Логарифмические неравенства

1. Задание 15 № 507708. Решите неравенство: $\log_2(x^2-4)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}>2.$

Решение.

Из неравенства следует, что либо $x>2$, либо $x<-2$. Если $x>2$, то неравенство принимает вид:

$$\log_2(x+2)-2\log_2(x-2)<-1\Leftrightarrow\log_2 2(x+2)<\log_2(x-2)^2\Leftrightarrow 2x+4<(x-2)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x>0\Leftrightarrow x(x-6)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0,\\x>6.\end{array}\right.$$

Учитывая, что $x>2$, получаем: $x>6$.

Если $x<-2$, то неравенство принимает вид:

$$\log_2(-x-2)-2\log_2(2-x)<-1\Leftrightarrow\log_2 2(-x-2)<\log_2(2-x)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x-4<(2-x)^2\Leftrightarrow x^2-2x+8>0.$$

Полученное неравенство выполняется при всех x.

Таким образом, решение исходного неравенства: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ -2)\cup(6;\ +\infty)$.

2. Задание 15 № 507736. Решите неравенство: $\frac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x.$

Решение.

Пусть $y=\log_2 x$, получаем:

$$\frac{\log_2 x-5}{1-2\log_2 x}\geq 2\log_2 x\Leftrightarrow\frac{y-5}{1-2y}\geq 2y\Leftrightarrow\frac{4y^2-y-5}{2y-1}\leq 0\Leftrightarrow\frac{(y+1)(4y-5)}{2y-1}\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y\leq -1,\\ \frac{1}{2}<y\leq\frac{5}{4}.\end{array}\right.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2 x\leq -1,\\ 0,5<\log_2 x\leq 1,25\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x\leq\frac{1}{2},\\ \sqrt{2}<x\leq\sqrt[4]{32}.\end{array}\right.$$

Таким образом, решение исходного неравенства $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

Ответ: $(0;\ 0,5]\cup(\sqrt{2};\ \sqrt[4]{32}]$.

3. Задание 15 № 507741. Решите неравенство: $\log_3(x^2-x-3)+\log_3(2x^2+x-3)\geq\log_3(x^2-2)^2+2+\log_{\frac{1}{3}}4.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$\begin{cases}\log_3(4(x^2-x-3)(2x^2+x-3))\geq\log_3(3x^2-6)^2,\\ x^2-x-3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x^2-x-3)(2x^2+x-3)\geq(3x^2-6)^2,\\ x^2-x-3>0,\\ 3x^2-6\neq 0.\end{cases}$$

Заметим, что $3x^2-6=(x^2-x-3)+(2x^2+x-3)$. Пусть $x^2-x-3=a,\ 2x^2+x-3=b$. Тогда неравенство системы принимает вид:

$$4ab\geq(a+b)^2\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2\leq 0\Leftrightarrow(a-b)^2\leq 0.$$

Данное неравенство выполняется только при $a=b$. Значит,

$$x^2-x-3=2x^2+x-3\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-2.\end{array}\right.$$

С учётом ограничений из первой системы получаем, что $x=-2$

Ответ: -2.

4. Задание 15 № 507764. Решите неравенство: $\dfrac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3}\leq\dfrac{\log_{5^3}7}{\log_5 7}.$

Решение.

Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{\lg(4y^2-5y+1)^3}\leq\frac{\log_{5^3}7}{\log_5 7}\Leftrightarrow\frac{\lg(5y^2-2y+1)}{3\lg(4y^2-5y+1)}\leq\frac{1}{3}\Leftrightarrow\log_{4y^2-5y+1}(5y^2-2y+1)\leq 1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\log_{4y^2-5y+1}\left(\frac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}\right)\leq 0.$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases}4y^2-5y+1>0,\\ 4y^2-5y+1\neq 1,\\ 5y^2-2y+1>0,\\ (4y^2-5y+1-1)\left(\dfrac{5y^2-2y+1}{4y^2-5y+1}-1\right)\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(4y-1)(y-1)>0,\\ y(4y-5)\neq 0,\\ (4y-5)(y+3)\leq 0.\end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y<\dfrac{1}{4}$ или $y>1$. Из второго равенства получаем, что $y\neq 0$ и $y\neq\dfrac{5}{4}$. Решение третьего неравенства: $-3\leq y\leq\dfrac{5}{4}$.

Таким образом, решением неравенства является множество $[-3;\ 0)\cup\left(0;\ \dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

Ответ: $[-3;\ 0)\cup\left(0;\ \dfrac{1}{4}\right)\cup\left(1;\ \dfrac{5}{4}\right)$.

5. Задание 15 № 507767. Решите неравенство: $\dfrac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)^5} \geq \dfrac{\log_{7^5} 3}{\log_7 3}$.

Решение.
Используя свойства логарифмов, преобразуем неравенство:

$$\frac{\ln(3y^2-2y+1)}{\ln(5y^2-6y+1)^5} \geq \frac{\log_{7^5} 3}{\log_7 3} \Leftrightarrow \frac{\ln(3y^2-2y+1)}{5\ln(5y^2-6y+1)} \geq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \log_{5y^2-6y+1}(3y^2-2y+1) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{5y^2-6y+1}\left(\frac{3y^2-2y+1}{5y^2-6y+1}\right) \geq 0.$$

Перейдём к системе:

$$\begin{cases} 5y^2-6y+1>0, \\ 5y^2-6y+1 \neq 1, \\ 3y^2-2y+1>0, \\ (5y^2-6y+1-1)\left(\dfrac{3y^2-2y+1}{5y^2-6y+1}-1\right) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (5y-1)(y-1)>0, \\ y(5y-6) \neq 0, \\ (5y-6)(y-2) \leq 0. \end{cases}$$

Решение первого неравенства: $y<\dfrac{1}{5}$ или $y>1$.

Из второго равенства получаем, что $y \neq 0$ и $y \neq \dfrac{6}{5}$. Решение третьего неравенства: $\dfrac{6}{5} \leq y \leq 2$.

Таким образом, получаем, что решением неравенства является промежуток $\left(\dfrac{6}{5};\ 2\right]$.

Ответ: $\left(\dfrac{6}{5};\ 2\right]$.

6. Задание 15 № 507770. Решите неравенство: $\dfrac{\lg(3x+2\sqrt{x}-1)}{\lg(5x+3\sqrt{x}-2)^5} \geq \dfrac{\log_{32} 11}{\log_2 11}$.

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x}=y,\ y\geq 0$ и упростим левую и правую части: $\dfrac{\lg(3y^2+2y-1)}{\lg(5y^2+3y-2)} \geq 1.$

Учитывая, что $y \geq 0,$ домножая на знаменатель, получаем два случая :

$$1<5y^2+3y-2 \leq 3y^2+2y-1 \text{ или } \begin{cases} 5y^2+3y-2<1, \\ 5y^2+3y-2 \geq 3y^2+2y-1, \\ 3y^2+2y-1>0. \end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases} 5y^2+3y-3>0, \\ 2y^2+y-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>\dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{решений нет.}$$

Второй случай:

$$\begin{cases} 5y^2+3y-3<0, \\ 3y^2+2y-1>0, \\ 2y^2+y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < \dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ y>\dfrac{1}{3}, \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq y < \frac{\sqrt{69}-3}{10}.$$

Тогда

$$\frac{1}{4} \leq x < \frac{39-3\sqrt{69}}{50}.$$

Ответ: $\left[0,25;\ \dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}\right).$

7. Задание 15 № 507784. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{11}(3x+2\sqrt{x+1}+2)}{\log_{11}(5x+3\sqrt{x+1}+3)^3} \geq \dfrac{\log_{27}11}{\log_3 11}$.

Решение.

Сделаем замену $\sqrt{x+1}=y,\ y\geq 0$ и упростим левую и правую части: $\dfrac{\log_{11}(3y^2+2y-1)}{\log_{11}(5y^2+3y-2)} \geq 1$.

Учитывая, что $y \geq 0$, получаем:

$$1<5y^2+3y-2 \leq 3y^2+2y-1 \text{ или } \begin{cases} 5y^2+3y-2<1, \\ 5y^2+3y-2 \geq 3y^2+2y-1, \\ 3y^2+2y-1>0. \end{cases}$$

Первый случай:

$$\begin{cases} 5y^2+3y-3>0, \\ 2y^2+y-1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y>\dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ решений нет.}$$

Второй случай:

$$\begin{cases} 5y^2+3y-3<0, \\ 3y^2+2y-1>0, \\ 2y^2+y-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq y < \dfrac{\sqrt{69}-3}{10}, \\ y>\dfrac{1}{3}, \\ y \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leq y < \dfrac{\sqrt{69}-3}{10}.$$

Тогда $\dfrac{1}{4} \leq x+1 < \dfrac{39-3\sqrt{69}}{50}$, откуда $-\dfrac{3}{4} \leq x < \dfrac{-11-3\sqrt{69}}{50}$.

Ответ: $\left[-0,75;\ \dfrac{-11-3\sqrt{69}}{50}\right)$.

8. Задание 15 № 508452. Решите неравенство: $x^2\log_{16}x \geq \log_{16}x^5+x\log_2 x$.

Решение.

Перенесём все члены в левую часть и умножим на 4:

$$x^2\log_2 x-4x\log_2 x-5\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-4x-5\right)\log_2 x \geq 0 \Leftrightarrow (x-5)(x+1)\log_2 x \geq 0.$$

Заметим, что $x>0$, поэтому $x+1>0$. Получаем: $(x-5)\log_2 x \geq 0$. Решение неравенства: $0<x\leq 1$ или $x \geq 5$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup[5;\ +\infty)$.

9. Задание 15 № 508454. Решите неравенство: $x^2\log_{25}x \geq \log_{25}x^3+x\log_5 x$.

Решение.

Перенесём все члены в правую часть и умножим на 2:

$$x^2\log_5 x-3\log_5 x-2x\log_5 x \geq 0 \Leftrightarrow \left(x^2-2x-3\right)\log_5 x \geq 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+1)\log_5 x \geq 0.$$

Заметим, что $x>0$, поэтому $x+1>0$. Получаем $(x-3)\log_5 x \geq 0$. Решение неравенства: $0<x\leq 1$ или $x \geq 3$.

Ответ: $(0;\ 1]\cup[3;\ +\infty)$.

10. Задание 15 № 508459. Решите неравенство: $\log_2^2 x + 6 > 5\log_2 x.$

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x > 0.$ Последовательно получаем:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x > 3,\\ \log_2 x < 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x > 8,\\ 0 < x < 4.\end{array}\right.$$

Ответ: $(0;\ 4) \cup (8;\ +\infty).$

11. Задание 15 № 508461. Решите неравенство: $\log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0.$

Решение.

Решение неравенства ищем при условии $x > 0.$ Получаем:

$$\log_2^2 x + 5\log_2 x + 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x < -3,\\ \log_2 x > -2.\end{array}\right.$$

Значит, $0 < x < \dfrac{1}{8}$ или $x > \dfrac{1}{4}.$

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{1}{8}\right) \cup \left(\dfrac{1}{4};\ +\infty\right).$

12. Задание 15 № 508462. Решите неравенство: $2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \le 256.$

Решение.

Область определения неравенства задается условием $x > 0.$ На множестве $(0;\ +\infty)$ имеем:

$$2^{\log_2^2 x} + x^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} + \left(2^{\log_2 x}\right)^{\log_2 x} \le 256 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^{\log_2^2 x} \le 256 \Leftrightarrow 2^{\log_2^2 x} \le 2^7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_2^2 x \le 7 \Leftrightarrow -\sqrt{7} \le \log_2 x \le \sqrt{7} \Leftrightarrow 2^{-\sqrt{7}} \le x \le 2^{\sqrt{7}}.$$

Ответ: $[2^{-\sqrt{7}};\ 2^{\sqrt{7}}].$

13. Задание 15 № 508464. Решите неравенство: $2\log_2 \dfrac{x+2}{x-3,7} + \log_2(x-3,7)^2 \ge 2.$

Решение.

Первое слагаемое определено при $\dfrac{x+2}{x-3,7} > 0$, то есть при $x < -2$ или $x > 3,7.$ На этих лучах, преобразуем неравенство:

$$\log_2 \frac{(x+2)^2}{(x-3,7)^2} + \log_2(x-3,7)^2 \ge 2 \Leftrightarrow \log_2(x+2)^2 \ge 2 \Leftrightarrow (x+2)^2 \ge 4 \Leftrightarrow x(x+4) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \le -4,\\ x \ge 0.\end{array}\right.$$

Решение неравенства: $x \le -4$ или $x > 3,7.$

Ответ: $(-\infty;\ -4] \cup (3,7;\ +\infty).$

14. Задание 15 № 508466. Решите неравенство: $\log_3(x^2 - x - 2) \le 1 + \log_3 \dfrac{x+1}{x-2}.$

Решение.

Имеем:

$$\log_3((x+1)(x-2)) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \le 1 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\log_3 \dfrac{(x+1)(x-2)^2}{x+1} \le 1,\\ (x+1)(x-2) > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\log_3(x-2)^2 \le 1,\\ (x+1)(x-2) > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}(x-2)^2 \le 3,\\ (x+1)(x-2) > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-\sqrt{3} \le x-2 \le \sqrt{3},\\ (x+1)(x-2) > 0\end{array}\right. \Leftrightarrow 2 < x \le 2+\sqrt{3}.$$

Ответ: $(2;\ 2+\sqrt{3}].$

15. Задание 15 № 508468. Решите неравенство: $2\log_2 \frac{x-1}{x+1,3}+\log_2(x+1,3)^2 \geq 2.$

Решение.

Первое слагаемое определено при $\frac{x-1}{x+1,3}>0$, второе — при $x \neq -1,3,$ поэтому область определения неравенства задаётся неравенствами $x<-1,3$ и $x>1.$ При этих значениях переменной имеем:

$$\log_2 \frac{(x-1)^2}{(x+1,3)^2}+\log_2(x+1,3)^2 \geq 2 \Leftrightarrow \log_2(x-1)^2 \geq 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 4 \Leftrightarrow x^2-2x-3 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq 3. \end{array}\right.$$

Учитывая область определения, получаем решение неравенства: $x<-1,3$ или $x \geq 3.$

Ответ: $(-\infty;\ -1,3) \cup [3;\ +\infty).$

16. Задание 15 № 508469. Решите неравенство: $\log_2^2(-\log_2 x)+\log_2 \log_2^2 x \leq 3.$

Решение.

Из условия следует, что $-\log_2 x>0$ и поэтому

$$\log_2 \log_2^2 x=2\log_2(-\log_2 x).$$

Пусть $\log_2(-\log_2 x)=z.$ Решим неравенство:

$$z^2+2z \leq 3 \Leftrightarrow (z-1)(z+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq z \leq 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$-3 \leq \log_2(-\log_2 x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq -\log_2 x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \log_2 x \leq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[8]{2}}.$$

Ответ: $\left[\frac{1}{4};\ \frac{1}{\sqrt[8]{2}}\right].$

17. Задание 15 № 508470. Решите неравенство: $\log_{0,5}^2(-\log_3 x)-\log_{0,5} \log_3^2 x \leq 3.$

Решение.

Из условия следует, что $-\log_3 x>0$ и поэтому

$$\log_{0,5} \log_3^2 x=-2\log_2(-\log_3 x).$$

Пусть $\log_2(-\log_3 x)=z.$ Решим неравенство:

$$z^2+2z \leq 3 \Leftrightarrow (z-1)(z+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq z \leq 1.$$

Вернёмся к исходной переменной:

$$-3 \leq \log_2(-\log_3 x) \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq -\log_3 x \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq \log_3 x \leq -\frac{1}{8} \Leftrightarrow \frac{1}{9} \leq x \leq \frac{1}{\sqrt[8]{3}}$$

Ответ: $\left[\frac{1}{9};\ \frac{1}{\sqrt[8]{3}}\right].$

18. Задание 15 № 508472. Решите неравенство: $\log_3^2 x+2>3\log_3 x.$

Решение.

Решим неравенство как квадратное относительно $\log_3 x$:

$$\log_3^2 x-3\log_3 x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x<1, \\ \log_3 x>2. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<3, \\ x>9. \end{array}\right.$$

Решение неравенства: $(0;\ 3) \cup (9;\ +\infty).$

Ответ: $(0;\ 3) \cup (9;\ +\infty).$

19. Задание 15 № 508474. Решите неравенство: $\log_2^2 x + 6 \geq 5\log_2 x$.

Решение.

Решим неравенство как квадратное относительно $\log_2 x$:

$$\log_2^2 x - 5\log_2 x + 6 \geq 0.$$

Получаем: $\log_2 x \leq 2$ или $\log_2 x \geq 3$. Следовательно, $0 < x \leq 4$ или $x \geq 8$.

Ответ: $(0;\ 4] \cup [8;\ +\infty)$.

20. Задание 15 № 508478. Решите неравенство: $2\log_9\left(4x^2+1\right) \geq \log_3\left(3x^2+4x+1\right)$.

Решение.

Используя формулу $\log_{a^2} b = \dfrac{1}{2}\log_a b$, получаем:

$$2\log_9(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow \log_3(4x^2+1) \geq \log_3(3x^2+4x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2+1>0, \\ 3x^2+4x+1>0, \\ 4x^2+1 \geq 3x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3x+1)(x+1)>0, \\ x(x-4) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1, \\ -\dfrac{1}{3}<x \leq 0, \\ x \geq 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;\ -1) \cup \left(-\dfrac{1}{3};\ 0\right] \cup [4;\ +\infty)$.

21. Задание 15 № 509093. Решите неравенство $\log_5^2 \dfrac{(x-4)^2 \cdot (x-3)}{48} > \log_{0,2}^2 \dfrac{x-3}{3}$.

Решение.

Так как $\log^2_{0.2}\dfrac{x-3}{3}=\left(-\log_5\dfrac{x-3}{3}\right)^2$, то данное неравенство можно записать в виде:

$$\log^2_5\frac{(x-4)^2\cdot(x-3)}{48}-\log^2_5\frac{x-3}{3}>0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\log_5\dfrac{(x-4)^2\cdot(x-3)}{48}\pm\log_5\dfrac{x-3}{3}$, по формулам суммы и разности логарифмов, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$(1)\quad\begin{cases}x-3>0,\\ \log_5\dfrac{(x-4)^2}{16}<0,\\ \log_5\dfrac{(x-4)^2\cdot(x-3)^2}{144}<0\end{cases}\qquad(2)\quad\begin{cases}x-3>0,\\ \log_5\dfrac{(x-4)^2}{16}>0,\\ \log_5\dfrac{(x-4)^2\cdot(x-3)^2}{144}>0.\end{cases}$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

$$\begin{cases}x-3>0,\\ x\neq 4,\\ \left(\dfrac{x-4}{4}\right)^2<1,\\ \left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}\right)^2<1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3,\\ x\neq 4,\\ \left(\dfrac{x-4}{4}-1\right)\cdot\left(\dfrac{x-4}{4}+1\right)<0,\\ \left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}-1\right)\cdot\left(\dfrac{x^2-7x+12}{12}+1\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x>3,\\ x\neq 4,\\ (x-8)x<0,\\ \left(x^2-7x\right)\left(x^2-7x+24\right)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>3,\\ x\neq 4\\ (x-8)x<0,\\ (x-7)x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<x<7,\\ x\neq 4.\end{cases}$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразовывая аналогичным образом систему (2), приходим к равносильной системе:

$$\begin{cases}x>3,\\ x\neq 4,\\ (x-8)x>0,\\ (x-7)x>0\end{cases}\Leftrightarrow x>8.$$

Объединяя множества решений (1), (2), получаем решение исходного неравенства: $(3;\ 4)\cup(4;\ 7)\cup(8;\ +\infty)$

Ответ: $(3;\ 4)\cup(4;\ 7)\cup(8;\ +\infty)$.

22. Задание 15 № 509122. Решите неравенство $\lg^2\dfrac{(x+2)^2(x+5)}{5}<\lg^2\dfrac{x+5}{20}.$

Решение.
Данное неравенство можно записать в виде:

$$\lg^2\frac{(x+2)^2(x+5)}{5}-\lg^2\frac{x+5}{20}<0.$$

Воспользовавшись формулой разности квадратов и преобразуя выражение $\lg\dfrac{(x+2)^2\cdot(x+5)}{5}\pm\lg\dfrac{x+5}{20}$ по формулам суммы и разности логарифмов, получаем, что данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x+5>0 \\ \lg\dfrac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}<0, \\ \lg\left(4(x+2)^2\right)>0. \end{cases}(1) \qquad \begin{cases} x+5>0, \\ \lg\dfrac{(x+2)^2(x+5)^2}{100}>0, \\ \lg\left(4(x+2)^2\right)<0. \end{cases}(2)$$

Решим систему (1), произведя её равносильные преобразования:

$$\begin{cases} x+5>0, \\ x\neq-2, (2(x+2))^2>1, \\ \left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}\right)^2<1 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>-5, \\ x\neq-2, (2x+4-1)\cdot(2x+4+1)>0, \\ \left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}-1\right)\cdot\left(\dfrac{x^2+7x+10}{10}+1\right)<0 \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)>0, \\ \left(x^2+7x\right)\left(x^2+7x+20\right)<0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)>0, \\ x(x+7)<0 \end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} -5<x<-2{,}5, \\ -1{,}5<x<0. \end{array}\right.$$

Из приведённых выкладок легко усмотреть, что преобразовывая аналогичным образом система (2), равносильна системе

$$\begin{cases} x>-5,\ x\neq-2, \\ (2x+3)(2x+5)<0, \\ (x+7)x>0, \end{cases}$$

которая не имеет решений. Таким образом, ответ: $(-5;\ -2{,}5)\cup(-1{,}5;\ 0)$.

Ответ: $(-5;-2{,}5)\cup(-1{,}5;0)$.

23. Задание 15 № 509822. Решите неравенство $\dfrac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}\geq 1.$

Решение.
Последовательно получаем:

$$\frac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}\geq1\Leftrightarrow\frac{5\lg^2 x-1}{\lg^2 x-1}-1\geq0\Leftrightarrow\frac{4\lg^2 x}{\lg^2 x-1}\geq0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \lg x<-1, \\ \lg x=0, \\ \lg x>1 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 0<x<\dfrac{1}{10}, \\ x=1, \\ x>10. \end{array}\right.$$

24. Задание 15 № 509843. Решите неравенство $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geq 0.$

Решение.

Обозначая $t=\log_5(25-x^2)$, получаем квадратное неравенство $t^2-3t+2\geq 0$, откуда $t\leq 1$ или $t\geq 2$. Тогда имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_5(25-x^2)\leq 1,\\ \log_5(25-x^2)\geq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<25-x^2\leq 5,\\ 25-x^2\geq 25\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}20\leq x^2<25,\\ x^2\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x\leq-\sqrt{20},\\ \sqrt{20}\leq x<5,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-5;-\sqrt{20}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{20};5).$

25. Задание 15 № 509890. Решите неравенство $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0.$

Решение.

Найдем ОДЗ: $4+3x-x^2>0\Leftrightarrow x^2-3x-4<0\Leftrightarrow(x-4)(x+1)<0\Leftrightarrow -1<x<4.$

$$\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0\Leftrightarrow\log_2^2(4+3x-x^2)-7\log_2(4+3x-x^2)+10>0.$$

Пусть $\log_2(4+3x-x^2)=t$, тогда $t^2-7t+10>0\left[\begin{array}{l}t>5,\\ t<2.\end{array}\right.$

Переходим к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(4+3x-x^2)>5,\\ \log_2(4+3x-x^2)<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4+3x-x^2>32,\\ 4+3x-x^2<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+28<0,\\ x^2-3x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2-3x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0.\end{array}\right.$$

Неравенство $x^2-3x+28<0$ — решений не имеет, т. к. $x^2-3x+28>0.$

Учитывая ОДЗ, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l}-1<x<4,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\ 3<x<4.\end{array}\right.\text{ или } x\in(-1;0)\cup(3;4).$$

Ответ: $(-1;0)\cup(3;4).$

26. Задание 15 № 510073. Решите неравенство $\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0.$

Решение.

Найдем ОДЗ: $4+3x-x^2>0\Leftrightarrow x^2-3x-4<0\Leftrightarrow(x-4)(x+1)<0\Leftrightarrow -1<x<4.$

$$\log_2^2(4+3x-x^2)+7\log_{0,5}(4+3x-x^2)+10>0\Leftrightarrow\log_2^2(4+3x-x^2)-7\log_2(4+3x-x^2)+10>0.$$

Пусть $\log_2(4+3x-x^2)=t$, тогда $t^2-7t+10>0\left[\begin{array}{l}t>5,\\ t<2.\end{array}\right.$

Переходим к переменной x:

$$\left[\begin{array}{l}\log_2(4+3x-x^2)>5,\\ \log_2(4+3x-x^2)<2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4+3x-x^2>32,\\ 4+3x-x^2<4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-3x+28<0,\\ x^2-3x>0\end{array}\right.\Leftrightarrow x^2-3x>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0.\end{array}\right.$$

Неравенство $x^2-3x+28<0$ — решений не имеет, т. к. $x^2-3x+28>0.$

Учитывая ОДЗ, получаем:

$$\left\{\begin{array}{l}-1<x<4,\\ \left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<0\end{array}\right.\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0,\\ 3<x<4.\end{array}\right.\text{ или } x\in(-1;0)\cup(3;4).$$

Ответ: $(-1;0)\cup(3;4).$

27. Задание 15 № 510094. Решите неравенство $\log_5^2(25-x^2)-3\log_5(25-x^2)+2\geq 0.$

Решение.

Обозначая $t=\log_5(25-x^2)$, получаем квадратное неравенство $t^2-3t+2\geq 0$, откуда $t\leq 1$ или $t\geq 2$. Тогда имеем:

$$\left[\begin{array}{l}\log_5(25-x^2)\leq 1,\\ \log_5(25-x^2)\geq 2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<25-x^2\leq 5,\\ 25-x^2\geq 25\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}20\leq x^2<25,\\ x^2\leq 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-5<x\leq-\sqrt{20},\\ \sqrt{20}\leq x<5,\\ x=0.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-5;-\sqrt{20}]\cup\{0\}\cup[\sqrt{20};5)$.

28. Задание 15 № 484589. Решите неравенство $\log_2(x^2+4x)+\log_{0,5}\dfrac{x}{4}+2\geq\log_2(x^2+3x-4)$.

Решение.

Неравенство имеет смысл при

$$\begin{cases}x^2+4x>0,\\ x>0,\\ x^2+3x-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(x+4)>0,\\ x>0,\\ (x-1)(x+4)>0\end{cases}\Leftrightarrow x>1.$$

Для таких x получаем:

$$\log_2(x(x+4))-\log_2\frac{x}{4}+2\geq\log_2((x-1)(x+4))\Leftrightarrow\log_2 x+\log_2(x+4)-\log_2 x+4\geq\log_2(x-1)+\log_2(x+4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\log_2(x-1)\leq 4\Leftrightarrow x-1\leq 16\Leftrightarrow x\leq 17.$$

Значит, $1<x\leq 17$.

Ответ: $(1;\ 17]$.

29. Задание 15 № 484593. Решите неравенство $3\log_{11}(x^2+8x-9)\leq 4+\log_{11}\dfrac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение.

Найдём значения x, при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases}x^2+8x-9>0,\\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x+9)(x-1)>0,\\ \dfrac{(x-1)^3}{x+9}>0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-9,\\ x>1.\end{array}\right.$$

Для таких x получаем:

$$3\log_{11}(x+9)(x-1)+\log_{11}\frac{x+9}{(x-1)^3}=\log_{11}\frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3}=\log_{11}(x+9)^4.$$

Тогда исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4\leq 4$. Учитывая, что неравенство определено на множестве $(-\infty,-9)\cup(1,+\infty)$, имеем:

$$2\log_{11}(x+9)^2\leq 4\Leftrightarrow(x+9)^2\leq 11^2\Leftrightarrow(x-2)(x+20)\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-20\leq x<-9,\\ 1<x\leq 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $[-20;\ -9)\cup(1;\ 2]$.