Неравенства с модулем

1. Задание 15 № 507667. Решите неравенство

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2}.$$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\left((x+1)^{-1}-(x+6)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2-10x|}{(x^2+7x+6)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2-10x|-25}{(x^2+7x+6)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -6, \\ x \ne -1, \\ |x^2-10x| \ge 25. \end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2-10x| \ge 25$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-10x-25 \ge 0, \\ x^2-10x+25 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 5+5\sqrt{2}, \\ x \le 5-5\sqrt{2}, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Исключая из полученного набора точки -6 и -1 получаем множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-6)\cup(-6;\,5-5\sqrt{2}]\cup\{5\}\cup[5+5\sqrt{2};\,+\infty)$.

2. Задание 15 № 507670. Решите неравенство

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2}.$$

Решение.
Преобразуем неравенство:

$$\left((-x+1)^{-1}-(-x+4)^{-1}\right)^2 \le \frac{|x^2+6x|}{(x^2-5x+4)^2} \Leftrightarrow \frac{|x^2+6x|-9}{(x^2-5x+4)^2} \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne 1, \\ x \ne 4, \\ |x^2+6x| \ge 9. \end{cases}$$

Решим неравенство $|x^2+6x| \ge 9$:

$$\left[\begin{array}{l} x^2+6x-9 \ge 0, \\ x^2+6x+9 \le 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -3-3\sqrt{2}, \\ x \le -3+3\sqrt{2}, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Исключая из полученного набора точки 1 и 4, получаем множество решений исходного неравенства: $(-\infty;\,-3-3\sqrt{2}]\cup\{-3\}\cup[-3+3\sqrt{2};\,4)\cup(4;\,+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;\,-3-3\sqrt{2}]\cup\{-3\}\cup[-3+3\sqrt{2};\,4)\cup(4;\,+\infty)$.

3. Задание 15 № 508356. Решите неравенство: $25x^2-3\,|3-\ 5x|<30x-9.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$25x^2-30x+9-3|3-5x|<0 \Leftrightarrow (5x-3)^2-3|3\ -\ 5x|<0.$$

Сделав замену $t=|3-5x|$, получаем неравенство $t^2-3t<0$, откуда $0<t<3$,

Тогда: $0<|5x-3|<3$, откуда $0<x<\dfrac{3}{5}$ или $\dfrac{3}{5}<x<\dfrac{6}{5}$.

Ответ: $\left(0;\ \dfrac{3}{5}\right)\cup\left(\dfrac{3}{5};\ \dfrac{6}{5}\right)$.

4. Задание 15 № 508358. Решите неравенство: $25x^2-4\,|8-\ 5x|<80x-64.$

Решение.

Решим второе неравенство системы:

$$25x^2-80x+64-4|8-5x|<0 \Leftrightarrow (5x-8)^2-4|8-5x|<0.$$

Сделаем замену $y=|8-5x|$. Тогда $y^2-4y<0 \Leftrightarrow 0<y<4.$

Вернемся к исходной переменной:

$$0<|8-5x|<4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<8-5x<4, \\ -4<8-5x<0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{4}{5}<x<\dfrac{8}{5}, \\ \dfrac{8}{5}<x<\dfrac{12}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\dfrac{4}{5};\ \dfrac{8}{5}\right)\cup\left(\dfrac{8}{5};\ \dfrac{12}{5}\right)$.

5. Задание 15 № 508380. Решите неравенство: $3|x+3|-3x\le 14-|2-x|.$

Решение.

Имеем:

$$3|x+3|+|2-x|\le 3x+14 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x-14\le 3(x+3)+(2-x)\le 3x+14, \\ -3x-14\le 3(x+3)-(2-x)\le 3x+14. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} -3x-14\le 2x+11\le 3x+14, \\ -3x-14\le 4x+7\le 3x+14. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\ge -5, \\ x\ge -3, \\ x\le 7 \end{array}\right. \Leftrightarrow -3\le x\le 7.$$

Ответ: $[-3;\ 7]$.

6. Задание 15 № 508422. Решите неравенство: $3|x+1|+\frac{1}{2}|x-2|-\frac{3}{2}x \le 8.$

Решение.

Раскрывая модули, получаем три случая:

Первый случай.

$$\begin{cases} -3x-3-\frac{1}{2}x+1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x \le 10, \\ x \le -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x \le -1.$$

Второй случай.

$$\begin{cases} 3x+3-\frac{1}{2}x+1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ -1 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 4, \\ -1 < x \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \le 2.$$

Третий случай.

$$\begin{cases} 3x+3+\frac{1}{2}x-1-\frac{3}{2}x \le 8, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x \le 6, \\ x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le 3.$$

Объединяя промежутки, получаем $-2 \le x \le 3.$

Ответ: $[-2;\ 3].$

7. Задание 15 № 508424. Решите неравенство: $3x-|x+8|-|1-x| \le -6.$

Решение.

Преобразуем неравенство:

$$-|x+8|-|1-x| \le -3x-6 \Leftrightarrow |x+8|+|1-x| \ge 3x+6.$$

Последнее неравенство заведомо выполняется, если правая часть отрицательна, то есть при $x < -2.$

Если $x \ge -2$, то

$$x+8+|x-1| \ge 3x+6 \Leftrightarrow |x-1| \ge 2(x-1).$$

Это верно тогда и только тогда, когда $x-1 \le 0.$ Решение неравенства: $x \le 1.$

Ответ: $(-\infty;\ 1].$

8. Задание 15 № 508430. Решите неравенство: $|x+2|-x|x| \le 0.$

Решение.

При любом $x \le 0$ неравенство $|x+2|-x|x| \le 0$ не выполняется. При $x > 0$ неравенство равносильно неравенству $x^2-x-2 \ge 0$, решением которого с учетом условия $x > 0$ является луч $x \ge 2.$

Ответ: $[2;\ +\infty).$

9. Задание 15 № 508433. Решите неравенство: $\left|2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8}\right| \geq 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}$.

Решение.
Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2+\frac{19}{8}x-\frac{1}{8} \geq 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8}, \\ -2x^2-\frac{19}{8}x+\frac{1}{8} \geq 3x^2+\frac{1}{8}x-\frac{19}{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\frac{9}{4}x-\frac{9}{4} \leq 0, \\ x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2} \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-3)\left(x+\frac{3}{4}\right) \leq 0, \\ (x+1)\left(x-\frac{1}{2}\right) \leq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-1;\ 3]$.

10. Задание 15 № 508435. Решите неравенство: $\left|x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12}\right| \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}$.

Решение.
Неравенство равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} x^2-\frac{29}{12}x-\frac{35}{12} \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}, \\ -x^2+\frac{29}{12}x+\frac{35}{12} \geq 2x^2-\frac{61}{12}x-\frac{19}{12}. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-\frac{8}{3}x+\frac{4}{3} \leq 0, \\ x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2} \leq 0. \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) \leq 0, \\ (x-3)\left(x+\frac{1}{2}\right) \leq 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow -0,5 \leq x \leq 3.$$

Ответ: $[-0,5;\ 3]$.

11. Задание 15 № 508567. Решите неравенство: $\left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right|^{x-1,2}+\left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right|^{1,2-x} \leq 2.$

Решение.
Неравенство имеет смысл при $\frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \neq 0$, то есть при $x \neq 1$.

Пусть $\left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right|^{x-1,2}=t$. Тогда неравенство принимает вид $t+\frac{1}{t} \leq 2$, откуда $t=1$ или $t<0$. При всех допустимых x основание степени положительно и, следовательно, $t>0$. Значит, неравенство выполняется только при $t=1$.

Выясним, при каких x это происходит:

$$\left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right|^{x-1,2}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left|\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right|=1, \\ \begin{cases} x-1,2=0, \\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{3} \neq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,5, \\ x=1,2, \\ x=-0,5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-0,5;\ 1,2;\ 2,5\}$.

12. Задание 15 № 508568. Решите неравенство: $|2x-6|^{x+1}+|2x-6|^{-x-1}\le 2.$

Решение.

Неравенство имеет смысл при $2x-6\ne 0$, то есть при $x\ne 3.$

Пусть $|2x-6|^{x+1}=t, t>0.$ Тогда неравенство принимает вид

$$t+\frac{1}{t}\le 2\Leftrightarrow \frac{t^2-2t+1}{t}\le 0\Leftrightarrow \frac{(t-1)^2}{t}\le 0.$$

Последнее неравенство выполнено только при $t=1$. Значит,

$$|2x-6|^{x+1}=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}|2x-6|=1,\\ x+1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,5,\\ x=3,5,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{-1;\ 2,5;\ 3,5\}.$

13. Задание 15 № 507216. Решите неравенство $1-\frac{2}{|x|}\le\frac{23}{x^2}.$

Решение.

Заметим, что $x^2=|x|^2$ и преобразуем неравенство:

$$\frac{x^2-2|x|-23}{x^2}\le 0\Leftrightarrow \frac{\left(|x|-1-2\sqrt{6}\right)\left(|x|-1+2\sqrt{6}\right)}{x^2}\le 0.$$

Учитывая, что $|x|+2\sqrt{6}-1>0$ при всех значениях x, получаем: $|x|-1-2\sqrt{6}\le 0$ при условии $x\ne 0.$
Тогда $-1-2\sqrt{6}\le x<0$ или $0<x\le 1+2\sqrt{6}.$

Ответ: $\left[-1-2\sqrt{6};\ 0\right)\cup\left(0;\ 1+2\sqrt{6}\right].$