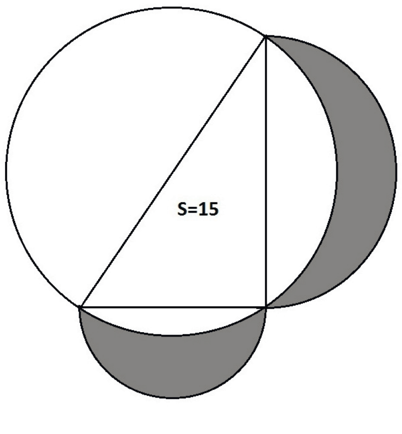
Решения задач олимпиады „Математический олимп“ 2023 года

1. На катетах прямоугольного треугольника площади 15 квадратных единиц как на диаметрах построены две полуокружности. Вокруг треугольника описана окружность (см. рис.). Найти суммарную площадь двух закрашенных луночек.



Решение. Пусть катеты прямоугольного треугольника равны a и b линейных единиц.Тогда площади полукругов, построенных на катетах как на диаметрах, равны $\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4}$ и $\frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4}$ соответственно. Площадь половины круга, описанного вокруг треугольника, равна $\frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4}$, где c – гипотенуза треугольника, квадрат которой равен, очевидно, a^2+b^2.

Нетрудно заметить, что площадь закрашенных луночек равна сумме площадей полукругов, построенных на катетах, минус половина площади круга, описанного вокруг треугольника, плюс площадь треугольника, равная по условию 15.

Таким образом, искомая площадь равна

$$\frac{1}{2}\pi\frac{a^2}{4}+\frac{1}{2}\pi\frac{b^2}{4}-\frac{1}{2}\pi\frac{c^2}{4}+15=\frac{\pi}{8}(a^2+b^2-c^2)+15=15,$$

т.е. не зависит от пропорций треугольника.

Ответ. 15 квадратных единиц.

2. (3 балла). При каких a и b многочлен $x^4+ax^3+bx^2-8x+1$ обращается в точный квадрат?
Решение. Пусть заданный многочлен есть квадрат некоторого квадратного трехчлена, т.е. выполняется равенство

$$x^4+ax^3+bx^2-8x+1=(mx^2+nx+p)^2,$$

где m,n,p — некоторые вещественные числа. Выполнив возведение трехчлена в квадрат и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений

$$m^2=1,\ 2mn=a,\ n^2+2mp=b,\ 2np=-8,\ p^2=1.$$

У этой системы имеется четыре решения.

1. $m=1,p=1\ \Rightarrow\ n=-4,\ b=16+2=18,\ a=-8.$
2. $m=-1,p=1\ \Rightarrow\ n=-4,\ b=16-2=14,\ a=8.$
3. $m=1,p=-1\ \Rightarrow\ n=4,\ b=16-2=14,\ a=8.$
4 $m=-1,p=-1\ \Rightarrow\ n=4,\ b=16+2=18,\ a=-8.$

Итак, имеется две подходящие пары значений параметров $a=-8, b=18$ и $a=8, b=14$.

3. (4 балла). Произведение 19-ти последовательных натуральных чисел делится на 2023. Какое наименьшее значение может принимать их среднее арифметическое?
Решение. Пусть последовательность начинается с числа $n\geq 1$. Тогда последнее число последовательности есть $n+18$. Среднее арифметическое этих чисел есть

$$S=\frac{n+(n+1)+(n+2)+...+(n+18)}{19}=\frac{19n+9\cdot 19}{19}=n+9.$$

Произведение этих чисел

$$\Pi=n\cdot(n+1)\cdot(n+2)\cdot...\cdot(n+18)$$

делится на 2023. Отметим, что $2023=17\cdot 17\cdot 7$. Поэтому для того, чтобы Π делилось на 2023, необходимо, чтобы среди чисел $\{n,n+1,...,n+18\}$ либо имелось число, кратное 17^2, либо имелось два разных числа, кратных 17. Наименьшее число, кратное 17^2, это 289 и тогда

$$n+18=289\ \Rightarrow\ n=271\ \Rightarrow\ S=280.$$

Минимальный набор чисел, содержащий два числа, кратных 17, получается при $n=16$. В такой набор входят числа 17 и 34. В этом случае $S=16+9=25<280$. Тем самым получен ответ: 25.

4. (4 балла). Докажите, что при любом натуральном n хотя бы одно из чисел $2n+3$ и $5n^2+1$ является составным.

Решение. Любое натуральное число n при делении на 3 может иметь остатки 0, 1 или 2, т.е. представимо в виде $n = 3k + l$, где k – неотрицательное целое число, а $l \in \{0,\ 1,\ 2\}$.

При $l = 0$ натуральное число $n = 3k$, где $k > 0$. Следовательно, число $2n+3 = 6k+3 = 3(2k+1)$ делится на 3 и, следовательно, является составным, поскольку $2k+1 > 1$.

При $l = 1$ число $5n^2+1 = 5(3k+1)^2+1 = 45k^2+30k+6 = 3(15k^2+10k+2)$ делится на 3 и, следовательно, является составным, поскольку $15k^2+10k+2 > 1$ при любом $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Аналогично, при $l = 2$ число $5n^2+1 = 5(3k+2)^2+1 = 45k^2+60k+21 = 3(15k^2+20k+7)$ также делится на 3 и, следовательно, является составным.

Вывод: При любом натуральном n хотя бы одно из заданных чисел является составным.

5. (5 баллов). Докажите, что

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ если } x+y+z=1.$$

Решение. Обозначим $x = \frac{1}{3}+\alpha$, $y = \frac{1}{3}+\beta$, $x = \frac{1}{3}+\gamma$. Из условия задачи следует, что $\alpha+\beta+\gamma = 0$. Тогда

$$x^2+y^2+z^2 = 3\cdot\frac{1}{9}+\frac{2}{3}(\alpha+\beta+\gamma)+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \frac{1}{3}+\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \geq \frac{1}{3}.$$

6. (5 баллов). Для равнобедренного треугольника ABC (где $AB = BC$) с известным углом $\beta = \angle ABC$ построена описанная окружность, к которой в точках A, B, C проведены касательные, образующие треугольник MNK. Найдите отношение k площадей треугольников ABC и MNK. При каком β отношение k равно 1/4 ?

Решение. Пусть R — радиус окружности. $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC\cdot h = R\sin\beta\cdot R(1+\cos\beta)$;
$S_{\triangle MNK} = \frac{1}{2}\cdot 2R\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\cdot R(1+1/\cos\beta) \quad\Rightarrow\quad k = 2\sin^2\frac{\beta}{2}\cdot\cos\beta$. Отсюда получаем ответ: $k = (1-\cos\beta)\cos\beta$, $k = \frac{1}{4}$ при $\beta = 60^\circ$.