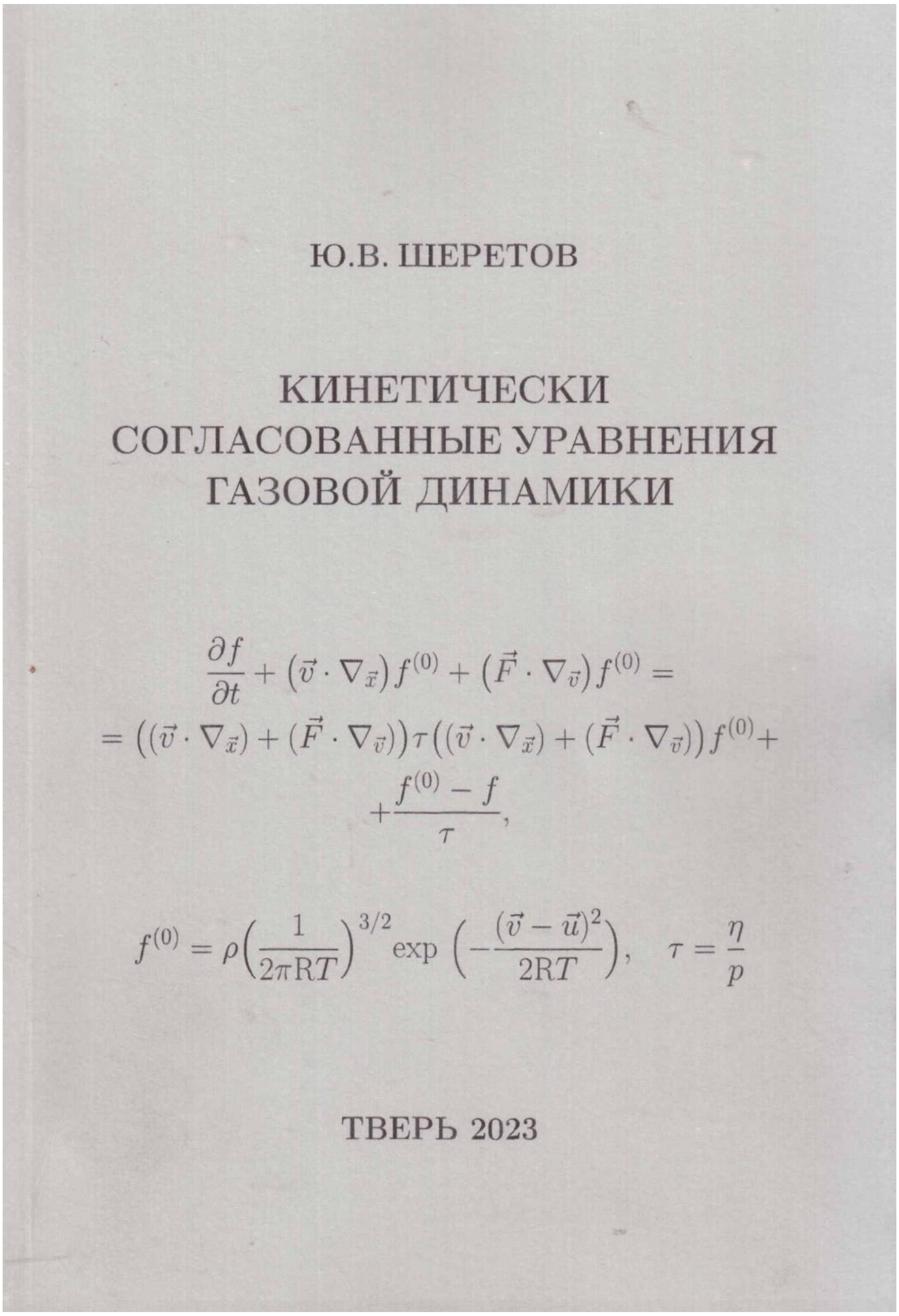
ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Шеретов Юрий Владимирович
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru



Классическая система Эйлера [1, 2] в газовой динамике без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + div(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + div\left[\rho \vec{u}\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] = 0. \qquad (3)$$

Дополним ее уравнениями состояния совершенного газа

$$p = \rho RT, \qquad \varepsilon = c_v T = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \qquad s = c_v \ln\left(\frac{RT}{\rho^{(\gamma-1)}}\right) + s_0. \qquad (4)$$

Здесь R − газовая постоянная,

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \qquad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \qquad (5)$$

– удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, $\gamma = c_p / c_v$ – показатель адиабаты, s_0 – произвольная постоянная. Неизвестными функциями в (1.1) – (1.4) являются плотность $\rho = \rho(\vec{x}, t) > 0$, скорость $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давление $p = p(\vec{x}, t) > 0$. Температура $T = T(\vec{x}, t) > 0$, удельная внутренняя энергия $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t) > 0$ и удельная энтропия $s = s(\vec{x}, t)$ могут быть найдены с помощью соотношений (4). Скорость звука в газе определим по формуле Лапласа

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}\,. \qquad (6)$$

Из (4) следует, что для макропараметров газа выполняется тождество Гиббса

$$Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (7)$$

Теорема 1. *Пусть на множестве* $V \times \left[0,\ T_f\right]$, *где* V *– область в* $R^3_{\vec{x}}$, T_f *– заданное положительное число, определены непрерывно дифференцируемые функции* $\rho = \rho(\vec{x}, t) > 0$, $p = p(\vec{x}, t) > 0$, $T = T(\vec{x}, t) > 0$, $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t) > 0$ *и* $s = s(\vec{x}, t)$, *подчиняющиеся уравнениям состояния (4). Кро-*

ме того, задано векторное поле $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ *класса гладкости* $C^1\left(V \times \left[0,\ T_f\right]\right)$. *Тогда для всех* $(\vec{x}, t) \in V \times \left[0,\ T_f\right]$ *справедливо равенство*

$$\frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u})\right)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\left(\rho\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon + p div\vec{u}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)s\right)^2. \qquad (8)$$

Доказательство. Введем дифференциальный оператор

$$D = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla) \qquad (9)$$

и представим (8) в виде

$$\frac{p}{\rho^2}\left(D\rho + \rho div\vec{u}\right)^2 + \frac{1}{\rho\varepsilon}\left(\rho D\varepsilon + p div\vec{u}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\left(Dp + \rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(Ds\right)^2. \qquad (10)$$

Раскрывая в (9) квадраты суммы двух слагаемых, получим

$$\frac{p}{\rho^2}\left(D\rho\right)^2 + 2\frac{p}{\rho}\left(D\rho\right)div\vec{u} + p\left(div\vec{u}\right)^2 +$$
$$+ \frac{\rho}{\varepsilon}\left(D\varepsilon\right)^2 + 2\frac{p}{\varepsilon}\left(D\varepsilon\right)div\vec{u} + \frac{p^2}{\rho\varepsilon}\left(div\vec{u}\right)^2 =$$
$$= \frac{1}{\rho c_s^2}\left(Dp\right)^2 + 2\left(Dp\right)div\vec{u} + \rho c_s^2\left(div\vec{u}\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(Ds\right)^2. \qquad (11)$$

Представим (10) в эквивалентном виде

$$\frac{p}{\rho^2}\left(D\rho\right)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}\left(D\varepsilon\right)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}\left(Dp\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(Ds\right)^2 +$$
$$+ 2\left(Dp - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho\right)div\vec{u} + \left(\rho c_s^2 - \frac{p^2}{\rho\varepsilon} - p\right)\left(div\vec{u}\right)^2. \qquad (12)$$

Так как

$$Dp - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho = (\gamma - 1)D\left(\rho\varepsilon\right) - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho =$$

$$= (\gamma-1)\rho D\varepsilon + (\gamma-1)\varepsilon D\rho - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho =$$

$$= \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon + \frac{p}{\rho}D\rho - \frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon - \frac{p}{\rho}D\rho = 0, \qquad (13)$$

$$\rho c_s^2 - \frac{p^2}{\rho\varepsilon} - p = \rho\left(\frac{\gamma p}{p}\right) - (\gamma-1)p - p = 0, \qquad (14)$$

соотношение (12) можно записать следующим образом:

$$\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2 + \frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2. \qquad (15)$$

При проведении выкладок (13), (14) были использованы второе уравнение состояния (4) и формула Лапласа (6).

Преобразуем первое слагаемое в правой части (15):

$$\frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}\left(D(\rho\varepsilon)\right)^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}(\rho D\varepsilon + \varepsilon D\rho)^2 =$$

$$\frac{(\gamma-1)^2\varepsilon^2}{\rho c_s^2}(D\rho)^2 + \frac{(\gamma-1)^2\rho}{c_s^2}(D\varepsilon)^2 + 2\frac{(\gamma-1)^2\varepsilon}{c_s^2}(D\rho)D\varepsilon =$$

$$= \frac{p}{\gamma\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \qquad (16)$$

Из тождества Гиббса (7) следует, что

$$TDs = D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho. \qquad (17)$$

Принимая во внимание (17), преобразуем второе слагаемое в правой части (15):

$$\frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2 = \frac{\rho}{c_p T}(TDs)^2 = \frac{\rho}{c_p T}\left(D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho\right)^2 =$$

$$= \frac{p^2}{c_p T\rho^3}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{c_p T}(D\varepsilon)^2 - 2\frac{p}{c_p T\rho}(D\varepsilon)D\rho =$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{\gamma\varepsilon}(D\varepsilon)^2 - 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \qquad (18)$$

Складывая (16) и (18), выводим (15).

Повторяя рассуждения из [2], представим систему (1) – (3) в недивергентной форме

$$D\rho + \rho div\vec{u} = 0, \tag{19}$$

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \tag{20}$$

$$\rho D\varepsilon + p\, div\vec{u} = 0. \tag{21}$$

В [2] на странице 33 система Эйлера выписана также в симметрической форме

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \tag{22}$$

$$\frac{1}{\rho c_s^2} Dp + div\vec{u} = 0, \tag{23}$$

$$Ds = 0. \tag{24}$$

Системы (19) − (21) и (22) − (24) необходимо дополнить уравнениями состояния (4).

Теорема 2. *Всякое непрерывно дифференцируемое на множестве решение* $\rho = \rho(\vec{x},t) > 0$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, $p = p(\vec{x},t) > 0$ *системы* (19) − (21) *является решением системы* (22) − (24). *Обратное утверждение также справедливо.*

Доказательство. Уравнения (20) и (22) в обеих системах совпадают. Если справедливы равенства (19) и (21), то левая часть (8) обращается в нуль. Таким образом,

$$\frac{1}{\rho c_s^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)s\right)^2 = 0. \tag{25}$$

Из (25) следует, если принять во внимание определение (9), что равенства (23) и (24) также выполняются. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Итак, тождество (8) позволяет легко установить известный факт эквивалентности двух рассматриваемых систем на указанном классе функций. Другие приложения подобных тождеств можно найти в [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. 336 с.
3. Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.
4. Шеретов Ю.В. О некоторых тождествах в газовой динамике // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 1. В печати.