# Рациональные неравенства

**1. Задание 15 № 507491.** Решите неравенство: $\dfrac{x^2-6x+8}{x-1}-\dfrac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0.$

**Решение.**

Перепишем неравенство в виде:

$$\frac{x^2-6x+8}{x-1}-\frac{x-4}{x^2-3x+2}\le 0\Leftrightarrow \frac{(x-4)(x-2)}{x-1}-\frac{x-4}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2(x-4)-(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{((x-2)^2-1)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{(x-3)(x-4)}{x-2}\le 0,\\ x\ne 1.\end{cases}$$

Множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup(1;\ 2)\cup[3;\ 4].$

**2. Задание 15 № 507658.** Решите неравенство

$$\frac{x^2-2x+1}{(x+2)^2}+\frac{x^2+2x+1}{(x-3)^2}\le\frac{(2x^2-x+5)^2}{2(x+2)^2(x-3)^2}.$$

**Решение.**

Сделаем замену: $a=\dfrac{x-1}{x+2},\ b=\dfrac{x+1}{x-3}.$ Тогда

$$a+b=\frac{(x-1)(x-3)+(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{2x^2-x+5}{(x+2)(x-3)}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2+b^2\le\dfrac{(a+b)^2}{2}$, откуда

$$a^2+b^2-2ab\le 0\Leftrightarrow (a-b)^2\le 0.$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a=b.$ Получаем:

$$\frac{x-1}{x+2}=\frac{x+1}{x-3}\Leftrightarrow x^2-4x+3=x^2+3x+2\Leftrightarrow x=\frac{1}{7}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{7}.$

**Примечание.**

Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к $\dfrac{(7x-1)^2}{(x+2)^2(x-3)^2}\le 0,$ откуда также получается ответ $x=\dfrac{1}{7}.$

**3. Задание 15 № 507661.** Решите неравенство

$$\frac{x^2-4x+4}{(x+1)^2}+\frac{x^2+6x+9}{(x-1)^2}\le\frac{(2x^2+x+5)^2}{2(x^2-1)^2}.$$

**Решение.**

Сделаем замену: $a=\frac{x-2}{x+1}$, $b=\frac{x+3}{x-1}$. Тогда

$$a+b=\frac{(x-1)(x-2)+(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-1)}=\frac{2x^2+x+5}{x^2-1}.$$

Неравенство принимает вид: $a^2+b^2\le\frac{(a+b)^2}{2}$, откуда

$$a^2+b^2-2ab\le 0\Leftrightarrow(a-b)^2\le 0.$$

Это неравенство выполняется тогда и только тогда, когда $a=b$. Получаем:

$$\frac{x-2}{x+1}=\frac{x+3}{x-1}\Leftrightarrow x^2-3x+2=x^2+4x+3\Leftrightarrow x=-\frac{1}{7}.$$

Ответ: $-\frac{1}{7}$.

**Примечание.**

Задача допускает решение без замены переменной: тождественными преобразованиями данное неравенство приводится к неравенству $\frac{(7x+1)^2}{(x^2-1)^2}\le 0$, откуда также получается ответ $x=-\frac{1}{7}$.

**4. Задание 15 № 508212.** Решите неравенство: $(x^2-3,6x+3,24)(x-1,5)\le 0.$

**Решение.**

Используя метод интервалов, получаем:

$$(x-1,8)^2(x-1,5)\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,8,\\ x\le 1,5.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1,5]\cup\{1,8\}$.

**5. Задание 15 № 508213.** Решите неравенство: $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{2-x}\le 5.$

**Решение.**

Используя метод интервалов, получаем:

$$\frac{5x^2-15x+11}{(x-1)\,(2-x)}\le 0\Leftrightarrow\frac{5\left(x-\frac{15-\sqrt{5}}{10}\right)\left(x-\frac{15+\sqrt{5}}{10}\right)}{(x-1)(2-x)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<1,\\ \frac{15-\sqrt{5}}{10}\le x\le\frac{15+\sqrt{5}}{10},\\ x>2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1)\cup\left[\frac{15-\sqrt{5}}{10};\ \frac{15+\sqrt{5}}{10}\right]\cup(2;+\infty).$

**6. Задание 15 № 508345.** Решите неравенство: $1-\dfrac{2}{|x|}\le\dfrac{23}{x^2}$.

**Решение.**

Приведём выражение к общему знаменателю:

$$1-\frac{2}{|x|}\le\frac{23}{x^2}\Leftrightarrow\frac{x^2-2|x|-23}{x^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(|x|-1-2\sqrt{6})(|x|+2\sqrt{6}-1)}{x^2}\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(|x|-1-2\sqrt{6})}{x^2}\le 0\Leftrightarrow\frac{(x-1-2\sqrt{6})(x+1+2\sqrt{6})}{x^2}\le 0.$$

Предпоследнее преобразование верно, так как модуль не может принимать отрицательных значений.

Получаем $-1-2\sqrt{6}\le x<0$ или $0<x\le 1+2\sqrt{6}$.

Ответ: $[-1-2\sqrt{6};\ 0)\cup(0;\ 1+2\sqrt{6}]$.

**7. Задание 15 № 508346.** Решите неравенство: $\dfrac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1}\le -0,2$.

**Решение.**

Пусть $y=\dfrac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1}\le -0,2\Leftrightarrow\frac{1,8}{5y-1}\le 0\Leftrightarrow y<\frac{1}{5}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x-6}<\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{11-x}{x-6}<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<6,\\ x>11.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 6)\cup(11;\ +\infty)$.

**8. Задание 15 № 508347.** Решите неравенство: $\dfrac{6}{x\sqrt{3}-3}+\dfrac{x\sqrt{3}-6}{x\sqrt{3}-9}\ge 2$.

**Решение.**

Пусть $z-x\sqrt{3}$, получаем:

$$\frac{6}{z-3}+\frac{z-6}{z-9}\ge 2\Leftrightarrow\frac{(z-6)(z-15)}{(z-9)(z-3)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3<z\le 6,\\ 9<z\le 15.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\sqrt{3}<x\le 2\sqrt{3}$ или $3\sqrt{3}<x\le 5\sqrt{3}$.

Ответ: $(\sqrt{3};\ 2\sqrt{3}]\cup(3\sqrt{3};\ 5\sqrt{3}]$.

**9. Задание 15 № 508348.** Решите неравенство: $\left(\dfrac{10}{5x-21}+\dfrac{5x-21}{10}\right)^2\le\dfrac{25}{4}$.

**Решение.**

Сделав замену $t=\dfrac{5x-21}{10}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\le\frac{25}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le|t|\le 2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем:

$$5\le|5x-21|\le 20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}5\le 5x-21\le 20,\\ -20\le 5x-21\le -5\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\dfrac{26}{5}\le x\le\dfrac{41}{5},\\ \dfrac{1}{5}\le 5x-21\le\dfrac{16}{5}.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{5};\ \dfrac{16}{5}\right]\cup\left[\dfrac{26}{5};\ \dfrac{41}{5}\right]$.

**10. Задание 15 № 508349.** Решите неравенство: $(x^2-5,6x+7,84)(x-2,5)\le 0.$

**Решение.**

Заметим, что в первой скобке можно выделить полный квадрат:

$$(x-2,8)^2(x-2,5)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,8, \\ x\le 2,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 2,5]\cup\{2,8\}.$

**11. Задание 15 № 508350.** Решите неравенство: $\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{3-x}\le 5.$

**Решение.**

Перейдём к общему знаменателю:

$$\frac{5x^2-25x+31}{(x-2)\,(3-x)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{5\left(x-\frac{25-\sqrt5}{10}\right)\left(x-\frac{25+\sqrt5}{10}\right)}{(x-2)(3-x)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<2, \\ \dfrac{25-\sqrt5}{10}\le x\le \dfrac{25+\sqrt5}{10} \\ x>3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 2)\cup\left[\dfrac{25-\sqrt5}{10};\ \dfrac{25+\sqrt5}{10}\right]\cup(3;\ +\infty).$

**12. Задание 15 № 508351.** Решите неравенство: $(x^2-3,6x+3,24)(x-1,5)\le 0.$

**Решение.**

Заметим, что в первой скобке записан полный квадрат:

$$(x-1,8)^2(x-1,5)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1,5. \\ x=1,8. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 1,5]\cup\{1,8\}.$

**13. Задание 15 № 508355.** Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-2x+1}{2x-1}\le 1.$

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2x^2-2x+1-2x+1}{2x-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-2x+1}{2x-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{2x-1}\le 0.$$

Решения неравенства: $x=1$ или $x<\dfrac12.$

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac12\right)\cup\{1\}.$

**14. Задание 15 № 508357.** Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-6x+5}{2x-3}\le 1.$

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\frac{2x^2-6x+5-2x+3}{2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+4}{2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2}{2x-3}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x<\dfrac32. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \dfrac32\right)\cup\{2\}.$

**15. Задание 15 № 508360.** Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-6x}{x-4}\le x.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2x^2-6x}{x-4}\le\frac{x^2-4x}{x-4}\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{x-4}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\2\le x<4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 4)$.

**16. Задание 15 № 508361.** Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-4x}{x-4}\le 0.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{2x^2-4x}{x-4}\le 0\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{x-4}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0\\2\le x<4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 4)$.

**17. Задание 15 № 508362.** Решите неравенство: $\dfrac{2x^2-5x}{x-3}\le x.$

**Решение.**
Имеем:

$$\frac{2x^2-5x}{x-3}\le x\Leftrightarrow\frac{x^2-2x}{x-3}\le 0\Leftrightarrow\frac{x(x-2)}{x-3}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le 0,\\2\le x<3\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup[2;\ 3)$.

**18. Задание 15 № 508364.** Решите неравенство: $\dfrac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\dfrac{(3x+1)^2}{4}.$

**Решение.**
Решим первое неравенство:

$$\frac{(x-1)^2+4(x+1)^2}{2}\le\frac{(3x+1)^2}{4}\Leftrightarrow 2(x-1)^2+8(x+1)^2\le(3x+1)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2-4x+2+8x^2+16x+8\le 9x^2+6x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+6x+9\le 0\Leftrightarrow(x+3)^2\le 0\Leftrightarrow x=-3.$$

Ответ: $\{-3\}$.

**19. Задание 15 № 508365.** Решите неравенство: $\dfrac{(x+1)^2+4(x-1)^2}{2}\le\dfrac{(3x-1)^2}{4}.$

**Решение.**
Имеем:

$$2(x+1)^2+8(x-1)^2-(3x-1)^2\le 0\Leftrightarrow 2x^2+4x+2+8x^2-16x+8-9x^2+6x-1\le 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9\le 0\Leftrightarrow(x-3)^2\le 0\Leftrightarrow x=3.$$

Ответ: $\{3\}$.

**20. Задание 15 № 508367.** Решите неравенство: $\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\frac{7x-19}{x-3}\le\frac{8x+1}{x}.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-2x-2}{x^2-2x}+\frac{7x-19}{x-3}\le\frac{8x+1}{x}\Leftrightarrow 1-\frac{2}{x^2-2x}+7+\frac{2}{x-3}-8-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{x^2-2x}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow -\frac{2}{x(x-2)}+\frac{2}{x-3}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x(x-3)(x-2)}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x\le 1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup(2;\ 3).$

**21. Задание 15 № 508369.** Решите неравенство: $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x}+\frac{3x+1}{x-1}\le\frac{4x+1}{x}.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x}+\frac{3x+1}{x-1}\le\frac{4x+1}{x}\Leftrightarrow 1+\frac{2}{x^2+2x}+3+\frac{4}{x-1}-4-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow \frac{2}{x^2+2x}+\frac{4}{x-1}-\frac{1}{x}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{x}{x(x+2)}+\frac{4}{x-1}\le 0\Leftrightarrow \frac{3x(x+3)}{x(x-1)(x+2)}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ -2<x<0, \\ 0<x<1. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup(-2;\ 0)\cup(0;\ 1).$

**22. Задание 15 № 508371.** Решите неравенство: $\frac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\ge x^2-\frac{1}{x-4}+\frac{5}{x}.$

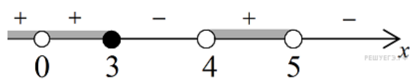
**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^4-5x^3+3x-25}{x^2-5x}\ge x^2-\frac{1}{x-4}+\frac{5}{x}\ \Leftrightarrow\ x^2+\frac{3x-25}{x(x-5)}-\frac{5}{x}\ge x^2-\frac{1}{x-4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ \frac{3x-25-5(x-5)}{x(x-5)}+\frac{1}{x-4}\ge 0\ \Leftrightarrow\ \frac{-2x}{x(x-5)}+\frac{1}{x-4}\ge 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{x-4}-\frac{2}{x-5}\ge 0, \\ x\ne 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{x-5-2(x-4)}{(x-4)(x-5)}\ge 0, \\ x\ne 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{3-x}{(x-4)(x-5)}\ge 0, \\ x\ne 0. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x\le 3, \\ 4<x<5. \end{array}\right.$$




Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 3]\cup(4;\ 5).$

**23. Задание 15 № 508373.** Решите неравенство: $\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x} \le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x}$.

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^3-3x^2+3x-3}{x^2-3x} \le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x(x^2-3x)}{x^2-3x}+\frac{x-3}{x(x-3)}+\frac{2x}{x(x-3)} \le x+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{(x-2)(x-3)} \le 0, \\ x \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<0, \\ 0<x\le 1, \\ 2<x<3. \end{array}\right.$$

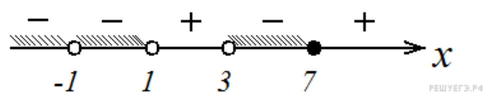
Ответ: $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ 1]\cup(2;\ 3)$.

**24. Задание 15 № 508377.** Решите неравенство: $\frac{x^2-5x-6}{x^2-1} \le \frac{x-9}{x-1}+\frac{2}{x-3}$.

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-5x-6}{x^2-1} \le \frac{x-9}{x-1}+\frac{2}{x-3} \Leftrightarrow \frac{(x-6)(x+1)}{(x+1)(x-1)}-\frac{x-9}{x-1} \le \frac{2}{x-3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{x-1}-\frac{2}{x-3} \le 0, \\ x \ne -1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-7}{(x-1)(x-3)} \le 0, \\ x \ne -1. \end{cases}$$




Ответ: $(-\infty;\ -1)\cup(-1;\ 1)\cup(3;\ 7]$.

**25. Задание 15 № 508379.** Решите неравенство: $\frac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27} \le \frac{x-18}{x-9}+\frac{4}{x-8}$.

**Решение.**
Имеем:

$$\frac{x^2-16x+39}{x^2-12x+27} \le \frac{x-18}{x-9}+\frac{4}{x-8} \Leftrightarrow \frac{(x-3)(x-13)}{(x-9)(x-3)}-\frac{x-18}{x-9} \le \frac{4}{x-8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x-9}-\frac{4}{x-8} \le 0, \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{(x-8)(x-9)} \le 0, \\ x \ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<3, \\ 3<x\le 4, \\ 8<x<9. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 3)\cup(3;\ 4]\cup(8;\ 9)$.

**26. Задание 15 № 508381.** Решите неравенство: $x^2-3x+1-\frac{x^3+x^2+3x-21}{x} \ge 3$.

**Решение.**
Решим второе неравенство:

$$\frac{x(x^2-3x+1)}{x}-\frac{x^3+x^2+3x-21}{x} \ge \frac{3x}{x} \Leftrightarrow \frac{-4x^2-5x+21}{x} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(4x-7)}{x} \le 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+3)(4x-7)}{x} \le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \le -3, \\ 0<x\le \frac{7}{4}. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\left(0;\ \frac{7}{4}\right]$.

**27. Задание 15 № 508423.** Решите неравенство: $x^3+6x^2+\dfrac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2.$

**Решение.**
Решим неравенство, используя метод интервалов:

$$x^3+6x^2+\frac{28x^2+2x-10}{x-5}\le 2\Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{28x^2}{x-5}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^4+x^3-2x^2}{x-5}\le 0\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)(x+2)}{x-5}\le 0.$$

Множество решений неравенства: $(-\infty,\ -2]\cup\{0\}\cup[1,\ 5).$

Ответ: $(-\infty,\ -2]\cup\{0\}\cup[1,\ 5).$

**28. Задание 15 № 508425.** Решите неравенство: $x^2-x+3-\dfrac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\le 2.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x(x^2-x+3)}{x}-\frac{x^3+4x^2-3x-1}{x}\le\frac{2x}{x}\Leftrightarrow\frac{-5x^2+4x+1}{x}\le 0\Leftrightarrow\frac{(5x+1)(x-1)}{x}\ge 0.$$

Получаем $-\dfrac{1}{5}\le x<0$ или $x\ge 1.$

Ответ: $\left[-\dfrac{1}{5};\ 0\right)\cup[1;\ +\infty).$

**29. Задание 15 № 508426.** Решите неравенство: $\dfrac{2}{0,5x\sqrt{5}-1}+\dfrac{0,5x\sqrt{5}-2}{0,5x\sqrt{5}-3}\ge 2.$

**Решение.**
Пусть $z=0,5x\sqrt{5}$, получаем:

$$\frac{2}{z-1}+\frac{z-2}{z-3}\ge 2\Leftrightarrow\frac{(z-2)(z-5)}{(z-1)(z-3)}\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1<z\le 2,\\ 3<z\le 5.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $\dfrac{2}{\sqrt{5}}<x\le\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ или $\dfrac{6}{\sqrt{5}}<x\le 2\sqrt{5}.$

Ответ: $\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}};\ \dfrac{4}{\sqrt{5}}\right]\cup\left(\dfrac{6}{\sqrt{5}};\ 2\sqrt{5}\right].$

**30. Задание 15 № 508427.** Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{x-4}+\dfrac{x-4}{2}\right)^2\le\dfrac{25}{4}.$

**Решение.**
Пусть $t=\dfrac{x-4}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2\le\frac{25}{4}\Leftrightarrow-\frac{5}{2}\le\frac{1}{t}+t\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow -5\le\frac{2t^2+2}{t}\le 5\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2t^2-5t+2}{t}\le 0,\\[2mm] \dfrac{2t^2+5t+2}{t}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}t<0,\\ \frac{1}{2}\le t\le 2,\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}-2\le t\le-\frac{1}{2},\\ t>0\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le|t|\le 2.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получаем: $0\le x\le 3$ или $5\le x\le 8.$

Ответ: $[0;\ 3]\cup[5;\ 8].$

**31. Задание 15 № 508429.** Решите неравенство: $\left(\dfrac{2}{25x^2-10x-8}+\dfrac{25x^2-10x-8}{2}\right)^2 \geq 4.$

**Решение.**

Сделав замену $t=\dfrac{25x^2-10x-8}{2}$, получаем:

$$\left(\frac{1}{t}+t\right)^2 \geq 4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t}-t\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t \neq 0.$$

Значит, $x \neq -\dfrac{2}{5}$ и $x \neq \dfrac{4}{5}$.

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{2}{5}\right) \cup \left(-\dfrac{2}{5};\ \dfrac{4}{5}\right) \cup \left(\dfrac{4}{5};\ +\infty\right).$

**32. Задание 15 № 508432.** Решите неравенство: $\dfrac{x^5-x^2}{x^2} \geq \dfrac{x^3-1}{4x^2}.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^5-x^2}{x^2} \geq \frac{x^3-1}{4x^2} \Leftrightarrow \frac{(x^3-1)(4x^2-1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(2x-1)(2x+1)}{x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -0,5 \leq x < 0, \\ 0 < x \leq 0,5, \\ x \geq 1. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-0,5;\ 0) \cup (0;\ 0,5] \cup [1;\ +\infty).$

**33. Задание 15 № 508434.** Решите неравенство: $4 \cdot \dfrac{x^3+x^2}{x^2-2x+1} \leq 9 \cdot \dfrac{x+1}{x^2-2x+1}.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$4 \cdot \frac{x^3+x^2}{x^2-2x+1} \leq 9 \cdot \frac{x+1}{x^2-2x+1} \Leftrightarrow \frac{4x^3+4x^2-9x-9}{(x-1)^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)(2x-3)(2x+3)}{(x-1)^2} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -\dfrac{3}{2}, \\ -1 \leq x < 1, \\ 1 < x \leq \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ -\dfrac{3}{2}\right] \cup [-1;\ 1) \cup \left(1;\ \dfrac{3}{2}\right].$

**34. Задание 15 № 508438.** Решите неравенство: $\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x+2}-\dfrac{6}{x+3} \geq 0.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{6}{x+3} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+5x+6+2(x^2+4x+3)-6(x^2+3x+2)}{(x+1)(x+2)(x+3)} \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x^2+5x}{(x+1)(x+2)(x+3)} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -3, \\ -2 < x \leq -\dfrac{5}{3}, \\ -1 < x \leq 0. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3) \cup \left(-2;\ -\dfrac{5}{3}\right] \cup (-1;\ 0].$

**35. Задание 15 № 508440.** Решите неравенство: $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{2}{x-2}-\dfrac{6}{x-3}\geq 0.$

**Решение.**

Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{2}{x-2}-\frac{6}{x-3}\geq 0\Leftrightarrow\frac{x^2-5x+6+2(x^2-4x+3)-6(x^2-3x+2)}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{3x^2-5x}{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0,\\ 1<x\leq\dfrac{5}{3},\\ 2<x<3.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 0]\cup\left(1;\ \dfrac{5}{3}\right]\cup(2;\ 3).$

**36. Задание 15 № 508442.** Решите неравенство: $x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\leq 0.$

**Решение.**

По теореме, обратной теореме Виета, сумма корней уравнения равна $-2+\sqrt{15}$, а их произведение равно $-2\sqrt{15}$. Поэтому корни этого уравнения — числа $-2$ и $\sqrt{15}$. Тогда для первого неравенства системы имеем:

$$x^2+(2-\sqrt{15})x-2\sqrt{15}\leq 0\Leftrightarrow -2\leq x\leq\sqrt{15}.$$

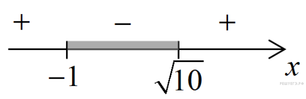
Ответ: $[-2;\ \sqrt{15}]$.

**37. Задание 15 № 508444.** Решите неравенство: $x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\leq 0.$

**Решение.**

Решим неравенство методом интервалов:

$$x^2+(1-\sqrt{10})x-\sqrt{10}\leq 0\ \Leftrightarrow\ x^2-(\sqrt{10}+(-1))x+\sqrt{10}(-1)\leq 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\ (x-\sqrt{10})(x+1)\leq 0\ \Leftrightarrow\ -1\leq x\leq\sqrt{10}.$$




Ответ: $[-1;\ \sqrt{10}]$.

**38. Задание 15 № 508447.** Решите неравенство: $x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57.$

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$x\sqrt{8}-7x+14\sqrt{8}>57\Leftrightarrow(\sqrt{8}-7)x+14\sqrt{8}-57>0\Leftrightarrow x<\frac{57-14\sqrt{8}}{\sqrt{8}-7}\Leftrightarrow x<\frac{(\sqrt{8}-7)^2}{\sqrt{8}-7}\Leftrightarrow x<\sqrt{8}-7.$$

Ответ: $\left(-\infty;\ \sqrt{8}-7\right)$.

**39. Задание 15 № 508448.** Решите неравенство: $\dfrac{3}{2-(x+1)\sqrt{3}}+\dfrac{(x+1)\sqrt{3}-1}{(x+1)\sqrt{3}-3}\geq 3.$

**Решение.**

Сделаем замену $z=(x+1)\sqrt{3}$:

$$\frac{3}{2-z}+\frac{z-1}{z-3}\geq 3\Leftrightarrow\frac{(z-1)(z-3,5)}{(z-2)(z-3)}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1\leq z<2,\\ 3<z\leq 3,5.\end{array}\right.$$

Возвращаясь к исходной переменной, получим: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1\leq x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}-1$ или $\sqrt{3}-1<x\leq\dfrac{7}{2\sqrt{3}}-1.$

Ответ: $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}-1;\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}-1\right)\cup\left(\sqrt{3}-1;\ \dfrac{7}{2\sqrt{3}}-1\right].$

**40. Задание 15 № 508449.** Решите неравенство: $(10x+7)(4-5x)\left(50x^2-5x-28\right)<0.$

**Решение.**

Решим второе неравенство. Заметим, что $(10x+7)(4-5x)(50x^2-5x-28)=-(10x+7)^2(4-5x)^2$, поэтому неравенство $-(10x+7)^2(4-5x)^2<0$ выполнено при всех $x$, кроме всех $x=-0,7$ и $x=0,8.$

Ответ: $(-\infty;\ -0,7)\cup(-0,7;\ 0,8)\cup(0,8;\ +\infty).$

**41. Задание 15 № 508514.** Решите неравенство: $\dfrac{x^2-3x-5}{x-4}+\dfrac{x^2-6x+3}{x-6}\le 2x+1.$

**Решение.**

Имеем:

$$\frac{x^2-3x-5}{x-4}+\frac{x^2-6x+3}{x-6}\le 2x+1\Leftrightarrow\frac{(x+1)\,(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{x\,(x-6)}{x-6}+\frac{3}{x-6}\le 2x+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\le 0\Leftrightarrow\frac{x-3}{(x-4)\,(x-6)}\le 0.$$

Применяя метод интервалов, получаем: $x\le 3$ или $4<x<6.$

Ответ: $(-\infty;\ 3]\cup(4;\ 6).$

**42. Задание 15 № 508516.** Решите неравенство: $x+\dfrac{8x-25}{x-3}+\dfrac{x^2+41x-136}{x^2-10x+21}\le 1.$

**Решение.**

Решим второе неравенство системы:

$$x+\frac{8x-25}{x-3}+\frac{x^2+41x-136}{x^2-10x+21}\le 1\Leftrightarrow x+\frac{8x-25}{x-3}+\frac{51x-157}{(x-3)(x-7)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-3)(x-7)+(x-3)(8x-6)}{(x-3)(x-7)}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-2)(x+3)}{(x-7)}\le 0,\\ x\ne 3.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -3,\\ 2\le x<3,\\ 3<x<7.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup[2;\ 3)\cup(3;\ 7).$

**43. Задание 15 № 508518.** Решите неравенство: $x+\dfrac{8x-45}{x-7}+\dfrac{x^2+15x-132}{x^2-16x+63}\le 1.$

**Решение.**

Применяем метод инттревалов:

$$x+\frac{8x-45}{x-7}+\frac{x^2+15x-132}{x^2-16x+63}\le 1\Leftrightarrow x+\frac{8x-45}{x-7}+\frac{31x-195}{(x-7)(x-9)}\le 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x(x-7)(x-9)+(x-7)(8x-30)}{(x-7)(x-9)}\le 0\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{(x-6)(x+5)}{x-9}\le 0,\\ x\ne 7\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -5,\\ 6\le x<7,\\ 7<x<9.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -5]\cup[6;\ 7)\cup(7;\ 9).$

**44. Задание 15 № 508522.** Решите неравенство: $\dfrac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\le 0.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{12x^2-31x+14}{4x^2+3x-1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(12x-7)}{(x+1)(4x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<\dfrac{1}{4}, \\ \dfrac{7}{12}\le x\le 2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-1;\ \dfrac{1}{4}\right)\cup\left[\dfrac{7}{12};\ 2\right].$

**45. Задание 15 № 508524.** Решите неравенство: $\dfrac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\le 0.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{20x^2-32x+3}{3x^2+7x+2}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3)(10x-1)}{(x+2)(3x+1)}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -2<x<-\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{10}\le x\le \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(-2;\ -\dfrac{1}{3}\right)\cup\left[\dfrac{1}{10};\ \dfrac{3}{2}\right].$

**46. Задание 15 № 508530.** Решите неравенство: $2x+1-\dfrac{21x+39}{x^2+x-2}\ge -\dfrac{1}{x+2}.$

**Решение.**
Последовательно получаем:

$$2x+1-\frac{21x+39}{x^2+x-2}\ge -\frac{1}{x+2} \Leftrightarrow 2x+1-\frac{20(x+2)}{(x+2)(x-1)}-\frac{x-1}{(x+2)(x-1)}\ge -\frac{1}{x+2}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1-\dfrac{20}{x-1}\ge 0, \\ x\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x+3)(2x-7)}{x-1}\ge 0, \\ x\ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3\le x<-2, \\ -2<x<1, \\ x\ge \dfrac{7}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $[-3;\ -2)\cup(-2;\ 1)\cup\left[\dfrac{7}{2};\ +\infty\right).$

**47. Задание 15 № 508532.** Решите неравенство: $\dfrac{x^2-5x+3}{x-4}+\dfrac{5x-27}{x-6}\le x+4.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{x^2-5x+3}{x-4}+\frac{5x-27}{x-6}\le x+4 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x-4)}{x-4}-\frac{1}{x-4}+\frac{5(x-6)}{x-6}+\frac{3}{x-6}\le x+4\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-6}\le 0\Leftrightarrow \frac{x-3}{(x-4)(x-6)}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 3, \\ 4<x<6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ 3]\cup(4;\ 6).$

**48. Задание 15 № 508534.** Решите неравенство: $x^3+5x^2+\dfrac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+5x^2+\frac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5 \Leftrightarrow x^3+5x^2+\frac{28x^2}{x-6}+\frac{5x-30}{x-6}\le 5 \Leftrightarrow x^3+5x^2+\frac{28x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-x^3-2x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x=0, \\ 2\le x<6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup\{0\}\cup[2;\ 6).$

**49. Задание 15 № 508536.** Решите неравенство: $x^3+6x^2+\dfrac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+6x^2+\frac{21x^2+3x-12}{x-4}\le 3 \Leftrightarrow x^3+6x^2+\frac{21x^2}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+2x^3-3x^2}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)(x+3)}{x-4}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x=0, \\ 1\le x<4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\{0\}\cup[1;\ 4).$

**50. Задание 15 № 508538.** Решите неравенство: $x^3+5x^2+\dfrac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5.$

**Решение.**
Имеем:

$$x^3+5x^2+\frac{28x^2+5x-30}{x-6}\le 5 \Leftrightarrow x^3+5x^2+\frac{28x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4-x^3-2x^2}{x-6}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x+1)(x-2)}{x-6}\le 0. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -1, \\ x=0, \\ 2\le x<6. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -1]\cup\{0\}\cup[2;\ 6).$

**51. Задание 15 № 508575.** Решите неравенство: $\dfrac{1}{5x-12}+\dfrac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$\frac{1}{5x-12}+\frac{2x^2-6x+1}{x-3}\ge 2x \Leftrightarrow \frac{1}{5x-12}+\frac{2x(x-3)}{x-3}+\frac{1}{x-3}\ge 2x \Leftrightarrow \frac{2x-5}{(5x-12)(x-3)}\ge 0.$$

Множество решений неравенства: $\left(\dfrac{12}{5};\ \dfrac{5}{2}\right]\cup(3,+\infty).$

Ответ: $\left(\dfrac{12}{5};\ \dfrac{5}{2}\right]\cup(3,+\infty).$

**52. Задание 15 № 508580.** Решите неравенство: $x^3+8x^2+\dfrac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1.$

**Решение.**
Решим неравенство методом интервалов:

$$x^3+8x^2+\frac{50x^2+x-7}{x-7}\le 1 \Leftrightarrow x^3+8x^2+\frac{50x^2}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^4+x^3-6x^2}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x-2)(x+3)}{x-7}\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le -3, \\ x=0, \\ 2\le x<7. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -3]\cup\{0\}\cup[2;\ 7)$.

**53. Задание 15 № 511107.** Решите неравенство $\dfrac{2x^2-8x}{x-7}\le x.$

**Решение.**
Преобразуем неравенство

$$x\left(\frac{2x-8}{x-7}-1\right)\le 0 \Leftrightarrow \frac{x(x-1)}{x-7}\le 0,$$

откуда $x\le 0$ или $1\le x<7.$

Ответ: (-∞; 0]; [1; 7).

**54. Задание 15 № 512358.** Решите неравенство $\dfrac{(5x-3)^2}{x-2}\ge\dfrac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}.$

**Решение.**
Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-3)^2}{x-2}\le\frac{9-30x+25x^2}{14-9x+x^2}\Leftrightarrow\frac{(5x-3)^2}{x-2}-\frac{(5x-3)^2}{(x-2)(x-7)}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(5x-3)^2(x-8)}{(x-2)(x-7)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0,6, \\ 2<x<7, \\ x\ge 8. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,6\}\cup(2;\ 7)\cup[8;+\infty)$.

**55. Задание 15 № 512400.** Решите неравенство $\dfrac{(5x-2)^2}{x-3}\ge\dfrac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}.$

**Решение.**
Преобразуем неравенство:

$$\frac{(5x-2)^2}{x-3}\ge\frac{4-20x+25x^2}{24-11x+x^2}\Leftrightarrow\frac{(5x-2)^2}{x-3}-\frac{(5x-2)^2}{(x-3)(x-8)}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\frac{(5x-2)^2(x-9)}{(x-3)(x-8)}\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0,4, \\ 3<x<8, \\ x\ge 9. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0,4\}\cup(3;\ 8)\cup[9;+\infty)$.

**56. Задание 15 № 512486.** Решите неравенство $\frac{x}{2x^2+12} \le (1:5)x^{-1}.$

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\frac{x}{2x^2+12} \le \frac{1}{5x} \Leftrightarrow \frac{5x^2-2x^2-12}{(2x^2+12)5x} \le 0 \Leftrightarrow \frac{(x-2)(x+2)}{(2x^2+12)x} \le 0.$$

Учитывая, что при всех значениях x выражение 2 $x^2$ + 12 положительно, получаем

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x} \le 0,$$

откуда

$$x \le -2,\ 0 < x \le 2.$$

Ответ: $(-\infty;-2], (0;2]$.

**57. Задание 15 № 507203.** Решите неравенство $\frac{2-(x-6)^{-1}}{5(x-6)^{-1}-1} \le -0,2.$

**Решение.**

Сделаем замену $y = \frac{1}{x-6}$. Получим

$$\frac{2-y}{5y-1} \le -0,2 \Leftrightarrow \frac{1,8}{5y-1} \le 0 \Leftrightarrow y < \frac{1}{5}.$$

Следовательно, $\frac{1}{x-6} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{11-x}{x-6} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 6, \\ x > 11. \end{array}\right.$

Ответ: $(-\infty;\ 6) \cup (11;\ +\infty)$