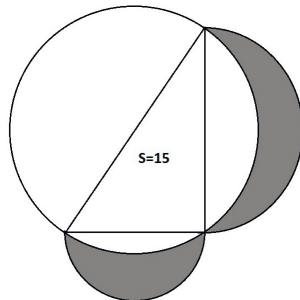


Задачи олимпиады „Математический олимп“ 2023 года

1. (2 балла). На катетах прямоугольного треугольника площади 15 квадратных единиц как на диаметрах построены две полуокружности. Вокруг треугольника описана окружность (см. рис.). Найти суммарную площадь двух закрашенных луночек.



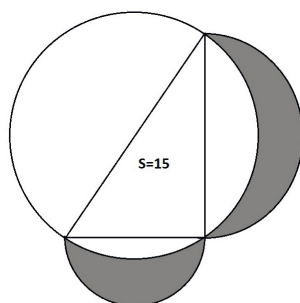
2. (3 балла). При каких a и b многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ обращается в точный квадрат?
3. (4 балла). Произведение 19-ти последовательных натуральных чисел делится на 2023. Какое наименьшее значение может принимать их среднее арифметическое?
4. (4 балла). Докажите, что при любом натуральном n хотя бы одно из чисел $2n + 3$ и $5n^2 + 1$ является составным.
5. (5 баллов). Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ если } x + y + z = 1.$$

6. (5 баллов). Для равнобедренного треугольника ABC (где $AB = BC$) с известным углом $\beta = \angle ABC$ построена описанная окружность, к которой в точках A, B, C проведены касательные, образующие треугольник MNK . Найдите отношение k площадей треугольников ABC и MNK . При каком β отношение k равно $1/4$?

Задачи олимпиады „Математический олимп“ 2023 года

1. (2 балла). На катетах прямоугольного треугольника площади 15 квадратных единиц как на диаметрах построены две полуокружности. Вокруг треугольника описана окружность (см. рис.). Найти суммарную площадь двух закрашенных луночек.



2. (3 балла). При каких a и b многочлен $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$ обращается в точный квадрат?
3. (4 балла). Произведение 19-ти последовательных натуральных чисел делится на 2023. Какое наименьшее значение может принимать их среднее арифметическое?
4. (4 балла). Докажите, что при любом натуральном n хотя бы одно из чисел $2n + 3$ и $5n^2 + 1$ является составным.
5. (5 баллов). Докажите, что

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}, \text{ если } x + y + z = 1.$$

6. (5 баллов). Для равнобедренного треугольника ABC (где $AB = BC$) с известным углом $\beta = \angle ABC$ построена описанная окружность, к которой в точках A, B, C проведены касательные, образующие треугольник MNK . Найдите отношение k площадей треугольников ABC и MNK . При каком β отношение k равно $1/4$?