Текстовые задачи

Процент от числа — это сотая доля этого числа. Задача найти $p\%$ от a, эквивалентна задаче вычислить произведение $p \cdot \frac{a}{100}$ или $0,01pa$. Например, вычисляя 6% от 150, получаем: $0,06 \cdot 150 = 6 \cdot 1,5 = 9$. Справедливы следующие утверждения.

– Если некоторое число a увеличить на $p\%$, то получим $a(1+0,01p)$.

– Если некоторое число a уменьшить на $p\%$, то получим $a(1-0,01p)$.

– Если некоторое число a увеличить на $p_1\%$, а полученный результат уменьшить на $p_2\%$, то оно получим $a(1+0,01p_1)(1-0,01p_2)$.

– Положенная в банк под $p\%$ годовых начальная сумма S_0 через n лет с учетом процентов достигнет величины $S_n = S_0(1+0,01p)^n$.

Движение по прямой. Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть v_1 и v_2, расстояние между ними S. Тогда:

– при движении навстречу друг другу они встретятся через время $\frac{S}{v_1+v_2}$;

– при движении в одну сторону и при $v_1 > v_2$, первое тело догонит второе через время $\frac{S}{v_1-v_2}$;

– при движении в противоположные стороны тела через время t будут находиться друг от друга на расстоянии $S+(v_1+v_2)t$.

– Если тело движется по течению реки, то его скорость относительно берега w есть сумма скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w=u+v$, при движении против течения $w=u-v$.

– Если тело движется против течения реки, то его скорость относительно берега w есть разность скорости тела в стоячей воде v и скорости течения реки u: $w=v-u$.

Движение по окружности. Пусть скорости двух тел, начинающих движение одновременно, суть v_1 и v_2, тогда:

– при движении в одном направлении по замкнутой траектории длины S при условии $v_1 > v_2$ тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\frac{S}{v_1-v_2}$;

– при встречном движении по замкнутой траектории длины S тела, отправившиеся из одной точки, снова встретятся через время $\frac{S}{v_1+v_2}$.

Большинство экзаменационных задач на движение могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой x, выясняем область ее определения;

– составляем таблицу со столбцами «Скорость», «Время», «Расстояние»;

– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них x и данные задачи;

– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $S = vt$, $v = \frac{S}{t}$, $t = \frac{S}{v}$;

– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;

– решаем полученное уравнение на области определения x, и находим неизвестную.

Большинство экзаменационных задач на совместную работу могут быть решены при помощи следующего алгоритма:

– обозначаем неизвестную величину буквой x, выясняем область ее определения;

– составляем таблицу со столбцами «Производительность», «Время», «Объем работы»;

– заполняем два столбца таблицы, вписывая в них x и данные задачи; если объем работы не задан принимаем его за 1;

– заполняем оставшийся «ключевой» столбец по формулам $V = vt$, или $v = \frac{V}{t}$, или $t = \frac{V}{v}$, связывающим объем работы V, производительность v и время t.

– составляем уравнение на данные ключевого столбца таблицы;

– решаем полученное уравнение на области определения x, и находим неизвестную.

Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия — числовая последовательность вида

$$a_1,\ a_1 + d,\ a_1 + 2d,\ \dots\ a_1 + (n-1)d,\ \dots,$$

то есть последовательность чисел (членов прогрессии), каждое из которых, начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа d (шага или разности прогрессии):

$$a_n = a_{n-1} + d.$$

Любой (n-й) член прогрессии может быть вычислен по формуле:

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

где a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии.

И еще одна формула, которая способна облегчить ситуацию в отдельных случаях:

$$a_n = a_k + (n-k)d,$$

где $n > k$, d – разность прогрессии.

Сумма первых n членов арифметической прогрессии

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

может быть найдена по формулам

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n,$$

где a_1 — первый член прогрессии, a_n — член с номером n, n — количество суммируемых членов.

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия — последовательность чисел (членов прогрессии) b_1, b_2, b_3 … , в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определённое число q (знаменатель прогрессии):

$$b_1,\ b_1q,\ b_1q^2,\ b_1q^3,\ \ldots, \text{ где } b_1 \neq 0,\ q \neq 0$$

Например, последовательность 1, 2, 4, 8, 16, … – геометрическая ($q = 2$).

Знаменатель геометрической прогрессии

$$q = \frac{b_{k+1}}{b_k},\ k \in N$$

Характеристическое свойство геометрической прогрессии

$$b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1} \text{ для } n > 1$$

Формула n-го члена геометрической прогрессии

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Сумма n первых членов геометрической прогрессии

$S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$, где $q \neq 1$

(если же $q=1$, то $S_n = b_1$)

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

При $|q| < 1$, геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*. Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии называется число

$$S = \frac{b_1}{1-q}$$