Иррациональные неравенства

1. Задание 15 № 507497. Решите неравенство $\left(2x+1-\dfrac{6}{x}\right)\left(\dfrac{28}{x+2}-2+\left(\sqrt{-3-2x}\right)^2\right)\geq 0.$

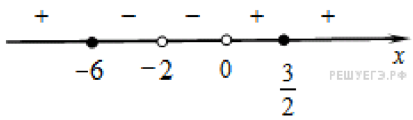
Решение.
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -3-2x\geq 0, \\ \dfrac{2x^2+x-6}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4+(x+2)(-3-2x)}{x+2}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq -\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{(x+2)(2x-3)}{x}\cdot\dfrac{28-2x-4-2x^2-7x-6}{x+2}\geq 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}(-2x^2-9x+18)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x}\cdot(-2)(x+6)\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\geq 0, \\ x\neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-3)^2(x+6)}{x}\leq 0, \\ x\neq -2. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x\leq -\dfrac{3}{2}$, получаем решение: $[-6,\ -2)\cup\left(-2;\ -\dfrac{3}{2}\right].$

Ответ: $[-6,\ -2)\cup\left(-2;\ -\dfrac{3}{2}\right].$

2. Задание 15 № 507572. Решите уравнение $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=4.$

Решение.
Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-4}.$ Получаем: $\sqrt{y^2+4y+4}+\sqrt{y^2-4y+4}=4;\ |y+2|+|y-2|=4.$
Учитывая, что $y\geq 0$ и поэтому $y+2>0,$ получаем:

$$y+2+|y-2|=4;$$
$$|y-2|=2-y.$$

Воспользуемся определением модуля. Получаем:

$$y-2\leq 0;$$
$$0\leq\sqrt{x-4}\leq 2;$$
$$4\leq x\leq 8.$$

Ответ: $[4;\ 8]$

3. Задание 15 № 507577. Решите уравнение $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=2.$

Решение.
Сделаем замену переменной: $y=\sqrt{x-1}.$ Получаем: $\sqrt{y^2+2y+1}+\sqrt{y^2-2y+1}=2\Leftrightarrow |y+1|+|y-1|=2.$
Учитывая, что $y\geq 0$ и поэтому $y+1>0,$ преобразуем уравнение: $y+1+|y-1|=2\Leftrightarrow |y-1|=-y+1.$
Воспользуемся определением модуля. Получаем: $y-1\leq 0\Leftrightarrow\sqrt{x-1}\leq 1\Leftrightarrow 1\leq x\leq 2.$

Ответ: $[1;\ 2].$

4. Задание 15 № 507582. Решите неравенство $\left(x+\dfrac{3}{x}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2 \geq 4\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2.$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x\neq 0, \\ 5-x\geq 0, \\ 5-x\neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x\leq 5, \\ x\neq 0, \\ x\neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-6x+9}=1$, т. е. $|x-3|=1$ и, значит, $x=2$ или $x=4$. Тем самым, $x=2$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-6x+9}\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-6x+9}-1}{\sqrt{5-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\dfrac{3}{x}\geq 4$, откуда $\dfrac{(x-1)(x-3)}{x}\geq 0$. Решим это неравенство, получим: $0<x\leq 1$ или $x\geq 3$.

Учитывая ограничения, получаем множество решений исходного неравенства: $(0;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ 4)\cup(4;\ 5]$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup\{2\}\cup[3;\ 4)\cup(4;\ 5]$.

5. Задание 15 № 507593. Решите неравенство

$$\left(x+\frac{4}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2 \geq 5\left(\frac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2.$$

Решение.

Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x\neq 0, \\ 6-x\geq 0, \\ 6-x\neq 1, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} x\leq 6, \\ x\neq 0, \\ x\neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2-8x+16}=1$, т. е. $|x-4|=1$ и, значит, $x=3$ или $x=5$.
Значит, $x=3$ — решение задачи.

2) $\sqrt{x^2-8x+16}\neq 1$. Разделив обе части неравенства на $\left(\dfrac{\sqrt{x^2-8x+16}-1}{\sqrt{6-x}-1}\right)^2$, получим: $x+\dfrac{4}{x}\geq 5$, откуда

$$\frac{(x-1)(x-4)}{x}\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x\leq 1, \\ x\geq 4. \end{array}\right.$$

С учетом ограничений получаем, что множество решений исходного неравенства: $(0;\ 1]\cup\{3\}\cup[4;\ 5)\cup(5;\ 6]$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup\{3\}\cup[4;\ 5)\cup(5;\ 6]$.

6. Задание 15 № 507612. Решите неравенство $\sqrt{7-x}<\dfrac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.
Имеем:

$$\sqrt{7-x}<\frac{\sqrt{x^3-6x^2+14x-7}}{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{7-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-6x^2+14x-7},\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)(7-x)<x^3-6x^2+14x-7,\\ 1<x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-5x^2+6x>0,\\ 1<x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x-3)>0,\\ 1<x\le 7\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 3<x\le 7.\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 2)\cup(3;\ 7]$.

7. Задание 15 № 507792. Решите неравенство $\dfrac{1}{6x^2-5x}\ge\dfrac{1}{\sqrt{6x^2-5x+1}-1}$.

Решение.
Пусть $a=\sqrt{6x^2-5x+1}$. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{a^2-1}\ge\dfrac{1}{a-1},\\ a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a}{a^2-1}\le 0,\\ a\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\le a<1.$$

Следовательно:

$$\begin{cases}6x^2-5x+1<1,\\ 6x^2-5x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(6x-5)<0,\\ (2x-1)(3x-1)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\le\dfrac{1}{3},\\ \dfrac{1}{2}\le x<\dfrac{5}{6}.\end{array}\right.$$

Таким образом, решением исходного неравенства является множество $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{6}\right)$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ \dfrac{5}{6}\right)$.

8. Задание 15 № 507833. Решите неравенство $\sqrt{5-x}<\dfrac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}$.

Решение.
Имеем:

$$\sqrt{5-x}<\frac{\sqrt{x^3-7x^2+14x-5}}{\sqrt{x-1}}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{5-x}\cdot\sqrt{x-1}<\sqrt{x^3-7x^2+14x-5},\\ x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x-1)\cdot(5-x)<x^3-7x^2+14x-5,\\ 1<x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-6x^2+8x>0,\\ 1<x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x(x-2)(x-4)>0,\\ 1<x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<x<2,\\ 4<x\le 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(1;\ 2)\cup(4;\ 5]$.

9. Задание 15 № 507894. Решите неравенство $\dfrac{\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+x}}{x^2+x-1}\le 0$.

Решение.
Перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases}x^2+x\ge 0,\\ x^2-2x+1\ge 0,\\ \dfrac{(x^2-2x+1)-(x^2+x)}{x^2+x-1}\le 0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+1)\ge 0,\\ (x-1)^2\ge 0,\\ \dfrac{3x-1}{x^2+x-1}\ge 0,\end{cases}$$

Из первого неравенства получаем $x\le -1$ или $x\ge 0$.
Второе неравенство выполняется при всех x.

Из третьего неравенства получаем $\dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}<x\le\dfrac{1}{3}$ или $x>\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Таким образом, множество решений исходного неравенства: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right]\cup\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ +\infty\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2};\ -1\right]\cup\left[0;\ \dfrac{1}{3}\right]\cup\left(\dfrac{\sqrt{5}-1}{2};\ +\infty\right)$.

10. Задание 15 № 508431. Решите неравенство: $(x^2-x-6)\cdot\sqrt{8-x}\le 0$.

Решение.
Пусть $x<8$. Тогда $\sqrt{8-x}>0$, и неравенство равносильно неравенству $x^2-x-6\le 0$. Решим систему:

$$\begin{cases}x<8,\\ x^2-x-6\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<8,\\ -2\le x\le 3\end{cases}\Leftrightarrow -2\le x\le 3.$$

Заметим, теперь, что $x=8$, также является решением.

Ответ: $[-2;\ 3]\cup\{8\}$.

11. Задание 15 № 508439. Решите неравенство: $\sqrt{x^2+22} \le 5.$

Решение.

Имеем:

$$0 < x^2+22 \le 25 \Leftrightarrow x^2 \le 3 \Leftrightarrow -\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}.$$

Ответ: $[-\sqrt{3};\ \sqrt{3}].$

12. Задание 15 № 508441. Решите неравенство: $\sqrt{x^2+34} \ge 6.$

Решение.

Имеем:

$$x^2+34 \ge 36 \Leftrightarrow x^2 \ge 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -\sqrt{2}, \\ x \ge \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2};\ +\infty).$

13. Задание 15 № 508446. Решите неравенство: $\left(\dfrac{x+5}{4+x} - \dfrac{1}{x^2+9x+20}\right)\sqrt{-7x-x^2} \ge 0.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(x+5)^2-1}{(x+5)(x+4)}\sqrt{-x(x+7)} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x+4)\sqrt{-x(x+7)}}{(x+5)(x+4)} \ge 0.$$

Неравенство верно в точках 0 и −7. При $-x(x+7) > 0$ то есть при $-7 < x < 0$ выражение, стоящее под знаком корня положительно и на него можно разделить. Имеем:

$$\frac{(x+6)(x+4)}{(x+4)(x+5)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -6, \\ -5 < x < -4, \\ x > -4. \end{array}\right.$$

С учетом условия $-7 < x < 0$ получаем множество решений неравенства: $(-7;\ -6] \cup (-5;\ -4) \cup (-4;\ 0)$. Добавляя точки 0 и −7, получаем ответ.

Ответ: $[-7;\ -6] \cup (-5;\ -4) \cup (-4;\ 0].$

14. Задание 15 № 512484. Решите неравенство $\dfrac{x}{x^2+3} \le (1:4)x^{-1}.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{x^2+3} \le \frac{1}{4x} \Leftrightarrow \frac{4x^2-x^2-3}{(x^2+3)4x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+3)x} \le 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение x^2+3 положительно, получаем

$$\frac{(x-1)(x+1)}{x} \le 0,$$

откуда

$$x \le -1,\ 0 < x \le 1.$$

Ответ: $(-\infty; -1], (0; 1].$

15. Задание 15 № 485951. Решите неравенство $\left(\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{x-4}{3-x}\right)\sqrt{6x-x^2}\le 0.$

Решение.

Если $6x-x^2=0$, то $x=0$ или $x=6$. При этих значениях x выражение $\dfrac{1}{x^2-7x+12}+\dfrac{x-4}{3-x}$ имеет смысл, поэтому $x=0$ и $x=6$ являются решениями неравенства.

Если $6x-x^2>0$, то $0<x<6$, при этом $\sqrt{6x-x^2}>0$. Тогда

$$\frac{1}{x^2-7x+12}+\frac{x-4}{3-x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{(x-4)(x-3)}+\frac{x-4}{3-x}\le 0 \Leftrightarrow \frac{1-(x-4)^2}{(x-4)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)(x-3)}{(x-4)(x-3)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ 3<x<4, \\ x\ge 5 \end{array}\right.$$

Пересекая полученное решение с множеством $(0;\ 6)$, и учитывая, что точки 0 и 6 также входят в являются решениями неравенства, получим множество решений исходного неравенства: $[0;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup[5;\ 6]$.

Ответ: $[0;\ 3)\cup(3;\ 4)\cup[5;\ 6]$.

16. Задание 15 № 507175. Решите неравенство $\left(2x-3-\dfrac{5}{x}\right)\left(\dfrac{14}{x+1}+2+(\sqrt{-1-2x})^2\right)\ge 0.$

Решение.

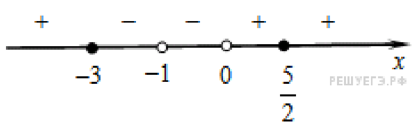
Данное неравенство эквивалентно системе неравенств:

$$\begin{cases} -1-2x\ge 0, \\ \dfrac{2x^2-3x-5}{x}\cdot\dfrac{14+2x+2+(x+1)(-1-2x)}{x+1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{(x+1)(2x-5)}{x}\cdot\dfrac{16+2x-x-2x^2-1-2x}{x+1}\ge 0. \end{cases}$$

Решим второе неравенство методом интервалов:

$$\begin{cases} \dfrac{2x-5}{x}(-2x^2-x+15)\ge 0, \\ x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x-5}{x}\cdot(-2)(x+3)\left(x-\dfrac{5}{2}\right)\ge 0, \\ x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-5)^2(x+3)}{x}\le 0, \\ x\ne -1. \end{cases}$$

Отметим на прямой точки как показано на рисунке:



Учитывая неравенство $x\le -\dfrac{1}{2}$, получаем решение: $[-3,\ -1)\cup\left(-1;\ -\dfrac{1}{2}\right]$.

Ответ: $[-3;\ -1)\cup\left(-1;\ -\dfrac{1}{2}\right]$.