}{9-3^{-x}}\geq 4.$

Решение.

Сделаем замену $t=3^{-x}$. Имеем:

$$\frac{36-t^2}{9-t}\geq 4\Leftrightarrow \frac{36-t^2-36+4t}{9-t}\geq 0\Leftrightarrow \frac{t(4-t)}{9-t}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq t\leq 4,\\ t>9\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\leq 3^{-x}\leq 4,\\ 3^{-x}>9\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\geq -\log_3 4,\\ x<-2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup[-\log_3 4;\ +\infty)$.

31. Задание 15 № 508563. Решите неравенство: $\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2.$

Решение.

$$\log_{2x+1}(4x-5)+\log_{4x-5}(2x+1)\le 2 \Leftrightarrow \log_{2x+1}(4x-5)+\frac{1}{\log_{2x+1}(4x-5)}\le 2.$$

Сделаем замену $\log_{2x+1}(4x-5)=t$ тогда:

$$t+\frac{1}{t}\le 2 \Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t<0. \end{array}\right.$$

Из уравнения совокупности получаем:

$$\log_{2x+1}(4x-5)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=4x-5, \\ 2x+1>0, \\ 2x+1\ne 1, \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Из неравенства совокупности получаем:

$$\log_{2x+1}(4x-5)<0 \Leftrightarrow \frac{\lg(4x-5)}{\lg(2x+1)}<0 \Leftrightarrow \frac{\lg(4x-5)-\lg 1}{\lg(2x+1)-\lg 1}<0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4x-6}{2x}<0, \\ 4x-5>0, \\ 2x+1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<\dfrac{3}{2}, \\ x>\dfrac{5}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4}<x<\frac{3}{2}.$$

Ответ: $\left(\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right)\cup\{3\}$

32. Задание 15 № 508571. Решите неравенство: $\dfrac{9^x+11\cdot 3^x-93}{3^x-82}\le 1.$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^x$:

$$\frac{y^2+11y-93}{y-82}\le 1 \Leftrightarrow \frac{y^2+10y-11}{y-82}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(y-1)(y+11)}{y-82}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y\le -11, \\ 1\le y<82. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0,$ получаем: $1\le 3^x<82,$ откуда находим решение неравенства: $0\le x<\log_3 82.$

Ответ: $[0;\ \log_3 82).$

33. Задание 15 № 509178. Решите неравенство $\log_2\dfrac{8}{x}-\dfrac{10}{\log_2 16x}\ge 0.$

Решение.

Относительно $t=\log_2 x$ неравенство имеет вид:

$$3-t-\frac{10}{t+4}\ge 0,\ \frac{(3-t)(t+4)-10}{t+4}\ge 0,\ \frac{-t^2-t+2}{t+4}\ge 0,\ \frac{(t+2)(1-t)}{t+4}\ge 0.$$

Значит, $t<-4$ или $-2\le t\le 1.$ Возвращаясь к x, получаем:

$$\log<-4,\ 0<x<\frac{1}{16}$$

или

$$-2\le\log_2 x\le 1,\ \frac{1}{4}\le x\le 2.$$

Ответ: $\left(0;\frac{1}{16}\right)\cup\left[\frac{1}{4};2\right].$

34. Задание 15 № 510020. Решите неравенство $\dfrac{\log_9(2-x)-\log_{15}(2-x)}{\log_{15}x-\log_{25}x} \le \log_{25}9.$

Решение.

Левая часть неравенства определена при $2-x>0;\ x>0;\ x\ne 1.$

При $0<x<1$ получаем $\log_{15}x<\log_{25}x,\ \log_9(2-x)>\log_{15}(2-x),$ поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9.$

При $1<x<2$ получаем $\log_{15}x>\log_{25}x,\ \log_9(2-x)<\log_{15}(2-x),$ поэтому левая часть неравенства отрицательна и не превосходит $\log_{25}9.$

Таким образом, решение исходного неравенства (0; 1) и (1; 2).

Ответ: (0; 1); (1; 2).

35. Задание 15 № 510052. Решите неравенство $\log_{x-1}\sqrt{x+2}\cdot\log_3\left(x^2-2x+1\right)\ge\log_9(10-x).$

Решение.

Преобразуем левую часть при условиях $x>1$ и $x\ne 2$:

$$2\log_{x-1}\sqrt{x+2}\cdot\log_3(x-1)=2\cdot\frac{1}{2}\log_{x-1}(x+2)\log_3(x-1)=\log_3(x+2)=\log_9(x+2)^2.$$

Далее:

$$\log_9(x^2+4x+4)\ge\log_9(10-x)\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+4x+4\ge 10-x,\\ 10-x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+5x-6\ge 0,\\ x<10\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -6,\\ 1\le x<10.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $x>1$ и $x\ne 2$, находим: $1<x<2$ или $2<x<10.$

Ответ: $(1;\ 2)\cup(2;\ 10).$

36. Задание 15 № 510514. Решите неравенство $\dfrac{8\cdot 7^x-4^{x\log_2 7}-11}{(2x-1)^2}\ge 0.$

Решение.

Точка $x=\dfrac{1}{2}$ не является решением неравенства. При $x\ne\dfrac{1}{2}$ получаем:

$$8\cdot 7^x-49^x-11\ge 0.$$

П у с т ь $y=7^x,$ тогда $4-\sqrt{5}\le y\le 4+\sqrt{5}.$ Получаем $4-\sqrt{5}\le 7^x\le 4+\sqrt{5},$ откуда $\log_7(4-\sqrt{5})\le x\le\log_7(4+\sqrt{5}).$

Нужно сравнить границы полученного отрезка с $\dfrac{1}{2}\cdot$ Имеем:

$$4-\sqrt{5}<2<\sqrt{7},\quad 4+\sqrt{5}>6>\sqrt{7}.$$

Следовательно, $\log_7(4-\sqrt{5})<\dfrac{1}{2}<\log_7(4+\sqrt{5}),$ и поэтому решением неравенства являются два промежутка: $\log_7(4-\sqrt{5})\le x<\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{2}<x\le\log_7(4+\sqrt{5}).$

Ответ: $\left[\log_7(4-\sqrt{5});\ \dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};\ \log_7(4+\sqrt{5})\right].$

37. Задание 15 № 484580. Решите неравенство $\log_7((5^{-x^2}-5)(5^{-x^2+16}-1))+\log_7\dfrac{5^{-x^2}-5}{5^{-x^2+16}-1}>\log_7\left(5^{13-x^2}-4\right)^2.$

Решение.

Пусть $t=5^{-x^2}$, $0<t\le 1$, тогда неравенство принимает вид:

$$\log_7((t-5)(5^{16}t-1))+\log_7\frac{t-5}{5^{16}t-1}>\log_7(5^{13}t-4)^2.$$

Очевидно $t-5<0$, поэтому $5^{16}t-1<0$, то есть $0<t<\dfrac{1}{5^{16}}$. Заметим также, что $\dfrac{1}{5^{16}}<\dfrac{4}{5^{13}}$, поэтому больше никаких ограничений на t не возникает. Получаем:

$$\begin{cases}\log_7(t-5)^2>\log_7(5^{13}t-4)^2,\\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|t-5|\ >\ |5^{13}t-4|,\\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5-t>4-5^{13}t,\\ 0<t<\dfrac{1}{5^{16}}\end{cases}\Leftrightarrow 0<t<\frac{1}{5^{16}}.$$

Тогда

$$5^{-x^2}<5^{-16}\Leftrightarrow x^2>16\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>4,\\ x<-4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,\ -4)\cup(4,\ +\infty)$.

38. Задание 15 № 484586. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}(6x^2-12x-9)}{x^2-2x-8}\ge 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство

$$\frac{\log_4(x^4-4x^3+4x^2)+\log_{0,25}\left(6x^2-12x-9\right)}{x^2-2x-8}\ge 0\Leftrightarrow\frac{\log_4(x^2-2x)^2-\log_4(6(x^2-2x)-9)}{(x^2-2x)-8}\ge 0.$$

Сделав замену переменной $t=x^2-2x$, получаем:

$$\frac{\log_4 t^2-\log_4(6t-9)}{t-8}\ge 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{t^2-6t+9}{t-8}\ge 0,\\ t>1,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(t-3)^2}{t-8}\ge 0,\\ t>1,5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=3,\\ t>8.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$x^2-2x=3\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1,\\ x=3;\end{array}\right.$$

$$x^2-2x>8\Leftrightarrow x^2-2x-8>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-2,\\ x>4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,-2)\cup\{-1;3\}\cup(4,+\infty)$.

39. Задание 15 № 484587. Решите неравенство $\dfrac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \geq 0.$

Решение.

$$\frac{\log_{0,5}(8x^2+24x-16)+\log_2(x^4+6x^3+9x^2)}{x^2+3x-10} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\log_2(x^2+3x)^2-\log_2(8(x^2+3x)-16)}{(x^2+3x)-10} \geq 0.$$

Сделав замену переменной $t = x^2+3x$, получаем:

$$\frac{\log_2 t^2-\log_2(8t-16)}{t-10} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t^2-8t+16}{t-10} \geq 0, \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(t-4)^2}{t-10} \geq 0, \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t > 10. \end{array}\right.$$

$$x^2+3x = 4 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -4, \\ x = 1. \end{array}\right.$$

$$x^2+3x > 10 \Leftrightarrow x^2+3x-10 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -5, \\ x > 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty, -5) \cup \{-4, 1\} \cup (2, +\infty)$.

40. Задание 15 № 484584. Решите неравенство $\dfrac{10^x}{2\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \leq \dfrac{(15\cdot 3^x)^x}{9\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)}.$

Решение.

Разделим обе части неравенства на 5^x :

$$\frac{2^{x-1}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \leq \frac{3^{x^2+x-2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)}-2^{(x-1)}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3^{(x-1)(x+2)}-3^{(x-1)\log_3 2}}{\left(\log_2^2(x+1)^2\right)\log_3(x+2)} \geq 0.$$

Решение будем искать при условиях

$$\begin{cases} x+1 \neq 0, \\ (x+1)^2 \neq 1, \\ x+2 > 0, \\ x+2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1, \\ x \neq 0, \\ x > -2. \end{cases}$$

При этих условиях получаем неравенство:

$$\frac{(x-1)(x+2)-(x-1)\log_3 2}{(x+2)-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+2-\log_3 2)}{x+1} \geq 0.$$

Таким образом, множество решений исходного неравенства:

Ответ: $[\log_3 2-2;\ -1) \cup [1;\ +\infty)$.

41. Задание 15 № 484585. Решите неравенство: $\dfrac{14^{1+\lg x}}{7\lg^2(100x)\lg(0,1x)} \geq \dfrac{(4\cdot 2^{\lg(10x)})^{1+\lg x}}{4\lg^2(100x)\lg(0,1x)}.$

Решение.
Преобразуем обе части неравенства:

$$\frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{2(1+\lg x)}\cdot 2^{(1+\lg x)^2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{2^{1+\lg x}\cdot 7^{1+\lg x}}{7(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{(1+\lg x)}\cdot 2^{\lg x^2+3\lg x+2}}{4(\lg x+2)^2(\lg x-1)}.$$

Разделив обе части на $2^{1+\lg x}$ и сократив левую часть на 7, а правую на 4, получим:

$$\frac{7^{\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq \frac{2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \Leftrightarrow \frac{7^{\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2^{\log_2 7\cdot\lg x}-2^{\lg^2 x+3\lg x}}{(\lg x+2)^2(\lg x-1)} \geq 0.$$

Сделаем замену: $y=\lg x,$ тогда получим

$$\frac{2^{y\log_2 7}-2^{y^2+3y}}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0,$$

откуда

$$\frac{y\cdot\log_2 7-(y^2+3y)}{(y+2)^2(y-1)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{y(y-(\log_2 7-3))}{(y+2)^2(y-1)} \leq 0.$$

Решим полученное рациональное неравенство:

$$\left[\begin{array}{l} -\infty<y<-2, \\ -2<y\leq\log_2 7-3, \\ 0\leq y<1. \end{array}\right.$$

Тогда

$$\left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{100}, \\ \dfrac{1}{100}<x\leq 10^{\log_2 7-3}, \\ 1\leq x<10. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{100}\right)\cup\left(\dfrac{1}{100};\ 10^{\log_2 7-3}\right]\cup[1;\ 10).$

42. Задание 15 № 484588. Решите неравенство $7^{-|x-3|}\cdot\log_2(6x-x^2-7)\geq 1$.

Решение.
Покажем, что наибольшее значение левой части неравенства равно 1. Действительно,

$$0<7^{-|x-3|}\leq 7^0=1.$$

В силу тождества $6x-x^2-7=-(x^2-6x+9)+2=2-(x-3)^2$ имеем:

$$\log_2(6x-x^2-7)=\log_2(2-(x-3)^2)\leq\log_2 2=1\ .$$

Поскольку левая часть не больше 1, а правая равна 1, неравенство выполнено тогда и только тогда, когда оба множителя равны 1, откуда

$$\begin{cases} \log_2(2-(x-3)^2)=1, \\ 7^{-|x-3|}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2-(x-3)^2=2, \\ |x-3|=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: 3.

43. Задание 15 № 484595. Решите неравенство $\log_{\sqrt{2x^2-7x+6}}\left(\frac{x}{3}\right)>0.$

Решение.

Решение будем искать при условиях:

$$\begin{cases}2x^2-7x+6>0,\\2x^2-7x+6\neq 1,\\x>0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(2x-3)(x-2)>0,\\(2x-5)(x-1)\neq 0,\\x>0,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1,\\1<x<\frac{3}{2},\\2<x<\frac{5}{2},\\\frac{5}{2}<x<+\infty.\end{array}\right.$$

Рассмотрим исходное неравенство на множестве $(0;\ 1)\cup\left(\frac{5}{2};\ +\infty\right)\cdot$ тогда $2x^2-7x+6>1,$ откуда $\frac{x}{3}>1,$ то есть $3<x<+\infty$.

Рассмотрим исходное неравенство на множестве $\left(1;\ \frac{3}{2}\right)\cup\left(2;\ \frac{5}{2}\right)$, тогда $2x^2-7x+6<1,$ откуда $0<\frac{x}{3}<1$ то есть $1<x<\frac{3}{2}$ или $2<x<\frac{5}{2}.$

Ответ: $\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(2,\frac{5}{2}\right)\cup(3,+\infty)$.