Показательные неравенства

1. Задание 15 № 508210. Решите неравенство: $6^x+\left(\frac{1}{6}\right)^x>2.$

Решение.
Последовательно получаем:

$$6^x+\frac{1}{6^x}>2\Leftrightarrow 6^{2x}+1>2\cdot 6^x\Leftrightarrow (6^x-1)^2>0\Leftrightarrow 6^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$

2. Задание 15 № 508211. Решите неравенство: $2^{x^2}\leq 4\cdot 2^x.$
Решение.
Последовательно получаем:

$$2^{x^2}\leq 4\cdot 2^x\Leftrightarrow 2^{x^2}\leq 2^{x+2}\Leftrightarrow x^2\leq x+2\Leftrightarrow x^2-x-2\leq 0\Leftrightarrow -1\leq x\leq 2.$$

Ответ: $[-1;\ 2].$

3. Задание 15 № 508234. Решите неравенство $25^x+5^{x+1}+5^{1-x}+\frac{1}{25^x}\leq 12.$
Решение.
Перепишем неравенство в виде $\left(25^x+\frac{1}{25^x}\right)+5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)\leq 12$ и положим $5^x+\frac{1}{5^x}=t.$

Тогда $25^x+\frac{1}{25^x}+2=t^2$ и, значит, $25^x+\frac{1}{25^x}=t^2-2.$

Далее имеем: $t^2+5t-14\leq 0\Leftrightarrow -7\leq t\leq 2,$ откуда $-7\leq 5^x+\frac{1}{5^x}\leq 2\Leftrightarrow 5^x=1\Leftrightarrow\ x=0.$

Ответ: $\{0\}.$

4. Задание 15 № 508353. Решите неравенство: $5^x+\left(\frac{1}{5}\right)^x>2.$

Решение.
Последовательно получаем:

$$5^x+\frac{1}{5^x}>2\Leftrightarrow 5^{2x}+1>2\cdot 5^x\Leftrightarrow (5^x-1)^2>0\Leftrightarrow 5^x\neq 1\Leftrightarrow x\neq 0.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty).$

5. Задание 15 № 508354. Решите неравенство: $2^{x^2}\leq 64\cdot 2^x.$
Решение.
Последовательно получаем:

$$2^{x^2}\leq 64\cdot 2^x\Leftrightarrow 2^{x^2}\leq 2^{x+6}\Leftrightarrow x^2\leq x+6\Leftrightarrow x^2-x-6\leq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq 3.$$

Ответ: $[-2;\ 3].$

6. Задание 15 № 508359. Решите неравенство: $2^x+6\cdot 2^{-x}\leq 7.$
Решение.
Пусть $2^x=y.$ Поскольку $y>0,$ на него можно умножить обе части неравенства. Получим:

$$y+\frac{6}{y}\leq 7\Leftrightarrow y^2-7y+6\leq 0\Leftrightarrow (y-1)(y-6)\leq 0\Leftrightarrow 1\leq y\leq 6.$$

Откуда $0\leq x\leq \log_2 6.$

Ответ: $[0;\ \log_2 6].$

7. Задание 15 № 508363. Решите неравенство: $3^x+10\cdot 3^{-x}\le 11$.

Решение.

Имеем:

$$3^x+10\cdot 3^{-x}\le 11\Leftrightarrow 9^x-11\cdot 3^x+10\le 0\Leftrightarrow (3^x-1)(3^x-10)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le \log_3 10$$

Ответ: $[0;\ \log_3 10]$.

8. Задание 15 № 508366. Решите неравенство: $2^{2x-1}-7\cdot 2^{x-1}+5\le 0$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-7t+10\le 0$, откуда $2\le t\le 5$. Возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$2\le 2^x\le 5\Leftrightarrow 1\le x\le \log_2 5.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 5]$.

9. Задание 15 № 508368. Решите неравенство: $5\cdot 2^{2x+2}-21\cdot 2^{x-1}+1\le 0$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $40t^2-21t+2\le 0$, откуда $\frac{1}{8}\le t\le \frac{2}{5}$, возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\frac{1}{8}\le 2^x\le \frac{2}{5}\Leftrightarrow -3\le x\le -\log_2\frac{5}{2}.$$

Ответ: $\left[-3;\ -\log_2\frac{5}{2}\right]$.

10. Задание 15 № 508370. Решите неравенство: $4^x-29\cdot 2^x+168\le 0$.

Решение.

Имеем:

$$4^x-29\cdot 2^x+168\le 0\Leftrightarrow (2^x-8)(2^x-21)\le 0\Leftrightarrow 8\le 2^x\le 21\Leftrightarrow 3\le x\le \log_2 21.$$

Ответ: $[3;\ \log_2 21]$.

11. Задание 15 № 508372. Решите неравенство: $4^x-7\cdot 2^x+10\le 0$.

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-7t+10\le 0$, откуда $2\le t\le 5$, возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$2\le 2^x\le 5\Leftrightarrow 1\le x\le \log_2 5.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 5]$.

12. Задание 15 № 508374. Решите неравенство: $9^x-31\cdot 3^x+108\le 0$.

Решение.

Решим первое неравенство системы: $9^x-31\cdot 3^x+108\le 0$. Пусть $t=3^x$, тогда

$$t^2-31t+108\le 0\Leftrightarrow (t-4)(t-27)\le 0\Leftrightarrow 4\le t\le 27,$$

откуда

$$4\le 3^x\le 27\Leftrightarrow \log_3 4\le x\le 3.$$

Ответ: $[\log_3 4;\ 3]$.

13. Задание 15 № 508376. Решите неравенство: $2^x+5\cdot 2^{2-x}\le 12.$

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t^2-12t+20\le 0\Leftrightarrow 2\le t\le 10;$$

$$2\le 2^x\le 10\Leftrightarrow 1\le x\le \log_2 10.$$

Ответ: $[1;\ \log_2 10]$.

14. Задание 15 № 508378. Решите неравенство: $2^x+80\cdot 2^{4-x}\le 261.$

Решение.

Пусть $t=2^x$, тогда неравенство примет вид: $t^2-261t+1280\le 0$, откуда $5\le t\le 256$ возвращаясь к исходной переменной получаем:

$$5\le 2^x\le 256\Leftrightarrow \log_2 5\le x\le 8.$$

Ответ: $[\log_2 5;\ 8]$.

15. Задание 15 № 508436. Решите неравенство: $2^{2x+4}-16\cdot 2^{x+3}-2^{x+1}+16\le 0.$

Решение.

Имеем:

$$2^{2x+4}-16\cdot 2^{x+3}-2^{x+1}+16\le 0\Leftrightarrow 2^4\cdot 4^x-2^7\cdot 2^x-2\cdot 2^x+2^4\le 0\Leftrightarrow 2^3\cdot 4^x-(2^6+1)2^x+2^3\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^3\cdot 2^x-1)(2^x-2^3)\le 0\Leftrightarrow 2^{-3}\le 2^x\le 2^3\Leftrightarrow -3\le x\le 3.$$

Ответ: $[-3;\ 3]$.

16. Задание 15 № 508437. Решите неравенство: $3^{-2x+4}-81\cdot 3^{-x+3}-3^{-x+1}+81\le 0.$

Решение.

Решим первое неравенство:

$$3^{-2x+4}-81\cdot 3^{-x+3}-3^{-x+1}+81\le 0\Leftrightarrow 3^4\cdot 9^{-x}-3^7\cdot 3^{-x}-3\cdot 3^{-x}+3^4\le 0\Leftrightarrow 3^3\cdot 9^{-x}-(3^6+1)3^{-x}+3^3\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (3^3\cdot 3^{-x}-1)(3^{-x}-3^3)\le 0\Leftrightarrow 3^{-3}\le 3^{-x}\le 3^3\Leftrightarrow -3\le -x\le 3\Leftrightarrow -3\le x\le 3.$$

Ответ: $[-3;\ 3]$.

17. Задание 15 № 508450. $16^{x+\frac{1}{4}}-9\cdot 4^{x-\frac{1}{2}}+1\ge 0.$

Решение.

Пусть $t=4^x$:

$$2t^2-\frac{9}{2}t+1\ge 0\Leftrightarrow 4t^2-9t+2\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t\le \dfrac{1}{4},\\ t\ge 2.\end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l} 4^x\le \dfrac{1}{4},\\ 4^x\ge 2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1,\\ x\ge \dfrac{1}{2}.\end{array}\right.$$

Решение первого неравенства: $(-\infty;\ -1]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup\left[\dfrac{1}{2};\ +\infty\right)$.

18. Задание 15 № 508453. Решите неравенство: $4^x+4^{-x}\geq\frac{10}{3}.$

Решение.

Пусть $y=4^x,\ y>0$ тогда:

$$y+\frac{1}{y}\geq\frac{10}{3}\Leftrightarrow 3y^2-10y+3\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\leq\frac{1}{3},\\ y\geq 3.\end{array}\right.$$

Откуда $x\leq-\log_4 3$ или $x\geq\log_4 3.$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_4 3]\cup[\log_4 3;\ +\infty).$

19. Задание 15 № 508455. Решите неравенство: $5^x+5^{-x}\geq\frac{17}{4}.$

Решение.

Пусть $y=5^x>0$ тогда:

$$y+\frac{1}{y}\geq\frac{17}{4}\underset{y>0}{\Leftrightarrow}4y^2-17y+4\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\leq\frac{1}{4},\\ y\geq 4.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной получаем: $x\leq-\log_5 4$ или $x\geq\log_5 4.$

Ответ: $(-\infty;\ -\log_5 4]\cup[\log_5 4;\ +\infty).$

20. Задание 15 № 508457. Решите неравенство: $25^x-20^x-2\cdot 16^x\leq 0.$

Решение.

Сделаем замену $z=\left(\frac{5}{4}\right)^x$. Получаем: $z^2-z-2\leq 0\Leftrightarrow -1\leq z\leq 2.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{5}{4}\right)^x\leq 2\Leftrightarrow x\leq\log_{1,25}2.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{1,25}2].$

21. Задание 15 № 508463. Решите неравенство: $4^{x+2}-257\cdot 2^x+16\leq 0.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^x$, имеем:

$$16y^2-257y+16\leq 0\Leftrightarrow(y-16)(16y-1)\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{16}\leq y\leq 16.$$

Отсюда получаем решение неравенства:

$$\frac{1}{16}\leq 2^x\leq 16\Leftrightarrow -4\leq x\leq 4.$$

Ответ: $[-4;\ 4].$

22. Задание 15 № 508465. Решите неравенство: $4^x\leq 9\cdot 2^x+22.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде $(2^x)^2-9\cdot 2^x-22\leq 0.$

Сделав замену $t=2^x$, получим квадратное неравенство:

$$t^2-9t-22\leq 0\Leftrightarrow(t+2)(t-11)\leq 0\Leftrightarrow -2\leq t\leq 11.$$

Значит, $-2\leq 2^x\leq 11$, откуда $x\leq\log_2 11.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_2 11].$

23. Задание 15 № 508467. Решите неравенство: $4^{x+1}-33\cdot 2^x+8\leq 0.$

Решение.

Сделав замену $y=2^x$, имеем:

$$4y^2-33y+8\leq 0\Leftrightarrow (y-8)(4y-1)\leq 0\Leftrightarrow \frac{1}{4}\leq y\leq 8.$$

Откуда получаем решение неравенства:

$$\frac{1}{4}\leq 2^x\leq 8\Leftrightarrow -2\leq x\leq 3.$$

Ответ: $[-2;\ 3]$.

24. Задание 15 № 508477. Решите неравенство: $2^x+32\cdot 2^{-x}\geq 33.$

Решение.

Пусть $y=2^x$, тогда:

$$y+\frac{32}{y}\geq 33\Leftrightarrow \frac{y^2-33y+32}{y}\geq 0\Leftrightarrow \frac{(y-1)(y-32)}{y}\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<y\leq 1,\\ y\geq 32.\end{array}\right.$$

Вернемся к исходной переменной. Имеем:

$$\left[\begin{array}{l}0<2^x\leq 1,\\ 2^x\geq 32\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 0,\\ x\geq 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[5;\ +\infty)$.

25. Задание 15 № 508480. Решите неравенство: $\frac{1}{3^{x-1}}+\frac{1}{3^x}+\frac{1}{3^{x+1}}<52.$

Решение.

Вынесем общий множитель за скобку:

$$\frac{1}{3^{x+1}}(9+3+1)<52\Leftrightarrow \frac{13}{3^{x+1}}<52\Leftrightarrow 3^{x+1}>\frac{1}{4}\Leftrightarrow x+1>\log_3\frac{1}{4}\Leftrightarrow x>-1-\log_3 4.$$

Ответ: $(-1-\log_3 4;\ +\infty)$.

26. Задание 15 № 508481. Решите неравенство: $36^{x-\frac{1}{2}}-7\cdot 6^{x-1}+1\geq 0.$

Решение.

Пусть $t=6^x$, тогда имеем:

$$\frac{1}{6}t^2-\frac{7}{6}t+1\geq 0\Leftrightarrow t^2-7t+6\geq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t\leq 1,\\ t\geq 6.\end{array}\right.$$

Откуда

$$\left[\begin{array}{l}6^x\leq 1,\\ 6^x\geq 6\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\leq 0,\\ x\geq 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$.

27. Задание 15 № 508484. Решите неравенство: $6^x-4\cdot 3^x-2^x+4\le 0.$

Решение.

Заметим, что

$$6^x-4\cdot 3^x-2^x+4=3^x\cdot 2^x-4\cdot 3^x-(2^x-4)=3^x(2^x-4)-(2^x-4)=(3^x-1)(2^x-4).$$

Поэтому

$$6^x-4\cdot 3^x-2^x+4\le 0\Leftrightarrow (3^x-1)(2^x-4)\le 0\Leftrightarrow (3^x-3^0)(2^x-2^2)\le 0\Leftrightarrow x(x-2)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 2.$$

Ответ: $[0;\ 2]$.

28. Задание 15 № 508486. Решите неравенство: $20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\le 0.$

Решение.

Заметим, что

$$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64=5^x\cdot 4^x-64\cdot 5^x-(4^x-64)=5^x(4^x-64)-(4^x-64)=(5^x-1)(4^x-64).$$

Поэтому

$$20^x-64\cdot 5^x-4^x+64\le 0\Leftrightarrow (5^x-1)(4^x-64)\le 0\Leftrightarrow (5^x-5^0)(4^x-4^3)\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x\cdot 3(x-3)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 3.$$

Ответ: $[0;\ 3]$.

29. Задание 15 № 508487. Решите неравенство: $3\cdot 9^{-x}-28\cdot 3^{-x}+9\le 0.$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^{-x}$.

$$3y^2-28y+9\le 0\Leftrightarrow (3y-1)(y-9)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le y\le 9.$$

Тогда $\frac{1}{3}\le 3^{-x}\le 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-2\le x\le 1.$

Ответ: $[-2;\ 1]$.

30. Задание 15 № 508489. Решите неравенство: $3\cdot 9^x-28\cdot 3^x+9\le 0.$

Решение.

Сделаем замену $y=3^x$.

$$3y^2-28y+9\le 0\Leftrightarrow (3y-1)(y-9)\le 0\Leftrightarrow \frac{1}{3}\le y\le 9.$$

Тогда $\frac{1}{3}\le 3^x\le 9$, откуда находим решение первого неравенства системы: $-1\le x\le 2.$

Ответ: $[-1;\ 2]$.

31. Задание 15 № 508491. Решите неравенство: $5^{3x-1}-5^{3x+1}\le -72.$

Решение.

Имеем:

$$5^{3x-1}(1-25)\le -72\Leftrightarrow 5^{3x-1}\ge 3\Leftrightarrow 3x-1\ge \log_5 3\Leftrightarrow x\ge \frac{\log_5 3+1}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3+1}{3};\ +\infty\right)$.

32. Задание 15 № 508493. Решите неравенство: $3^{4x-1}+3^{4x+1}\geq 80.$

Решение.

Имеем:

$$3^{4x-1}(1+9)\geq 80\Leftrightarrow 3^{4x-1}\geq 8\Leftrightarrow 4x-1\geq \log_3 8\Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}(\log_3 8+1).$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4}(\log_3 8+1);\ +\infty\right)$.

33. Задание 15 № 508495. Решите неравенство: $5^{3x-1}-5^{3x+1}\leq -72.$

Решение.

Вынесем общий множитель за скобку:

$$5^{3x-1}(1-25)\leq -72\Leftrightarrow 5^{3x-1}\geq 3\Leftrightarrow 3x-1\geq \log_5 3\Leftrightarrow x\geq \frac{\log_5 3+1}{3}.$$

Ответ: $\left[\frac{\log_5 3+1}{3};\ +\infty\right)$

34. Задание 15 № 508501. Решите неравенство: $11^{x+1}+3\cdot 11^{-x}\leq 34.$

Решение.

Сделаем замену $y=11^x$:

$$11y+\frac{3}{y}\leq 34\Leftrightarrow \frac{11y^2-34y+3}{y}\leq 0\Leftrightarrow \frac{(y-3)(11y-1)}{y}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0,\\ \frac{1}{11}\leq y\leq 3.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $11^x>0$, получаем: $\frac{1}{11}\leq 11^x\leq 3,$ откуда множество решение неравенства системы: $[-1;\ \log_{11}3]$.

Ответ: $[-1;\ \log_{11}3]$.

35. Задание 15 № 508503. Решите неравенство: $5^{x+2}+2\cdot 5^{-x}\leq 51.$

Решение.

Сделаем замену $y=5^x$:

$$25y+\frac{2}{y}\leq 51\Leftrightarrow \frac{25y^2-51y+2}{y}\leq 0\Leftrightarrow \frac{(y-2)(25y-1)}{y}\leq 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0,\\ \frac{1}{25}\leq y\leq 2.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $5^x>0$, получаем: $\frac{1}{25}\leq 5^x\leq 2,$ откуда получаем множество решений неравенства: $[-2;\ \log_5 2]$.

Ответ: $[-2;\ \log_5 2]$.

36. Задание 15 № 508509. Решите неравенство: $2^{x^2}+9\cdot 2^{1-x^2}\geq 19.$

Решение.

Пусть $2^{x^2}=t\geq 1.$ тогда данное неравенство принимает вид $t+\dfrac{18}{t}-19\geq 0.$ Учитывая условие $t\geq 1,$ получаем:

$$\begin{cases} t^2-19t+18\geq 0, \\ t\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t\geq 18. \end{array}\right.$$

Имеем:

1) $2^{x^2}=1 \Leftrightarrow x=0.$

2) $2^{x^2}\geq 18 \Leftrightarrow x^2\geq \log_2 18 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{1+2\log_2 3}, \\ x\geq \sqrt{1+2\log_2 3}. \end{array}\right.$

Множество решения неравенства: $(-\infty;\ -\sqrt{1+2\log_2 3}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{1+2\log_2 3};\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty;\ -\sqrt{1+2\log_2 3}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{1+2\log_2 3};\ +\infty).$

37. Задание 15 № 508511. Решите неравенство: $3^{x^2}+2\cdot 3^{1-x^2}\geq 7.$

Решение.

Пусть $3^{x^2}=t\geq 1(*)$, тогда данное неравенство принимает вид $t+\dfrac{6}{t}-7\geq 0.$

Учитывая условие $(*)$, получаем

$$\begin{cases} t^2-7t+6\geq 0, \\ t\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t\geq 6. \end{array}\right.$$

Далее имеем:

1) $3^{x^2}=1 \Leftrightarrow x=0.$

2) $3^{x^2}\geq 6 \Leftrightarrow x^2\geq \log_3 6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\leq -\sqrt{1+\log_3 2}, \\ x\geq \sqrt{1+\log_3 2}. \end{array}\right.$

Решения неравенства: $\left(-\infty, -\sqrt{1+\log_3 2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{1+\log_3 2}, +\infty\right).$

Ответ: $\left(-\infty, -\sqrt{1+\log_3 2}\right]\cup\{0\}\cup\left[\sqrt{1+\log_3 2}, +\infty\right).$

38. Задание 15 № 508519. Решите неравенство: $19\cdot 4^x+4^{-x}\leq 20.$

Решение.

Пусть $t=4^x$, тогда имеем:

$$19t+\frac{1}{t}-20\geq 0\underset{t>0}{\Leftrightarrow}19t^2-20t+1\leq 0\Leftrightarrow \frac{1}{19}\leq t\leq 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{1}{19}\leq 4^x\leq 1\Leftrightarrow \log_4\frac{1}{19}\leq x\leq 0\Leftrightarrow -\log_4 19\leq x\leq 0.$$

Ответ: $[-\log_4 19;\ 0].$

39. Задание 15 № 508523. Решите неравенство: $\log_{6x^2+5x}\left(2x^2-3x+1\right)\geq 0.$

Решение.

Рассмотрим два случая.

Первый случай: $0<6x^2+5x<1.$ Тогда имеем систему

$$\begin{cases}6x^2+5x>0,\\ 6x^2+5x<1,\\ 2x^2-3x+1>0,\\ 2x^2-3x+1\leq 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(6x+5)>0,\\ (x+1)(6x-1)<0,\\ (x-1)(2x-1)>0,\\ x(2x-3)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<\frac{1}{6}.$$

Второй случай: $6x^2+5x>1.$ Тогда имеем систему:

$$\begin{cases}6x^2+5x>1,\\ 2x^2-3x+1\geq 1.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(6x-1)>0,\\ x(2x-3)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1,\\ x\geq\dfrac{3}{2}.\end{array}\right.$$

Множество решений неравенства: $(-\infty;\ -1)\cup\left(0;\ \frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{3}{2};\ +\infty\right).$

Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup\left(0;\ \frac{1}{6}\right)\cup\left[\frac{3}{2};\ +\infty\right).$

40. Задание 15 № 508525. Решите неравенство: $9^x-3^{x+4}\leq 82.$

Решение.

Сделаем замену $y=3^x$:

$$y^2-81y\leq 82\Leftrightarrow y^2-81y-82\leq 0\Leftrightarrow(y-82)(y+1)\leq 0\Leftrightarrow -1\leq y\leq 82.$$

Тогда $-1\leq 3^x\leq 82$, откуда находим решение неравенства: $x\leq\log_3 82.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 82].$

41. Задание 15 № 508528. Решите неравенство: $9^x-28\leq 3^{x+3}.$

Решение.

Решим первое неравенство системы. Сделаем замену $y=3^x$:

$$y^2-28\leq 27y\Leftrightarrow y^2-27y-28\leq 0\Leftrightarrow(y-28)(y+1)\leq 0\Leftrightarrow -1\leq y\leq 28.$$

Тогда $-1\leq 3^x\leq 28,$ откуда находим решение первого неравенства системы: $x\leq\log_3 28.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 28].$

42. Задание 15 № 508543. Решите неравенство: $9^{x+\frac{1}{2}}-28\cdot 3^{x-1}+1\leq 0.$

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда имеем:

$$9t^2-28t+3\leq 0\Leftrightarrow(9t-1)(t-3)\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{9}\leq t\leq 3.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\frac{1}{9}\leq 3^x\leq 3\Leftrightarrow 3^{-2}\leq 3^x\leq 3\Leftrightarrow -2\leq x\leq 1.$$

Ответ: $[-2;\ 1].$

43. Задание 15 № 508545. Решите неравенство: $2^x+\dfrac{80}{2^x}\ge 21.$

Решение.

Заметим, что $2^x>0$ при всех значениях переменной, поэтому первое неравенство можно умножить на 2^x, не меняя его знака, откуда имеем:

$$4^x+80\ge 21\cdot 2^x \Leftrightarrow 4^x-21\cdot 2^x+80\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x\ge 16,\\ 2^x\le 5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le \log_2 5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ \log_2 5]\cup[4;\ +\infty).$

44. Задание 15 № 508548. Решите неравенство: $25^{x^2-2x+10}-0,2^{2x^2-4x-80}\le 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$25^{x^2-2x+10}-0,2^{2x^2-4x-80}\le 0\Leftrightarrow 5^{2x^2-4x+20}\le 5^{-2x^2+4x+80}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+20\le -2x^2+4x+80\Leftrightarrow x^2-2x-15\le 0\Leftrightarrow -3\le x\le 5.$$

Ответ: $[-3;\ 5].$

45. Задание 15 № 508549. Решите неравенство: $64^{x^2-3x+20}-0,125^{2x^2-6x-200}\le 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$64^{x^2-3x+20}-0,125^{2x^2-6x-200}\le 0\Leftrightarrow 8^{2x^2-6x+40}\le 8^{-2x^2+6x+200}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2-6x+40\le -2x^2+6x+200\Leftrightarrow x^2-3x-40\le 0\Leftrightarrow -5\le x\le 8.$$

Ответ: $[-5;\ 8].$

46. Задание 15 № 508552. Решите неравенство: $4^{x^2+x-3}-0,5^{2x^2-6x-2}\le 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$4^{x^2+x-3}-0,5^{2x^2-6x-2}\le 0\Leftrightarrow 2^{2x^2+2x-6}\le 2^{-2x^2+6x+2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2x^2+2x-6\le -2x^2+6x+2\Leftrightarrow x^2-x-2\le 0\Leftrightarrow -1\le x\le 2.$$

Ответ: $[-1;\ 2].$

47. Задание 15 № 508554. Решите неравенство: $25^x-5\cdot 10^x-6\cdot 4^x\le 0.$

Решение.

Разделим обе части на 4^x:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-5\left(\frac{5}{2}\right)^{x}-6\le 0.$$

Сделаем замену $z=\left(\dfrac{5}{2}\right)^x$. Получаем: $z^2-5z-6\le 0\Leftrightarrow -1\le z\le 6.$

Отсюда находим $\left(\dfrac{5}{2}\right)^x\le 6\Leftrightarrow x\le \log_{2,5}6.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{2,5}6].$

48. Задание 15 № 508555. Решите неравенство: $2\cdot 25^x-5^{x+1}+2\le 0.$

Решение.

Положим $t=5^x$. Тогда неравенство принимает вид $2t^2-5t+2\le 0,$ откуда $\frac{1}{2}\le t\le 2.$ Таким образом, $2^{-1}\le 5^x\le 2\Leftrightarrow -\log_5 2\le x\le \log_5 2.$

Ответ: $[-\log_5 2;\ \log_5 2].$

49. Задание 15 № 508557. Решите неравенство: $2\cdot 3^{x+2}+27\cdot 3^{-x}\le 87.$

Решение.

Сделаем замену $y=3^x$.

$$18y+\frac{27}{y}\le 87\Leftrightarrow \frac{18y^2-87y+27}{y}\le 0\Leftrightarrow \frac{3(2y-9)(3y-1)}{y}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y<0, \\ \frac{1}{3}\le y\le \frac{9}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $3^x>0$, получаем: $\frac{1}{3}\le 3^x\le \frac{9}{2}$, откуда находим решение неравенства: $-1\le x\le 2-\log_3 2.$

Ответ: $[-1;\ 2-\log_3 2].$

50. Задание 15 № 508559. Решите неравенство: $\frac{320-4^{-x-1}}{128-2^{-x}}\ge 2,5.$

Решение.

Сделаем замену $y=2^{-x}$.

$$\frac{320-0,25y^2}{128-y}\ge 2,5\Leftrightarrow \frac{-0,25y^2+2,5y}{128-y}\ge 0\Leftrightarrow \frac{0,25y(y-10)}{128-y}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le y\le 10 \\ y>128. \end{array}\right.$$

Тогда $0\le 2^{-x}\le 10$ или $2^{-x}>128$, откуда находим множество решений неравенства: $(-\infty,\ -7)\cup[-\log_2 10,\ +\infty).$

Ответ: $(-\infty,\ -7)\cup[-\log_2 10,\ +\infty).$

51. Задание 15 № 508564. Решите неравенство: $9^x-2\cdot 6^x-3\cdot 4^x\le 0.$

Решение.

Разделим правую и левую части на 4^x :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x}-2\left(\frac{3}{2}\right)^x-3\le 0.$$

Сделаем замену $z=\left(\frac{3}{2}\right)^x$. Получаем: $z^2-2z-3\le\Leftrightarrow -1\le z\le 3.$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\left(\frac{3}{2}\right)^x\le 3$, то есть $x\le \log_{1,5} 3.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{1,5} 3].$

52. Задание 15 № 508566. Решите неравенство: $16^x - 12^x - 2\cdot 9^x \le 0.$

Решение.

Разделим обе части на 9^x: $\left(\frac{4}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{4}{3}\right)^x - 2 \le 0.$

Пусть $z = \left(\frac{4}{3}\right)^x$, имеем: $z^2 - z - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le z \le 2.$ Откуда, возвращаясь к исходной переменной, получим:

$$\left(\frac{4}{3}\right)^x \le 2 \Leftrightarrow x \le \log_{\frac{4}{3}} 2.$$

Ответ: $(-\infty;\ \log_{\frac{4}{3}} 2]$.

53. Задание 15 № 508569. Решите неравенство: $25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0.$

Решение.

Последовательно получаем:

$$25^x + 3\cdot 10^x - 4\cdot 4^x > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{25}{4}\right)^x + 3\left(\frac{5}{2}\right)^x - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{5}{2}\right)^x > 1, \\ \left(\frac{5}{2}\right)^x < -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.$$

Ответ: $(0;\ +\infty)$.

54. Задание 15 № 508573. Решите неравенство: $3^x + 10\cdot 3^{3-x} \ge 37.$

Решение.

Решим первое неравенство системы.

Пусть $t = 3^x$, тогда неравенство примет вид:

$$t + \frac{270}{t} \ge 37 \Leftrightarrow \frac{t - 10(t-27)}{t} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 < t \le 10, \\ t \ge 27. \end{array}\right.$$

При $0 < t \le 10$ получим:

$$0 < 3^x \le 10 \Leftrightarrow x \le \log_3 10.$$

При $t \ge 27$ получим:

$$3^x \ge 27 \Leftrightarrow x \ge 3.$$

Решение неравенства: $(-\infty;\ \log_3 10] \cup [3;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ \log_3 10] \cup [3;\ +\infty)$.

55. Задание 15 № 508577. Решите неравенство: $4^{x+\frac{3}{2}} - 33\cdot 2^{x-1} + 1 \le 0.$

Решение.

Пусть $t = 2^x$, тогда первое неравенство запишется в виде:

$$16t^2 - 33t + 2 \le 0 \Leftrightarrow (16t-1)(t-2) \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{16} \le t \le 2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $\frac{1}{16} \le 2^x \le 2 \Leftrightarrow -4 \le x \le 1.$

Ответ: $[-4;\ 1]$.

56. Задание 15 № 509044. Решите неравенство $25^x+5^{x+1}+5^{1-x}+\frac{1}{25^x}\leq 12.$

Решение.

Перепишем неравенство в виде $\left(25^x+\frac{1}{25^x}\right)+5\left(5^x+\frac{1}{5^x}\right)\leq 12$ и положим $5^x+\frac{1}{5^x}=t.$ Тогда $25^x+\frac{1}{25^x}+2=t^2$ и, значит, $25^x+\frac{1}{25^x}=t^2-2.$

Таким образом, неравенство принимает вид:

$$t^2+5t-14\leq 0\Leftrightarrow -7\leq t\leq 2,\text{ откуда } -7\leq 5^x+\frac{1}{5^x}\leq 2\Leftrightarrow 5^x=1\Leftrightarrow x=0.$$

Ответ: $\{0\}$.

57. Задание 15 № 509179. Решите неравенство $\frac{11-5^{x+1}}{25^x-5(35\cdot 5^{x-2}-2)}\geq 1,5.$

Решение.

Относительно $t=5^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{11-5t}{t^2-7t+10}\geq\frac{3}{2},\ \frac{2(11-5t)-3(t^2-7t+10)}{(t-2)(t-5)}\geq 0,\ \frac{-3t^2+11t-8}{(t-2)(t-5)}\geq 0,\ \frac{(t-1)(8-3t)}{(t-2)(t-5)}\geq 0.$$

По методу интервалов, $1\leq t<2$ или $\frac{8}{3}\leq t<5.$

Возвращаясь к x, получаем $0\leq x<\log_5 2,\ \log_5\frac{8}{3}\leq x<1.$

Ответ: $[0;\log_5 2)\cup\left[\log_5\frac{8}{3};1\right).$

58. Задание 15 № 510101. Решите неравенство: $\frac{13-5\cdot 3^x}{9^x-12\cdot 3^x+27}\geq 0,5.$

Решение.

Пусть $t=3^x$, тогда:

$$\frac{13-5t}{t^2-12t+27}\geq 0,5\Leftrightarrow\frac{t^2-2t+1}{t^2-12t+27}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(t-1)^2}{(t-3)(t-9)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1,\\3<t<9.\end{array}\right.$$

Тогда либо $3^x=1$, откуда $x=0$, либо $3<t<9$, откуда $1<x<2.$

Ответ: $\{0\}\cup(1;2).$

59. Задание 15 № 513099. Решите неравенство $\frac{2}{7^x-7}\geq\frac{5}{7^x-4}.$

Решение.

Относительно $t=7^x$ неравенство имеет вид:

$$\frac{2}{t-7}\geq\frac{5}{t-4}\Leftrightarrow\frac{2(t-4)-5(t-7)}{(t-7)(t-4)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)}\geq 0\Leftrightarrow\frac{t-9}{(t-7)(t-4)}\leq 0,$$

отсюда $t<4$ или $7<t\leq 9.$ Возвращаясь к x, получаем: $^x<4,\ x<\log_7 4$ или $7<7^x\leq 9,\ 1<x\leq\log_7 9.$

Ответ: $(-\infty;\ \log_7 4),\ (1;\ \log_7 9].$

60. Задание 15 № 513348. Решите неравенство $\dfrac{2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0.$

Решение.
Рассмотрим отдельно числитель дроби:

$$2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2\le 0 \Leftrightarrow 2\cdot 2^{2x}-12\cdot\frac{1}{2^{2x}}+2\le 0 \Leftrightarrow 2^{2x}-6\cdot\frac{1}{2^{2x}}+1\le 0.$$

Сделаем замену $y=2^{2x}$:

$$y-\frac{6}{y}+1\le 0 \Leftrightarrow y^2+y-6\le 0 \Leftrightarrow (y+3)(y-2)\le 0 \Leftrightarrow y-2\le 0.$$

Сделаем обратную замену: $2^{2x}-2\le 0 \Leftrightarrow 2x-1\le 0.$ Получаем

$$\frac{2^{2x+1}-96\cdot 0,5^{2x+3}+2}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x+1}\le 0 \Leftrightarrow -1<x\le 0,5.$$

Ответ: $(-1;\ 0,5]$.