Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
V Всероссийской научно-практической конференции
28 – 30 марта 2024 года, Тверь

ТВЕРЬ 2024

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я431
П27

П27 Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы V Всероссийской научно-практ. конф. (28 – 30 марта 2024 года, г. Тверь) // под ред. Ю.В. Чемариной, А.А. Голубева. – Тверь: Тверской государственный университет, 2024. – 152 с.

ISBN 978-5-7609-1919-9

В сборнике трудов представлены материалы V Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 28 – 30 марта 2024 г. в г. Твери. Организатором конференции выступил математический факультет Тверского государственного университета.

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я431

ISBN 978-5-7609-1919-9

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 372.851

ВВЕДЕНИЕ ПОНЯТИЯ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

Баранова Ольга Евгеньевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
baranova.oe@tversu.ru

Патрина Анна Андреевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
malkova.anna99@mail.ru

Романова Светлана Анатольевна
МБОУ СОШ №17, г. Тверь
svetaromadoma@yandex.ru

Ключевые слова: *функция, предел функции, производная функции, методика изучения производной.*

Аннотация. В работе описывается подход к введению понятия производной функции в курсе «Алгебра и начала математического анализа» в рамках учебного предмета «Математика» (углублённый уровень) в 10-11 классах.

Подготовка к 2023-2024 учебному году, как и всегда, предполагает составление рабочей программы дисциплины, соответствующей действующим нормативным документам в сфере образования РФ. В нашем случае это учебный предмет «Математика» (углублённый уровень, 10-11 классы), курс «Алгебра и начала математического анализа».

Основными документами, регламентирующими содержание образования, являются

[A] приказ Министерства просвещения РФ от 18.05.2023 №317 «Об утверждении федеральной образовательной программы среднего общего образования»,

[B] приказ Министерства просвещения Российской Федерации от 21.09.2022 № 858 «Об утверждении федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность и установления предельного срока использования исключенных учебников»,

[C] федеральная рабочая программа среднего общего образования «Математика» (углублённый уровень) для 10-11 классов образовательных организаций, разработанная ФГБНУ «Институт стратегии развития образования» в рамках концепции единого общего содержания образования.

Раньше, подходя в 11 классе к изучению производной, мы имели в арсенале полный набор основных элементарных функций со свойствами и графиками, представление о рациональных и дробно рациональных функциях, владение методами решения различных неравенств. Всё это позволяло приводить множество примеров, иллюстрирующих понятия предела функции в точке и на бесконечности, отрабатывать определение производной и технику дифференцирования на разнообразных задачах, иллюстрировать механический и геометрический смыслы производной, понятия стационарной, критической точек, понятия и условия существования экстремума на хорошо известных к этому времени графиках элементарных функций, проводить полное исследование

Теперь, согласно [A] и [C], имеем следующее. Начало изучения производной (определение, правила дифференцирования, физический и геометрический смыслы) приходится на четвёртую четверть 10 класса, 20 часов перед заключительным повторением курса (5 часов). Продолжение, связанное с применением производной к исследованию функций, запланировано на первую четверть 11 класса в объёме 22 часов. Ни один из учебников из [B, строки 739-742] этому не соответствует.

Далее обнаруживаем, что единое содержание обучения ни в десятом, ни в одиннадцатом классе не предполагает изучения степенной функции с рациональным, иррациональным и произвольным действительным показателем, многочлена. При этом тематическое планирование в [C] всё-таки содержит вопросы, связанные с многочленами (10 класс, первый раздел). Изучение композиции функций предполагают оба документа, но рассматривать при изучении производной в 10 классе композиции, для которых нахождение области определения требует решения показательного, логарифмического или иррационального неравенства, мы не можем, т.к. изучение методов решения таких неравенств перенесено на 11 класс. Более того, тематическое планирование для 11 класса в [C] предполагает изучение применения производной к исследованию функций и интегрирования раньше изучения тригонометрических функций и методов решения неравенств и их систем.

Таким образом, подходя к понятию производной, мы имеем скудный набор функций для поясняющих иллюстраций, отработки правил дифференцирования, а в 11 классе исследование трансцендентных функций проводить не можем, тригонометрические функции вообще остаются за пределами дифференцирования и интегрирования.

И наконец, последний удар на подходе к изучению производной: ни [A], ни [C] не предполагают изучения понятия предела функции в точке и на бесконечности, при этом в качестве предметных результатов прописаны свободное оперирование понятием непрерывной функции, точки разрыва, асимптоты графика, первой и второй производной.

В такой ситуации остаётся уповать на системно-деятельностный подход, который нередко рассматривают как самостоятельное добывание учениками знания, а не получение их в готовом виде, или на опыт, мастерство и небезразличие учителя, продуманные решения методических объединений образовательных организаций при разработке основной рабочей программы среднего общего образования с содержанием и планируемыми результатами не ниже, чем в [1,3].

Обратимся теперь к содержательным аспектам изучения понятия производной.

Введение понятия производной в школьном курсе математики обычно сопровождается некоторыми сложностями, возникающими у учащихся в связи с высокой степенью абстракции преподаваемого материала, большим количеством новых терминов и довольно поверхностным предварительным изучением понятия предела. Педагогу очень важно изначально выбрать верный подход к обучению, учитывая особенности класса, уровень подготовки учеников и особенности программы.

Кроме того, существенным фактором в построении школьного урока является ограниченность во времени. Стандартный школьный урок длится всего 45 минут.

При этом ученик не должен выступать объектом обучения, важна его учебная деятельность как субъекта, связанная не только с прослушиванием речи учителя, но и с ответами на вопросы учителя по ходу изложения нового материала и разбора примеров, собственным рассуждением и вопрошанием, самостоятельным решением задач.

Одним из методических приёмов введения нового понятия является предварительное решение задачи, обуславливающей появление этого понятия, целесообразность или разумность его введения.

Классическими примерами, приводящими к понятию производной, являются задачи об отыскании мгновенной скорости точки и о нахождении касательной к графику функции [1,2].

Известные коллективы авторов школьных учебников Никольский С.М. и др., Колмогоров А.Н. и др, Мерзляк А.Г. и др., Мордкович А.Г. и др. в качестве наводящих рассматривают обе классические задачи, группы Алимов А.Ш. и др., Колягин Ю.М. и др. в качестве предварительной задачи рассматривают только задачу о мгновенной скорости, изучая вопрос о касательной в рамках геометрического смысла производной.

Авторам этой заметки импонирует формальный подход к определению производной без решения наводящей задачи, применённый в [3]. Аргументы в пользу формального введения современного понятия производной следующие.

Сделать математику инструментом для физики на этом этапе мы опоздали. Понятие мгновенной скорости материальной точки, как предела средней скорости при стремлении длины временного промежутка к нулю, вводится в первой четверти 10 класса. Опереться на навыки нахождения мгновенной скорости как предела нельзя, т.к. раздел «Механика» курса физики 10 класса не предполагает решения таких задач.

Наводящие соображения из задачи о касательной вряд ли могут быть наводящими, т.к. сами основаны на новом для школьника понятии касательной к кривой.

Опыт дедуктивных рассуждений от общего определения понятия к его специализации на конкретные объекты, не использование метода аналогии, часто применяемого в школе, полезен для обучения в высшей школе.

Экономия времени урока в виду отсутствия предварительных рассуждений позволяет совершенствовать навыки нахождения предела функции, осознавая значимость изученного и его связь с новым.

Освоение общего приёма предельного перехода в разностном отношении для нахождения производной функции позволяет в качестве примеров привести различные интерпретации физического смысла производной (мгновенной скорости, силы тока, линейной плотности [3]), экономического толкования производной как производительности, предельных издержек, тем самым продемонстрировать применение производной для построения математических моделей реальных ситуаций. Отработку техники дифференцирования можно разнообразить задачами «практического содержания», связанными с определением скорости изменения различных величин. Кроме того, возникает возможность, не смешивая с другими знаниями, подойти к определению касательной к графику функции, новому, отличному от имеющегося в опыте учеников представления о касательной к окружности, получить геометрическое приложение производной и уравнение касательной.

И наконец, последний аргумент – историческая достоверность. Разбор двух классических задач в [1, 2] доводит до читателя идеи И. Ньютона и Г. Лейбница (17 век) о замене приращения функции, соответствующего малому изменению аргумента, линейной функцией, т.е. её дифференциалом. Именно эта идея «метода флюксий» развита Ньютоном в «теорию бесконечных рядов». Термин «производная» и определение производной как предела разностного отношения появились спустя почти сто лет, их связывают с работами Ж. Лагранжа, О. Коши и других.

Высказанные соображения и опыт преподавания позволяют сформулировать представленную ниже схему введения понятия производной, в предположении, что предварительно изучены вопросы, связанные с пределом и непрерывностью функции. Изложенный фрагмент содержания урока по теме «Определение производной функции» охватывает классические этапы урока: актуализация знаний, изучение нового материала, закрепление. Мы не являемся сторонниками вульгарного понимания мотивации к изучению нового, как сиюминутного вопроса «Зачем это нужно?» и ничем, кроме догадок, не обоснованного ответа учеников на него. Изучая различные функции, их свойства, мы неоднократно обсуждали со школьниками потребность в общем подходе, универсальном инструменте для проведения исследования. Поэтому мотивацией можем считать: «этот день настал».

Этап актуализации знаний. Подготовительные задачи. Работаем с аналитическим и графическим способами задания функции, значением функции в точке, подготавливаем к восприятию нового понятия приращения.

Задача 1. Найти изменение функции $y = x^2$ при изменении независимого аргумента x от 0 до 1, от -2 до 0, от -1 до 1, от a до b.

Задача 2. Дан график функции (на доске). Найти изменение значений функции при изменении независимого аргумента x от 0 до 1, от -2 до 0, от -1 до 1, от a до b.

Этап изучения нового материала. Формально вводим определение производной функции в точке. Ключевые моменты: формулировка определения, усвоение новых терминов и обозначений, применение определения для нахождения производных конкретных функций, производная функции в одной точке – это число, определение такого числа для множества аргументов порождает новую функцию-производную.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b)$, x_0 – произвольная точка этого интервала. Изменим основной аргумент x точке x_0 на величину Δx, получим новую точку $x_0 + \Delta x$. В этом случае говорят «дадим основному аргументу x в точке x_0 приращение Δx». Выясняем, где на оси абсцисс находится $x_0 + \Delta x$: справа от x_0, если $\Delta x > 0$, слева от x_0, если $\Delta x < 0$, совпадает с x_0, если $\Delta x = 0$, сопровождаем рассуждения рисунком.

В результате изменения независимого аргумента значение функции изменится на величину $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. В этом случае говорят, что функция получит приращение $\Delta y = \Delta y(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, сопровождаем рассуждения рисунком.

Составим разностное отношение, т.е. отношение приращения функции к приращению независимого аргумента

$$\frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Если существует конечный предел отношения приращения функции и вызвавшему его приращению основного аргумента, при стремлении последнего к нулю, т.е. предел вида

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Вводим обозначения $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, f', y', $f'(x)$, проговариваем, как они читаются.

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0, то говорят, что эта функция дифференцируема в точке x_0. Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке интервала $(a; b)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на этом интервале. Операцию нахождения производной функции называют дифференцированием.

Теперь переходим к работе с определением, рассматривая следующие примеры. Смысл разбираемых примеров: показать, что производная функции в точке является числом, а не символом $f'(x_0)$, продемонстрировать значимость слов «если существует конечный предел» в определении, отработать новый вид деятельности, связанный с нахождением числа способом, отличным от четырёх арифметических действий, операций потенцирования, логарифмирования и возведения в степень, подготовить к осознанию производной как функции, восприятию информации о том, что производные основных элементарных функций известны, являются элементарными функциями и зафиксированы в таблице производных.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^2$ в точке $x_0 = 1$.

Проходим все этапы нахождения производной функции в точке. Даем аргументу x в точке 1 приращение Δx, получаем новое значение аргумента $1 + \Delta x$. Соответствующее ему приращение функции в точке $x_0 = 1$ равно $\Delta y(1) = f(1 + \Delta x) - f(1) = (1 + \Delta x)^2 - 1 = 2\Delta x + \Delta x^2$. Побуждаем к постановке задачи о вычислении предела, находим этот предел.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2.$$

Побуждаем к словесной формулировке вывода и использованию общепринятой записи: таким образом, для $y = x^2$ нашли $y'(1) = 2$, т.е. функция
$y = x^2$ дифференцируема в точке 2.

Пример 2. Найти производную функции $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$.

Пример 3. Найти производную постоянной функции $y = c = \mathrm{const}$ в произвольной точке области определения.

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = kx + b,\ k \neq 0$, в произвольной точке области определения.

Пример 5. Найти производную функции $f(x) = x^2$ в произвольной точке области определения.

Этап закрепления нового материала. Решение задач.

1) Найти производную функции $f(x) = 3x^2 + 5x + 6$ в точке $x_0 = 0$.

2) Найти производные функций $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $f(x) = \sqrt{x}$ в произвольной точке области определения.

3) Задачи учебника, требующие применения определения или формул, полученных выше.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Зорич В. К. Математический анализ, часть I. / В. А. Зорич —М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981. – 544 с.

2. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа, том 1 / Г. М. Фихтенгольц —М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. – 440 с.

3. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в двух томах) : Учебное пособие для студентов университетов и втузов/ Л. Д. Кудрявцев —М.: Высшая школа, 1981, т.I. – 687 с.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2024

Рукопись принята к печати 27.03.2024

УДК 003.26.09

КРИПТОАНАЛИЗ ШИФРА ВИЖЕНЕРА: ИНСТРУМЕНТ РАЗВИТИЯ АНАЛИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ

Бесхлебный Алексей Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: asbeskhlebnyy@edu.tversu.ru

Веселов Александр Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: asveselov1@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *криптография, шифр Виженера, развитие мышления.*

Аннотация. В работе проведён криптоанализ шифра Виженера, рассмотрены математические методы криптоанализа, разобран принцип работы шифра Виженера, а также исследования, проведённые в этой работе, подтвердили его важность как инструмента развития аналитического мышления.

Введение. В современном мире, где информация играет ключевую роль, криптография становится все более востребованной. Она обеспечивает безопасность данных, защищая их от несанкционированного доступа. Изучение криптографии, в том числе криптоанализа шифра Виженера, может стать эффективным инструментом для развития аналитического мышления у студентов.

Актуальность. Криптография – это наука о методах преобразования информации в целях обеспечения ее конфиденциальности, целостности и аутентичности. Она используется для шифрования данных, чтобы сделать их доступными только для авторизованных пользователей.

Сферы применения криптографии:

Электронная почта и онлайн-платежи: криптография используется для защиты конфиденциальности личной и финансовой информации при совершении онлайн-транзакций.

Военные коммуникации: криптография обеспечивает секретность информации и команд, передаваемых между военными подразделениями.

Блокчейн-технологии: криптография лежит в основе блокчейн-технологий, обеспечивая безопасность и неизменность данных в распределенных системах.

Интернет вещей: криптография используется для защиты устройств и данных от несанкционированного доступа в сетях Интернета вещей.

Примеры использования криптографии:

HTTPS: протокол, обеспечивающий безопасное соединение между веб-сайтом и браузером.

Цифровые подписи: электронные подписи, которые гарантируют подлинность электронных документов.

Понимание принципов работы систем. Изучение криптографии позволяет студентам понять, как работают различные криптографические системы, такие как

– симметричные шифры: шифры, в которых для шифрования и дешифрования данных используется один и тот же ключ;

– асимметричные шифры: шифры, в которых для шифрования и дешифрования данных используются разные ключи;

– хеш-функции: функции, которые преобразуют данные в фиксированную длину, называемую хешем.

Развитие навыков. Криптоанализ, изучение методов взлома шифров, требует тщательного анализа информации, логического мышления и умения решать задачи нестандартным образом. Это развивает важные навыки:

– аналитическое мышление: криптоанализ учит студентов разбивать сложные задачи на более мелкие, анализировать информацию и выявлять закономерности;

– логическое мышление: криптоанализ требует умения логически мыслить, делать выводы и строить цепочки умозаключений;

– нестандартное мышление: криптоанализ часто требует нестандартных подходов к решению задач.

Развитие интереса. Криптография может стать мотивирующим фактором для изучения математики и информатики, которые являются основой для многих современных технологий.

Изучение криптографии позволяет:

– показать красоту и прикладную сторону математики: криптография использует множество математических дисциплин, таких как теория чисел, алгебра и комбинаторика;

– продемонстрировать возможности информатики: криптография является одной из самых передовых областей информатики, и ее изучение может вдохновить студентов на дальнейшее изучение этой дисциплины.

Также был проведён опрос среди студентов 1-го курса математического факультета. По результатам которого было выяснено:

– 84% опрошенных считают актуальным изучение криптографии в 2024 году;

– 68% опрошенных считают, что изучение криптоанализа шифра Виженера способствует развитию аналитического мышления;

– 91% опрошенных считают, что изучение криптографии может послужить стимулом для развития интереса к математике и информатике.

Шифр Виженера. В мире криптографии существует множество шифров, от простых до невероятно сложных. Шифр Цезаря, к примеру, легко поддается взлому, а AES, напротив, представляет собой настоящий вызов даже для опытных криптоаналитиков. Но есть и те, кто занимает золотую середину – шифры, сочетающие в себе интерес и доступность.

Именно к таким шифрам относится шифр Виженера, который мы и выбрали для изучения криптоанализа.

Принцип работы шифра Виженера. Полиалфавитный шифр подстановки: Шифр Виженера использует ключ для замены букв в сообщении. Ключ представляет собой слово или фразу, которая определяет, на сколько позиций каждая буква в сообщении будет сдвинута в алфавите.

Пример:

Ключ: "СОЛНЦЕ"

Сообщение: "ПРИВЕТ"

Зашифрованное сообщение: "ТХЪФЙЦ"

Математические методы криптоанализа

Частотный анализ:

1. Подсчет букв: сначала мы подсчитываем, как часто встречаются разные буквы в зашифрованном тексте.
2. Сравнение с языком: затем сравниваем эти данные с частотой букв в языке, на котором предположительно написано сообщение.
3. Поиск закономерностей: сопоставляя эти два набора данных, мы можем найти закономерности.

Индекс совпадения: этот метод помогает определить, насколько язык зашифрованного сообщения похож на настоящий.

1. Случайные совпадения: считаем, как часто две случайно выбранные буквы в зашифрованном тексте совпадают.
2. Сравнение с языком: сравниваем полученный индекс совпадения с индексом совпадения для текстов на том же языке.

Анализ по методу Касиски: этот метод основан на поиске повторяющихся букв.

1. Поиск повторов: ищем в зашифрованном тексте повторяющиеся последовательности букв.
2. Длина ключа: расстояние между повторами может дать нам подсказку о длине ключа, который использовался для шифрования.
3. Определение ключа: зная длину ключа, можно попробовать подобрать его, используя методы частотного анализа и индекса совпадения.

Разработка алгоритма взлома шифра Виженера. Шифр Виженера, основанный на принципе полиалфавитных подстановок, представляет собой одну из классических криптографических схем. В данной работе мы сфокусировались на двух ключевых аспектах криптоанализа шифра Виженера: определении длины ключа и вычислении самого ключа.

Метод индексов совпадения является эффективным инструментом для выявления периодических закономерностей в зашифрованных текстах, что делает возможным определение длины ключа.

Процесс разбивается на следующие этапы:

1. Разделение шифртекста на блоки равной длины, соответствующие предполагаемой длине ключа.

2. Расчет индекса совпадения для каждого блока, представляющего вероятность того, что две произвольные буквы из этого блока совпадут.

3. Испытание различных длин ключа с последующим расчетом индекса совпадения для каждой из них.

4. Определение длины ключа, при которой индекс совпадения максимален — это, вероятнее всего, длина ключа шифра Виженера.

После получения длины ключа шифра Виженера мы переходим к определению самого ключа. Этот процесс подразумевает несколько этапов:

1. Узнаем длину шифртекста. Это важный параметр, необходимый для правильного разделения текста.

2. Разбиваем шифртекст на длину ключа. Группы формируются из букв, расположенных на определенных позициях:

— 1 группа: буквы на позициях 0, 6, 12, 18, и так далее.

— 2 группа: буквы на позициях 1, 7, 13, 19, и так далее.

— 3 группа: буквы на позициях 2, 8, 14, 20, и так далее.

— И так далее, в зависимости от длины ключа.

3. Вычисляем количество букв в каждой группе. Это позволяет определить частоту появления каждой буквы в соответствующей группе.

4. Предполагаем букву "о". Предполагаем, что буква, которая встречается чаще всего в каждой группе, соответствует букве "о". Это базируется на статистике частоты использования букв в языке.

5. Определяем сдвиг. Находим разницу между позицией буквы "о" в алфавите и позицией буквы, которая чаще всего встречается в каждой группе.

Используя всё, ранее сказанное, мы осуществили программную реализацию алгоритмов для нахождения длины ключа и определения этого ключа.

Заключение. Опираясь на принципы работы шифра Виженера, а также анализируя математические методы криптоанализа, в данной работе было рассмотрено теоретическое влияние этих знаний на понимание и применение криптографических систем.

Значение криптоанализа шифра Виженера раскрывается через понимание принципов работы криптографических систем и развитие навыков анализа информации, логического мышления и решения нестандартных задач. Эти навыки не только важны в сфере информационной безопасности, но и широко применимы в различных областях жизни.

Проследив перспективы использования криптографии в образовании видно, что изучение этой области может стать стимулом для развития интереса к математике и информатике у студентов. Кроме того, криптография открывает путь к множеству будущих профессий, связанных с информационной безопасностью, аналитикой, программированием и математикой, что делает ее изучение актуальным и перспективным направлением в образовании.

Таким образом, исследование криптоанализа шифра Виженера подтверждает его важность как инструмента развития аналитического мышления и понимания основных принципов криптографии, а также указывает на его перспективы в образовательном процессе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бауэр Ф. Л. Анализ шифра Виженера. М.: "Либроком", 2009. 320 с.
2. Бейер Д. Г. Взлом кода Виженера: практическое руководство. М.: "НТЦ Форум", 2008. 240 с.
3. Вакуленко С. В. Криптография: от простых шифров к эллиптическим кривым. М.: МЦНМО, 2005. 288 с.
4. Нечаев В. И. Криптография: учеб. пособие. М.: "Юрайт", 2011. 448 с.
5. Солодовников А. В. Криптографические методы защиты информации: учеб. пособие. М.: "ИНФРА-М", 2011. 224 с.

Рукопись поступила в редакцию 28.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 37.013

АДАПТАЦИЯ УЧЕБНЫХ ПРОГРАММ ПО МАТЕМАТИКЕ К ТРЕБОВАНИЯМ ЦИФРОВОЙ ЭПОХИ

Вересов Клим Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: veresovklim192638@mail.ru

Сисюк Дарья Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: dscwwu@gmail.com

Тарасенко Богдан Максимович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: bogdt211@gmail.com

Ключевые слова: *информационные технологии, математика, образование, цифровизация, программирование, будущая профессия, компьютерная безопасность.*

Аннотация. В работе рассматривается возможность внедрения методики преподавания математических дисциплин с целью повышение уровня заинтересованности студентов, а также представлен опрос студентов первого курса направления «Компьютерная безопасность».

Введение. Математика играет ключевую роль в информационных технологиях, так как она является языком, на котором строятся различные алгоритмы, программы и модели. Понимание математических концепций в сфере информационных технологий имеет основополагающее значение для развития компетенций в области информационных технологий. В свою очередь, отсутствие такого понимания у студентов является серьезной проблемой, так как это может привести к недостаточной мотивации, и как следствие, к плохим результатам в обучении. Традиционные методы обучения математике могут оказаться неэффективными в контексте быстрого развития цифровых технологий. Внедрение цифровых технологий в учебные программы по математике поможет студентам лучше понять связь между математикой и информационными технологиями. Это позволит увидеть конкретные применения математических знаний в реальном мире, что, в свою очередь, может повысить их интерес и мотивацию к изучению математики.

Анкетирование. Мы провели анкетирование среди учащихся первого курса направления «Компьютерная безопасность» (54 студента).

Первый вопрос: вы понимаете значимость разделов математики для вашего будущего в сфере компьютерной безопасности?

– Нет, понимаю (28 голосов).

– Не совсем (22 голоса).

– Да, понимаю (4 голоса).

Из ответов студентов можно сделать вывод, что многие из них не осознают важность изучения основных разделов математики для своей будущей профессии. При ответе на вопрос они упоминают, что не видят явной связи между учебным материалом и их будущей профессиональной деятельностью.

Второй вопрос: Какие преимущества вы видите во внедрении информационных технологий в учебный процесс по математике?

– Более наглядное и понятное изучение материала (27).

– Улучшение мотивации в учёбе и интереса к математике (25).

– Возможное проведение интерактивных занятий и лабораторных работ (2).

Из анализа ответов студентов следует, что интеграция информационных технологий в учебный процесс может способствовать более глубокому пониманию учебного материала и предоставлению наглядных примеров для иллюстрации целей и концепций различных учебных тем.

Третий вопрос: Какие трудности вы испытываете при изучении математики без использования информационных технологий?

– Сложность в понимании математических концепций (26)

– Затруднения с решением математических задач (17)

– Отсутствие визуального представления математических процессов (11)

Из ответов следует, что студенты распределили свои голоса между различными трудностями и внедрение информационных технологий может эффективно решить эти проблемы и улучшить процесс обучения студентов.

Рассмотрим примеры применения информационных технологий в учебных программах математики на направлении «Компьютерная безопасность».

Геометрия предоставляет набор инструментов и подходов, которые помогают нам лучше понимать и манипулировать пространственными структурами. На занятиях по геометрии можно, например, рассказать, что векторы играют важную роль в криптографических алгоритмах при шифровании данных, в алгоритмах шифрования с открытым ключом, в биометрической безопасности (в алгоритмах распознавания образов при анализе биометрических данных, таких как отпечатки пальцев или сетчатка глаза). Также векторы могут использоваться для представления и анализа сетевого трафика, помогая обнаруживать необычные активности или паттерны, которые могут указывать на угрозу безопасности. Эта информация заинтересует студентов при изучении данного материала.

Алгебра играет ключевую роль в криптографии, поскольку многие криптографические алгоритмы основаны на математических операциях и концепциях. Например, в асимметричных криптографических системах применяются математические операции, такие как возведение в степень, нахождение обратного элемента по модулю, арифметика в конечных полях и другие. Эти операции основаны на алгебре и используются для шифрования и дешифрования сообщений. Также в алгоритмах хеширования и проверки подлинности применяются математические концепции, такие как линейные преобразования, модульная арифметика и др. Матрицы доступа позволяют определять уровень доступа пользователей к различным ресурсам компьютерной системы.

Матрицы полезны в компьютерной безопасности для защиты информации и данных. Так, матрицы доступа позволяют администраторам управлять правами доступа пользователей, определять, какие пользователи могут получить доступ к каким данным и ресурсам.

Шифрование: матрицы могут быть использованы для шифрования данных. Матричные алгоритмы шифрования позволяют зашифровать данные, сделав их недоступными для неавторизованного доступа.

Администраторы применяют матрицы для анализа и обнаружения угроз в компьютерных системах при отслеживании и анализе активности пользователей, обнаружения необычного поведения и возможных угроз безопасности. Аудит безопасности: матрицы могут использоваться для аудита безопасности и оценки уровня защиты компьютерных систем. Администраторы могут создавать матрицы, отображающие уязвимости и риски безопасности, а также меры по их устранению.

Теория чисел, являются основой для большинства современных криптографических систем. Например, алгоритм RSA основан на сложности факторизации больших чисел.

Статистический анализ: математический анализ и статистика используются для анализа сетевого трафика и обнаружения аномалий, которые могут указывать на вторжение или другую угрозу безопасности.

Анализ алгоритмов: используется для оценки эффективности и безопасности алгоритмов, включая алгоритмы сортировки, поиска и шифрования.

Приобретенные при изучении дисциплины знания должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих курсов: «Дифференциальные уравнения»; «Теория вероятностей, математическая статистика и теория случайных процессов»; «Методы оптимизации»; «Численные методы»; и другие. Эти дисциплины будут крайне полезны при работе.

Дискретная математика применяется для формирования и анализа логических условий, которые могут быть использованы для обнаружения угроз. Например, системы обнаружения вторжений (IDS) могут использовать логические условия для определения, является ли поведение в сети подозрительным. Также алгебра логики используется в формальной верификации для проверки исполнения программного обеспечения по отношению к его спецификации.

Комбинаторика: Она применяется в области криптографии, в частности, в процессах генерации ключей и шифрования. Комбинаторика помогает определить количество возможных ключей в криптосистеме, что напрямую влияет на уровень безопасности. Кроме того, комбинаторика работает при анализе атак перебором и определении их эффективности.

Бинарная логика эффективно работает при анализе и управлении двоичными данными, особенно в контексте криптографии и сетевой безопасности, помогает понять, как информация кодируется, передается и преобразуется в компьютерных системах, что важно для обеспечения целостности данных и защиты от вредоносного программного обеспечения.

Заключение. Предложенные нами подходы и методы могут быть учтены разработчиками учебных программ для интеграции новых технологий в образовательный процесс. Это поможет учащимся не только лучше понимать математику, но и уметь применять свои знания на практике, что важно для успешной карьеры в современном цифровом мире.

Таким образом, результаты нашей работы могут способствовать развитию современных образовательных методик, повышению уровня образования в области математики, а также подготовке студентов к эффективному применению математических знаний в условиях цифровой трансформации общества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Курс "математика в кибербезопасности" // Stepik. [Электронный ресурс]. URL: https://stepik.org/course/62247/promo
2. Дискретная математика в программировании: Значение и применение // uchet-jkh. [Электронный ресурс]. URL: https://uchet-jkh.ru/i/diskretnaya-matematika-v-programmirovanii-znacenie-i-primenenie/
3. Бакалаврская программа "Информационная безопасность" // Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики". [Электронный ресурс]. URL: https://www.hse.ru/ba/is/courses/838219051.html
4. Реферат "Геометрия и шифрование данных: безопасность и криптография" // fastfine. [Электронный ресурс]. URL: https://fastfine.ru/readyworks/referaty/geometriya/geometriya-i-shifrovanie-dannyh-bezopasnost-i-kriptografiya

Рукопись поступила в редакцию 26.03.2024

Рукопись принята к печати 29.03.2024

УДК 378.14.015.62

ОСОБЕННОСТИ МЕТОДИКИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ С УЧЁТОМ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРОГРАММ СПО

Верина Галина Борисовна
ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж», г. Тверь
E-mail: gbverina@tpk-tver.ru

Журавлева Карина Юрьевна
ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж», г. Тверь
E-mail: kyuzhuravleva@tpk-tver.ru

Ключевые слова: *СПО, математика, профессиональная направленность.*

Аннотация. Статья рассматривает актуальность разработки и реализации методов профессионально-ориентированной математической подготовки в сфере среднего профессионального образования (СПО).

Статья рассматривает актуальность разработки и реализации методов профессионально-ориентированной математической подготовки в сфере среднего профессионального образования (СПО). Авторы подчеркивают необходимость формирования учащихся компетентных специалистов, обладающих уникальным набором умений и готовых к постоянному обновлению знаний и умений в соответствии с новыми технологиями. Однако, они отмечают, что связь между общеобразовательными и профессиональными дисциплинами, включая математику, в СПО часто отсутствует, что негативно сказывается на профессиональной деятельности выпускников. В свете этого, статья обосновывает актуальность разработки новых образовательных программ, моделирования образовательного процесса и создания методических подходов для успешной реализации профессионально-ориентированной математической подготовки в СПО. Авторы считают, что междисциплинарная связь между математикой и профессиональными дисциплинами, а также повышение качества профессиональной подготовки становятся ключевыми задачами в СПО. Они предлагают разработку технологии профессионально-ориентированной математической подготовки и создание методического обеспечения, основанного на учете актуальных программных документов и стратегического развития страны. Статья также описывает этапы такой технологии и выделяет основные компоненты профессионально-ориентированной математической подготовки. Она подчеркивает важность формирования учащимися высокого уровня математических знаний и профессионально-личностных качеств, таких как умение применять математические методы и анализировать производственные ситуации. В заключении статьи указывается на необходимость оптимизации и соответствия образовательного процесса требованиям современной профессиональной деятельности.

Современное среднее профессиональное образование нацелено на формирование компетентных специалистов, что требует развития уникального набора умений и готовности к постоянному обновлению знаний в соответствии с новыми технологиями. В системе СПО активно внедряются методики, направленные на развитие творческих и профессиональных способностей студентов, включая гуманитарные, естественнонаучные и математические компоненты.

Однако, практика показывает, что связь между общеобразовательными дисциплинами, включая математику, и дисциплинами специальности в СПО часто отсутствует. Это приводит к тому, что выпускники СПО оценивают свою математическую подготовку как недостаточную, что отрицательно сказывается на их профессиональной деятельности.

В связи с этим, разработка и реализация методик профессионально-ориентированной математической подготовки становится актуальной задачей. Для этого необходимо создание новых образовательных программ, моделирование образовательного процесса и разработка методических подходов для успешной реализации этой подготовки в СПО. При этом важно учитывать наиболее актуальные программные документы в сфере образования и стратегического развития страны.

Таким образом, ключевыми задачами в сфере среднего профессионального образования становятся междисциплинарная связь между математикой и профессиональными дисциплинами, а также повышение качества профессиональной подготовки специалистов. Обучение математике в системе СПО должно быть четко целенаправленно. Реализовывать профессиональную направленность преподавания математики в системе СПО, учитывая при этом специфику многих разноплановых отраслей, возможно следующими приемами:

— ознакомление с широким спектром практических областей применения изучаемого материала;

— решение задач с содержанием, которое непосредственно связано со спецификой отрасли и с производственными процессами;

— выполнение практических работ, сопряженных с производственным процессом, применяя при этом математические методы;

— проведение исследовательских конкурсов и творческих работ, раскрывающих геометрическую сущность и назначение производственных объектов с изготовлением наглядных пособий, схем, чертежей;

— применение математических знаний и умений для выполнения внеаудиторных самостоятельных работ, темы которых могут быть связаны с общетехническими и специальными дисциплинами;

— создание системы задач, направленных на расширение знаний о трудовой деятельности и осознанной ориентации в профессиональной среде.

Основная цель профессиональной направленности преподавания математики в СПО заключается в формировании студентов с высоким уровнем математических знаний, являющихся неотъемлемой частью их профессиональной подготовки. В процессе подготовки к уроку преподаватель постоянно сталкивается с проблемой отбора задач. Правильно подобранные задачи повышают вовлеченность студентов в образовательный процесс, их заинтересованность профессией.

Рекомендации к выбору задач:

— ситуация, описываемая в задаче, должна быть обучающимся понятна;

— в содержании задачи должны быть преимущественно знакомые термины, а новые обязательно расшифрованы;

— дополненное в текст задачи профессионально значимое содержание может изменять ее компоненты.

Например, отношения между исходными и искомыми данными, при этом необходимо оставлять возможность применения изучаемого математического аппарата для нахождения метода решения:

— обязательным условием включения в систему профессионально-прикладных задач должно быть соответствие программе курса математики образовательного учреждения системы СПО;

— профессионально значимое содержание, котором могут наполнятся математические задачи должно быть логическим продолжением образовательного курса.

Технология профессионально-ориентированной математической подготовки включает следующие этапы:

1. Диагностика компонентов субъектного опыта.

2. Формирование групп студентов с учетом социально-познавательных мотивов, уровня сформированности мыслительных процессов, уровня усвоения математических знаний и наличия профессиональной направленности.

3. Отбор и создание учебных материалов, соответствующих критериям обучения.

4. Организация дифференцированного обучения в соответствии с результатами диагностики.

5. Диагностика конечных результатов работы со студентами.

6. Подведение итогов работы и рефлексия.

Примеры технологии профессионально-ориентированной математической подготовки включают следующие методы и подходы:

1. Проектная деятельность: Студенты решают реальные профессиональные задачи, которые требуют применения математических знаний и навыков. Они работают над проектами в группах, исследуют проблему, проводят математическое моделирование и анализируют результаты. Такая подход способствует развитию практического мышления, коммуникационных и коллаборативных навыков.

2. Проблемно-ориентированное обучение: Студенты сталкиваются с реальными жизненными или профессиональными проблемами, которые

требуют применения математических знаний для их разрешения. Они задают вопросы, исследуют данные, формулируют гипотезы, проводят эксперименты и анализируют результаты. Этот подход помогает студентам видеть связь между математикой и реальным миром.

3. Интерактивное обучение с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ): Специальные программы и приложения позволяют студентам взаимодействовать с математическими концепциями и задачами. Они могут использовать интерактивные тренажеры, визуализацию и симуляцию, что способствует более глубокому пониманию математических концепций и укреплению навыков решения задач.

4. Использование контекстуальных примеров: Преподаватели представляют студентам математические концепции и задачи, которые имеют прямое отношение к их профессиональным областям. Например, если студенты изучают экономику, они могут выполнять задачи моделирования и анализа данных в контексте экономических ситуаций. Это помогает студентам лучше понять применение математики в их будущей профессиональной деятельности.

Эти примеры и подходы могут быть адаптированы и использованы в рамках профессионально-ориентированной математической подготовки в СПО, с учетом особенностей программ и потребностей студентов.

Исходя из вышеперечисленного заключаем, что разработка и применение профессионально-ориентированной математической подготовки являются важными аспектами современного профессионального образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурцева, Л.П. Методика профессионального обучения: Учебное пособие / Л.П. Бурцева. - М.: Флинта, 2021. – 160 с.

2. Денищева, Л.О. Теория и методика обучения математике в школе. / Л.О. Денищева. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2021. – 247 с.

3. Золотарев, А.А. Теория и методика систем интенсивного информатизированного обучения (дид. основы создания эффект. систем обучения). + Приложение №1 (в 2 кн) / А.А. Золотарев. - М.: МГИУ, 2020. – 170 с.

4. Медведева, Т.В. Психолого-педагогические основы обучения математике. Теория, методика, практика / Т.В. Медведева. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2021. –204 с.

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2024

Рукопись принята к печати 26.03.2024

УДК 165.4, 168.51

КРИЗИС РАЦИОНАЛИЗМА

Войцехович Вячеслав Эмерикович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: synerman@gmail.com

Ключевые слова: *математика, рационализм, кризис, покой, движение, интуиция, логика.*

Аннотация. Рационализм и его ядро – математика находятся в кризисе. Главное в кризисных явлениях – сложность. Преодоление кризиса возможно в случае развития нового рационализма – мышления движущимися понятиями.

Ядро рационального мышления - математика. Она быстро развивается, стала языком науки, а теперь и языком культуры, поскольку на её основе происходит процесс информатизации и технизации, охвативший всё общество (политику, науку, производство материальных ценностей, быт и даже искусство, религиозную жизнь). Тем не менее математика всё глубже погружается в кризисное состояние.

Кризис математики - это:

- проблема доказательства. Они стали сверхдлинными, до тысячи страниц труднейшего текста, понять который способны немногие;

- отставание от потребностей познания. В ряде важнейших областей физики, биологии, экономической науки сформулированы уравнения, раскрывающие сущность главного объекта области, но нет аналитического решения уравнения. Остаются лишь приблизительные численные методы для отдельных случаев;

- проблема оснований. В начале XX-го в. предложены 3 главных варианта обоснования математического знания, однако ни один не принят научным сообществом. Для большинства математиков таковым явно или неявно остаётся платонизм – учение скорее философское, но не научная теория;

- математика становится научной «религией»? Из-за сложных и длинных доказательств она стала наукой «для своих», для очень узкого круга «посвящённых». Судьёй при решении споров о приоритете признаётся один из выдающихся современников, который выступает в роли «святого», мнение которого не подлежит сомнению;

- едина ли математика? С одной стороны, выдающиеся учёные высказываются о единстве всего огромного массива разнообразных математических знаний, а с другой стороны, критерии доказательности различаются в разных областях (например, в геометрии и теории чисел) и что ещё хуже критерии различаются в разных странах. Достаточно сравнить Запад и Китай;

- интуиция или логика, ясность или непротиворечивость, универсальность или строгость? За последние 4 столетия в математике непрерывно усиливались требования к строгости доказательств. В результате её стали называть «наукой о доказательствах». Логика как бы поглотила интуицию. Но это неправильно. Обычная работа математика при решении задачи состоит из 2 частей: 1) начало - интуитивное прозрение, догадка, формулировка теоремы, 2) конец - доказательство, или уточнение, или опровержение. **Математика – наука о догадках и доказательствах.** Математическая деятельность - это интуиция и логика. Излишняя строгость стала тормозом в развитии математики. Чрезмерная логичность завела эту науку в тупик – тупик сложности, поскольку доказательства «раздулись» до ТЫСЯЧИ страниц труднейшего текста. Тем более, что сверхдлинные рассуждения не способны избежать **роста энтропии**, т.е. «шума», подмены смысла термина. Проследить это на протяжении тысяч страниц невозможно. Даже передача в будущем доказательства теоремы от человека к ИИ не избавит от опасности роста энтропии;

- проблема специфики математики. Обычно в качестве специфики выделяют непротиворечивость, или логичность. Но это общее требование к рациональному рассуждению, обязательное во всех науках. Суммируя мнение выдающихся математиков XX в., можно в качестве специфики математики выделить комплекс «формальность-бесконечность-всеобщность»;

Отсюда вывод: **математика как бы остановилась перед стеной сложности.** У ряда современных учёных пессимистический взгляд на будущее математики, т.к. она всё больше погружается в «вязкую жидкость» многообразия и сложности.

Какова главная причина? Это ***исчерпанность старых методов мышления***, которые уже не соответствуют вызовам современности.

Рационализм Р. Декарта, Г. Лейбница, И. Ньютона основан на оперировании **неизменными** понятиями по неизменным законам логики. Главный из них – закон тождества.

Но ни в природе, ни в мышлении нет абсолютного покоя. Его придумали люди, пользуются им во внутреннем духовно-интеллектуальном мире («Неподвижное Единое» в философии Парменида, «Вечный, неизменный Творец» в мировых религиях, якобы постоянные законы природы и т.п.). Люди необоснованно распространили этот образ и на внешний мир, и на науку. Правильно ли это? НЕТ.

Ещё в VI в. до РХ в Древней Греции были выдвинуты 2 противоположных учения - Парменида и Гераклита. Парменид: «Всё есть в сущности Единое, одно и то же. Единое неподвижно и шарообразно» [1]. Гераклит: «Всё есть в сущности движение» [2]. Отсюда диалектика – учение о всеобщем движении и развитии, которое в наиболее совершенной и богатой форме представил Г. Гегель в XIX в.

В науке закрепилась парадигма Парменида: «Ищи неподвижное». В философии (наряду с другими учениями) – диалектика: «Ищи движение». Спор мыслителей остался неразрешённым.

За тысячи лет закон тождества сыграл огромную роль в развитии науки и цивилизации. Но в XX-м столетии парадигма Парменида исчерпала себя. Возникла теория самоорганизации и на её основе постнеклассический рационализм (В.С. Стёпин). Один из создателей теории самоорганизации И. Пригожин интегрировал современную ситуацию метафорой: «Наука движется от Парменида к Гераклиту» [3].

Если принять эту мысль как обозначение генеральной линии развития не только естественных наук, но и математики, логики, рационального мышления и даже цивилизации, то для разрешения фундаментальных противоречий в познании и обществе необходимо, развивая постнеклассический рационализм, перейти к **парадигме движения** - обобщить закон тождества в логике, математике, науке в целом, в мышлении, во всех областях человеческой деятельности. Нами предложен один из вариантов обобщения закона тождества [4].

Каковы выводы?

1. Кризис сложности в математике может быть разрешён в ходе дальнейшей эволюции математики в следующих направлениях: а) признании математики как науки о творчестве и доказательстве, причём признании интуитивного прозрения более важным, чем логическое обоснование, доказательство, б) переносе фокуса деятельности учёных с доказательств на интуитивное творчество - фантазии, выдвижение принципиально новых понятий, образов, методов; будущий учёный – прежде всего интуитивист, выдвигающий новые теоремы-догадки; в) автоматизации процесса доказательства, передаче ИИ логической функции обоснования (опровержения, уточнения) теорем, сформулированных человеком.
2. Кризис сложности в математике является частным выражением кризиса науки в целом и рационализма вообще. Рационализма как оперирования неподвижными понятиями и образами – в соответствии с законом тождества в логике Аристотеля и многих последующих вариаций классической логики [4].
3. Принципиальное преодоление современного кризиса сложности возможно лишь при переходе мышления учёных к мышлению движущимися понятиями, в частности, к обобщённому закону тождества.
4. Для преодоления кризиса сложности в коммуникативном отношении, для уменьшения информационной энтропии в массиве научных (в том числе математических) публикаций необходимы следующие меры: а) выделение **20 - 30 крупных проблем** (подобно проблемам Гильберта), которые необходимо решить, чтобы обеспечить существенный прогресс в математике, б) обращение ко всем математикам с призывом к объединению всех групп исследователей в **единое мировое сообщество** (независимо от языка, национальности,

политических и личных предпочтений), в) публикация единого для всех **мирового дайджеста** новостей и открытий с акцентированием на результаты по критериям фундаментальности и новизны.

5. Для реализации указанных мер необходима перестройка системы образования на математических факультетах в направлениях: а) **фундаментализации** образования с целью освоения студентами наиболее интегративных концепций математики (теории множеств, теории категорий) и подготовки аспирантов к решению наиболее трудных проблем математики в целом, б) **прагматизации** образования с целью приближения образования к практическим проблемам общества (численных методов, информатизации, развитию ИИ и т.п.), в) в фокусе внимания в образовании должна быть **дискретная математика**, которую требуют ИТ и ИИ, получившие массовое распространение.
6. Развитие математики как ядра рационализма нового типа, который соединяет научное и художественное мышление в единую концепцию «Истины-Красоты». В ней рационально-логическое мышление и эмоционально-художественное переживание через интуитивное прозрение, фантазию воображение соединяются в единый процесс творчества. Попытки приблизиться к этому многократно предпринимали (или высказывались об этом) различные учёные, художники, архитекторы, музыканты, поэты. Таковы были Леонардо Да Винчи, В. Хлебников, А.Л. Чижевский, П. Дирак и другие. Среди современных – А.Т. Фоменко [5], Кусама [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рохмистров В.Г. Парменид «О природе»: Философское прочтение. – СПб: РХГА, - 205 с.
2. Фрагменты Гераклита // Материалисты Древней Греции. М.: Изд. Политической литературы. 1955. С. 39 – 52.
3. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. — М.: Прогресс, 1986. — 432 с.
4. Войцехович В.Э., Малинецкий Г.Г. Логика. Математика. Рационализм: от Парменида к Гераклиту. – М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2022. – 44 с.
5. Фоменко А.Т. Математика, миф, «Мастер и Маргарита» в 199 картинах: Смыкая вершины рационального мышления с глубинами архаического и бессознательного. – М.: ЛЕНАНД, 2023. – 424 с.
6. Кусама Яеи. Бесконечные миры // https://www.ivi.ru/watch/224500

Рукопись поступила в редакцию 26.03.2024

Рукопись принята к печати 29.03.2024

УДК 373

КАК ПОВЫСИТЬ ФИНАНСОВУЮ ГРАМОТНОСТЬ ШКОЛЬНИКОВ ЧЕРЕЗ ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ

Домокуров Алексей Дмитриевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: domokurov4@yandex.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *финансовая грамотность, финансовые задачи, текстовые задачи, интерактивные методы, индивидуализация обучения, оценка и обратная связь.*

Аннотация. Для школьника, особенно в современном мире, где финансовые решения играют все более важную роль в повседневной жизни, развитие финансовой грамотности становится необходимостью. Текстовые задачи представляют собой прекрасный инструмент для формирования у школьников навыков финансового планирования и анализа различных ситуаций, связанных с деньгами.

Финансовая грамотность – это комплекс знаний и навыков по умению эффективно управлять своими финансами, понимать основы личного бюджета, инвестиций, кредитования и финансового планирования.

Умение правильно распоряжаться собственными финансами – важный навык, который пригодится в будущем каждому ребёнку. Знание основных принципов управления деньгами позволяет не только избегать финансовых проблем, но и строить финансовое благополучие. Поэтому с раннего возраста важно начинать формировать у школьников понимание финансовых процессов, а текстовые задачи представляют собой доступный инструмент для этой цели, умение решать финансовые задачи не только развивает логическое мышление, но и формирует практические навыки, которые пригодятся в повседневной жизни.

На сегодняшний день обеспечение школьников финансовой грамотностью становится одной из основных задач образовательной системы. Использование текстовых задач в учебном процессе представляется эффективным методом для достижения этой цели. Школьники, работая над финансовыми задачами, не только учатся применять теоретические знания на практике, но и развивают навыки анализа и принятия решений в финансовых ситуациях.

Эти задачи являются неотъемлемой частью методики обучения финансовой грамотности учащихся, предоставляя уникальную возможность комбинировать теоретические знания с реальными ситуациями из повседневной жизни. Правильно построенный учебный процесс с использованием данных задач способствует эффективному развитию финансовой грамотности, что важно для успешной адаптации школьников к финансовым вызовам современного мира.

При использовании текстовых задач в процессе обучения финансовой грамотности школьники получают целый ряд выгод. Этот метод помогает им не только углубить свои знания в области финансов, но и развить практические навыки применения полученной информации. Школьники, работая над текстовыми задачами, осваивают концепции финансовой грамотности в контексте реальных жизненных ситуаций. Это позволяет им лучше усваивать материал и легче применять его в практических ситуациях. Такой подход способствует формированию у них навыков финансового планирования, бюджетирования и управления деньгами, что важно для успешного ведения финансовых дел в будущем. Решая разнообразные финансовые задачи, учащиеся развивают критическое мышление, аналитические способности и умение принимать обоснованные решения в финансовых вопросах.

Таким образом, методика использования текстовых задач направлена на развитие у школьников не только теоретических знаний, но и практических навыков. Так, например, задача может быть связана с составлением индивидуального бюджета на месяц для школьника, где необходимо учесть расходы на учебники, развлечения, питание и другие затраты. Такая задача помогает учащимся оценить свои финансовые потребности и составить реальный план расходов.

Рассмотрим следующий пример такого задания.

Школьник получил карманные деньги в размере 500 рублей. Он планирует потратить их на покупку подарка другу за 150 рублей, книги за 200 рублей и ужина в кафе за 100 рублей. Сколько денег останется у школьника после выполнения всех этих покупок?

Подобные задачи стимулируют школьников рассматривать различные аспекты финансов и принимать взвешенные решения. Постепенно учащиеся осваивают базовые принципы бюджетирования, учитывают свои потребности и планируют свои денежные средства более осознанно, что помогает им развить навыки финансового планирования и контроля за своими финансами.

Сравнительно недавно (с 2015 года) в вариантах контрольных измерительных материалах ЕГЭ по математике профильного уровня появились задачи о вкладах и кредитовании, а также задачи оптимизации производства товаров и услуг (так называемые экономические задачи).

Как мотивировать учащихся к решению текстовых задач по финансам? Подход к мотивации учащихся к решению текстовых задач по финансам играет важную роль. Методика, основанная на построении интересных и понятных задач, способствует более эффективному усвоению материала. Школьники, сталкивающиеся с реалистичными ситуациями и задачами, лучше понимают не только суть финансовых понятий, но и их практическое применение в повседневной жизни.

Одним из ключевых методов мотивации является создание интересных задач, которые будут привлекательными для школьников.

Использование реальных примеров из их окружения, где они могут применить новые знания, способствует более глубокому вовлечению и пониманию. Например, задачи о планировании расходов на покупки в магазине или расходах во время экскурсий помогут школьникам увидеть, как финансовая грамотность влияет на их повседневные решения.

Важно разнообразить методику обучения финансовой грамотности учащихся, чтобы поддерживать их интерес. Помимо текстовых задач можно использовать игры, кейсы, ролевые игры и прочие интерактивные формы обучения. Такой подход позволяет более эффективно привлечь внимание учащихся и сделать процесс обучения более увлекательным.

Таким образом, правильная методика работы с данным видом задач по финансам помогает не только развить финансовую грамотность учащихся, но и мотивировать их к активному изучению этой важной области знаний.

Практические советы по использованию текстовых задач для повышения финансовой грамотности учащихся:

– *Подготовка к уроку.* Перед проведением урока по финансовой грамотности с использованием текстовых задач необходимо тщательно подготовиться. Рекомендуется выбирать задачи, которые соответствуют уровню понимания учащихся и содержат реалистичные финансовые ситуации. Это поможет стимулировать интерес школьников и повысит эффективность обучения.

– *Применение интерактивных методов.* Для более эффективного усвоения материала рекомендуется использовать интерактивные методики обучения вместе с текстовыми задачами. Можно провести игровые симуляции финансовых ситуаций, обсудить их в группе или позволить учащимся самостоятельно решать задачи. Такой подход способствует активизации мышления и развитию критического мышления у учащихся.

– *Индивидуализация обучения.* Для более эффективного формирования финансовой грамотности учащихся следует учитывать индивидуальные особенности каждого ребенка. Предлагать школьникам разнообразные задачи, адаптированные под их уровень подготовки. Это поможет каждому ученику освоить материал наиболее эффективным способом.

– *Оценка и обратная связь.* Не менее важным является этап оценки знаний и обратной связи. После решения текстовых задач учащиеся должны получить обоснованную обратную связь от учителя, которая поможет им понять свои ошибки и совершенствоваться. Постепенное улучшение результатов решения задач будет подтверждением успешности применения методики с использованием текстовых задач.

Отметим также, что во все ФГОС ВО 3++ подготовки бакалавров и специалистов, утвержденные до 2020 г. внесена так называемая универсальная компетенция УК-9 «Экономическая культура, в том числе финансовая грамотность». Осуществлено это в рамках выполнения мероприятий дорожной карты по реализации Стратегии повышения финансовой грамотности населения Приказом Министерства науки и высшего образования № 1456 от 26.11.2020 (регистрационный № 63560 от 27.05.2021) «О внесении изменений в федеральные государственные образовательные стандарты высшего образования». Таким образом, у выпускников вузов должны быть сформированы универсальные компетенции в области экономической культуры, в том числе финансовой грамотности – «Способность принимать обоснованные экономические решения в различных областях жизнедеятельности».

В заключение процитируем первого зампреда Банка России Сергея Швецова «Правильные навыки обращения с финансами должны закладываться с самого детства, со школы. Введение новых образовательных стандартов позволит каждому школьнику в нашей стране гарантированно получить необходимый для жизни запас знаний о финансах, чтобы понимать, как распорядиться своими доходами, приумножить сбережения и защитить их от финансовых мошенников. Следующее поколение уже сможет более разумно решать финансовые проблемы, а значит повышать уровень благополучия своей семьи и населения в целом».

В ходе этой статьи мы обсудили важность развития финансовой грамотности у школьников через использование текстовых задач. Этот метод не только помогает учащимся понять основы финансов, но и развивает их логическое мышление, умение принимать обоснованные решения и планировать свое финансовое будущее. Мы видим, что знания, полученные в школьные годы, могут стать ключом к успешной финансовой независимости в будущем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вендина, А. А. Формирование финансовой культуры школьников посредством уроков математики [Текст] / А. А. Вендина, В. В. Малиатаки. // Теоретические и методологические проблемы современного образования. – 2014. – № 4. – С. 31–34.

2. Лазебникова, А. Ю. Практическая реализация задачи повышения финансовой грамотности школьников: состояние и проблемы [Текст] / А. Ю. Лазебникова // Отечественная и зарубежная педагогика. – 2017. – Т. 1, № 2. – С. 22–30.

3. Паатова, М. Э. Финансовая грамотность детей и молодежи как актуальная задача современного образования [Текст] / М. Э. Паатова, М. Ш. Даурова. // Вектор науки ТГУ. – 2014. – № 2. – С. 173–175.

Рукопись поступила в редакцию 15.03.2024

Рукопись принята к печати 18.03.2024

УДК 531.35

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВТОРОГО ЗАКОНА КЕПЛЕРА

Иванов Виктор Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *центральные силы, движение под действием центральных сил, законы Кеплера, математическая модель, скорость движения небесного тела по орбите, эллипс, длина дуги, площадь сектора.*

Аннотация. В статье рассматривается математическая модель для вычисления площадей, заметаемых радиус-вектором небесных тел (планет, малых планет и астероидов), движущихся под действием центральных сил по эллиптическим орбитам вокруг Солнца. Приведена схема расчетов и результаты моделирования.

Для построения математической модели потребуются первый и второй законы Кеплера. Сформулируем их [1; 2; 3]. Первый закон Кеплера: Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце *S* (рис. 1). Этот закон выполняется и для малых планет, астероидов, комет, спутников планет, движущихся по замкнутым орбитам.

Сила притяжения планеты к Солнцу – центральная сила. Линия действия этой силы проходит все время через тот фокус эллипса, в котором находится Солнце [3]. При движении планеты под действием центральной силы выполняется второй закон Кеплера (закон площадей): Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равные площади [1; 2; 3].

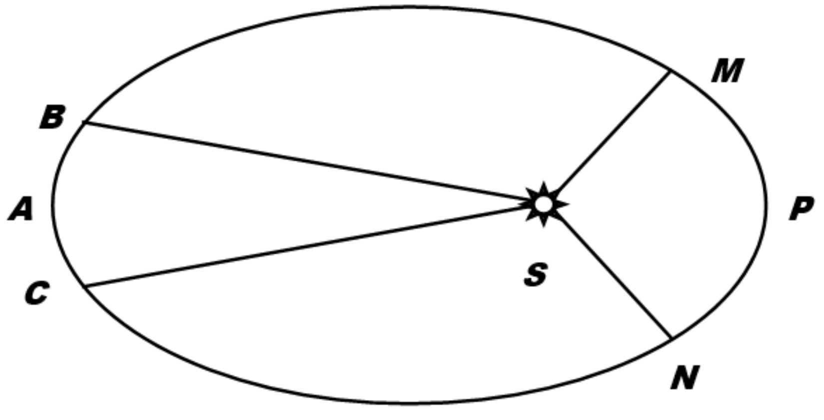


Рис. 1

Из второго закона Кеплера следует, что площадь сектора *SBAC*, описанная радиус-вектором планеты за время *t* вблизи афелия *A* (рис. 1), равна площади сектора *SMPN*, описанной радиус-вектором за то же время *t* вблизи перигелия *P*. Построим математическую модель для проверки этого утверждения.

Обозначим через α угол *MSN*, через b угол *BSC*, через *a* большую полуось орбиты *AP*/2 (рис. 1). Будем считать заданными для небесных тел эксцентриситеты *e*, большие полуоси орбит *a* в астрономических единицах (1 а.е. равна 149,6 × 10^6 км), углы α в градусах, сидерические периоды обращения вокруг Солнца *T* (в годах).

Расчеты проведем по схеме:

1. Вычислим в астрономических единицах расстояние небесного тела от Солнца в афелии $SA = a \times (1 + e)$ и в перигелии $SP = a \times (1 - e)$.

2. Найдем в км/с среднюю (круговую) скорость *VK* тела при движении по круговой орбите радиуса *a* по формуле:

$$VK = \frac{2\pi a}{T}.$$

3. Скорость движения в км/с тела в афелии *VA* и перигелии *VP* определим согласно [1, с. 81]:

$$VA = VK \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}; \quad VP = VK \cdot \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}.$$

4. Длину дуги *MPN* в км обозначим *LP* и вычислим по формуле:

$$LP = \frac{\pi \cdot SP \cdot \alpha}{180}.$$

5. Найдем в км^2 площадь сектора *SMPN* по формуле:

$$SMPN = \frac{\pi \cdot SP^2 \cdot \alpha}{360}.$$

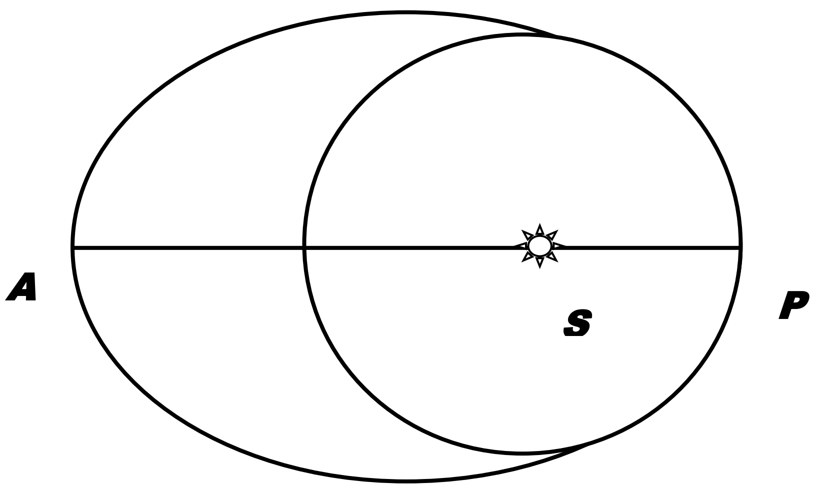


Рис. 2

6. Дуга окружности радиуса *SP* незначительно отличается вблизи перигелия *P* от дуги эллипса. Это справедливо для небольших

эксцентриситетов. При малом угле a можно допустить, что движение тела происходит по дуге окружности радиуса SP, почти совпадающей вблизи перигелия P с дугой эллипса (рис. 2). Определим время TP перемещения тела вблизи перигелия по дуге MPN (рис. 1) в секундах:

$$TP = \frac{LP}{VP}.$$

7. Будем считать, что время TA перемещения тела по дуге BAC вблизи афелия A равно времени его перемещения TP по дуге MPN вблизи перигелия P: $TA = TP$.

8. При малом угле b можно допустить, что движение тела происходит по дуге окружности радиуса SA, почти совпадающей вблизи афелия A с дугой эллипса (рис. 3). Длину дуги BAC в км (рис. 1) обозначим LA и определим по формуле:

$$LA = VA \cdot TP.$$

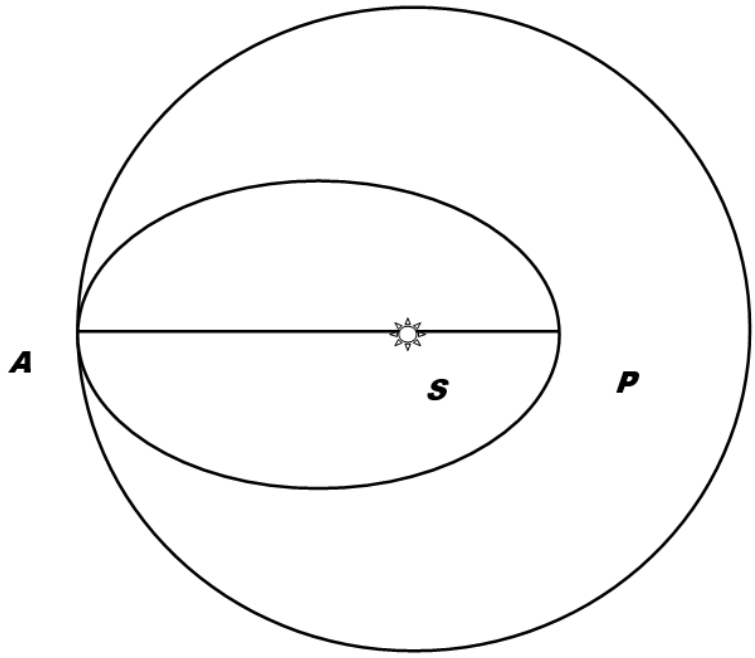


Рис. 3

9. Найдем угол b в градусах по формуле:

$$\beta = \frac{180 \cdot LA}{\pi \cdot SA}.$$

10. Вычислим в км^2 площадь сектора $SBAC$ по формуле:

$$SBAC = \frac{\pi \cdot SA^2 \cdot \beta}{360}.$$

По изложенной выше схеме проведены расчеты в электронных таблицах (рис. 4) для планет (Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун), малых планет и астероидов (Церера, Веста, Эгерия, Вала, Уна, Помпея, Лидия).

Необходимые для проведения вычислений величины больших полуосей орбит *a* небесных тел, их эксцентриситеты *e* и сидерические периоды обращения *T* взяты из соответствующих таблиц в [4]. Аналогичные сведения есть в сети Интернет.

Для лучшего совпадения дуг эллипса и окружности угол *α* вблизи перигелия каждого небесного тела выбирался в зависимости от эксцентриситета (чем ближе эксцентриситет к нулю, тем большим может быть значение угла *α*).

Название	*a*, а.е.	*e*	*T*, год	α	*SA*, а.е.	*SP*, а.е.	*VK*, км/с	*VA*, км/с	*VP*, км/с	*LP*, км	*SMPN*	*TP*, с	*LA*, км	β	*SBAC*
Венера	0,723	0,007	0,615	5	0,728	0,718	35,00	34,76	35,25	9367987	**5,031E+14**	265795	9237747	4,86	**5,031E+14**
Земля	1	0,017	1	5	1,017	0,983	29,77	29,27	30,28	12826621	**9,431E+14**	423577	12397806	4,67	**9,431E+14**
Марс	1,524	0,093	1,88	2	1,666	1,382	24,13	21,98	26,49	7214579	**7,459E+14**	272321	5986846	1,38	**7,459E+14**
Юпитер	5,203	0,048	11,86	4	5,453	4,953	13,06	12,45	13,70	51705829	**1,916E+16**	3773216	46969417	3,30	**1,916E+16**
Сатурн	9,539	0,054	29,46	4	10,054	9,024	9,64	9,13	10,18	94198224	**6,358E+16**	9257662	84546034	3,22	**6,358E+16**
Уран	19,19	0,046	84,02	4	20,073	18,307	6,80	6,49	7,12	191105012	**2,617E+17**	26840560	174296541	3,33	**2,617E+17**
Нептун	30,07	0,008	164,8	5	30,311	29,829	5,43	5,39	5,48	389227791	**8,685E+17**	71077197	383049572	4,84	**8,685E+17**
Церера	2,765	0,079	4,6	2	2,983	2,547	17,90	16,53	19,37	13291485	**2,532E+15**	686213	11345188	1,46	**2,532E+15**
Веста	2,361	0,089	3,628	2	2,571	2,151	19,37	17,72	21,18	11226208	**1,806E+15**	529972	9391254	1,40	**1,806E+15**
Эгерия	2,577	0,084	4,137	2	2,793	2,361	18,54	17,05	20,17	12320508	**2,175E+15**	610712	10411057	1,43	**2,175E+15**
Вала	2,432	0,066	3,793	2	2,593	2,271	19,09	17,87	20,39	11855754	**2,014E+15**	581362	10387687	1,54	**2,014E+15**
Уна	2,727	0,064	4,503	2	2,902	2,552	18,03	16,91	19,22	13322316	**2,544E+15**	693054	11719631	1,55	**2,544E+15**
Помпея	2,738	0,061	4,531	2	2,905	2,571	17,99	16,92	19,12	13418926	**2,581E+15**	701709	11875940	1,57	**2,581E+15**
Лидия	2,734	0,078	4,519	2	2,947	2,521	18,01	16,66	19,48	13156736	**2,481E+15**	675541	11252793	1,46	**2,481E+15**

Рис. 4

Сравнение результатов вычислений площадей секторов *SMPN* (п. 5) и *SBAC* (п. 10) приводит к выводу о справедливости второго закона Кеплера (рис. 4).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бакулин П.И. Курс общей астрономии / П.И. Бакулин, Э.В. Кононович, В.И. Мороз. – М., 1977. – 544 с., ил.
2. Воронцов-Вельяминов Б.А. Сборник задач и практических упражнений по астрономии / Б.А. Воронцов-Вельяминов. – М., 1977. – 272 с., ил.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. – М., 2010. – 416 с., ил.
4. Астрономический календарь. Постоянная часть. – М., 1981. – 704 с., ил.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2024

Рукопись принята к печати 28.03.2024

УДК 372.851

ИНДУКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Иванова Дарья Александровна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: daria.ivanova02@yandex.ru

Яхова Юлия Дмитриевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: juliayahova@mail.ru

Ключевые слова: *индукция, математическая индукция, рекурсия.*

Аннотация. В работе рассмотрены различные индуктивные подходы при решении математических задач.

Индуктивный метод рассуждений непосредственным образом неоднократно применяется при решении математических задач, причём зачастую неосознанно. Целью настоящей работы является попытка анализа некоторых особенностей применения индуктивных методов в различных ситуациях с учётом уровня математических знаний школьников.

В работе будут рассмотрены следующие индуктивные методы решения математических задач:

- от сложной задачи к частным случаям; от частных случаев к методам;
- от частных задач к классам задач;
- от примера, эксперимента к гипотезе; от гипотезы к доказательству;
- многоступенчатая индукция.

Достаточно часто при доказательстве общих формул алгебры, например, возникает ситуация, в которой формула и метод её получения становятся наиболее очевидными в конкретных ситуациях. Тогда можно говорить об индуктивном подходе, основанном на использовании приёма «от сложной задачи к частным случаям; от частных случаев к методам». Проиллюстрируем его применение при решении задач 1, 2 и 3.

Задача 1. Выведите формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии – последовательности, заданной рекуррентным соотношением:

$$a_1, \qquad a_n = a_{n-1} + d,$$

где d – разность арифметической прогрессии.

Решение. Чтобы «придумать» решение рассмотрим более простую задачу: вычислим сумму вида $1 + 2 + \cdots + 100$.

Запишем искомую сумму в прямом и обратном порядке:

$$S = 1 + 2 + \cdots + 100,$$

$$S = 100 + 99 + \cdots + 1.$$

Сложив данные равенства и поделив на 2, получим нужное выражение.

При решении этой задачи возникает некоторый метод, который, возможно, будет полезен в более общем случае. Проверив, работает ли он в обобщении данной задачи – при вычислении суммы $S(n) = 1 + \cdots + n$, нетрудно убедиться, что получается нужное выражение. Мы видим, что данный метод индуктивно переходит от более простой задачи к более сложной. Возникает гипотеза: применив замеченный метод сложения прямой и обратной сумм арифметической прогрессии, можно решить задачу. В справедливости данной гипотезы нетрудно убедиться, проделав вычисления.

Ответ: $\frac{n(a_1+a_n)}{2}$.

Рассмотренную задачу рекомендуется решить ученикам 9 класса на начальном этапе изучения темы «Сумма первых n членов арифметической прогрессии». Способ решения «от сложной задачи к частным случаям; от частных случаев к методам» будет наиболее выгодным для учащихся основной школы, т.к. на данном этапе обучения у них недостаточно сформировано абстрактное мышление: им проще воспринимать информацию с конкретными числами и последовательностями, а также заметить некоторый метод решения задачи в частном случае.

Порой индуктивный метод рассуждений обнаруживается в задачах, не предполагающих его на первый взгляд. Так, например, фигурные числа определяются индуктивно (см. задачу 2). Однако индукция в данном случае является неполной, но тем не менее индуктивный характер рассуждений очевиден.

Иногда при решении задач можно заметить индукцию внутри индукции. В этом случае можно использовать метод «многоступенчатая индукция». Опишем его применение при решении задачи 2.

Задача 2. Фигурными числами называются числа, которые можно представить в виде правильных многоугольников точками, при этом для отдельного вида фигурных чисел количество точек на стороне для каждого нового, большего прошлого числа, увеличивается на одну. Найдите общий вид k-угольных чисел.

Решение. Пусть n – количество точек на одной стороне фигурного числа. $a_k(n)$ – общий вид k-угольного числа.

1. Треугольные числа. В силу условия числа 1, 3, 6, 10, 15 являются треугольными, т.к. их можно представить графически в виде правильных треугольников из 1, 3, 6, 10, 15 точек соответственно, при этом количество точек на стороне каждого следующего числа увеличивается на одну.

Возникает гипотеза $a_3(n) = 1 + 2 + \cdots + n$, которую можно строго доказать с помощью метода математической индукции, а в силу задачи 2 получаем, что $a_3(n) = \frac{n(1+n)}{2}$.

2. Квадратные (четырёхугольные) числа. Заметим, что $(k+1)$-ое квадратное число получается из предыдущего (k-го) с помощью добавления по вертикали $k+1$ точки и добавлением по горизонтали k точек. Тогда

$$a_4(n) = 1 + (2+1) + (3+2) + (4+3) + \cdots + \big(n + (n-1)\big) = n^2.$$

3. Пятиугольные числа (рис. 1).

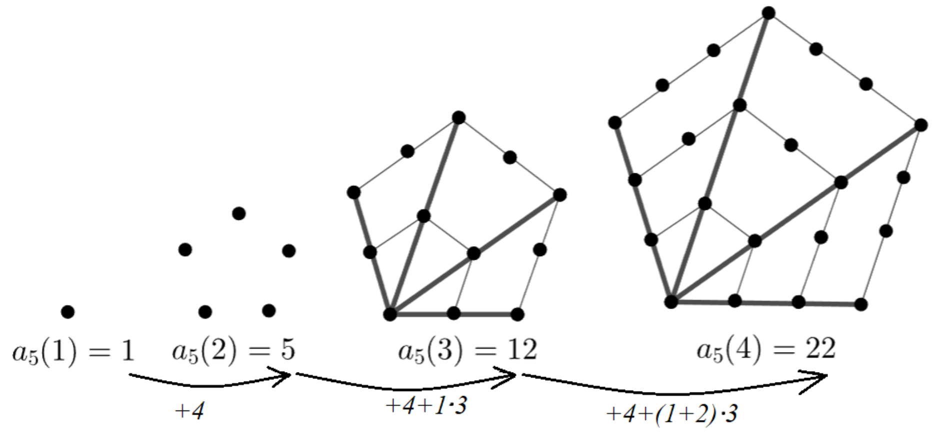


Рис. 1

Проведём лучи из одной точки n-го пятиугольного числа, проходящие через остальные вершины внешнего пятиугольника – их будет 4 штуки. В силу определения фигурных чисел $(n+1)$-ое пятиугольное число получается из предыдущего добавлением по одной точке на проведённых лучах и по $\big((n+1)-2\big)$-е на каждой из новых сторон внешнего пятиугольника. Проведённые лучи делят пятиугольное число на 3 части, в которых находится одинаковое количество точек в силу определения фигурных чисел. Возникает гипотеза, доказывающаяся методом математической индукции:

$$a_5(n) = 1 + (n-1)\cdot 4 + \big(1 + 2 + \cdots + (n-1)\big)\cdot 3 = 1 + \frac{(n-1)(8+3n)}{2}.$$

Заметим, что аналогичные рассуждения можно было провести и для треугольных, и для квадратных чисел. Тогда возникает гипотеза, что аналогичные рассуждения можно провести для вывода формулы общего вида k-угольных чисел.

4. k-угольные числа. Проведём лучи из одной точки n-го k-угольного числа, проходящие через остальные вершины внешнего k-угольника – их будет $k-1$ штуки. В силу определения фигурных чисел $(n+1)$-ое k-угольное число получается из предыдущего добавлением по одной точке на проведённых лучах и по $\big((n+1)-2\big)$-ое на каждой из новых сторон внешнего k-угольника.

Проведённые лучи делят k-угольное число на $(k-2)$-е части, в которых находится одинаковое количество точек в силу определения фигурных чисел. Тогда

$$a_k(n) = 1 + (n-1)\cdot(k-1) + \big(1+2+\dots+(n-1)\big)\cdot(k-2) =$$
$$= 1 + \frac{(n-1)(2(k-1)+(k-2)n)}{2}.$$

Ответ: $1 + \frac{(n-1)(2(k-1)+(k-2)n)}{2}$.

Таким образом, при решении задачи 2 сначала с помощью индуктивных методов были рассмотрены частные случаи (n-е треугольное число, n-е четырёхугольное число и т.д.), а затем по индукции был получен общий вид n-го k-угольного числа.

Рассмотренную задачу рекомендуется предложить школьникам после изучения темы «Сумма первых n членов арифметической прогрессии». Она предполагает использование наглядно-образного мышления, а также применение полученных знаний в нестандартной ситуации.

При решении математических задач бывает полезно рассмотреть различные примеры, провести эксперимент. После этого, возможно, возникнет гипотеза, которую в дальнейшем необходимо будет доказать (или опровергнуть и искать другое решение). Применим методический аспект «от примера, эксперимента к гипотезе; от гипотезы к доказательству» для задач 3 и 4.

Задача 3. Сколько диагоналей у выпуклого n-угольника ($n \geq 3$)?

Решение. Проведём эксперимент: рассмотрим частные случаи и заполним таблицу:

Количество сторон, n	**Количество диагоналей, d_n**	**Количество диагоналей, d_n**	**Рекуррентное соотношение**
3	0	$0 = \frac{3\cdot 0}{2}$	
4	2	$2 = \frac{4\cdot 1}{2}$	$d_4 = d_3 + 2$
5	5	$5 = \frac{5\cdot 2}{2}$	$d_5 = d_4 + 3$
…	…	…	…
n	d_n	$d_n = \frac{n(n-3)}{2}$	$d_n = d_{n-1} + (n-2)$

При рассмотрении частных случаев мы не только «в лоб» считаем диагонали, но и стараемся понять, каким универсальным способом для всех многоугольников можно вычислить их количество (третий и четвёртый столбики). Вследствие нашего эксперимента возникает гипотеза: количество диагоналей n-угольника равно $d_n = \frac{n(n-3)}{2}$. Докажем это. Пусть есть произвольный n-угольник. Из каждой его вершины можно провести $n-3$ диагонали, т.к. нельзя провести диагональ в саму эту вершину и в соседние. Если посчитать все возможные такие отрезки, то по правилу произведения их будет $n(n-3)$. Однако, каждая диагональ будет подсчитана дважды, поскольку любые 2 вершины соединяет 1 диагональ. Поэтому нужно разделить полученное количество на 2.

Ответ: $\frac{n(n-3)}{2}$.

Таким образом, благодаря проведённому эксперименту – рассмотрению треугольников, четырёхугольников, пятиугольников возникла гипотеза о количестве диагоналей выпуклого многоугольника в общем случае, которая впоследствии была доказана.

Рассмотренная задача направлена на использование наглядно-действенного и абстрактного мышлений. Её советуем рассмотреть с учащимися 7 класса для дальнейшего развития математического образа мышления.

Задача 4. Пусть числа A_n^k, где $n \in \mathbb{Z}^+, k \in \mathbb{Z}^+, k \leq n$, удовлетворяют трём условиям:

1) $A_n^k = A_n^{n-k}$; 2) $A_n^k + A_n^{k+1} = A_{n+1}^{k+1}$; 3) $A_n^0 = A_n^n = 1$.

Какой общий вид чисел A_n^k?

Решение. Заметим, что из условия следует, что

$$A_0^0 = C_0^0, A_1^0 = 1 = C_1^0, A_2^0 = 1 = C_2^0, A_3^0 = 1 = C_3^0,$$

$$A_1^1 = 1 = C_1^1, A_2^2 = 1 = C_2^2, A_3^3 = 1 = C_3^3,$$

$$A_1^0 + A_1^1 = A_2^1 \Leftrightarrow 1 + 1 = A_2^1 \Leftrightarrow A_2^1 = 2 = C_2^1,$$

$$A_2^0 + A_2^1 = A_3^1 = A_3^2 \Leftrightarrow A_3^1 = A_3^2 = 3 = C_3^1 = C_3^2.$$

Возникает гипотеза: $A_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Докажем её с помощью метода математической индукции.

База индукции. $A_0^0 = C_0^0, A_1^0 = 1 = C_1^0, A_1^1 = 1 = C_1^1, A_2^1 = 2 = C_2^1$.

Индукционное предположение.

Пусть $\forall 0 \leq n \leq N\ \forall 0 \leq k \leq n$: $A_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Индукционный шаг.

Докажем, что $\forall 0 \leq k \leq N+1$: $A_{N+1}^k = C_{N+1}^k = \frac{(N+1)!}{k!(N+1-k)!}$.

Пусть $k = 0$. По условию $A_{N+1}^0 = 1$, т.е. $A_{N+1}^0 = C_{N+1}^0$.

Пусть $k = N+1$. По условию $A_{N+1}^{N+1} = 1$, т.е. $A_{N+1}^{N+1} = C_{N+1}^{N+1} = 1$.

Пусть $k < N+1$. Тогда из условия и индукционного предположения

$$A_{N+1}^k = A_N^{k-1} + A_N^k = \frac{N!}{(N-k+1)!} + \frac{N!}{(N-k)!k!} =$$

$$= \frac{N!}{(N-k)!(k-1)!}\left(\frac{1}{N-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{(n+1)!}{(N-k+1)!k!} = C_{N+1}^k.$$

Ответ: $A_n^k = C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

В силу того, что при решении задачи 4 учащимся необходимо осознанно понимать суть метода математической индукции, мы рекомендуем рассматривать эту задачу в 10 или 11 классе.

Некоторые задачи можно объединить в один класс благодаря аналогичным приёмам решения. Так, например, задачи 1 и 5 можно объединить в одну группу, а задачи 2 и 5 - в другую. В этом проявляется методический аспект «от частных задач к классам задач».

Задача 5. На сколько частей n пересекающихся прямых, любые две из которых не параллельны и любые три из которых не пересекаются в одной точке, делят плоскость?

Решение. Пусть $S(n)$ – искомое количество. Рассмотрим примеры: 0, 1, 2, 3, 4 пересекающиеся прямые и заметим закономерность (рис. 2).

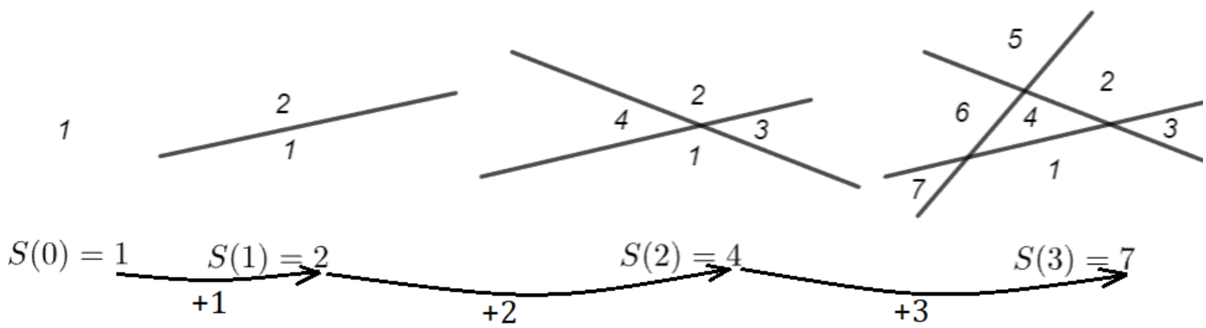


Рис. 2

Возникает гипотеза: $S(n) = 1 + 1 + 2 + \cdots + n = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$. Докажем это.

База индукции. $S(0) = 1 + \frac{1\cdot 0}{2} = 1$ – верно.

Индукционное предположение. Пусть $S(n) = 1 + \frac{(1+n)n}{2}$.

Индукционный шаг. Докажем, что $S(n+1) = 1 + \frac{(2+n)(n+1)}{2}$.

Так как по условию задачи $(n+1)$-я прямая должна пересекать n других прямых в новых точках пересечения, то она должна делить каждый из $n+1$ кусочков плоскости, образованных n прямыми, на два новых, а значит количество кусочков плоскости увеличивается на $n+1$, т.е.

$$S(n+1) = S(n) + (n+1) = 1 + \frac{(1+n)n}{2} + (n+1) = 1 + \frac{(2+n)(1+n)}{2}.$$

Ответ. $1 + \frac{(1+n)n}{2}$.

Рассмотрим подробнее признаки, по которым данные задачи можно распределить в эти группы.

При решении задач 1 и 5 возникнет сумма арифметической прогрессии, для вычисления которой используется один и тот же приём.

Задачи 2 и 5 можно обобщить и рассмотреть их аналоги в пространстве, рассматривая фигурные числа в пространстве в задаче 2 и не прямые, а плоскости в задаче 5. При этом методы решения «новых» задач сохранятся. Поэтому задачи 2 и 5 можно отнести к одному классу задач.

Задачу 5 можно предложить учащимся 8 класса после изучения темы «Взаимное расположение прямых на плоскости». При решении данной задачи ученикам для доказательства выдвинутой гипотезы потребуется использовать абстрактное мышление и способности к суждениям для осознанного строгого доказательства.

Сформулируем сходства и различия «похожих» индуктивных методов «от сложной задачи к частным случаям; от частных случаев к методам» и «от примера, эксперимента к гипотезе; от гипотезы к доказательству».

При использовании как и подхода «от сложной задачи к частным случаям; от частных случаев к методам», так и способа «от примера, эксперимента к гипотезе; от гипотезы к доказательству» изначально рассматриваются частные случаи, однако сам приём их изучения различен. При использовании первого подхода при рассмотрении частных случаев мы стараемся заметить некоторый общий для них метод решения, который в дальнейшем применим к решению исходной задачи. При использовании же подхода «от примера, эксперимента к гипотезе; от гипотезы к доказательству» при рассмотрении частных случаев мы не задумываемся, откуда берётся результат с точки зрения доказательства, а лишь замечаем некоторые закономерности и выдвигаем гипотезу, которую потом строго доказываем.

Таким образом, из вышенаписанного можно сделать вывод о том, что одну и ту же задачу можно рассматривать с точки зрения разных методических аспектов; одну задачу можно отнести к разным классам задач. Нельзя сказать, какой метод лучше: в одной задаче несколько приёмов окажутся одинаково эффективными, в другой окажется наиболее эффективным лишь один подход. Все эти наблюдения могут быть полезны при решении новой задачи.

Индуктивный способ мышления является одним из наиболее рациональных методов при изучении нового материала: с ростом количества решённых задач накапливается опыт, который приводит к повышению уровня математических знаний, что в свою очередь позволяет наиболее быстро найти ответ в новой задаче. А это является индукционным шагом в другом смысле.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джордж Пойа Математическое открытие. Решение задач: основные понятия, изучение и преподавание. – М.: Изд-во «Наука», 1976 г., 448 стр. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.mathedu.ru/text/poya_matematicheskoe_otkrytie_1976/p4/ (последнее обращение 20.03.2024 г.).

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2024

Рукопись принята к печати 29.03.2024

УДК 517.2

ИЗБРАННЫЕ ВОПРОСЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ: ФУНКЦИЯ ВЕЙЕРШТРАССА И ПРИМЕР ВАН ДЕР ВАРДЕНА

Иванова Полина Константиновна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: pkivanova@edu.tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *непрерывность, дифференцируемость, функция Вейерштрасса, пример Ван дер Вардена.*

Аннотация. Изучение функции Вейерштрасса и примера Ван дер Вардена на занятиях по «Избранным вопросам дифференциального исчисления» позволяет продемонстрировать обучающимся как со временем менялось представление математиков о понятии функции. В свою очередь, история развития понятия функции свидетельствует о том, как меняются определения математических понятий по мере развития математики как науки.

Понятие функции является одним из основных понятий в математике. Первое знакомство с ним происходит в VI классе средней школы. В старших классах, а также на младших курсах высших учебных заведений чаще всего предлагают такое определение функции [1, стр. 23]:

Пусть даны два множества произвольной природы $M = \{x\}$ и $N = \{y\}$. Если каждому элементу x множества M по некоторому закону или правилу f в соответствие поставлен единственный элемент y из N, то говорят, что на множестве M задана функция (отображение, преобразование) f с множеством значений в N, и пишут: $f: M \to N$. При этом множество M называется областью существования или областью определения функции f.

Если, кроме того, $f: M \to \mathbf{R}$ – некоторая функция, а $M \subset \mathbf{R}$, то f называют функцией действительного переменного. Такие функции допускают геометрическую интерпретацию, а именно: для них можно ввести понятие графика. Выделяют различные способы задания функций действительного переменного: аналитический способ, когда функция описывается посредством одной или нескольких формул; графический способ; табличный способ; словесный (описательный) способ.

Одним из важнейших свойств функции действительного переменного является её непрерывность. До некоторых пор это свойство функции считалось само собой разумеющимся, естественным свойством любой действительной функции. Попытки корректно ввести данное понятие оказали решающее влияние на развитие математического анализа [2].

В [1, стр. 90–91] можно найти следующие эквивалентные определения непрерывной в точке функции:

Определение. Пусть функция $f: M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in M$. 1) Если x_0 – изолированная точка множества M, то говорят, что функция f непрерывна в точке x_0. 2) Если x_0 – предельная точка множества M, то говорят, что функция f непрерывна в этой точке, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение по Коши или на языке «$\varepsilon - \delta$». Пусть функция $f: M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in M$. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x \in M(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

Определение по Гейне или на языке последовательностей. Пусть функция $f: M \to \mathbf{R}$, $M \subset \mathbf{R}$ и $x_0 \in M$. Функция f называется непрерывной в точке x_0, если $\forall \{x_n\} \subset M \left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0) \right)$.

На следующем этапе старшеклассники и студенты младших курсов знакомятся с понятиями производной и дифференцируемости функции в точке. В работе [2] читаем: «Правила дифференцирования формулировались постепенно, начиная с XVII века. Ещё когда Ньютону было 15 лет, а Лейбницу 12, алгебраисты знали процедуру дифференцирования многочлена – Гудде, 1658 год, Ролль, 1690 год.

В [3, стр. 5] находим следующие определения производной и дифференцируемости функции действительного переменного в точке:

Определение производной. Пусть на интервале $(a; b) \subset \mathbf{R}$ задана функция $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, $x' \in (a; b)$, $\Delta x = x' - x$ – приращение аргумента, $\Delta f(x) = f(x') - f(x)$ – приращение функции, отвечающее приращению аргумента. Рассмотрим предел разностного отношения $\lim\limits_{x' \to x} \frac{f(x') - f(x)}{x' - x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$. Если этот предел существует, то его значение называется производной функции f в точке x.

Определение дифференцируемой функции. Пусть функция $y = f(x)$ задана на интервале $(a; b) \subset R$ и $x \in (a; b)$. Рассмотрим приращение Δx аргумента функции f в точке x и отвечающее ему приращение функции $\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x)$ в этой точке. Если приращение $\Delta f(x)$ может быть представлено в виде $\Delta f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(x; \Delta x)\Delta x$, где $\alpha(x; \Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то тогда функция f называется дифференцируемой в точке x.

Важно установить, как связаны между собой понятия непрерывности и дифференцируемости функции в точке и тем самым ответить на вопрос является ли дифференцируемая в точке функция непрерывной в этой точке и наоборот является ли непрерывная функция в точке дифференцируемой в этой точке? Нетрудно показать (см., например, [3]), что если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней и что обратная теорема неверна, поскольку непрерывная функция в точке может не иметь производной в этой точке. Примером такой функции является функция $y = |x|$, которая непрерывна в точке $x = 0$ и не дифференцируема в этой точке.

Все функции, с которыми приходится иметь дело старшеклассникам на уроке математики в школе или студентам младших курсов на занятиях по математическому анализу, дифференцируемы в каждой точке своей области определения кроме, быть может, некоторых изолированных точек из области определения функции. Но тогда у обучающихся может сложиться впечатление, что все функции обладают таким свойством, а это не так. На занятиях по «Избранным вопросам дифференциального исчисления» есть возможность более подробно остановиться на этом вопросе.

В 1872 году Вейерштрасс предложил пример всюду непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции (опубликован этот пример был впервые в 1875 году в работе П. Дюбуа-Реймона). Речь идёт о функции, заданной на всей числовой прямой формулой $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$, где a – произвольное нечётное число, не равное единице, а b – положительное число меньшее единицы.

В 1930 году Ван дер Варден привёл более простой пример непрерывной функции, нигде не имеющей производной [4], [5]. Функция Ван дер Вардена обладает те ми же свойствами, что и функция Вейерштрасса, но устроена намного проще, чем функция Вейерштрасса.

Остановимся на примере Ван дер Вардена [6].

Пусть $\varphi(x)$ – расстояние от действительного числа x до ближайшего целого числа. Рассмотрим функцию $y = \varphi(x)$. Данная функция определённа на всей числовой прямой, является кусочно-линейной, периодической (с периодом 1), её график напоминает пилу (Рис. 1).

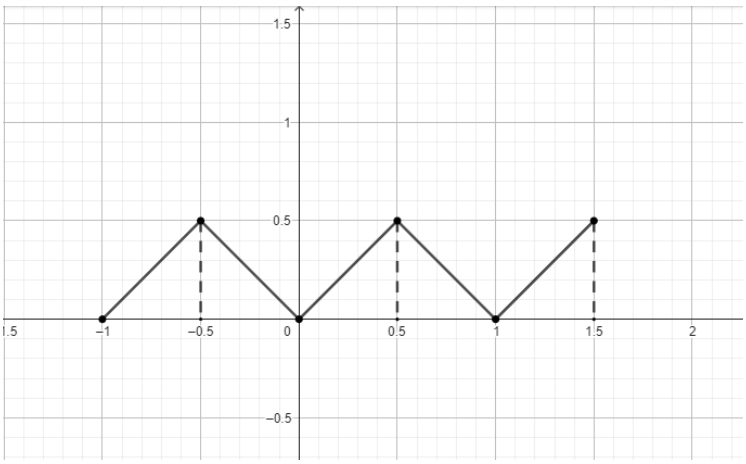


Рис. 1

Определим следующую функцию

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^k x)}{10^k} = \varphi(x) + \frac{\varphi(10x)}{10} + \cdots + \frac{\varphi(10^k x)}{10^k} + \cdots.$$

Поскольку $0 \le h(x) \le \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot 10^k} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \cdots\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{9} = \frac{5}{9}$, то ряд сходится и функция $h(x)$ определена корректно. Более того, функциональный ряд с непрерывным общим членом $\frac{\varphi(10^k x)}{10^k}$ сходится равномерно на **R**, а значит, его сумма $h(x)$ непрерывна на **R** [7, стр. 59].

Первое слагаемое в этой сумме равно $h_0(x) = \varphi(x)$, его мы назовём нулевой пилой. Тогда график нулевой пилы изображён на рис. 1.

Второе слагаемое $h_1(x) = \frac{\varphi(10x)}{10}$ назовём первой пилой. Графики нулевой пилы и первой пилы изображены на рис. 2, первая пила имеет более мелкие зубья, чем нулевая:

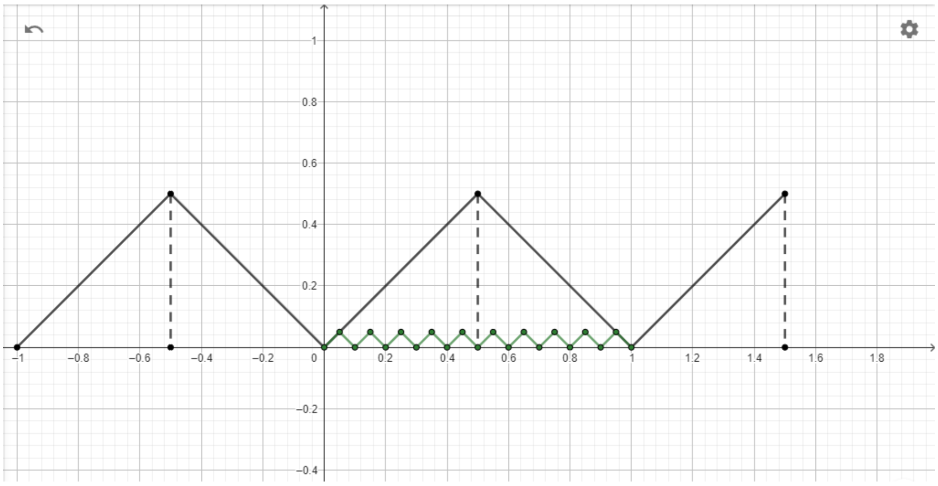


Рис. 2

Аналогично вводим в рассмотрение вторую пилу $h_2(x) = \frac{\varphi(100x)}{100}$. Её график выглядит так: под каждым зубцом первой пилы умещается 10 зубцов второй пилы, под каждым зубцом нулевой пилы умещается 100 зубцов второй пилы и так далее. Таким образом, зубцы каждой следующей пилы в 10 раз меньше зубцов предыдущей, а функция $h(x)$ представляет собой сумму этих пил.

Докажем, что функция $h(x)$ нигде не дифференцируема.

Учитывая 1-периодичность функции, рассмотрим произвольную точку $x_0 \in [0; 1]$. Необходимо показать, что $h'(x_0)$ не существует, то есть, не существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x}$. Доказательство удобно проводить, опираясь на определение предела функции в точке по Гейне.

Рассмотрим десятичную запись числа $x_0 = 0, x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 \ldots$ (представления с 9 в периоде не рассматриваем) и числовую последовательность $\{\Delta x_m\}$, полагая

$$\Delta x_m = \begin{cases} -10^{-m}, \text{если } x_m = 4 \text{ или } x_m = 9, \\ 10^{-m}, \text{если } x_m \neq 4 \text{ и } x_m \neq 9. \end{cases}$$

Пример. $x_0 = 0{,}23437\ldots$. Тогда $\Delta x_1 = \frac{1}{10}$; $\Delta x_2 = \frac{1}{100}$; $\Delta x_3 = -\frac{1}{1000}$; $\Delta x_4 = \frac{1}{10000}$; … . В этом случае

$$1)\ h(x_0 + \Delta x_1) = h(0{,}23437\ldots + 0{,}1) = h(0{,}33437\ldots) = \varphi(0{,}33437\ldots) + \\ + \frac{\varphi(3{,}3437\ldots)}{10} + \frac{\varphi(33{,}437\ldots)}{100} + \frac{\varphi(334{,}37\ldots)}{1000} + \frac{\varphi(3343{,}7\ldots)}{10000} + \cdots = \\ = 0{,}33437\ldots + 0{,}03437\ldots + 0{,}00437\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0) = h(0{,}23437\ldots) = \varphi(0{,}23437\ldots) + \frac{\varphi(2{,}3437\ldots)}{10} + \frac{\varphi(23{,}437\ldots)}{100} + \\ + \frac{\varphi(234{,}37\ldots)}{1000} + \frac{\varphi(2343{,}7\ldots)}{10000} + \cdots = 0{,}23437\ldots + 0{,}03437\ldots + 0{,}00437\ldots + \\ + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0 + \Delta x_1) - h(x_0) = 0{,}1 = \Delta x_1.$$

$$2)\ h(x_0 + \Delta x_2) = h(0{,}23437\ldots + 0{,}01) = h(0{,}24437\ldots) = \varphi(0{,}24437\ldots) + \\ + \frac{\varphi(2{,}4437\ldots)}{10} + \frac{\varphi(24{,}437\ldots)}{100} + \frac{\varphi(244{,}37\ldots)}{1000} + \frac{\varphi(2443{,}7\ldots)}{10000} + \cdots = \\ = 0{,}24437\ldots + 0{,}04437\ldots + 0{,}00437\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0) = 0{,}23437\ldots + 0{,}03437\ldots + 0{,}00437\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0 + \Delta x_1) - h(x_0) = 0{,}01 + 0{,}01 = 2 \cdot 0{,}01 = 2\Delta x_2.$$

$$3)\ h(x_0 + \Delta x_3) = h(0{,}23437\ldots - 0{,}001) = h(0{,}23337\ldots) = \varphi(0{,}23337\ldots) + \\ + \frac{\varphi(2{,}3337\ldots)}{10} + \frac{\varphi(23{,}337\ldots)}{100} + \frac{\varphi(233{,}37\ldots)}{1000} + \frac{\varphi(2333{,}7\ldots)}{10000} + \cdots = \\ = 0{,}23337\ldots + 0{,}03337\ldots + 0{,}00337\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0) = 0{,}23437\ldots + 0{,}03437\ldots + 0{,}00437\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0 + \Delta x_1) - h(x_0) = -0{,}001 - 0{,}001 - 0{,}001 = -3 \cdot 0{,}001 = -3\Delta x_3.$$

$$4)\ h(x_0 + \Delta x_4) = h(0{,}23437\ldots + 0{,}0001) = h(0{,}23447\ldots) = \varphi(0{,}23447\ldots) + \\ + \frac{\varphi(2{,}3447\ldots)}{10} + \frac{\varphi(23{,}447\ldots)}{100} + \frac{\varphi(234{,}47\ldots)}{1000} + \frac{\varphi(2344{,}7\ldots)}{10000} + \cdots = \\ = 0{,}23447\ldots + 0{,}03447\ldots + 0{,}00447\ldots + 0{,}00047\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0) = 0{,}23437\ldots + 0{,}03437\ldots + 0{,}00437\ldots + 0{,}00037\ldots + 0{,}0000\ldots + \cdots;$$

$$h(x_0 + \Delta x_1) - h(x_0) = 0{,}0001 + 0{,}0001 + 0{,}0001 + 0{,}0001 = 4 \cdot 0{,}0001 = 4\Delta x_4.$$

Последовательность $\{\Delta x_m\}$ построена так, что при добавлении Δx_m к x_0 точка «удерживается» на том же самом звене ломаной. Более точно, при прибавлении к нашей точке Δx_m возможны два случая:

1) Для $0, 1, 2, 3, \ldots, m-1$ пил мы остаёмся на том же самом зубце, опускаясь чуть ниже или поднимаясь чуть выше по левому или правому его краю.

2) Для $m, m+1, \ldots$ пил мы перескакиваем на следующий такой же зубец, в ту же самую точку.

Вернёмся к пределу $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}$. Заметим, что

$$\lim_{\Delta x_m \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x_m)-h(x_0)}{\Delta x_m} =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\Delta x_m}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi\left(10^k(x_0+\Delta x_m)\right)}{10^k} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(10^k x)}{10^k}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{\Delta x_m} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\varphi\left(10^k(x_0+\Delta x_m)\right)}{10^k} - \frac{\varphi(10^k x)}{10^k}\right) =$$

$$= \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\pm\Delta x_m}{\Delta x_m} = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m-1} (\pm 1),$$

где перед единицей стоит либо «+», либо «–». Полученный предел не существует. Следовательно, не существует исходный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{h(x_0+\Delta x)-h(x_0)}{\Delta x}$ и функция $h(x)$ не дифференцируема в точке x_0.

Список литературы

1. Голубев А.А., Суетин В.Ю. Введение в анализ: Учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2007. – 160 с. EDN: TIIASL

2. Синкевич Г.И. История понятия числа и непрерывности в математическом анализе XVII—XIX вв. – Санкт-Петербург: Издательство СПбГАСУ. 2016. – 312 с.

3. Голубев А.А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного: учебное пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2015. – 160 с. EDN: TQJBXV

4. Титчмарш Е. Теория функций. 2-е издание. – М.: Наука, 1980. – с. 359–363.

5. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. с. 50–51.

6. Yaraslau Zadvorny. Функция Ван дер Вардена. – YouTube: Share your videos with friends, family, and the world. – 6 авг. 2020 г. https://inlnk.ru/LAzdOw

7. Голубев А.А. Числовые и функциональные ряды: учеб. пособие для студентов математических факультетов. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2022. – 178 с. EDN: CTDWFJ

Рукопись поступила в редакцию 15.03.2024

Рукопись принята к печати 18.03.2024

УДК 004.43

ОПЕРАТОРЫ В ЯЗЫКЕ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С++

Каленова Милена Романовна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: milenakalenova@gmail.com

Яхова Юлия Дмитриевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: juliayahova@mail.ru

Ключевые слова: *оператор, программирование, язык программирования С++.*

Аннотация. Материал собран для обобщения знаний и повторения темы “Операторы в языке С++” в углублённом курсе старшей школы. Также собранные сведения могут быть полезны для ознакомления с особенностями языка С++ после изучения других языков программирования.

При изучении различных тем по программированию бывает проблематично структурировать знания. Тем более сложно определить взаимосвязь компонентов, которые ещё не изучены. Также полезно бывает вспомнить некоторую терминологию, используемую при изучении отдельных разделов курса, так как это может пригодиться для освоения дальнейшего материала. Поэтому мы предлагаем рассмотреть данный материал для проведения занятий по обобщению материала по теме «Операторы в языке программирования С++».

Определение. Оператор или инструкция – наименьшая автономная часть языка программирования; команда или набор команд.

Программа обычно представляет собой последовательность операторов.

Далее мы рассмотрим основные блоки данной темы в следующей последовательности:

1) базовые операторы:
   a) операторы присваивания,
   b) пустые операторы,
   c) блоки;
2) операторы ветвления:
   a) условный оператор,
   b) оператор выбора;
3) операторы цикла
   a) while,
   b) do-while,
   c) for;
4) операторы перехода.

Базовые операторы

Операторы присваивания. Операция присваивания копированием – особый вид операции присваивания, используемый для присваивания объектов одного класса друг другу, обозначается знаком '='. Составные операции присваивания (+=, -=, *= и т. д.) могут использоваться в программе как полноценные операторы.

Определение. Операнд в языках программирования – аргумент операции; данные, которые обрабатываются командой.

Формат операции простого присваивания (=):операнд_1 = операнд_2.

Первый операнд должен быть любым выражением l-value, адресующим некоторый участок памяти, в который можно занести значение, второй – выражением r-value. Сначала вычисляется выражение, стоящее в правой части операции, а потом его результат записывается в область памяти, указанную в левой части (мнемоническое правило: «присваивание – это передача данных "налево"»). То, что ранее хранилось в этой области памяти, стирается.

Замечание. При присваивании производится преобразование типа выражения к типу операнда_1 из левой части, что может привести к потере информации.

В сложных операциях присваивания (+=, *=, /= и т п.) при вычислении выражения, стоящего в правой части, используется операнд из левой части. Например, при сложении с присваиванием ко второму операнду прибавляется первый, и результат записывается в первый операнд, то есть выражение a += b является более компактной записью выражения a = a + b.

Операции увеличения и уменьшения на 1 (“++”, или инкремент, и “–", или декремент). Эти операции имеют две формы записи - префиксную, когда операция записывается перед операндом, и постфиксную. В префиксной форме сначала изменяется операнд, а затем его значение становится результирующим значением выражения, а в постфиксной форме значением выражения является исходное значение операнда, после чего он изменяется.

Пустой оператор состоит из знака ';'. Он используется там, где по правилам языка должен находиться какой-либо оператор, а по логике программы там ничего выполнять не надо.

Пример.for (int i = 0; i < 10; line[i++] = 3).

Для таких операторов, как do, for, if, while требуется, чтобы в их теле был хотя бы один оператор. Пустой оператор удовлетворяет требованиям синтаксиса в случаях, когда никаких действий не требуется. В приведенном примере третье выражение в заголовке оператора цикла for инициализирует первые 10 элементов массива line числом “3”. Тело оператора for состоит из пустого оператора, поскольку нет необходимости в других операторах.

Блоки. Составной оператор иначе называют блоком. Он представляет фрагмент текста программы, заключенный в фигурные скобки и, как правило, объединяющий несколько операторов. Составной оператор должен использоваться там, где синтаксис языка требует наличия лишь одного оператора, а логика программы - сразу нескольких:{int i = 5; double c = sin (i * x); c++;}// пример блока.

Операторы ветвления

Условный оператор if используется для разветвления процесса вычислений на два направления. Структурная схема оператора приведена на рис. 1.

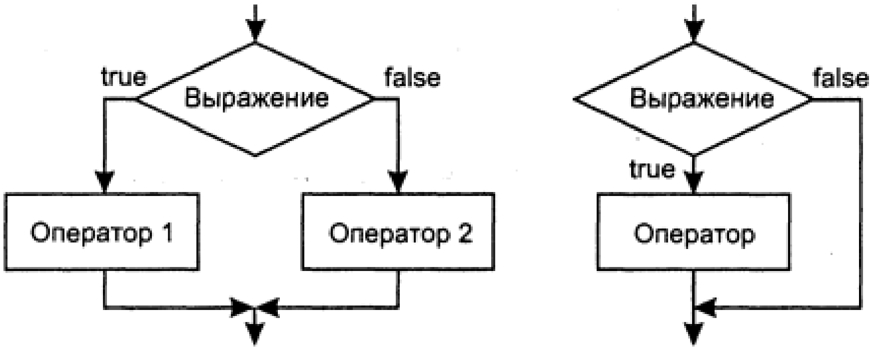


Рис. 1

В левой части рис. 1 изображена полная форма условного оператора, в правой – неполная форма.

Формат оператора: if (условие) оператор_1; else оператор_2.

Сначала вычисляется выражение, стоящее в условии, которое может иметь арифметический тип или тип указателя. Если оно не равно нулю (имеет значение true), выполняется первый оператор, иначе - второй. После этого управление передается на оператор, следующий за условным. Такая последовательность действий имеет место в полной форме условного оператора.

Одна из ветвей может отсутствовать в ситуациях, где логичнее опускать вторую ветвь вместе с ключевым словом else. В таком случае мы говорим о неполной форме условного оператора.

Если в какой-либо ветви требуется выполнить несколько операторов, их необходимо заключить в блок, иначе компилятор не сможет понять, где заканчивается ветвление. Блок может содержать в том числе и другие условные операторы. Необходимо учитывать, что переменная, описанная в блоке, вне блока не существует.

Оператор switch (переключатель) предназначен для разветвления процесса вычислений на несколько направлений. Структурная схема оператора представлена на рис. 2.

Формат оператора:

```
switch (выражение) {
case константное_выражение_1: список_операторов_1
…
case константное_выражение_n: список_операторов_n
default: операторы
}
```

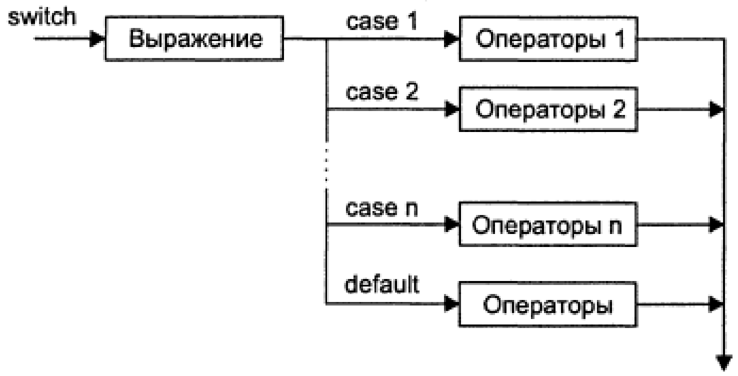


Рис. 1

Выполнение оператора начинается с вычисления выражения (оно должно быть целочисленным), а затем управление передаётся первому оператору из списка, помеченного константным выражением, значение которого совпало с вычисленным. После этого, если выход из переключателя явно не указан, последовательно выполняются все остальные ветви. Выход из переключателя обычно выполняется с помощью операторов break или return.

Все константные выражения должны иметь разные значения, но быть одного и того же целочисленного типа. Несколько меток могут следовать подряд. Если совпадения не произошло, выполняются операторы, расположенные после слова default (при его отсутствии управление передается следующему за switch оператору).

Пример

```
int x = 2;
switch(x){// выполнение оператора зависит от значения x
case 1: cout << "Bye,";//данная ветка игнорируется, так как x = 2
case 2: cout << "Hello,";//значение выражения совпало со значением x
default: cout << " World!";//на экран выводится “Hello, World!”
}
```

Замечание. В случае синтаксической ошибки в слове default сообщение об ошибке не выдается, поскольку компилятор воспримет это слово как допустимую метку оператора.

Операторы цикла

Использование циклов при работе с массивами позволяет значительно упростить и автоматизировать процесс обработки данных. Это особенно полезно, когда имеется большое количество элементов или когда требуется выполнить одни и те же операции с каждым элементом массива.

Наиболее часто используемые циклы можно разделить на итерационные (while, do-while) и счётные (for). В итерационных циклах на каждом шаге вычислений происходит последовательное приближение и проверка условия достижения искомого результата, из-за чего неизвестно заранее точное количество выполнений тела цикла. Выход из итерационного цикла осуществляется в случае выполнения заданного условия. Цикл for часто называют счётным, так как в заголовке определяется некоторая управляющая переменная (переменная-счётчик), ей присваивается начальное значение, и после каждого прохода переменная счётчик изменяется (увеличивается или уменьшается), а цикл завершается, когда переменная-счётчик достигает некоторого критического значения.

Во многих случаях счётный и итерационные циклы взаимозаменяемы, и программисты исходят из отдельных ситуаций или личных предпочтений.

Оператор цикла while с предусловием имеет вид

while (выражение) оператор.

Оператор называют телом цикла. При выполнении такого оператора сначала вычисляется значение выражения. Если оно равно 0, то оператор не выполняется и управление передается оператору, следующему за ним. Если значение выражения отлично от 0, то выполняется оператор, затем снова вычисляется выражение и т. д. Возможно, что тело цикла не выполнится ни разу, если выражение сразу будет равно 0.

Оператор цикла do-while с постусловием. Этот оператор проверяет условие окончания цикла после каждого прохода через его тело, поэтому тело цикла всегда выполняется по крайней мере один раз. Он имеет вид

do оператор while (выражение);

Сначала выполняется оператор, затем вычисляется выражение, и если оно отлично от нуля, то оператор выполняется снова и т. д.

Если выражение становится равным нулю, то цикл завершается.

Такой цикл удобно, например, использовать при проверке вводимых пользователем данных.

Оператор цикла for имеет вид

for (выражение1; выражение2; выражение3) оператор1;

Выражение 1 – объявление (и) или инициализация, ранее объявленной, переменной-счётчика, которая будет отвечать за истинность условия в цикле for. Переменная-счётчик всегда должна иметь целочисленный тип данных. Если переменная была объявлена в цикле, по завершении цикла эта переменная будет стёрта. Выражение 2 – это условие продолжения цикла for, оно проверяется на истинность. Выражение 3 изменяет значение переменной-счётчика. Выражения 1, 2 и 3 отделяются друг от друга обязательными разделителями, точкой с запятой.

Любая из трёх частей может быть опущена, хотя точка с запятой обязательно должна оставаться. Без выражения 3 цикл считается бесконечным, так как изменение содержимого переменной-счётчика выполняться не будет, и если изначально условие было истинным, то цикл будет бесконечным, иначе программа даже не войдёт в цикл. Если отсутствует проверка, то есть выражение 2, то считается, что выражение 2 отлично от 0, так что for (; ;){ … } – бесконечный цикл и его надо каким-либо образом прервать.

Пример

int n = 20, s=0;

for (int i = 1; i <= n; i++) s+ = i * i; //сумма квадратов целых чисел от 1 до 20.

Операторы перехода

В языке С++ определены четыре оператора перехода: return, goto, break и continue. Оператор return можно использовать в любом месте внутри функции. Операторы break и continue можно использовать в любом из операторов цикла. Break можно также использовать в операторе switch.

Оператор return используется для выхода из функции. Отнесение его к категории операторов перехода обусловлено тем, что он заставляет программу перейти в точку вызова функции. Оператор return может иметь ассоциированное с ним значение, тогда при выполнении данного оператора это значение возвращается в качестве значения функции. В функциях типа void используется оператор return без значения.

Общая форма оператора return следующая:

return *выражение*;

Выражение присутствует только в том случае, если функция возвращает значение. Это значение *выражения* становится возвращаемым значением функции.

Внутри функции может присутствовать произвольное количество операторов return. Выход из функции происходит тогда, когда встречается один из них. Закрывающаяся фигурная скобка также вызывает выход из функции. Выход программы на неё эквивалентен оператору return без значения. В этом случае функция, тип которой отличен от void, возвращает неопределённое значение.

Функция, определённая со спецификатором void, не может содержать return со значением. Так как эта функция не возвращает значения, в ней не может быть оператора return, возвращающего значение.

Оператор goto. В результате чрезмерного использования операторов goto программа плохо читается, она становится "похожей на спагетти". Такими программами недовольно руководство фирм, производящих программный продукт. То есть оператор goto весьма непопулярен, более того, считается, что в программировании не существует ситуаций, в которых нельзя обойтись без оператора goto. Но иногда, при умелом использовании, этот оператор может оказаться весьма полезным, например, если нужно покинуть глубоко вложенные циклы.

Для оператора goto всегда необходима метка. *Метка* – это идентификатор с последующим двоеточием. Метка должна находится в той же функции, что и goto, переход в другую функцию невозможен. Метка может находиться как до, так и после оператора goto. Общая форма оператора goto следующая:

goto *метка*;

…

метка:

Оператор break применяется в двух случаях. Во-первых, в операторе switch с его помощью прерывается выполнение последовательности case. В этом случае оператор break не передаёт управление за пределы блока. Во-вторых, оператор break используется для немедленного прекращения выполнения цикла без проверки его условия, в этом случае оператор break передаёт управление оператору, следующему после оператора цикла.

Если оператор break присутствует внутри оператора switch, который вложен в какие-либо циклы, то break относится только к switch, выход из цикла не происходит.

Оператор continue. Можно сказать, что оператор continue немного похож на break. Оператор break вызывает прерывание цикла, а continue – прерывание текущей итерации цикла и осуществляет переход к следующей итерации. При этом все операторы до конца тела цикла пропускаются. В цикле for оператор continue вызывает выполнение операторов приращения и проверки условия цикла. В циклах while и do-while оператор continue передаёт управление операторам проверки условий цикла.

Пример

```
int i = 0;
do {
  i++;
  cout << "до continue" << endl; //текст выводится при каждой итерации
  continue; // производится переход на проверку условия
  cout << "после continue не выводится";
  // текст после оператора continue не выводится на экран
  } while (i < 3);
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Герберт Шилдт «C: *The Complete Reference» (Полный справочник по C)*. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://neon1ks.github.io/c/03/0306.htm (последнее обращение 18.03.2024 г.).

2. C/C++. Программирование на языке высокого уровня / Т. А. Павловская. - СПб.: Питер, 2003. - 461 с.: ил.

3. Язык C++ и программирование на нём: учебное пособие/В.И. Рейзлин; Томский политехнический университет. – 3-е изд., перераб. - Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2021. - 208 с.

Рукопись поступила в редакцию 25.03.2024

Рукопись принята к печати 29.03.2024

УДК 51-76

ИССЛЕДОВАНИЕ МГНОВЕННОГО СЕРДЕЧНОГО РИТМА ПЯТИ ПАЦИЕНТОВ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТНОЙ КЛИНИЧЕСКОЙ БОЛЬНИЦЫ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФРАКТАЛЬНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

Мельничихина Анастасия Андреевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: amelnichikhina@mail.ru

Михеев Сергей Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Mikheev.SA@tversu.ru

Цветков Виктор Павлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.VP@tversu.ru

Ключевые слова*: фрактальная термодинамика, мгновенный сердечный ритм, фрактальное уравнение состояния*

Аннотация. В данной работе методом фрактальной термодинамики исследуется мгновенный сердечный ритм на основе суточного холтеровского мониторирования для пяти пациентов Тверской областной клинической больницы.

В современном мире идет распространенность сердечно-сосудистых заболеваний. Для выявления тех или иных отклонений от нормы исследуются частоты сердечного ритма с использованием статистического анализа данных суточного холтеровского мониторирования электрокардиограммы (ЭКГ). Тем самым получаем массив RR-интервалов, промежутков времени между соседними рубцами ЭКГ, равного одному сердечному циклу.

Целью работы является построение и анализ модели фрактальной термодинамики на различных временных массивах холтеровского мониторирования.

Исследование сердечного ритма в медицине тесно связано с холтеровским мониторированием электрокардиограммы, чье программное обеспечение позволяет провести первичную обработку вариабельности сердечного ритма.

В работе взято для исследования суточное холтеровское мониторирование пяти пациентов. Для проведения анализа мгновенного сердечного ритма (МСР) на промежутках по 30 минут массив данных был обработан с помощью программы Миокард-2, экспортирован в Microsoft Office Excel, после чего использован для построения и визуализации кардиоинтервалов в системе компьютерной алгебры Maple.

Кардиоритмы представляют собой недетерминированную хаотическую систему. Для их описания нами используются функции частоты МСР y(t), определенные в работе [1].

Докажем, что кривая МСР y(t) близка к фракталу. Проведенные нами вычисления дают значения степени относительного уклонения δ кривой y(t) от фракталов, определяемой из [1], с точностью не более 0,86%, что показано на рис. 1.

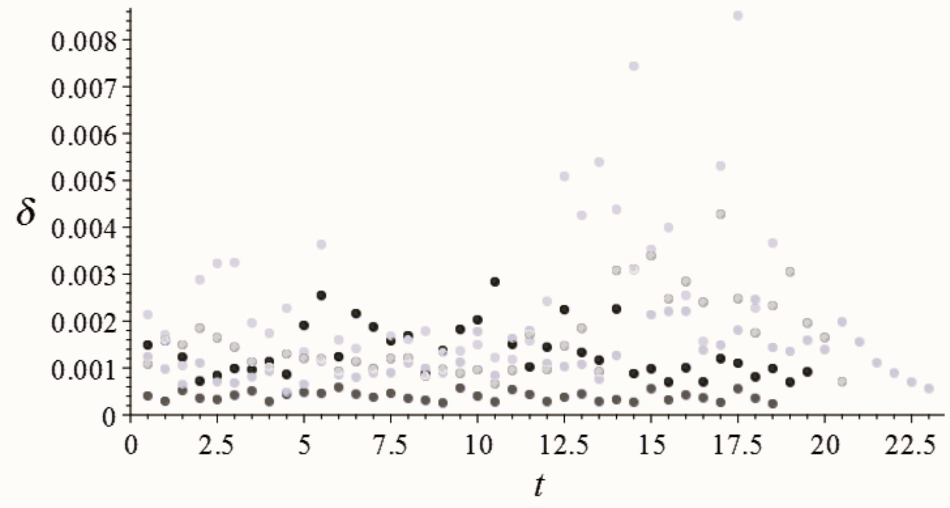


Рис. 1. Степень относительного уклонения δ МСР y(t) для пяти пациентов на различных временных интервалах холтеровского мониторирования

Поскольку y(t) близко к фракталу, для его анализа будем использовать метод мультифрактальной термодинамики.

Существенное влияние внешних факторов, действующих на организм, может воздействовать и на изменения величины δ, которая показывает близость МСР к фракталам, и на параметры фрактальных характеристик: фрактального фазового объема Г и фрактальной размерности D [1].

Фрактальная термодинамика изучает взаимосвязи между основными фрактальными параметрами: S_f = lnГ (фрактальная энтропия) и $T_f = 10 \cdot \left(\frac{1}{2-D} - \frac{1}{2}\right)$ (фрактальная температура) [2]. Эту взаимосвязь мы будем определять согласно соотношению $S_f = A \cdot T_f^{\gamma}$, которое называется фрактальным уравнением состояния [2].

Полученные нами данные для фрактальных параметров γ, A, S_f и T_f представим в виде таблицы:

Таблица

p	диагноз	$\overline{S_f}$	R_{Sf}	$\overline{T_f}$	R_{Tf}	γ	$\overline{A}$	R_A
1	в пределах нормы	6.790	4.243	13.014	23.454	0.0358	6.140	3.820
2	в пределах нормы	7.094	2.485	25.490	27.116	0.0699	5.651	2.153
3	в пределах нормы	6.485	2.697	20.885	20.017	0.0636	5.333	2.402
4	желудочковая аритмия	8.401	1.491	32.427	40.491	0.0742	6.497	1.180
5	дилатационная кардиомиопатия	9.571	0.290	52.318	18.718	0.000960	10.271	0.304

В данной таблице: R_A – размах параметра A, R_{Tf} – размах параметра T_f, R_{Sf} – размах параметра S_f, p – номер пациента. $\bar{A}$, $\overline{S_f}$, $\overline{T_f}$ – средние арифметические значения параметров A, S_f и T_f, соответственно.

Параметры S_f и T_f нами были вычислены для всех пяти пациентов и каждого промежутка времени по 30 мин. суточного холтеровского мониторирования, что позволяет построить дискретную динамику этих параметров $S_f(t_i)$ и $T_f(t_i)$ ($t_i -$ временные интервалы равные 30 мин.). Она представлена на Рис. 2.

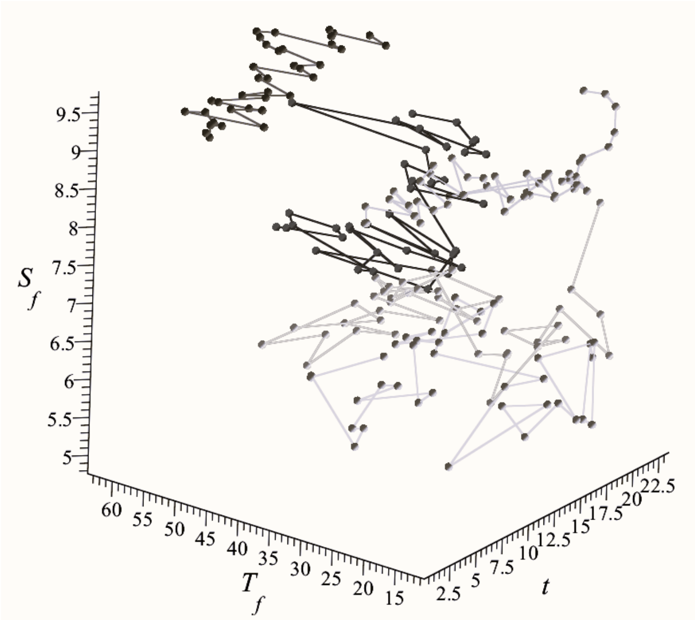


Рис.2 Зависимости параметров S_f, T_f от t для пациентов p = 1 - 5

Для анализа фрактальных состояний пациентов на Рис. 3 – Рис. 7 приведем S_fT_f-диаграммы фрактальных состояний МСР y(t) для временных промежутков по 30 минут суточного холтеровского мониторирования, которые представляют собой проекции зависимостей параметров S_f, T_f от t на плоскость S_fT_f. Также на этих рисунках изображены кривые фрактальных уравнений состояния.

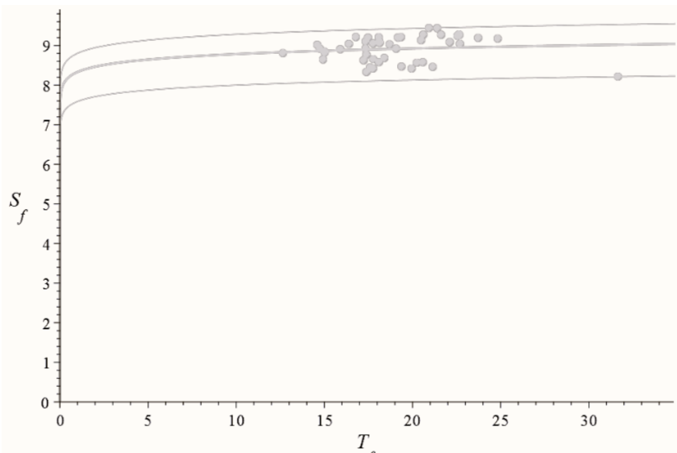


Рис. 3. S_fT_f-диаграмма для МСР пациента p = 1 (диагноз норма)

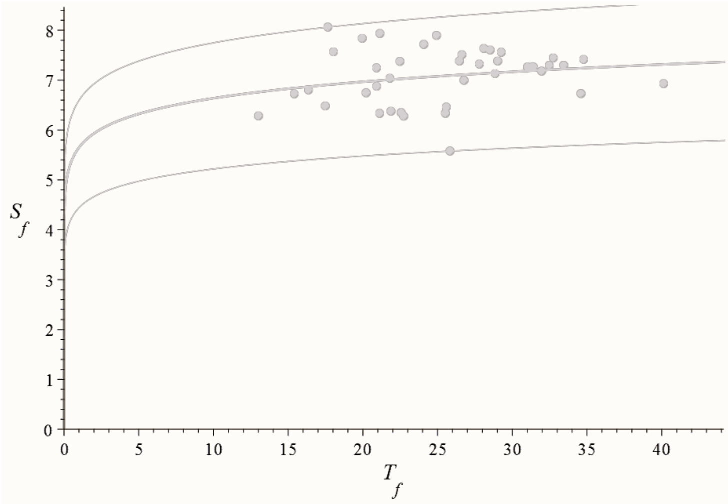


Рис. 4. $S_f T_f$-диаграмма для МСР пациента p = 2 (диагноз норма)

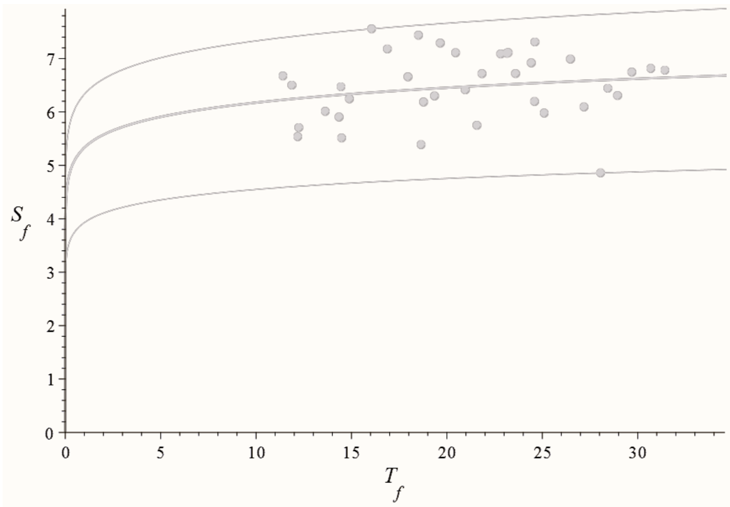


Рис. 5. $S_f T_f$-диаграмма для МСР пациента p = 3 (диагноз норма)

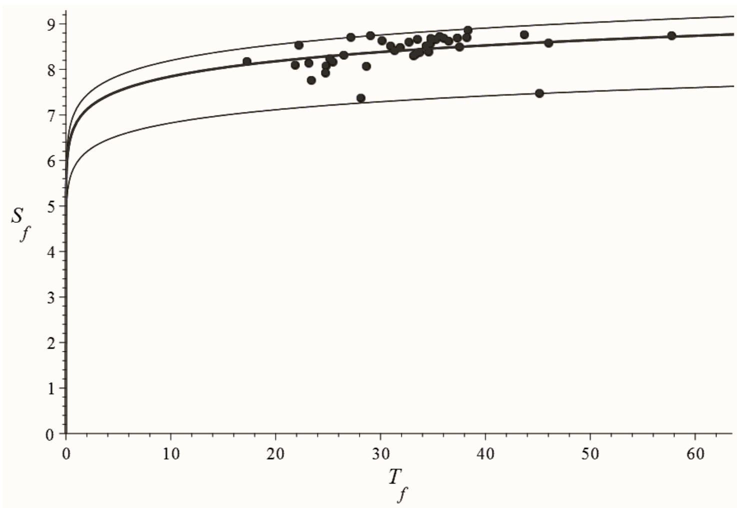


Рис. 6. $S_f T_f$-диаграмма для МСР пациента p = 4 (диагноз желудочковая аритмия)

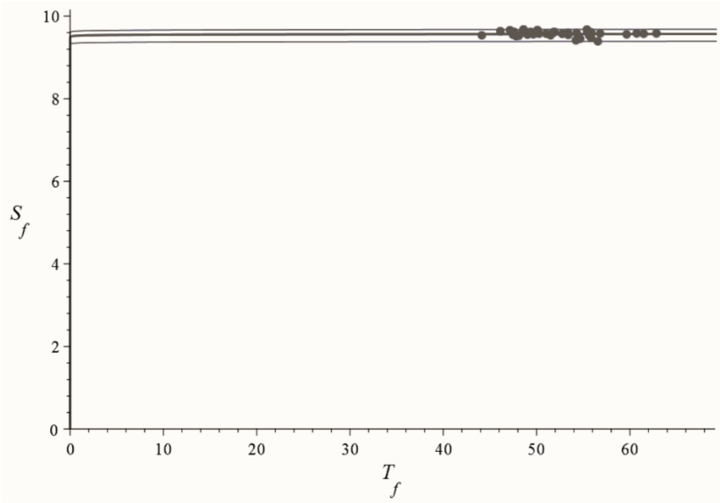


Рис. 7. $S_f T_f$-диаграмма для МСР пациента p = 5 (диагноз дилатационная кардиомиопатия)

Из $S_f T_f$-диаграмм (Рис. 3 – Рис. 7) видно, что у пациентов с отклонениями от нормы значения фрактальной энтропии S_f лежат в диапазоне от 8.401 и выше, в то время как у пациентов с диагнозом норма это значение не превышает 7.094. Также мы можем проанализировать параметр фрактальной температуры T_f, который для p=1,2,3 не превышает значения 25.490, в отличие от p=4,5.

Проанализировав полученное исследование, мы выявили, что функции мгновенного сердечного ритма являются мультифракталом с точностью не более 0,86%. В рамках модели фрактальной термодинамики для функции МСР были вычислены фрактальные параметры: фрактальная температура T_f и фрактальная энтропия S_f. Исследована корреляция значений этих параметров с диагнозами пациентов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Tsvetkov V.P., Miheev S.A., Tsvetkov I.V. Chaos, Solitons and Fractals// V. 108, pp. 71-76 (2018). DOI: 10.1016/j.chaos.2018.01.030

2. Mikheev S.A., Paramonova E.K., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Fractal Thermodynamics of the States of Instantaneous Heart Rhythm // Russian Journal of Mathematical Physics, Vol. 28, No. 2, 2021, pp. 251–256. DOI: 10.1134/S1061920821020096

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 372.851

О ПРЕПОДАВАНИИ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ В ШКОЛЕ

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный университет г. Тверь
E-mail: Shestakova.MA@tversu.ru

Ключевые слова: *теория вероятностей, дискретная случайная величина, распределение дискретной случайной величины, стандартные дискретные распределения.*

Аннотация. В статье показан один из возможных подходов к изучению в школе дискретных случайных величин; рассмотрены задачи, которые предлагаются школьникам для подготовки к единому государственному экзамену.

В настоящее время теория вероятностей и математическая статистика активно внедряются в учебный процесс. Если раньше в школе разбирались только задачи, связанные с классическим определением вероятности, на кружках и факультативах рассматривались элементы комбинаторики и задачи на геометрическое определение вероятности, то сейчас теория вероятностей становится отдельным курсом, который будет изучаться в течение нескольких лет.

В этом году школьникам в рамках подготовки к ЕГЭ предлагаются задачи, которые раньше не рассматривались в школьном курсе математики.

Задача 1. *В таблице показано распределение случайной величины X. Найдите E(X) – математическое ожидание этой случайной величины* [1].

Значения X	*-4*	*0*	*1*	*3*
Вероятности	*0,2*	*0,1*	*0,4*	*0,3*

Задача 2. *Василий пытается отправить СМС в условиях слабой мобильной связи. Телефон делает попытки отправить СМС до тех пор, пока это не удастся. Известно, что вероятность удачной попытки равна 0,05 независимо от предыдущих попыток. Найдите математическое ожидание числа сделанных попыток* [2].

Задача 3. *Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет два раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков* [3].

Задача 4. *Монету подбрасывают до тех пор, пока орёл не выпадет три раза (не обязательно подряд). Найдите математическое ожидание числа бросков* [4].

Задача 5. *Известно, что средний диаметр подшипника равен 15 мм, а стандартное отклонение от среднего диаметра равно 0,2 мм. При помощи неравенства Чебышёва оцените вероятность события «диаметр* *случайно выбранного подшипника отличается от среднего более чем на 0,5 мм»* [1].

Все эти задачи объединяет понятие дискретная случайная величина.

Рассмотрим, как формируется это понятие в школе, что должен знать ученик, изучив эту тему.

В курсе теории вероятностей и математической статистики дискретная случайная величина определяется следующим образом [5]:

Пусть $\langle \Omega, A, P \rangle$ *– вероятностное пространство и* $X: \Omega \to R$ *– действительная функция, заданная на пространстве элементарных событий. Функция* X *называется дискретной случайной величиной (простой функцией), если существуют такие события* $A_1, A_2, A_3, \dots \in A$ *и действительные числа* $x_1, x_2, x_3, \dots \in R$*, для которых выполнены следующие условия:*

1. $A_1 + A_2 + A_3 + \dots = \Omega$*;*

2. $A_i A_j = \emptyset$ *при* $i \neq j$*;*

3. $\forall \omega \in A_i: X(\omega) = x_i, i = 1, 2, 3, \dots$

$x_1, x_2, x_3, \dots$ *называются значениями случайной величины, их совокупность* $\{x_1, x_2, x_3, \dots\}$ *– множеством значений случайной величины.* $p_i = P(X = x_i)$ *– вероятность значения* x_i*.*

Данное определение невозможно сформулировать школьникам, т.к. в школьном курсе нет понятия вероятностного пространства. Существуют отдельные попытки определить таким образом дискретную случайную величину, но при этом полагают, что вероятное пространство конечно, что нарушает целостность данного определения.

В учебниках по теории вероятностей и математической статистике для школьников дискретную случайную величину определяют следующим образом.

Случайной величиной *называется числовая величина, значение которой однозначно определяется исходом случайного эксперимента* [6].

Случайными величинами *называют такие величины, которые в ходе наблюдений или испытаний могут принимать различные значения. Можно говорить о том, что их значения зависят от случая* [7].

Случайная величина *– это величина, значение которой зависит от того, каким элементарным событием закончился случайный опыт* [8].

Во всех этих определениях авторы стараются избегать понятия функции. Если этого не делать, то дискретная случайная величина может быть определена в следующем виде:

Случайная величина *– это функция, значения которой зависят от результата эксперимента (опыта, испытания).*

В теории вероятностей эксперимент, опыт, испытание несут одинаковую смысловую нагрузку – выполнение некоторых условий. Это базовое понятие теории вероятностей, с него должно начинаться знакомство школьников с этим предметом. Решение каждой задачи по теории вероятностей должно начинаться с одного и того же вопроса: *«В чём состоит испытание в данной задаче?»* Каждый раз об этом нужно напоминать школьникам.

Школьникам «строго» определить некоторые понятия теории вероятностей и математической статистики достаточно затруднительно, а порой – невозможно. В этих случаях можно рассмотреть поясняющие примеры. Желательно, чтобы изучение всего курса теории вероятностей сопровождалось большим количеством примеров. Например, понятие функции можно объяснить, рассматривая простейшие испытания – бросание игрального кубика и бросание монеты, предложив учащимся дома проиллюстрировать это на других испытаниях.

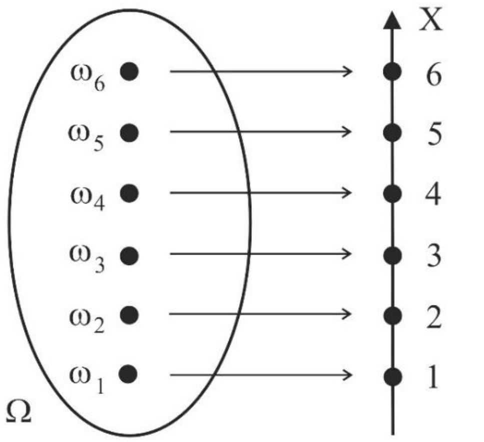


Рис. 1

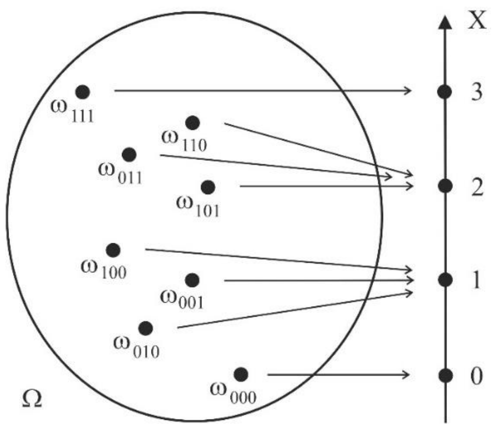


Рис. 2

На рисунке 1 представлено испытание (1) – бросание игрального кубика 1 раз, показана случайная величина X – число очков, выпавших при бросании игрального кубика. На рисунке 2 показано испытание (2) – бросания монеты три раза. Случайная величина X – это число появлений герба в данном испытании.

Обязательно нужно говорить о том, что каждая дискретная случайная величина определяется своим распределением

Распределением *вероятностей случайной величины называется закон, который описывает все возможные значения случайной величины, а также вероятности, с которыми она их принимает* [6].

Закон распределения случайной величины задаётся в виде таблицы, которая называется рядом распределения. Существует также графическое представление случайной величины в виде многоугольника распределения.

Основная проблема для учащегося состоит в том, что множество значений дискретной случайной величина может быть как конечным, так и бесконечным. Школьник должен иметь представление, как о конечных случайных величинах, так и о величинах с бесконечным набором значений.

В таблицах 1 и 2 представлен ряд распределения конечной случайной величины для испытаний (1) и (2) соответственно. В таблице 3 –

с бесконечным множеством значений (учащиеся вспомнят бесконечно убывающую геометрическую прогрессию).

Таблица 1

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Таблица 2

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Таблица 3

X	2	4	8	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…

Необходимо также изучить свойства вероятностей p_i:

$$1.\ p_i \geq 0; \quad 2. \sum_i p_i = 1; \quad 3. \forall E \subset R: P(X \in E) = \sum_{x_i \in E} p_i.$$

Школьников нужно познакомить с некоторыми стандартными распределениями дискретных случайных величин:

Биномиальное распределение. *Число «успехов» в серии из n независимых испытаний с вероятностью одного «успеха» p):*

$$Bi(n,p): \{0, 1, \dots, n\}; P(X=m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}; m = 0,1, \dots, n.$$

Геометрическое распределение. *Число «неудач» до появления первого «успеха» в серии независимых испытаний с вероятностью одного «успеха» p:*

$$G_1(p): \{0,1,2, \dots\}; P(X=m) = p(1-p)^m; m = 0,1,2, \dots$$

Число опытов до появления первого «успеха» в серии независимых испытаний с вероятностью одного «успеха» p:

$$G_2(p): \{1,2, \dots\}; P(X=m) = p(1-p)^{m-1}; m = 1,2, \dots$$

Распределение Паскаля. *Число «неудач» до появления r-го успеха в серии независимых испытаний с вероятностью одного «успеха» p:*

$$Pa(r,p): \{0,1,2, \dots\}; P(X=m) = C_{r+m-1}^{r-1} p^r (1-p)^m; m = 0,1,2, \dots$$

Только после этого имеет смысл говорить о числовых характеристиках дискретных случайных величин: математическом ожидании $E(X)$, дисперсии $D(X)$ и среднем квадратическим отклонением $\sigma(X)$. Для полноты их описания необходимо сформулировать свойства этих характеристик, а лучше, по возможности, доказать эти свойства. Учащиеся должны понимать, что числовые характеристики существуют не для всех дискретных случайных величин. Например, для случайной величины, заданной таблицей 3, математического ожидания не существует.

Для индивидуальной работы школьникам можно предложить вычислить числовые характеристики приведённых ранее дискретных распределений:

$$Bi(n,p): E(X) = np, D(X) = np(1-p);$$

$$G_1(p): E(X) = \frac{1-p}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2};$$

$$G_2(p): E(X) = \frac{1}{p}, D(X) = \frac{1-p}{p^2};$$

$$Pa(r,p): E(X) = \frac{r(1-p)}{p}, D(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

Если учащиеся не могут это сделать, то в любом случае, числовые характеристики этих стандартных распределений должны быть выписаны.

В задаче 1 нужно вычислить математическое ожидание, оно равно

$$E(X) = (-4) * 0.2 + 0 * 0.1 + 1 * 0.4 + 3 * 0.3 = 0.5.$$

В задаче 2 имеет место геометрическое распределение $G_2(0{,}05)$:

$$E(X) = \frac{1}{0{,}05} = 20.$$

В задаче 3 имеет место распределение Паскаля $Pa(2; 0{,}5)$, добавив ещё два выпадения герба, получим 4.

$$E(X) = 2 * \frac{1-0{,}5}{0{,}5} + 2 = 4.$$

Аналогично в задаче 3, $Pa(3; 0{,}5)$:

$$E(X) = 3 * \frac{1-0{,}5}{0{,}5} + 3 = 6.$$

Традиционно изучение раздела «Дискретные случайные величины» завершается темой «Закон больших чисел». Эта тема имеет место и в школьном курсе теории вероятностей и математической статистики.

Закон больших чисел – эта целая группа теорем, понимание которых для школьников будет достаточно затруднительным, т.к. требует хорошего знания математического анализа. Будет не совсем корректно сводить закон больших чисел только к теореме Бернулли.

Задачи этой темы в большинстве своём абстрактны. В рамках этой темы можно рассматривать задачи на неравенства Маркова и Чебышёва. Доказательство этих неравенств доступно для понимания школьникам.

Неравенство Маркова. *Если величина X принимает только неотрицательные значения и имеет математическое ожидание, то для любого a>0 будет*

$$P\{X \geq a\} \leq \frac{E(X)}{a}.$$

Неравенство Чебышёва. *Если величина X имеет математическое ожидание* $E(X)$ *и дисперсию* $D(X)$*, то для любого положительного* ε *имеет место неравенство*

$$P\{|X - E(X)| < \varepsilon\} \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Задача 5 решается следующим образом

$$P\{|X - E(X)| \geq \varepsilon\} \leq \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = \frac{(0{,}2)^2}{(0{,}5)^2} = 0{,}16.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ященко И.В., Высоцкий И.Р., Шестаков С.А. ЕГЭ-2024. Математика. Профильный уровень. 50 вариантов. Типовые варианты экзаменационных заданий. – Экзамен, 2024. – 240 с.
2. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – 2024. – URL: https://ege.sdamgia.ru/problem?id=639223 (дата обращения: 27.03.2024).
3. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – 2024. – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=509393 (дата обращения: 27.03.2024).
4. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. – 2024. – URL: https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=509394 (дата обращения: 27.03.2024).
5. Ершова Е.М., Тихомиров Н.Б. Теория вероятностей: примеры и задачи: Учеб. Пособие. – Тверь, Твер. гос. ун-т., 2006. – 203 с.
6. Бунимович Е.А. Булычев В.А., Математика. Вероятность и статистика: 10-й класс: базовый и углублённый уровни: учебное пособие. – М.: Просвещение, 2023. – 223 с.
7. Ткачёва М.В. Математика. Вероятность и статистика: 10 – 11-е классы: углублённый уровень: задачник: учебное пособие, разработанное в комплекте с учебником. – М.: Просвещение, 2023. – 80 с.
8. Высоцкий И.Р., Ященко И.В. Теория вероятностей и статистика: 7 – 9-е классы: учебное пособие. – М.: Просвещение, 2023. – 272 с.
9. Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Элементы теории вероятностей и математической статистики: Учебное пособие. – Тверь. Твер. гос. ун-т., 2013. – 201 с.

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 372.851:519.677

ПРОГРАММНАЯ СРЕДА OCTAVE В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Могилевский Илья Шулимович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ilia.mogilevski@gmail.com

Ключевые слова: *программные средства, преподавание математики в вузе.*

Аннотация. В работе описан опыт применения свободно распространяемой программной среды Octave в преподавании математических дисциплин в университете.

В последние годы преподаватели математического факультета ТвГУ регулярно используют разные программные средства при изучении математических дисциплин. До недавнего времени одним из таких средств была среда MATLAB, на которую университет имел лицензию.

Теперь лицензионный MATLAB недоступен и его место заняла программная среда Octave. Язык Octave был создан в начале 1990-х годов группой преподавателей химии из университета Висконсин-Мэдисон (США) во главе в Джоном Итоном (John W. Eaton родился в 1963 году). Назван язык в честь учителя Итона Октава Левеншпиля (Octave Levenspiel, 1926 -- 2017), профессора химии в университете штата Орегон (США). Октав Левеншпиль отличался замечательным умением проводить сложные расчеты, используя лишь ручку и бумагу.

Создатели заложили в основу Octave два принципа – свободное распространение и совместимость с MATLAB. Эти два обстоятельства и способствовали использованию Octave в нашем университете. Octave без особых проблем устанавливается практически на любом компьютере и достаточно прост в использовании. Язык действует как интерпретатор, позволяет весьма эффективно строить графики и выполнять многочисленные математические операции. Ниже приводятся примеры применения Octave в преподавании некоторых математических курсов.

Есть учебник по Octave на русском языке Е. Р. Алексеева и О. В. Чесноковой [1]. Вполне пригодны и многочисленные пособия по MATLAB, например [2].

Любимым занятием математиков в последние три-четыре века было вычисление некоторых важных констант, например, $\sqrt{2}$ и π. Есть много способов это сделать.

Число $\sqrt{2}$ является решением уравнения

$$x = f(x),\ f(x) = x - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2}.$$

Это решение может быть найдено методом последовательных приближений на основе принципа сжатых отображений. Возьмем в качестве начального приближения $x_0 = 1.5,$ а последующие приближения будем вычислять по формуле $x_{n+1} = f(x_n), n = 0,1,2 \ldots$ В силу принципа сжатых отображений последовательность x_n сходится к $\sqrt{2}$.

Указанную операцию несложно записать на Octave.

```
sq=1.5*ones(1,10);
for i=2:1:10 sq(i)=sq(i-1)-0.25*(sq(i-1)^2)+0.5; end;
>> sq

sq =

   1.5000   1.4375   1.4209   1.4162   1.4148   1.4144   1.4143   1.4142   1.4142
```

В одномерном массиве sq накапливаются последовательные приближения к $\sqrt{2}$. Последние два приближения содержат четыре верные десятичные цифры искомого числа.

Для нахождения числа π разложим функцию $f(x) = 1$ в ряд Фурье по синусам на интервале $(0, \pi)$.

$$1 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad x \in (0, \pi),$$

где $b_k = \int_0^{\pi} \sin kx dx = \begin{cases} 0, & k - \text{четное} \\ \frac{4}{\pi k}, & k - \text{нечетное} \end{cases}$

Поэтому

$$1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{2m-1} \sin(2m-1)x, \; x \in (0, \pi).$$

График этого равенства, построенный командой plot для частичной суммы с номером 100, изображен на рисунке 1.

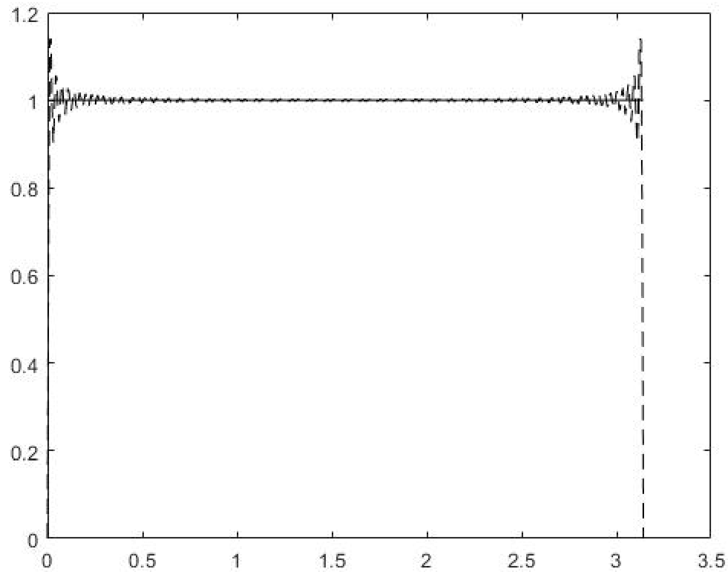


Рис. 2

Сплошной линией нарисован график константы 1, а двойной штриховой линией нарисован график для частичной суммы ряда с номером 100. Полагая в последнем равенстве $x = \frac{\pi}{2}$, получим представление для числа π в виде простого, хотя и медленно сходящегося числового ряда.

$$\pi = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{m+1}}{2m-1}.$$

Вычисление частичных сумм этого ряда можно записать на Octave следующим образом.

```
x=linspace(0,pi,500);
S100=(4/pi)*sin(x);
for i=2:1:100 S100=S100+(4/(pi*(2*i-1)))*sin((2*i-1)*x); end;
```

Одна из важных, но достаточно сложных тем в математическом и функциональном анализе – это поточечная и равномерная сходимости последовательностей функций. Octave с его мощной графикой может сделать изучение этой темы более наглядным.

Рассмотрим две последовательности функций, заданных на отрезке [0,1].

$$f_n(x) = x^n - x^{n+1}, \qquad g_n(x) = x^n - x^{2n}, \qquad n = 1,2,\dots, \qquad x \in [0,1].$$

Нетрудно показать, что обе последовательности сходятся к нулю поточечно, а последовательность $f_n(x)$ сходится к нулю и равномерно.

Построим графики функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$ при n=1,3,5 и вычислим их максимумы на отрезке [0,1], которые являются расстояниями этих функций от предельной функции 0. С помощью Octave это делается совсем просто.

```
x=linspace(0,1,500);
 n=1;
 fn=x.^n-x.^(n+1); gn=x.^n-x.^(2*n);
norf1=max(fn); norg1=max(gn);
```

Мы получили

$$\max f_1 = 0.25,\ \max f_3 = 0.1055,\ \max f_5 = 0.067,$$

$$\max g_1 = 0.25,\ \max g_3 = 0.25,\ \max g_5 = 0.25,$$

На рисунках 2 и 3 изображены графики функций $f_n(x)$ и $g_n(x)$ соответственно.

Сплошной линией нарисованы графики функций с номером 1, штриховой линией – графики функций с номером 3, пунктирной (жирной) линией – графики функций с номером 5.

Продемонстрируем с помощью Octave решения неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

$$y'' + y = \sin(\omega x)$$

При $\omega \neq 1$ общее решение уравнения имеет вид

$$y_\omega = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \frac{1}{1-\omega^2} \sin(\omega x)$$

При $\omega = 1$ решение другое $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{x}{2} \cos x$. На рисунке 4 изображены графики функций $y_{0.5}$, $y_{0.8}$, y_1, построенные командой *plot*.

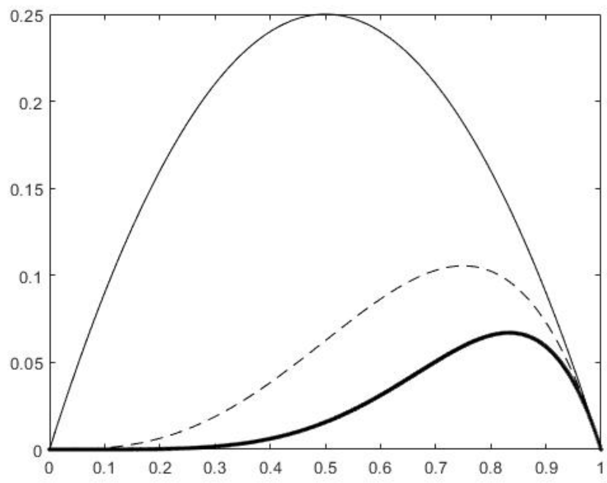


Рис. 3

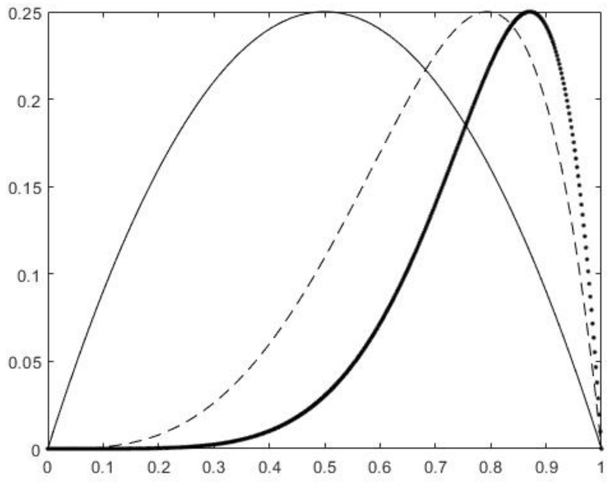


Рис. 4

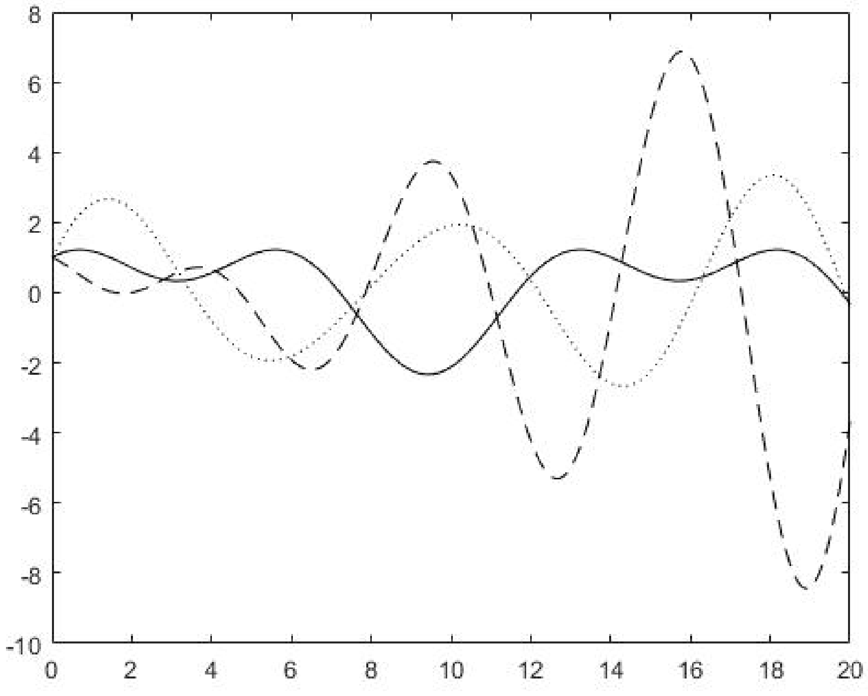


Рис. 5

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова Введение в Octave для инженеров и математиков. – М.: ALT Linux, 2012. – 368 с.: ил.

2. Дьяконов В. MATLAB 6: Учебный курс. – СПб.: Питер, 2001. – 599 с.: ил.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2024

Рукопись принята к печати 28.03.2024

УДК 512

ЗАДАНИЕ НА ЕГЭ С МОДУЛЕМ И ПАРАМЕТРОМ

Молькова Ольга Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ommolkova@edu.tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *модуль, задание с параметром, графический калькулятор, переход к эквивалентной задаче.*

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые методы решения заданий с модулем и параметром. Говорится, что в качестве предварительного этапа можно предложить школьнику провести эксперимент-исследование геометрического места точек, заданного уравнением, неравенством и/или функцией, содержащими параметр, при различных его значениях. Затем, опираясь на эти исследования, попытаться заменить исходную задачу другой, эквивалентной, но более простой задачей.

Задание с параметром (наряду с геометрической задачей и задачей на числа, предполагающей установление скрытых закономерностей на основе экспериментов с числами) является одним из самых сложных как на ЕГЭ, так и на математических олимпиадах [1], [2], [3]. В контрольные измерительные материалы ЕГЭ задание с параметром входит как задание высокого уровня сложности, а полное её решение позволяет набрать четыре первичных балла. Успех участника контрольного испытания зависит от сформированности уверенных навыков решения уравнений, неравенств и их систем, аналитического исследования свойств функций, гибкости мышления, а также знания различных методов решения такого рода заданий [4], [5]. Таким образом, благодаря таким задачам проверяются владение различными формулами элементарной математики, основными методами решения уравнений, неравенств и их систем, умение построить логическую цепочку рассуждений и, как следствие, математическая культура. При этом приходится отмечать, что решению задач с параметрами в школьной программе уделяется мало внимания. В школьном учебнике по математике практически нет заданий по данной теме.

Как будущие учителя, студенты IV курса математического факультета Тверского государственного университета, обучающиеся по направлению подготовки 01.03.01 Математика с профилем подготовки «Преподавание математики и информатики», имеют возможность обстоятельно обсудить ключевые моменты, связанные с данной темой, при изучении дисциплины по выбору «Задачи с параметром в школьном курсе математики». При этом студенты осваивают различные функционально-графические методы решения алгебраических задач и, кроме того, формулируют приёмы и методы, способствующие развитию логического мышления у школьников при изучении материала, посвящённого задачам с параметрами.

Одним из часто используемых приёмов решения задач с параметром является переход от поставленной задачи к более простой эквивалентной задаче. Обсудим данный приём на примерах. При этом мы будем уделять внимание другим важным этапам решения, необходимым для его полного корректного оформления. Ещё раз напомним, что речь идёт о задании высокого уровня сложности, а значит, к обоснованию переходов в решении участника испытания могут и предъявляются высокие требования.

Пример 1. Найти все значения a, при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = x - 2|x| + |x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a|$ больше -4. (Досрочная волна ЕГЭ по математике 29.03.2019. Вариант 1; Задания 18 (С6) ЕГЭ 2019.)

1-й способ. Первым шагом необходимо объяснить, почему задача имеет решение: функция принимает наименьшее значение на множестве действительных чисел (своей области определения). Замечаем, что линейная функция, квадратичная функция и функция модуль непрерывны на всей числовой прямой. Кроме того, при сложении, вычитании, умножении и композиции непрерывных функций сохраняется свойство непрерывности функции.

Вывод 1: функция f непрерывна на $\mathbb{R}$.

Далее, так как при $x \to \pm\infty$ значение выражения

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \to +\infty,$$

то при достаточно больших $|x|$

$$|x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a| = x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a \to +\infty;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x + 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} (x^2 - (2a-1)x + a^2 + 2a) = +\infty;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (x - 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty} (x^2 - (2a+3)x + a^2 + 2a) = +\infty.$$

Вывод 2: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Тогда делаем общий вывод: функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, следовательно, функция принимает наименьшее значение на $\mathbb{R}$.

Далее на уроке математики (но ни на ЕГЭ, поскольку участники ЕГЭ не имеют таких возможностей) школьнику можно предложить с помощью любого графического калькулятора провести эксперимент-исследование графика функции f при различных значениях параметра a. Получив таким образом некоторое представление о графике функции, школьник формулирует гипотезу о том, в каких точках числовой прямой функция может принимать наименьшее значение. Высказанное предположение необходимо будет обосновать. Ниже на рис. 1 и 2 показаны графики функции f при $a = -1$ и $a = 2$. Построения выполнены с помощью графического калькулятора «Desmos».

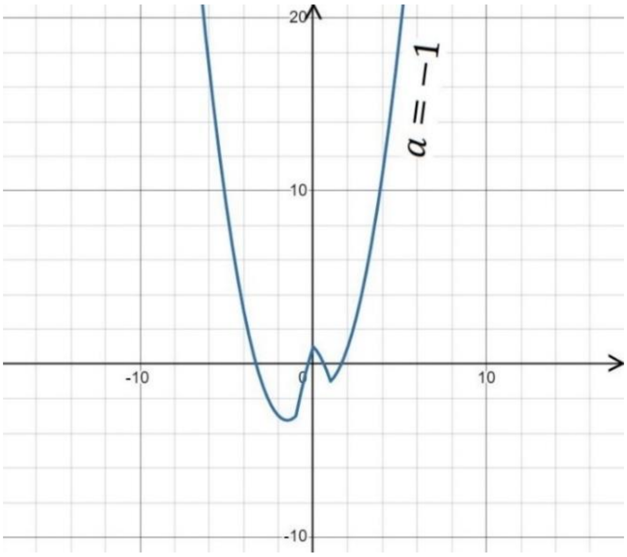


Рис. 1

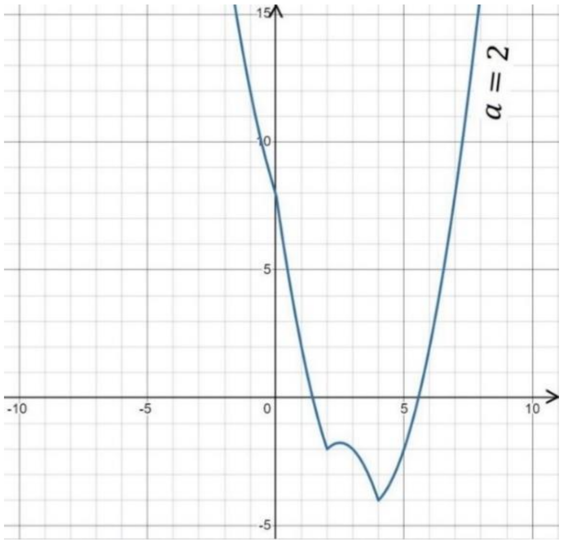


Рис. 2

Дальнейший анализ показывает, что функция f наименьшее значение может принимать в нулях подмодульных выражений ($x = 0$, $x = a$, $x = a + 2$), а также в точках, являющихся абсциссами вершин парабол, уравнения которых получаются при рассмотрении всех вариантов знака подмодульных выражений и ветви которых направлены вверх. Таких парабол две:

1. При $x \geq 0$ и $(x - 2 - a)(x - a) \geq 0$ получим

$$f(x) = x - 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = x^2 - 2\left(a + \frac{3}{2}\right)x + a^2 + 2a.$$

Точка $x = a + \frac{3}{2}$ является абсциссой вершины параболы, заданной этим уравнением.

2. При $x \leq 0$ и $(x - 2 - a)(x - a) \geq 0$ получим

$$f(x) = x + 2x + x^2 - 2(a+1)x + a^2 + 2a = x^2 - (2a - 1)x + a^2 + 2a.$$

Точка $x = a - \frac{1}{2}$ является абсциссой вершины параболы, заданной вторым уравнением.

На следующем этапе мы заменяем исходную задачу ($f_{\text{наим}} > -4$) эквивалентной:

Найти все значения параметра a, удовлетворяющие системе неравенств

$$\begin{cases} f\left(a-\dfrac{1}{2}\right) > -4, \\ f\left(a+\dfrac{3}{2}\right) > -4, \\ f(0) > -4, \\ f(a) > -4, \\ f(a+2) > -4. \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} f\left(a-\frac{1}{2}\right) > -4, \\ f\left(a+\frac{3}{2}\right) > -4, \\ f(0) > -4, \\ f(a) > -4, \\ f(a+2) > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2\left|a-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{4} > -4, \\ a+\frac{9}{4}-2\left|a+\frac{3}{2}\right| > -4, \\ |a^2+2a| > -4, \\ a-2|a| > -4, \\ a+2-2|a+2| > -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{5}{4} < a < \frac{23}{4}, \\ -\frac{17}{12} < a < \frac{13}{4}, \\ -\infty < a < +\infty, \\ -\frac{4}{3} < a < 4, \\ -\frac{10}{3} < a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a \in \left(-\frac{5}{4}, 2\right).$$

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{4}, 2\right)$.

2-й способ. Исходная задача ($f_{\text{наим}} > -4$) эквивалентна следующей: Найти все значения параметра a, при которых выполнено неравенство

$$x-2|x|+|x^2-2(a+1)x+a^2+2a| > -4$$

при всех действительных x (то есть на первом шаге мы заменяем исходную задачу эквивалентной).

Перепишем это неравенство в виде

$$|(x-a)(x-a-2)| > 2|x|-4-x,$$

Введём в рассмотрение две функции $f(x) = |(x-a)(x-a-2)|$ и $g(x) = 2|x|-4-x = \begin{cases} -4-3x, & x < 0, \\ -4+x, & x \geq 0 \end{cases}$. График функции f получается из параболы, заданной уравнением $y = (x-a)(x-a-2)$ зеркальным отражением относительно оси Ox её части, находящейся ниже этой оси. График функции g – ломанная линия. Тогда рассматриваемое неравенство будет верно при всех $x \in \mathbb{R}$, если весь график функции f будет лежать выше графика функции g.

Нас интересует взаимное расположение графиков функций f и g. И мы снова можем предложить школьнику провести эксперимент-исследование с помощью любого графического конструктора, а мы воспользуемся калькулятором «Desmos» (см. рис. 3).

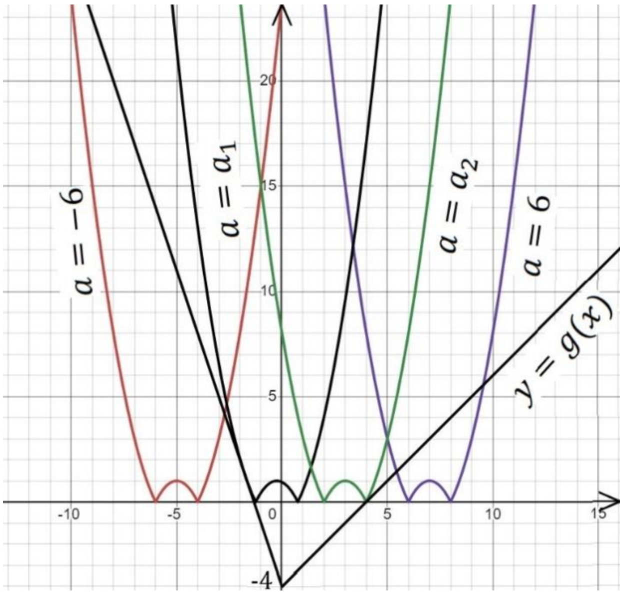


Рис. 3

При увеличении параметра a график функции f смещается вдоль оси абсцисс слева-направо. Тогда нас интересуют все значения параметра a, промежуточные между значением, отвечающим крайнему левому положению графика функции f (на рисунке $a = a_1$), и значением, отвечающим крайнему правому положению графика функции f (на рисунке $a = a_2$), учитывая условие, что график функции f лежит выше графика функции g, то есть нас интересуют $a \in (a_1, a_2)$.

Опираясь на геометрические иллюстрации, мы можем предположить, что значение a_1 отвечает случаю касания прямой $y = -4 - 3x$ и параболы $y = (x - a)(x - a - 2)$, в точке с абсциссой $x_0 \leq -\frac{4}{3}$.

Прямая $y = -4 - 3x$ касается параболы $y = (x - a)(x - a - 2)$, если прямая с параболой имеют единственную общую точку, а значит, квадратное уравнение $x^2 - 2(a + 1)x + a^2 + 2a = -4 - 3x$ имеет один корень.

Рассмотрим полученное уравнение

$$x^2 - 2\left(a - \frac{1}{2}\right)x + a^2 + 2a + 4 = 0.$$

Квадратное уравнение имеет один корень, если дискриминант квадратного трёхчлена обращается в ноль:

$$D = 4\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - 4a^2 - 8a - 16 = -12a - 15 = 0 \Leftrightarrow a = -1{,}25.$$

Заметим, что $x_0 = \frac{-2{,}5-1}{2} \leq -\frac{4}{3}$. Значит, наше предположение верно.

Значение a_2 находим из условия, что нуль $x = a + 2$ функции f равен 4, то есть $a + 2 = 4$, откуда $a = 2$, и $f(x) = |(x - 2)(x - 4)|$.

Заметим, что при $x \geq 4$ $f(x) = (x-2)(x-4) = x^2 - 6x + 8$, и, следовательно, при $x \geq 4$ производная $f'(x) = 2x - 6 = 2 \geq 1$, где $k = 1$ – угловой коэффициент прямой $y = -4 + x$. Таким образом, график функции f лежит выше графика функции g при $x > 4$.

Окончательно получаем

Ответ: $a \in \left(-\frac{5}{4}, 2\right)$.

Пример 2. Найти все значения a, при каждом из которых уравнение $4x - \big|3x - |x+a|\big| = 9|x-1|$ имеет хотя бы 1 корень. (Дистанционная обучающая система для подготовки к государственным экзаменам «РЕШУ ЕГЭ», Тип 18 № 549156.)

Пусть $f(x) = 9|x-1| + \big|3x - |x+a|\big| - 4x$. Тогда уравнение принимает вид $f(x) = 0$.

Функция f непрерывна на $\mathbb{R}$ как сумма, разность, произведение и композиция непрерывных функций.

Нулями подмодульных выражений числовая ось разбивается на несколько промежутков, на каждом из которых функция f задаётся некоторым линейным уравнением. Таким образом, график функции f есть непрерывная ломаная линия. При этом на самом левом промежутке $f(x) = -17x + 9 + a$, и значит, убывает на этом промежутке, а на самом правом промежутке $f(x) = 7x - 9 - a$, и значит, возрастает на нём; $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$.

Из непрерывности функции f на $\mathbb{R}$ и равенства $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$ следует, что f принимает наименьшее значение на $\mathbb{R}$.

Более того, заметим, что

1) если $x \leq 1$, то при любом взаимном расположении на числовой прямой нулей подмодульных выражений при раскрытии модулей каждый раз получаются отрицательные угловые коэффициенты: $-9 - 4 \pm 3 \pm 1$;

2) если $x \geq 1$, то при любом взаимном расположении на числовой прямой нулей подмодульных выражений при раскрытии модулей каждый раз получаются положительные угловые коэффициенты: $9 - 4 \pm 3 \pm 1$.

Это означает, что f убывает на полуинтервале $(-\infty; 1]$, возрастает на полуинтервале $[1; +\infty)$ и, следовательно, в точке $x = 1$ принимает наименьшее значение.

Остаётся заметить, что исходное уравнение с параметром имеет хотя бы один корень, если график функции f пересекает ось абсцисс, а значит, наименьшее значение функции $f(1) = \big|3 - |1+a|\big| - 4 \leq 0$ (см. рис. 4 и рис. 5, выполненные с помощью сервиса y(x).ru). Решая последнее неравенство, получаем

Ответ: $a \in [-8;\ 6]$.

Итак, мы рассмотрели два примера решения заданий с параметром. В каждом случае мы использовали графический калькулятор и выполняли переход к эквивалентной задаче.

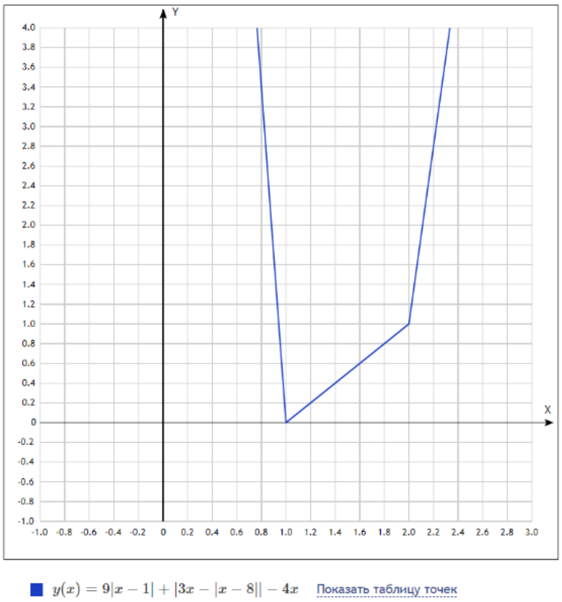


Рис. 4. $\boldsymbol{a = -8}$

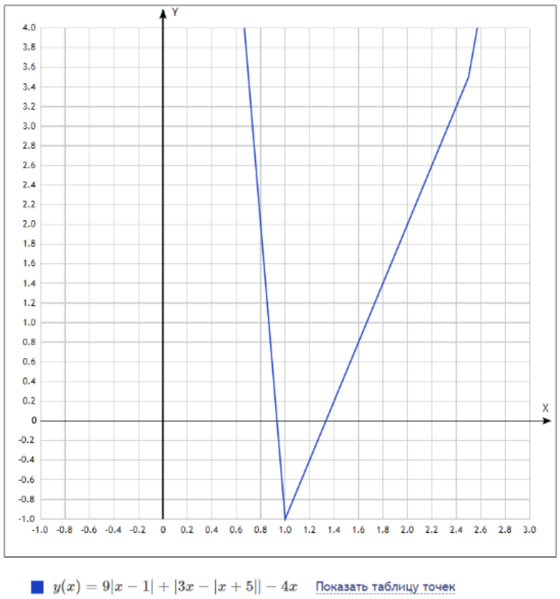


Рис. 5. $\boldsymbol{a = 5}$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А., Баранова О.Е. О подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ: обсуждение и решение задач повышенного уровня сложности // Преподавание математики в школах Тверского региона. – Тверь, 2016. – С. 208-231. EDN: WNXTOD
2. Голубев А.А. Задачи с параметром на ЕГЭ // Преподавание математики в школах Тверского региона. Сборник материалов в помощь учителю. Под. ред. Голубева А.А., Барановой О.Е. – Тверь, 2019. – С. 55-58. EDN: EPLSPY
3. Голубев А.А. Задачи с параметром на ЕГЭ 2019 // Преподавание математики в школах Тверского региона. Сборник материалов в помощь учителю. Тверской государственный университет; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». – Тверь, 2020. – С. 84-90. EDN: ILHCLU
4. Голубев А.А., Фридман Д.В. Задачи с параметрами в школьном курсе математики // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: сб. науч. тр. научно-практ. конф. (18 февраля 2017 г., г. Тверь). / в 2 ч., 4.1. –Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – С. 69-72. EDN: YKSBHJ
5. Голубев А.А. Учимся решать задачи с параметрами: учебное пособие / А.А. Голубев, М.С. Потапенко, Д.В. Фридман, Т.В. Цапиева. – Тверь: Тверской государственный университет, Тверь, 2017. – 88 с. EDN: ZFWAST

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 514.8, 530.12

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ТОЧНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ КОНФИГУРАЦИЙ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО БЕЗМАССОВОГО СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Морозова Светлана Игоревна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Morozova.SI@tversu.ru

Столярова Галина Николаевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Stolyarova.GN@tversu.ru

Чемарина Юлия Владимировна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *скалярное поле, нестационарные гравитирующие конфигурации.*

Аннотация. В работе получен класс точных нестационарных решений для конфигураций сферически-симметричного безмассового скалярного поля с характеристической функцией специального вида. Решения представляют собой голые сингулярности и чёрные дыры с топологической особенностью на горизонте.

Построение точных решений в рамках общей теории относительности, описывающих гравитирующие конфигурации физических полей, остаётся актуальной задачей теории гравитации и космологии. Наиболее интересной задачей является описание эволюции таких конфигураций путём построения нестационарных решений. В данной работе будет продолжено исследование нестационарных моделей сферически-симметричного безмассового скалярного поля методом, предложенным в [1-4]. Мы опишем класс точных решений с характеристической функцией специального вида.

Конфигурации безмассового скалярного поля с минимальной связью описываются действием

$$\int \left(-\tfrac{1}{2}S + \langle d\phi, d\phi\rangle\right)\sqrt{|g|}\,d^4x\,,$$

где S - скалярная кривизна, ϕ - скалярное поле, а угловые скобки обозначают скалярное произведение, индуцированное данной метрикой пространства-времени g. Геометрия пространства-времени определяется системой уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона

$$R_{ij} - \tfrac{1}{2}Sg_{ij} = T_{ij}, \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\phi\right) = 0, \qquad |g| = |\det(g_{ij})|, \tag{2}$$

где тензор энергии-импульса T_{ij} задаётся формулой

$$T_{ij} = 2\partial_i\phi\partial_j\phi - (g^{km}\partial_k\phi\partial_m\phi)g_{ij}\,.$$

Метод, описанный в [1-4], позволяет записать метрику сферически-симметричного пространства-времени в координатах $(\phi, C, \theta, \varphi)$ в виде

$$ds^2 = -4\,\frac{C^2 f d\phi^2 + C f'_\phi dC d\phi + (C f'_C + f - 1)dC^2}{4f(C f'_C + f - 1) - \left(f'_\phi\right)^2} - C^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (3)$$

При этом система уравнений (1)-(2) оказывается эквивалентной одному уравнению Клейна-Гордона

$$\frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_i\left(\sqrt{|g|}g^{ij}\partial_j\phi\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - f - f'_C C)f''_{\phi\phi} - f''_{CC}C^2 f + C f''_{\phi C} f'_\phi + (f'_C)^2 C^2 + (3Cf - 3C)f'_C + \qquad (4)$$

$$+4f^2 - 6f + 2 \ = 0.$$

Метрика (3) и уравнение (4) записано в терминах характеристической функции $f = f(\phi, C) = -< dC, dC >$, описанной в [1-7].

Полученный нами класс точных решений соответствует следующему выбору характеристической функции

$$f = 1 + C^2 h(\phi).$$

Уравнение поля (4) принимает форму

$$3h''(\phi)h(\phi) - 2\left(h'(\phi)\right)^2 - 12\left(h(\phi)\right)^2 = \ 0.$$

Общее решение этого уравнения можно записать в виде

$$h(\phi) = \ \left(C_1\ e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi} + C_2\ e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi}\right)^3, \quad C_1\ , C_2\ \in \mathbb{R}. \qquad (5)$$

Подставим (5) в метрику (3):

$$ds^2 = -\frac{4}{\Delta}\left((1 + \mathrm{C}^2 h(\phi))\ d\phi^2 + C h'(\phi)d\phi dC + 3h(\phi)d\mathrm{C}^2\right) - C^2 d\Omega^2,$$

Условие, обеспечивающее лоренцеву сигнатуру метрики, принимает вид

$$\Delta = 12h(\phi)\left(1 + C^2 h(\phi)\right) - C^2\left(h'(\phi)\right)^2 < 0.$$

Чтобы перейти к обычным координатам, найдём временя внешнего наблюдателя t из уравнения

$$\frac{t'_C}{t'_\phi} = \frac{f'_\phi}{2Cf} \ \Rightarrow t = \frac{2C_1\ C^2\left(C_1^2 e^{\frac{8\sqrt{3}}{3}\phi} - C_2^2\right) - e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi}}{C_1\ e^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi}\left(C_1\ e^{\frac{4\sqrt{3}}{3}\phi} + C_2\ \right)}\ .$$

Продемонстрируем поведение полученных решений на конкретном примере. Выберем константы следующим образом

$$C_1\ = 1, \quad C_2\ = -1.$$

Тогда характеристическая функция примет вид

$$f = 1 + 8C^2 sh^3\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi.$$

Пространство-время с учетом сигнатуры метрики представляет собой две непересекающиеся односвязные области.

Первая задается условиями

$$\phi > 0,\ C^2 > \frac{1}{8sh\frac{2\sqrt{3}}{3}\phi},$$

а вторая неравенством $\phi < 0$.

В первой области поле положительно и на радиус накладывается дополнительное ограничение, во второй области поле отрицательно.

В первом случае скалярное поле в фиксированный момент времени стремится к нулю на пространственной бесконечности

$$\phi \sim \frac{\sqrt{3}}{16C^2},\ \ C \to \infty,\ \ t = Const,\ \ t > \frac{1}{2}.$$

Ниже приведем графики скалярного поля в фиксированные моменты времени: $t =; t = 10; t = 100$.

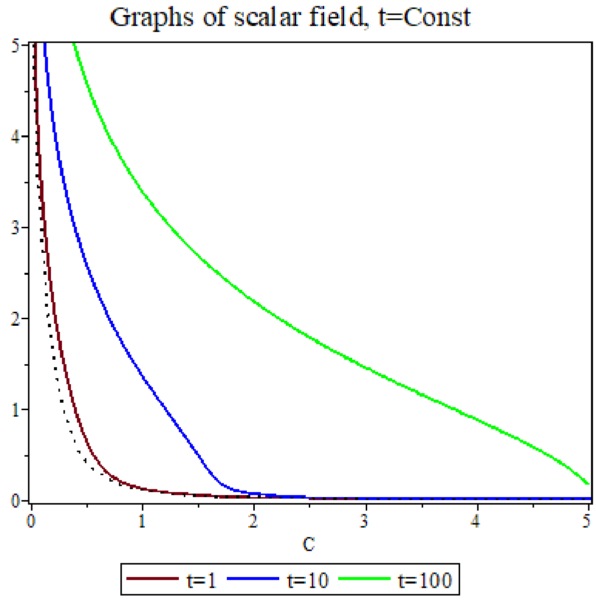


Рис. 1. Графики функции $\phi(C),\ t = Const$

Пунктирная линия соответствует пределу, при переходе через который изменяется сигнатура метрики.

Вторая область дает следующую картину. Пространство-время имеет топологическую особенность, соответствующую максимуму радиуса C. Пространство-время представляет собой черную дыру с топологической особенностью на горизонте. Горизонт событий соответствует максимальному значению радиуса C в данный момент времени. Горизонт представляет собой гиперповерхность

$$t > 1,\ f = 0\ \ \Leftrightarrow\ \ \phi = -\frac{\sqrt{3}}{2} arsh\left(\frac{1}{2C^{\frac{2}{3}}}\right).$$

На Рис. 2. этой гиперповерхности соответствует пунктирная линия. При переходе через нее характеристическая функция меняет знак.

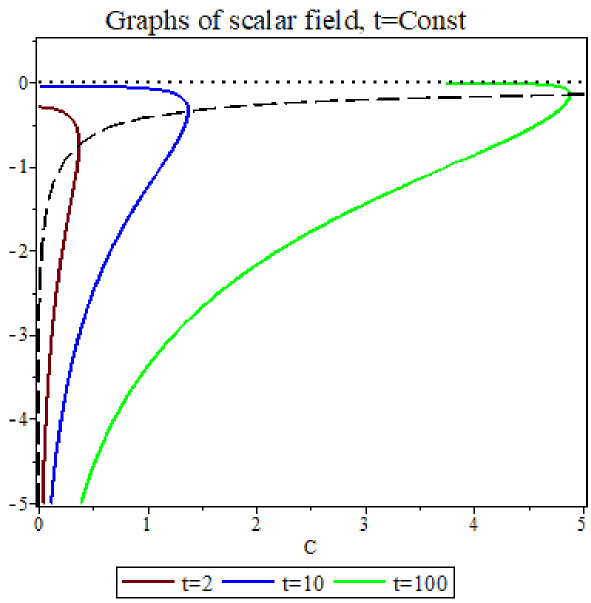


Рис. 2. Графики функции $\phi(C),\ t = Const$

Как видно из Рис. 2, в центре шара, находящегося в области внешнего наблюдателя, скалярное поле стремиться к нулю, а в центре шара под горизонтом стремится к бесконечности.

Запишем метрику в координатах $(t, C,\ \theta, \varphi)$

$$ds^2 = -\frac{4C^2 f dt^2}{\left(4f(Cf'_C + f - 1) - \left(f'_\phi\right)^2\right)\left(t'_\phi\right)^2} - \frac{dC^2}{f} - C^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

Если мы посмотрим на метрические функции g_{tt} и $-g_{CC}$, то в первом случае будет иметься область, соответствующая пространственной бесконечности. Графики метрических функций g_{tt} и $-g_{CC}$ в фиксированные моменты времени $t = 1; t = 2; t = 3$ представлены на Рис. 3.

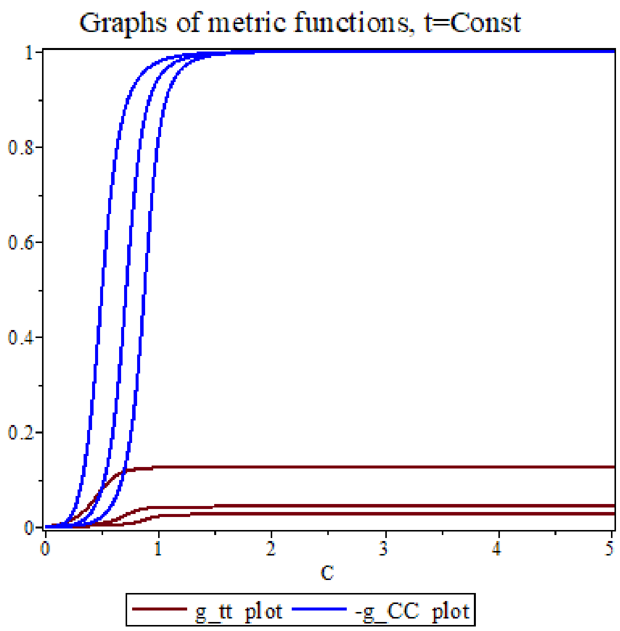


Рис. 3. Графики метрических функций, $t = Const$

Метрические функции будут стремиться к постоянным значениям на пространственной бесконечности. Функция g_{tt} стремится к константе, зависящей от времени, поэтому мы не можем утверждать существование асимптотики Шварцшильда, хотя $-g_{CC}$ ведет себя подходящим образом.

Во втором случае метрические функции расходятся на граничной сфере и меняют знак, что в целом соответствует поведению метрических функций для черной дыры. Их графики в моменты времени $t = 1; t = 2; t = 3$ представлены на Рис. 4.

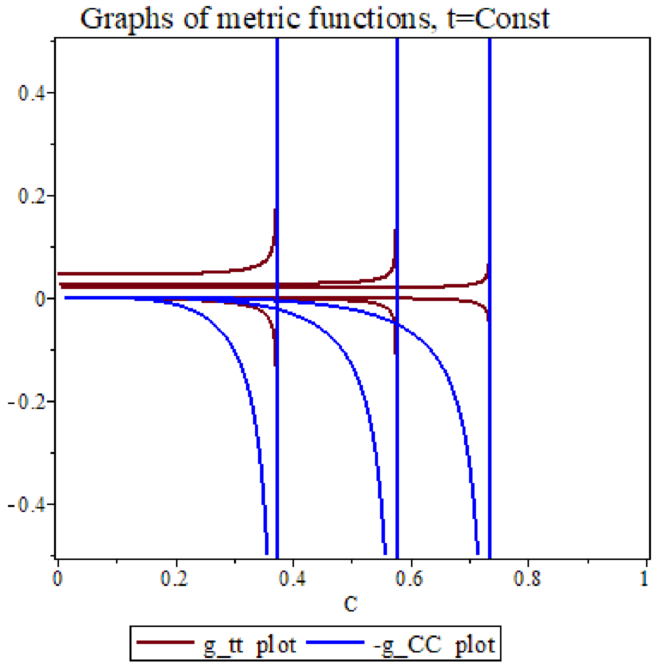


Рис. 4. Графики метрических функций, $t = Const$

Построенное двухпараметрическое семейство точных решений демонстрирует возможность применения метода, описанного в [1-4], к построению нестационарных конфигураций сферически-симметричного безмассового самогравитирующего скалярного поля. Для характеристической функции специального вида найдены явные выражения для коэффициентов метрического тензора, скалярного поля и времени внешнего наблюдателя. Также показано, что в данном семействе отсутствуют асимптотически плоские решения. Данное исследование может быть использовано в дальнейшем для получения новых классов точных и численных решений для нестационарных конфигураций скалярных полей с заданными свойствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чемарина Ю.В. Метод построения нестационарных конфигураций сферически-симметричного скалярного поля / В сборнике Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации:

материалы Всероссийской научно-практ. конф. (30 марта – 01 апреля 2023 года, г. Тверь). - Тверь: Твер. гос. ун-т, 2023. - С. 141-147.

2. Tchemarina Ju.V., Alekseeva E.G., Tsirulev A.N., Nuraliev N.K. Nonstationary self-gravitating configurations of scalar and electromagnetic fields // Journal of Physics: Conference Series, 1390 (2019) 012098.

3. Ефремова А.Г., Чемарина Ю.В. Исследование свойств скалярно-полевых конфигураций с зарядом / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы Второй Всероссийской научно-практ. конф. (21 апреля 2018 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2018. – С. 63–68.

4. Салогуб Е.А., Столярова Г.Н., Чемарина Ю.В. Нестационарная модель сферически-симметричного топологического геона // Синергетика в общественных и естественных науках. материалы Международной междисциплинарной научной конференции с элементами научной школы для молодежи: в 3 частях. Ответственный редактор: Лапина Г.П.. 2015. С. 110-113.

5. Tchemarina Ju.V., Tsirulev A .N. Spherically Symmetric Gravitating Scalar Field. The Inverse Problem and Exact Solutions // Gravitation and Cosmology. 2009. V. 15. N 1. P. 94 – 95. DOI: 10.1134/S020228930901023X

6. Nikonov V.V., Potashov I.M., Tsirulev A.N. Circular orbits around static self-gravitating scalar field configurations [Electronic resource] // Mathematical Modelling and Geometry. 2016. Vol. 4, № 2. P. 10 – 32.

7. Kratovitch P.V., Potashov I.M., Tchemarina J.V., Tsirulev A.N. Topological geons with self-gravitating phantom scalar field // Journal of Physics: Conference Series. 2017. Vol. 934, P. 012047.

Рукопись поступила в редакцию 26.03.2024

Рукопись принята к печати 29.03.2024

УДК 004.9

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ PYTHON С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОДИРОВКИ UTF-8

Наумова Алиса Ивановна
МОУ «Тверской лицей», г. Тверь
E-mail: a_naumova_46@mail.ru

Ключевые слова: *кодирование, декодирование, программирование.*

Аннотация. В программах по кодированию информации на языке Python (Пайтон) используются различные методы: для кодирования и декодирования символов – ord и chr; для работы со строками – encode и decode. Изучение языка программирования PYTHON начинается в 8 классе. Для наиболее заинтересованных учащихся дополнительно проводятся занятия по программе *факультативного курса* с последующей разработкой проектов.

Язык Python (Пайтон) – это профессиональный язык программирования, который активно используется в таких компаниях, как Яндекс и Google. На нём разрабатываются сайты и веб-сервисы, он применяется для составления небольших программ, расширяющих возможности других программ, для кодирования информации используется кодировка UTF-8.

В рамках проведения внеурочной проектной деятельности под руководством педагога ученик 9 класса Тихонов Егор написал научную работу на тему: ”Современный стандарт кодирования текстовой информации на языке программирования Python”, в которой представлены *различные* методы по кодированию и декодированию текстовой информации.

Работа состоит из двух частей: *описательной* (дана характеристика истории создания кода UTF-8, основных принципов кодирования информации) и *практической* (приведён пример разработки программ (скриптов) по кодированию (декодированию) символов и строк с последующим компьютерным экспериментом и анализом полученных результатов).

Работа с символами

Программный код (скрипт)

```
#По умолчанию в Python используется кодировка UTF-8,
#что означает: Формат преобразования Юникода (8 бит)
print('Кодирование информации (код и строка)')
print('Введите букву (символ) на латинском языке')
#функция ord() определяет код символа
s1 = input()
kod1 = ord(s1)
print('Код введённой буквы', s1, '-', kod1)
```

```
print('Введите букву (символ) на русском языке')
s2 = input()
kod2 = ord(s2)
print('Код введённой буквы', s2, '-', kod2)
#функция chr() по коду определяет символ
st1 = s1 + chr(kod1+1) + chr(kod1+2)
print('Строка на латинском языке: ', st1)
st2 = s2 + chr(kod2+1) + chr(kod2+2)
print('Строка на русском языке: ', st2)
print('Используя коды латинских букв, составьте слово')
print('Слово –',chr(99)+chr(111)+chr(100)+chr(101))
print('Используя коды русских букв, составьте слово')
print('Слово –',(chr(1082))+(chr(1086))+(chr(1076)))
print('Задержка экрана при выполнении файла .exe')
input('Для выхода из программы нажмите на <Enter>')
print('Программа завершена!')
```

Тестовые примеры

<table>
<tr><th colspan="4">Исходная буква (символ)</th></tr>
<tr><td>Латинский язык</td><td>Код</td><td>Русский язык</td><td>Код</td></tr>
<tr><td>a</td><td>97</td><td>а</td><td>1072</td></tr>
<tr><td colspan="4">Строки (исходные коды – первые три буквы алфавита)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Латинский язык</td><td colspan="2">Русский язык</td></tr>
<tr><td colspan="2">abc</td><td colspan="2">абв</td></tr>
<tr><th colspan="4">Слова (исходные коды)</th></tr>
<tr><td colspan="2">Латинский язык</td><td colspan="2">Русский язык</td></tr>
<tr><td colspan="2">99, 111, 100, 101</td><td colspan="2">1082, 1086, 1076</td></tr>
<tr><td colspan="2">Полученное слово</td><td colspan="2">Полученное слово</td></tr>
<tr><td colspan="2">code</td><td colspan="2">код</td></tr>
</table>

Выполнение

Кодирование информации (код и строка)
Введите букву (символ) на латинском языке
a
Код введённой буквы a - 97
Введите букву (символ) на русском языке
а
Код введённой буквы а - 1072
Строка на латинском языке: abc
Строка на русском языке: абв
Используя коды латинских букв, составьте слово
Слово – code
Используя коды русских букв, составьте слово
Слово – код

Задержка экрана при выполнении файла .exe
Для выхода из программы нажмите на <Enter>
Программа завершена!

Метод ord() преобразует введённый символ в код, а метод chr() преобразует код в символ. Слова формируются с помощью конкатенации (объединения) кодов.

Работа со строками

Программный код (скрипт)

```
print('Кодирование информации. Код UTF-8')
print("Введите количество вводимых строк:")
n=int(input())
print('Кодирование и декодирование на русском языке:')
for I in range(n):
#Перевести информацию в байты (encode())
   print('Введите строку:')
   st1 = input()
   st1_utf = st1.encode()
   print('Перевод строки в байты:')
   print(st1_utf)
#Перевести байты в текстовую информацию (decode())
   st1_utf = st1_utf.decode()
   print('Перевод из байт в строку:',st1_utf)
print('Кодирование и декодирование на латинском языке:')
#Перевести информацию в байты (encode())
for I in range(n):
   print('Введите строку:')
   st2 = input()
   print('Original string:',st2)
   st2_utf = st2.encode()
   print('Encoded string:',st2_utf)
#Перевести байты в текстовую информацию (decode())
   st2_utf = st2_utf.decode()
   print('Перевод из байт в строку:',st2_utf)
print('Задержка экрана при выполнении файла .exe')
input('Для выхода из программы нажмите на <Enter>')
print('Программа завершена!')
```

Тестовые примеры

NN	Русский язык	Латинский язык	Произношение
1.	Первый среди равных	**Primus inter pares**	[При́мус и́нтэр па́рэс]
2.	Опыт — лучший учитель	**Usus est optĭmus magister**	[У́зус эст о́птимус маги́стэр].

Выполнение

Кодирование информации. Код UTF-8
Введите количество вводимых строк:
1
Кодирование и декодирование на русском языке:
Введите строку:
Первый среди равных
Перевод строки в байты:
b'\xd0\x9f\xd0\xb5\xd1\x80\xd0\xb2\xd1\x8b\xd0\xb9
\xd1\x81\xd1\x80\xd0\xb5\xd0\xb4\xd0\xb8
\xd1\x80\xd0\xb0\xd0\xb2\xd0\xbd\xd1\x8b\xd1\x85'
Перевод из байт в строку: Первый среди равных
Кодирование и декодирование на латинском языке:
Введите строку:
Usus est optimus magister
Original string: Usus est optimus magister
Encoded string: b’Usus est optimus magister’
Перевод из байт в строку: Usus est optimus magister
Задержка экрана при выполнении файла .exe
Для выхода из программы нажмите <Enter>
Программа завершена!

Задача encode() – представить строку в виде объекта типа bytes (*предваряется литералом b*). Если знак относится к ASCII, то его байтовое представление будет выглядеть как оригинальный символ. В случае, когда он выходит за пределы ASCII, то заменяется байтовым представлением (\x – эскейп – последовательность для обозначения 16-ричных чисел в языке Python).

Метод decode() преобразует последовательность байтов в *привычную* нам строку.

Анализ полученных результатов

Результаты, полученные при проведении компьютерного эксперимента программ (скриптов), *полностью* соответствуют результатам в приведённых тестовых примерах.

Выводы

Python (Пайтон) – *современный развивающийся язык*, изучение которого начинается в *предпрофильных классах* общеобразовательных учреждений на примере *использования его основных конструкций*, что достаточно *наглядно* показано в данной работе.

В основе проекта положен один из способов *практической* подготовки учащихся составлять и отлаживать программы, написанные на *современном профессиональном* языке программирования, что полностью соответствует современным стандартам образования ФГОС.

По итогам I (заочного этапа) XX Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся (Москва, 10.11.2023) научная работа награждена Дипломом Победителя III степени.

Конкурсная работа опубликована на сайте конкурса https://school-science.ru/20/4/56245 и в научном журнале “Международный Школьный Научный Вестник”. – 2023. - № 6 с присвоением кода DOI. URL: https://school-herald.ru/ru/article/view?id=1587.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Python - Википедия - https://ru.wikipedia.org/wiki/Python

2. UTF – универсальная кодировка для всего [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://thecode.media/unicode-2-2/

3. UTF-8 – Википедия [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/UTF-8

4. Информатика и информационные технологии. Учебник для 10-11 классов / Н. Д. Угринович. – 3-е изд. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 511 с.

5. Кодирование строк – ASCII, Unicode, UTF-8 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://smartiqa.ru/blog/python-encoding

6. Кодировки в Python и Unicode [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://otus.ru/journal/kodirovki-v-python-i-unicode/

Программное обеспечение

1. Операционная система Windows 10
2. Среда программирования Python – 3.8.0
3. Текстовый процессор MS Word 2010

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2024

Рукопись принята к печати 26.03.2024

УДК 37.013

ЦИФРОВАЯ СРЕДА КАК СРЕДСТВО ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПОНЯТИЙ

Павлова Галина Юрьевна
МБОУ ТР СОШ № 2, г.Торопец
E-mail: pavlova.galinka2011@yandex.ru

Ключевые слова: *мотивация, формирование геометрических понятий, GeoGebra, минусы и плюсы цифровых ресурсов.*

Аннотация. В работе рассматривается цифровая среда как одно из средств формирования геометрических понятий, на примере популярной программы *GeoGebra* , позволяющей в динамике увидеть изменение различных математических процессов, проанализировать изменения и сделать выводы, умозаключения. Перечислены программы, ресурсы, платформы, позволяющие организовать цифровое пространство ученика при обучении. Приведены примеры зарубежных и отечественных авторов, которые одобряют использование динамических программ при изучении геометрии. Также сделаны выводы о положительных и отрицательных моментах при использовании цифровых ресурсов.

Современные стандарты образования предъявляют большие требования как к уровню профессионализма учителя, так и к уровню освоения учебного предмета обучающимися. Перед системой образования стоит задача по всестороннему развитию личности, способной активно участвовать в процессе обучения, работающей над заданиями, непосредственно связанными с проблемами реальной жизни.

Перед учителем математики стоит задача по развития непосредственно понятийного мышления, формировать умение находить связь между причиной и следствием. Каждый преподаватель должен выделять группу знаний и умений, которые определят так называемую функциональную грамотность. И предмет геометрия в данном разрезе уже можно рассматривать как предмет несущий социокультурные навыки, позволяющие увидеть величие знаний на примере известных математиков и их достижений, применения в жизни человечества, что формирует ценностное отношение к предмету.

Таким образом, дети должны понимать в процессе обучения, что все предметы взаимосвязанны и полученные знания им необходимы в дальнейшей жизни.

Выполнение данной задачи возможно, когда не просто говорить, что изучаемая сегодня на уроке тема будет на экзамене, будет использоваться на других предметах, а когда ребёнок в реальной действительности будет сталкиваться с необходимостью применять знания из разных предметов для выполнения практического задания из жизни.

Но, к сожалению, на практике всё не так просто. Уровень мотивации детей к процессу обучения падает с каждым годом, снижается интеллектуальная активность, т.е. когнитивные способности детей снижаются. Часы, отводимые на изучение, таких предметов, как геометрия и алгебра не увеличиваются. А выполнение практико-ориентированных заданий требует достаточного количества времени, которое на уроке просто не всегда можно найти для этого. Кто-то скажет, что для этого существуют внеурочные занятия, но они проводятся после всех уроков, которых у детей в современной школе достаточно из- за расширения разнообразия учебного плана. И внеурочные занятие посещает не весь класс. Да, конечно, учитель должен заинтересовать детей, мотивировать их на посещение, но учебная нагрузка на учителей в современной школе, иногда, физически не позволяет проводить еще и внеурочные занятия. Но педагоги стараются решать эту проблему-находят возможности для активизации деятельности учащихся на выполнение заданий из жизни. Тем более, на экзамене по математике в 9 классе уже продолжительное время предлагают пять первых заданий, которые относятся к практико-ориентированным: вид сюжетных заданий, требующий в своем решении реализации всех этапов метода математического моделирования. Выполнение таких заданий помогает формированию понятий, в том числе, из геометрии.

Но современных детей не особо увлекает процесс работы просто на листе бумаги с ручкой, карандашом и линейкой. И мы подходим к одной из тенденций современного образования- акцентирование внимания на сам процесс обучения, который увлекает, привлекает, помогает исследовать и изучать. Вместе с этим необходимо стремиться к дифференциации заданий, индивидуальности образовательного маршрута, предоставления возможностей для проявления сформированных компетентностей. И данную задачу в современном мире можно решить, использую ту среду, те средства, которые знакомы ребенку, являются неотъемлемой частью его современной жизни. И это позволяют применить информационно-коммуникационные технологии (ИКТ) и электронные средства обучения (ЭСО), которые используют различные технические средства, к которым, конечно, относится компьютер в различных его проявлениях: планшет, графический планшет, интерактивная доска и т.д. Это позволяет использовать на компьютере различные обучающие компьютерные программы, организовать использование Интернет-ресурса различных платформ. Но сконцентрируем внимание на рассмотрении различных программ и ресурсов, которые не просто транслируют знания в готовом виде, а позволяют формировать интересующие нас геометрические понятия.

Как сказал Фридрих Гаусс: «Математика –наука для глаз», поэтому при рассмотрении сюжетных задач важен процесс визуализации. Ян Амос Каменский называл это «золотым правилом дидактики». Одно из основных назначений компьютера в обучении геометрии –исследование геометрических моделей. В геометрии компьютер выступает в роли эффективного средства для наглядной иллюстрации понятий, демонстрирования чертежей и рисунков – динамическая геометрия. Динамической геометрией называют программные среды, которые позволяют делать геометрические построения на компьютере таким образом, что при движении исходных объектов весь чертёж сохраняется. Перечислим те из них, которые наиболее часто упоминаются преподавателями и ими используются: Wingeom, GeoGebra, «Живая геометрия», «Poly», Kig, DG.

Существуют работы, которые выполняют сравнение данных программ, рассматривают их плюсы и минусы. Но остановимся на программе, которая наиболее часто встречается в рекомендациях для использования со стороны практикующих учителей. Это программа GeoGebra.

GeoGebra – это бесплатная, динамическая математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете.

GeoGebra – самая популярная в мире бесплатная математическая программа. С помощью обучающей программы по математике, можно будет выполнить множество полезных вещей: анализировать функции, строить графики, решать задачи, работать с функциями и т. д.

Интерфейс программы GeoGebra (ГеоГебра) напоминает классную доску, на которой можно рисовать графики, создавать геометрические фигуры и т. п. В окне программы будет наглядно отображены производимые изменения: если вы измените уравнение, кривая перестроится, изменится масштаб или ее положение в пространстве, уравнение, написанное рядом с кривой, автоматически будет скорректировано, согласно новым значениям.

Программу GeoGebra широко используют в мире миллионы пользователей для обучения алгебре и геометрии. Процесс обучения нагляден благодаря визуальной форме использования приложения.

Возможности программы по математике не ограничиваются только построением графиков, программу GeoGebra можно будет использовать для интерактивных чертежей при решении геометрических задач. Программа GeoGebra обладает мощными и функциональными возможностями, которые позволяет наглядно и просто обучаться математике.

Пространственные инструменты GeoGebra позволяют строить геометрические тела, их комбинации, проводить плоскость через три заданные точки (либо через две прямые или через прямую и точку), строить сечения и другие дополнительные элементы геометрических тел, проводить измерения, отмечать углы и многое другое. Отдельного упоминания заслуживает функция построения выносных рисунков, благодаря которой можно быстро построить чертеж любого двумерного объекта. Образовательная платформа оснащена базой данных, предназначенной для хранения и предъявления ученику разнообразной информации учебного характера. Иерархическая организация и быстрый поиск информации по различным признакам или контексту позволяет пользователям быстро находить нужную информацию, использовать ее в образовательной деятельности. Можно использовать электронные учебники и тетради, заглянуть в онлайн лабораторию. Повысить свой уровень знаний по предмету, а также компьютерную грамотность. Провести контроль знаний в онлайн тестах, самостоятельных и контрольных работах. Генератор автоматически подбирает по указанной теме вопросы, затем так же автоматически выдает результат.

Программа GeoGebra содержит базу данных, в которой собраны все задачи от различных пользователей, опубликовавших свои работы.

GeoGebra дает большие возможности для работы по курсу «Стереометрия», позволяющему представить и увидеть модель фигуры в пространстве и, например, создать её развертку. Но это выполнимо, когда освоены понятия на плоскости.

При дальнейшем рассмотрении программы приходим к выводу, что очень удобная функция «Сетка», помогающая ориентироваться в размерах построенной фигуры: построить равнобедренный треугольник, провести медиану треугольника и т.д. Наличие «бегунка», позволяющего изменять параметры различных объектов (угла, отрезка и т.д), что способствует активизации мыслительных процессов, систематизируя полученные данные с помощью учителя или самостоятельно.

Рассмотрев положительные моменты в работе с программой GeoGebra, можно также сказать о том, что в литературе зарубежной и отечественной имеются отзывы о работе в данной программе. Зарубежные авторы обнаружили, что использование GeoGebra положительно влияет на мотивацию обучающихся и в целом на повышение уровня знаний. Их личный опыт использования методик обучения на основе GeoGebra для преподавателей средних и старших классов до и после обучения способствовал развитию математического мышления и оказал большое влияние на обучение учителей. Они приходят к выводу, что математика является абстрактным предметом и требует коллективного воображения обучающихся и преподавателей, особенно в области геометрии и преобразований. Использование технологии предоставляет учащимся возможность учиться без ограничений, а также способствует обучению, ориентированному на ученика, когда учитель выступает в роли помощника даже при использовании готовых файлов GeoGebra. На основании результатов, полученных в рамках эксперимента, определили, что программа GeoGebra значительно помогла всем учащимся с изучением математических понятий. Также авторы в своем исследовании пришли к выводу, что компьютеры могут взять на себя рутинную математическую работу, устраняя утомительную сторону математики и, таким образом, позволяя учителю и ученикам создавать что-то более увлекательное в процессе обучения.

Таким образом, теоретики и практики сошлись во мнении, что:

– такого планы цифровые средства благотворно влияют на формирование понятий;

– повышают мотивацию;

– помогают дифференцировать работу в классах;

– помогают выстроить индивидуальную траекторию обучения;

– реализовать личностно-ориентированный подход в обучении;

– обеспечить активное взаимодействие обучающихся с учебным материалом;

– автоматизировать контроль и самоконтроль результатов учебной деятельности;

– развивать умения исследовательской деятельности.

При использовании цифровой среды в формате динамических платформ, конечно, в современном быстро развивающемся мире невозможно без использования и других ресурсов ИКТ и ЭСО: цифровые библиотеки с теоретическим материалом и курсами видео-уроков по темам, электронные справочники, разнообразные электронные тесты на платформах, позволяющие сэкономить время на проверку и обработку результатов. Перечислим наиболее известные из них: «Российская электронная школа» https://resh.edu.ru/; ЯКласс https://www.yaklass.ru/; Stepik https://stepik.org/catalog; Единая коллекция образовательных ресурсов http://school-collection.edu.ru/; Сдам ГИА: Решу ЕГЭ https://math-ege.sdamgia.ru/; Сдам ГИА: Решу ОГЭ https://oge.sdamgia.ru/; Библиотека видео- уроков школьной программы https://interneturok.ru/; Онлайн платформа Видео- уроки https://videouroki.net/; Интерактивная образовательная онлайн-платформа https://uchi.ru/; «Сферум» – это информационно-коммуникационная образовательная платформа.

Данный список можно продолжать, в зависимости от того, кто и как организует свою работу с классом в зависимости от своих ИКТ компетенций, от технических возможностей. Но рассмотрев различные источники, проанализировав ситуацию в образовании «на практике», приходит осознание того, что система современного образования невозможна без использования цифровой среды, так как это стало неотъемлемой частью жизни как учителей, так и детей, и их особенно, так как они большое количество времени проводят в цифровом пространстве. В связи с этим приходим к тому, что необходимо учителей и детей учить правильному использованию представленных ресурсов, чтобы они помогали в освоении предмета, в формировании и развитии способностей. И, конечно, помнить, что использование всех цифровых ресурсов, платформ и т.п. должно быть регламентировано по времени, использоваться дозированно и быть дополнительным, вспомогательным средством при обучении; рассматривать как альтернативу при дистанционном обучении, когда нет возможности контактировать с учителем и целым классом «в живую», так как возможны следующие отрицательные моменты по отношению к обучающемуся:

– возможность информационного перенасыщения процесса обучения;

– нарушение правил информационной безопасность при постоянном использовании цифровых ресурсов;

– возникновение когнитивной нагрузки;
– наличие на ресурсе материалов, имеющих сомнительное качество;
– излишняя индивидуализация процесса.

Также можно отметить, что достаточная стоимость оборудования для оснащения кабинета, проблема подготовки кадров, способных работать с электронными образовательными ресурсами, увеличение времени подготовки к урокам, возможный переход от системно-деятельного подхода к наглядно-иллюстративному- те минусы, которые возможны при использовании цифровой среды и интерактивной техники.

Но использование традиционных методов обучения в совокупности с ИКТ и ЭСО поможет сформировать целостную образовательную траекторию и достичь нужного результата- в формировании мотивированной компетентной личности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агазаде Ш.М. Организация активного учения учащихся при изучении некоторых тем курса математики основной школы. Пермь: Молодой учёный,2014. №7. С.1-5

2. Акользина Е.А. Использование электронных образовательных ресурсов в процессе обучения: достоинства и недостатки. Психолого-педагогический журнал Гаудеамус, 2013. №2 (22). С.95-97

3. Лучко Ю.А. Совершенствование процесса формирования геометрических понятий с использованием информационных технологий. Тамбов. ISSN 1993-5552. Альманах современной науки и образования. 2008. №7 (14). С.115-117

4. НАУЧНАЯ ЭЛЕКТРОННАЯ БИБЛИОТЕКА «КИБЕРЛЕНИНКА» [Электронный ресурс] / Режим доступа: http://www.cyberlenica.ru

5. Подаева Н. Г., Подаев М. В., Агафонов П. А. Формирование понятий в процессе обучения геометрии школьников в электронной образовательной среде // Научно-методический электронный журнал «Концепт».2019. № 6 (июнь). С. 10–25. – URL: http://e-koncept.ru/2019/191040.htm.

6. Сайков Б.Н. Современные интерактивные средства математического образования: практическое руководство. М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009. 406с., ил.

7. ГОСТ Р 53626-2009 Национальный стандарт Российской Федерации. Информационно-коммуникационные технологии в образовании технические средства обучения дата введения - 2011-01-01

8. Параллелограмм: Площадь// GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/avkgxbea#material/D8rjsGzF

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 378.14

РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ ШКОЛЬНИКОВ ЧЕРЕЗ ПРОЕКТНУЮ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Потапенко Мирослава Степановна
МОУ Гимназия № 12 г. Твери, г. Тверь
E-mail:miroslava_tver@mail.ru

Ключевые слова*: проектная деятельность, проект, этапы, портфолио.*

Аннотация. В работе рассматривается краткая история возникновения метода проектов, этапы проектной деятельности, роль учителя и ученика, классификация проектов и критерии оценивания работы ученика в проекте.

Скажи мне – и я забуду,
покажи мне – и я запомню,
вовлеки меня – и я научусь.

Конфуций, древний мыслитель и философ

Метод проектов не является принципиально новым в мировой педагогике. Он возник в США еще в начале прошлого столетия. Ещё одно название метода проектов - метод проблем. В американском варианте предлагалось строить обучение на активной основе, через целесообразную деятельность ученика, опираясь на личный интерес ученика. Отсюда чрезвычайно важно было показать детям их личную заинтересованность в приобретаемых знаниях и также показать важную роль этих знаний в жизни. Почему такое название? Потому, что нужна была проблема, взятая из реальной жизни, знакомая и значимая для ребенка или для других людей, для решения которой ему необходимо приложить полученные знания и новые знания, которые еще предстоит приобрести. Практически в то же время возникают идеи проектного обучения в России. Уже в 1905 году русский педагог С.Т. Шацкий возглавил небольшую группу коллег, пытавшихся активно использовать проектные методы в практике преподавания. После революции метод проектов применялся в школах по личному распоряжению Н. К. Крупской. В 1931 году метод проектов был осужден как чуждый советской школе и не использовался вплоть до конца 80-х годов. Почему мы опять вспомнили про метод проектов?

Задачей современной школы является создание условий, в которых каждый ученик может проявить свои таланты, реализовать свой творческий потенциал.

Проект – это задание учащимся, сформулированное в виде проблемы;

проект – это целенаправленная деятельность учащихся;

проект – это форма организации взаимодействия учащихся с учителем и учащихся между собой;

проект – это результат деятельности как способ решения проблемы проекта.

Метод проектов всегда ориентирован на самостоятельную деятельность учащихся: индивидуальную, парную, групповую, которую учащиеся выполняют в течение определенного отрезка времени.

Под проектной деятельностью будем понимать такую деятельность, в основе которой лежит активизация познавательной и практической составляющих, в результате которой школьник производит продукт, обладающий субъективной или объективной новизной.

Проектное обучение – организация образовательного процесса, направленная на решение обучающимися учебных задач на основе самостоятельного сбора по данным признакам и интерпретации информации, обязательного обоснования и корректировки последующей продуктивной учебной деятельности, ее самооценки и презентации результата.

Этапы проектировочной деятельности можно сформулировать как шесть «П»:

1. П*роблема*	***2. П****ланирование действий*	***3. П****оиск информации*
4. П*родукт работы*	***5. П****резентация результатов*	***6. П****ортфолио*

Для чего нам нужен метод проектов? Для того, чтобы научить учащихся самостоятельному, критическому мышлению; научить размышлять, опираясь на знание фактов, закономерностей науки, делать обоснованные выводы; принимать самостоятельные, аргументированные решения; научить работать в команде, выполняя разные социальные роли.

Сфера образования должна развиваться гораздо активнее, чтобы успевать за быстро меняющимся миром. Однако масштабные инновации в образовании происходят нечасто – за последнюю тысячу лет их было всего четыре.

1. Появление в X–XII вв. в Европе университетов, ориентированных на трансляцию знаний (Болонья, Париж)

2. Классно-урочная система, предложенная Яном Амосом Коменским в 1640-х годах и ставшая педагогической нормой для массового образования.

3. Появление в XIX веке университетов исследовательского типа по модели Вильгельма фон Гумбольдта, предназначенных для генерации научных знаний и подготовки исследователей.

4. Идея прагматичного образования и экспериментальный метод обучения, предложенный американским философом Джоном Дьюи на рубеже XIX-XX веков, который стал основой для развития проектного обучения.

Итак, технология проектного обучения – это образовательная методика, в которой центр – учащийся, а цель – сделать его самостоятельным, креативным и инициативным. Школьник развивает в себе эти качества через собственные действия во время изучения интересных и значимых тем. Проект – это не про зазубривание параграфов учебника и бездумное чтение произведений классиков русской литературы. Это обучение через интерактивы: разработку программы и ее презентации в игровой форме. В проектном обучении парадигма сдвигается: от пассивного изучения к практике, от готовых знаний к разработке новых решений, от передачи информации к трансляции опыта.

Выделяют следующие этапы проектной деятельности, на которых определим роль ученика и учителя.

1. *Организационно-подготовительный*. Определение темы проекта, его цели и задач, поиск необходимой для начала проектирования информации, разработка плана реализации идеи, формирование микро-групп. Консультирование по выбору тематики и жанра проекта, помощь в подборке необходимых материалов, определение общего направления и главных ориентиров поиска, определение критериев оценки деятельности учащихся на всех этапах, формирование мотивации участников .

2. *Поисковый*. Сбор, анализ и систематизация необходимой информации, выдвижение и проверка гипотез, оформление макета или модели проекта. Регулярное консультирование по содержанию проекта, помощь в систематизации и обобщении материалов, индивидуальные и групповые консультации по правилам оформления проекта, стимулирование умственной активности учащихся, отслеживание деятельности каждого участника, оценка промежуточных результатов, мониторинг совместной деятельности

3. *Итоговый*. Оформление пакета документов по проекту и информационных стендов, схем, диаграмм, подготовка устной презентации и защита содержания проекта, рефлексия.

Помощь в разработке отчета о работе, подготовка выступающих к устной защите, отработка умения отвечать на вопросы, выступление в качестве эксперта на защите проекта, участие в анализе проделанной работы, оценка вклада каждого из исполнителей проекта.

Из вышесказанного можно сделать вывод, что проектная деятельность требует от учителя не столько объяснения знаний, сколько создания условий для расширения познавательных интересов детей.

Именно поэтому учитель – руководитель проекта должен обладать высоким уровнем общей культуры, комплексом творческих способностей и быть инициатором интересных начинаний, бросать вызов их сообразительности и изобретательности.

Как на уроке можно заинтересовать ребят, направить их в проектную деятельность? Рассмотрим некоторые варианты создания проблемных ситуаций на уроке.

1. Через умышленно допущенные учителем ошибки.
2. Через использование занимательных заданий.

3. Через решение задач, связанных с жизнью.
4. Через выполнение практических заданий.
5. Через решение задач на внимание и сравнение.
6. Через противоречие нового материала старому, уже известному.
7. Через различные способы решения одной задачи.
8. Через выполнение небольших исследовательских заданий.

Классификация проектов

по доминирующей деятельности учащихся – практикоориентированные, исследовательские, информационные, творческие, ролевые;

по продолжительности – мини-проекты, краткосрочные, годичные;

по количеству участников – индивидуальные и групповые;

по форме продукта – газета, буклет, журнал, словарь, сборник сочинений, спектакль, мультимедийный продукт и т.д.

В проектной деятельности учителю приходится давать оценку проекту или какому-то его этапу. Рассмотрим критерии оценивания проектов: 1) Степень самостоятельности в выполнении различных этапов работы над проектом: 2) Степень включенности в групповую работу и четкость выполнения отведенной роли; 3) Практическое использование предметных и общешкольных ЗУН; 4) Количество новой информации, использованной для выполнения проекта; 5) Степень осмысления использованной информации; 6) Уровень сложности и степень владения использованными методиками; 7) Оригинальность идеи, способы решения проблемы; 8) Осмысление проблемы проекта и формулирование цели проекта или исследования; 9) Уровень организации и проведения презентации: устного сообщения, письменного отчета, обеспечения объектами наглядности; 10) Владение рефлексией; 11) Творческий подход в подготовке объектов наглядности презентации; 12) Социальное и прикладное значение полученных результатов.

Итак, проектное обучение: – это способ вовлечь ребенка в ситуации, которые ему близки и понятны; дать ему возможность прожить их на своем опыте; найти варианты решения поставленных задач; освоить умения и способы коммуникации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В.Бычков, Метод проектов в современной школе. Москва,АБВ-Издат, 2018.

2. Л.Н.Боронина, З.В.Сенук, Основы управления проектами. Екатеринбург, Издательство Уральского университета, 2015.

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 004.92

КОНСТРУИРОВАНИЕ КРИВЫХ ЛИНИЙ В ПАКЕТЕ TIKZ

Поташов Иван Михайлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *векторная графика, TeX/LaTeX, TikZ/PGF*.

Аннотация. В работе рассматриваются приёмы построения некоторых кривых в иллюстрациях в научной и учебной литературе с использованием пакета векторной графики TikZ/PGF.

TikZ – пакет векторной графики, используемый в системе LaTeX для создания векторных иллюстраций, интегрируемых в PDF-файлы. При помощи данного пакета можно создавать иллюстрации любого типа и сложности – от простейших геометрических чертежей, до сложных диаграмм и схем. Некоторые базовые приёмы работы с графическими примитивами (рисование прямых линий, изменение цвета, толщины, штриховки линий, вставка надписей, использование циклов) были рассмотрены автором в работе [1], а полное руководство доступно по ссылке [2]. Однако при конструировании некоторых иллюстраций этих знаний может оказаться недостаточно, в частности, для программирования рисунков, содержащих кривые. Ниже мы рассмотрим некоторые приёмы построения различных кривых линий.

1. Параболы. Рисование парабол в TikZ можно осуществить при помощи команды

\draw (x1,y1) parabola[опции]bend<(x0,y0)> <(x2,y2) или cycle>

где *\draw* – стандартная команда для рисования графических примитивов, *bend<(x0,y0)>* – необязательный параметр, указывающий место изгиба, *(x2,y2)* — координаты конечной точки, *cycle* – необязательная команда, указывающая на зацикливание линии. Примеры использования данной конструкции можно увидеть на рис. 1.

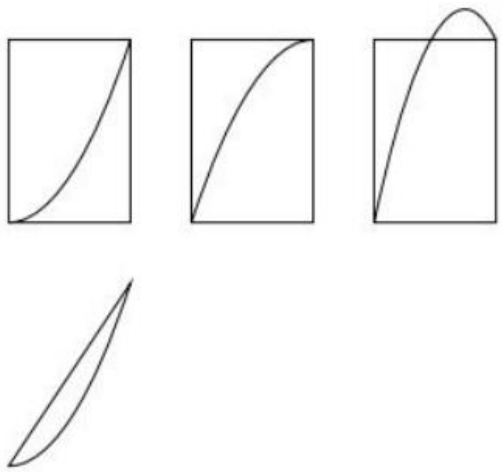
Рассмотрим подробнее опции оператора *parabola*.

bend=(x0,y0) – указание координаты точки изгиба. По умолчанию места изгиба совпадает с начальной координатой. Использование этой опции может привести к неожиданным эффектам: в этом случае, вообще говоря, в результате использования этой опции мы получаем не параболу как график квадратичной функции, а сшивку из двух парабол в точке *(x0,y0).* Пример неудачного использования опции показан на рис. 2.

bend pos=<число> – указывает положение точки изгиба относительно начальной и конечной точки параболы. В этом случае точка изгиба будет находиться на отрезке между крайними точками, а значение параметра показывает, в каком отношении она делит этот отрезок, считая от начальной точки. Использование относительных координат позволяет изменять положение точки. Например, если указать *bend pos=0* и *bend +(0,0),* то изгиб будет находиться в начальной точке. Если указать *bend pos=1* и *bend +(0,0)*, то изгиб будет находиться в конечной точке. Если указать значения *bend pos=0.5* и *bend +(0,2cm)*, то точка изгиба будет находиться на 2 см выше середины отрезка, соединяющего начальную и конечную точки.

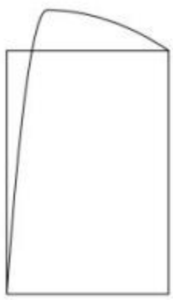
parabola height=<размер> – опция, указывающая высоту параболы. Данная опция эквивалентна *[bend pos=0.5,bend={+(0pt,<размер>}]*. Высота параболы может принимать отрицательные значения. Эта опция подходит для построения симметричных парабол (см. рис. 3).

Если изгиб надо разместить в начальной или конечной точке, то можно указать в качестве параметров *bend at start* и *bend at end*.



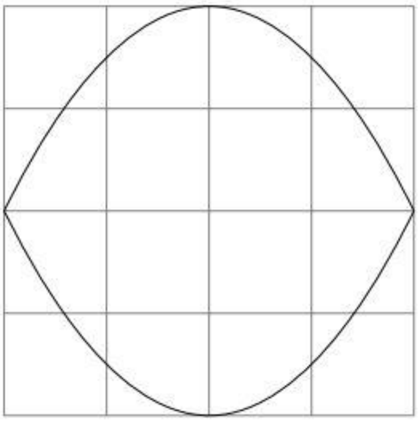
```
\begin{tikzpicture}
\draw (0,0) rectangle (1,1.5)
%вершина параболы в начальной
точке
(0,0) parabola (1,1.5);
\draw[xshift=1.5cm] (0,0) rectangle
(1,1.5)
(0,0) parabola[bend at end] (1,1.5);
% вершина в конце
\draw[xshift=3cm] (0,0)
rectangle (1,1.5)(0,0)
parabola bend (.75,1.75) (1,1.5);
%явно указана точко изгиба
\draw[yshift=-2cm] (1,1.5) --
(0,0) parabola cycle;
 %зацикливание
\end{tikzpicture}
```

Рис 1. Примеры построения парабол с различными опциями



```
\begin{tikzpicture}[scale=2]
\draw (0,0) rectangle (1,1.5)
(0,0) parabola bend
(.25,1.75) (1,1.5);
\end{tikzpicture}
```

Рис 2. Пример неудачного использования опции *bend*



\begin{tikzpicture}
\draw[help lines] (-2,-2) grid (2,2);
\draw (-2,0) parabola
[parabola height=-2cm] (2,0);
\draw (-2,0) parabola[parabola height=2cm] (2,0);
\end{tikzpicture}

Рис. 3. Построение симметричных парабол с использованием опции *parabola height*

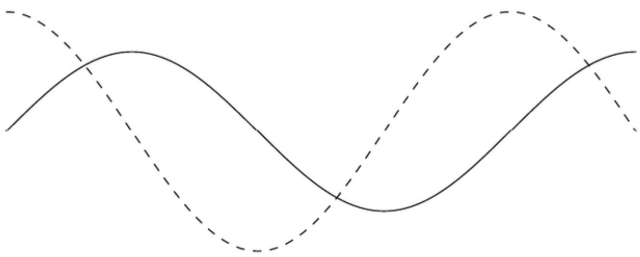
2. Синусоиды и косинусоиды. Помимо парабол в TikZ существует возможность рисования синусоид и косинусоид, соединяющих две заданные точки. Эти кривые строятся по такому же принципу, что и параболы:

\draw (x1,y1) sin <(x2,y2) или cycle>

\draw (x1,y1) cos <(x2,y2) или cycle>

Оператор *sin* в данном случае позволяет построить масштабированную и сдвинутую часть синусоиды из интервала [0, π/2]. Оператор *cos* действует аналогично, только строит косинусоиду на отрезке [0, π/2].

Совместное использование этих операторов позволяет построить полностью синусоиду и косинусоиду. Пример с кодом приведён на рис. 4 [2].



\begin{tikzpicture}[xscale=1.57]
\draw (0,0) sin (1,1) cos (2,0) sin (3,-1) cos (4,0) sin (5,1);
\draw[dashed] (0,1.5) cos (1,0) sin (2,-1.5) cos (3,0) sin (4,1.5) cos (5,0);
\end{tikzpicture}

Рис. 4. Пример использования операторов *sin* и *cos*

3. Построение графиков функций и параметрических кривых. Для построения графиков функций в TikZ используется следующая команда

\draw[опции] plot (<координатное выражение>);

Параметр <*координатное выражение*> задаёт, как должны изменяться координаты. Такие выражения записываются при помощи знаков арифметических действий и с использованием встроенных функций. Ниже перечислены некоторые из них.

Стандартные математические функции в Tikz/PGF

Функция	**Что вычисляет**
factorial(\x)	Факториал числа *x*
sqrt(\x)	Квадратный корень из *x*
pow(\x,y)	*x* в степени *y*
ln(\x)	Натуральный логарифм *x*
log10(\x)	Десятичный логарифм *x*
log2(\x)	Двоичный логарифм *x*
exp(\x)	Экспонента
abs(\x)	Модуль *x*
mod(\x,y)	Остаток от деления *x* на *y*
round(\x)	Округление *x* до ближайшего целого
floor(\x)	Наибольшее целое, меньшее *x*
ceil(\x)	Наименьшее целое, большее *x*
sin(\x)	Синус числа *x* (аргумент в градусах)
sin(\x r)	Синус числа *x* (аргумент в радианах)
cos(\x)	Косинус числа *x* (аргумент в градусах)
cos(\x r)	Косинус числа *x* (аргумент в радианах)
tan(\x)	Тангенс числа *x* (аргумент в градусах)
tan(\x r)	Тангенс числа *x* (аргумент в радианах)
rnd	Случайное число

Здесь *\x* выступает в роли независимой переменной.

В квадратных скобках в качестве опций указываются параметры, которые определяют цвет, толщину и штриховку линий (см. [1, 2, 3]), а также ряд специальных параметров. Ниже мы рассмотрим некоторые из них.

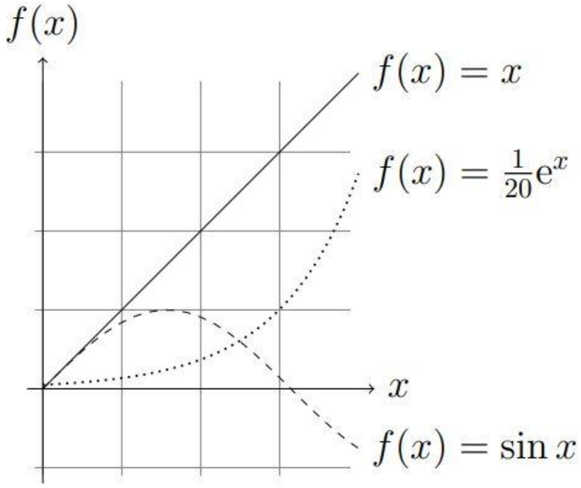
variable=<имя величины> – параметр, указывающий имя независимой переменной. Имя переменной всегда начинается с обратного слэша (\). По умолчанию значение этого параметра равно *\x*.

samples=<число> – параметр, определяющий количество точек, используемых для построения кривой. По умолчанию используется 25 точек.

Domain=<начало>:<конец> – параметр, определяющий область изменения независимой переменной, а <*начало*> и <*конец*> являются левой и правой границей отрезка соответственно. По умолчанию график строится на отрезке от – 5 до 5,

Стоит отметить, что иногда графики, созданные при помощи данной команды, могут иметь изломы и не обладают гладкостью. Данный недостаток можно устранить, если увеличить параметр *samples,* а также добавить опцию *smooth.*

Примеры построения графиков функций показаны на рис. 5 и в пояснении




```
\begin{tikzpicture}[domain=0:4]
\draw[very thin,color=gray] (-0.1,-1.1) grid (3.9,3.9);
\draw[->] (-0.2,0) -- (4.2,0) node[right] {$x$};
\draw[->] (0,-1.2) -- (0,4.2) node[above] {$f(x)$};
\draw plot (\x,\x) node[right] {$f(x) =x$};
\draw[dashed] plot (\x,{sin(\x r)}) node[right] {$f(x) = \sin x$};
\draw[dotted,thick] plot (\x,{0.05*exp(\x)}) node[right] {$f(x) = \frac{1}{20}
\mathrm e^x$};
\end{tikzpicture}
```

Рис. 5. Построение графиков различных функций

4. Ещё несколько способов построения кривых. Часто при построении кривой нужно задать направление в концевых точках. Это можно сделать двумя способами.

Во-первых, направление касательных можно указать явно, используя команду

\draw[опции] (x1,y1) to[=<угол 1>, in=<угол 2>] (x2,y2);

Здесь *(x1,y1)* и *(x2,y2)* – координаты начальной и конечной точки кривой, а параметры *out* и *in* определяют углы касательной в начальной и конечной точке соответственно относительно горизонтали.

Во-вторых, кривую можно построить при помощи контрольных точек. Для этого используется команда

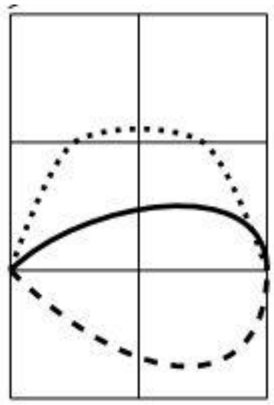
\draw[опции] (x1,y1) .. controls (xc1,yc1) and (xc2,yc2) .. (x2,y2);

Здесь контрольные точки *(xc1,yc1)* и *(xc2,yc2)* задают направление касательных. Говоря строгим математическим языком, касательная в начальной точке кривой пройдёт через точку *(xc1,yc1)*, а в конечной точке касательная пройдёт через точку *(xc1,yc1)*.

Также гладкие кривые можно строить поточечно, используя команду

\draw[опции] plot[smooth] coordinates {(x1,y1)(x2,y2)...(xn,yn)};

Здесь *(x1,y1),(x2,y2)...(xn,yn)* – координаты точек, через которые пройдёт кривая. Примеры использования данных способов показаны на рис. 6.



```
\begin{tikzpicture}
\draw[thin] (0,-1) grid (2,2);
\draw[very thick] (0,0) to [out=45, in=90] (2,0);
\draw[very thick,dashed] (0,0) .. controls (1,-1) and (2,-1) ..(2,0);
\draw[very thick,dotted] plot[smooth] coordinates {(0,0)(0.5,1)(1.5,1)(2,0)};
\end{tikzpicture}
```

Рис. 6. Построение кривых различными способами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поташов И.М. Графический пакет TikZ/PGF. Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы второй Всероссийской научно-практической конференции. Министерство образования и науки Российской Федерации; Тверской государственный университет; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». 2018. С. 160-166.

2. T. Tantau, The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.10. URL:https://mirror.macomnet.net/pub/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf (дата обращения 26.03.24).

3. Страхов Е.М. Графика в LaTeX. / Е.М. Страхов. URL: https://www.tug.org/twg/edutex/2016_Strakhov/4_GraphicsLaTeXSlides_handout.pdf (дата обращения 26.03.24).

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 37.013

РАЗНОУРОВНЕВЫЕ ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО МАТЕМАТИКЕ КАК СРЕДСТВО ОБУЧЕНИЯ В ИНЖЕНЕРНО-МАТЕМАТИЧЕСКОМ КЛАССЕ

Сапегин Владимир Андреевич
Армавирский государственный педагогический университет, г. Армавир
МБОУ СОШ № 14 им.А.И. Покрышкина, ст. Кавказская, Краснодарский край
E-mail: vladimir.sapegin2012@yandex.ru

Ключевые слова: *прикладные задачи, задачи с прикладным содержанием, практико-ориентированные задачи, разноуровневые прикладные задачи, уровневые группы, инженерно-математический класс.*

Аннотация. В статье рассматриваются прикладные задачи для инженерно-математического класса. Обоснована роль разноуровневых прикладных задач в организации обучения математике в инженерно-математическом классе. Автор уделяет внимание требованиям к их содержанию. Приведены примеры прикладных задач, удовлетворяющим обозначенным требованиям и учитывающим направления подготовки в техническом вузе (конструкторское, технологическое).

Анализ раннее выполненных исследований (Ю.М. Фоминых, Г.В. Дорофеева, Н.А. Терешина и др.) показал, что в практике обучения математике широко применяют прикладные задачи. Ю.Ф. Фоминых акцентирует внимание на том, что для классов различных профилей целесообразно использовать задачи с разным контекстом: «коммерческие» задачи – в классах с экономическим уклоном; «физические» и «технические» – с естественно-научным; содержащие нетрадиционные математические методы – классах с углубленным изучением математики [6, С.5]. Мы придерживаемся данной позиции и отмечаем, что при обучении математике старшеклассников в инженерно-математическом классе необходимо применять, как и математические задачи, так и задачи с физическим, химическим и экономическим содержанием.

Анализируя работы Г.В. Дорофеева, И.М. Шапиро, Л.М. Фридмана, Н.А. Терешина, Г.Г. Маслова, М.В. Крутихина и др., мы приходим к выводу, что нет единого подхода к определению прикладных задач по математике. И.М. Шапиро под математической задачей с практическим содержанием (задачей прикладного характера) понимает задачу, «фабула которой раскрывает приложения математики смежных учебных дисциплинах, знакомит с ее использованием в организации, технологии и экономике современного производства, в сфере обслуживания, в быту, при выполнении трудовых операций» [7, С.6]. Как отмечает Л.М. Фридман, задачи, в которых хотя бы один объект есть реальный предмет, называются практическими (житейскими, текстовыми, сюжетными) [7, С.21]. По мнению Н.А. Терешина, прикладная задача – это «задача, поставленная вне математики и решаемая математическими средствами» [4, С.7]. В рамках данной статьи будем использовать термин «прикладная задача».

Анализируя работы В.А. Далингера, Е.Н. Эрентраута, Н.А. Терешина, М.В. Егуповой и др., мы установили, что для классификации прикладных задач используются следующие основания: область применения, типы данных, методы решения и др. Отметим, что Е.А. Боровская акцентирует внимание на профессиональном содержании и выделяет следующие типы прикладных задач: аналитические, организационно-подготовительные и оценочно-коррекционные [1, С.6]. Е.Н. Эрентраут, показывая особенности применения аппарата математического анализа для решения прикладных задач, предлагает следующие их виды: физические, с экономическим содержанием, биологические, химические, с экологическими проблемами [8]. В рамках данного исследования рассматриваем типы прикладных задач в соответствии с областью применения.

В настоящее время широко используется дифференциация при обучении математике в инженерно-математическом классе в связи с неоднородностью математической подготовки обучающихся. Мы считаем, что целесообразно предлагать прикладные задачи в соответствии с особенностями учащихся, отнесенных к определенной уровневой группе, моделируя реальные ситуации на языке математики (составление уравнений, неравенств, их систем, применение производной функции и др.). Отметим, что обучающиеся распределены в группы в соответствии: 1) с владением методами решения задач; 2) со скоростью восприятия информации, представленной в символьном виде; 3) с особенностями восприятия информации, представленной в графическом виде; 4) с готовностью воспринимать информацию, представленную в текстовом виде [3, С. 152].

Анализируя исследования (Тойбазарова Д. Б., Токанова М. М. и др.), мы установили, что существует классификация прикладных задач по математике по уровню их сложности, в соответствии с которой «происходит выделение основных типов задач, в зависимости от того насколько сложен подбор к реальным объектам и реальным отношениям нужных математических эквивалентов, исходя из описанной в задаче ситуации» [5]. Мы придерживаемся того, что уровень сложности задачи с прикладным содержанием зависит от содержания условия и требования задачи.

Отметим, что в настоящее время в учебниках для инженерных классов специально включены прикладные задачи. В частности, Е.Г. Буркова, В.В. Козичев выделяют четыре группы задач в соответствии с направлениями подготовки инженеров в техническом вузе: технологическое, исследовательское, конструирование, программирование [2]. Экспериментальным путем нами было установлено требование к содержанию прикладных задач технологического и конструкторского направления для уровневых групп.

Задачи технологического направления связаны с определением параметров обработки резаньем, потребных характеристик токарного станка, технологических условий изготовления композитных изделий и т.д. [2]. Отметим, что для трехуровневых групп предложены требования к содержанию (условие задачи, наличие переменных в задаче, этапы решения задачи и их описание, формализация условия задачи) прикладной задачи технологического направления (табл. 1).

Таблица 1

Требования к содержанию прикладной задачи технологического направления

Требования	**Уровневая группа**		
	А	**Б**	**В**
Условие задачи представлено в текстовом виде	+	+	+
В условии задачи содержится чертеж композитных изделий (при необходимости)	+	+	-
Переменные указаны в текстовом и символьном виде, заданы числовые значения переменных	+	-	-
Переменные указаны в текстовом и символьном виде	-	+	-
Переменные указаны в текстовом виде	-	-	+
Требование в задаче представлено в текстовом и символьном виде, выведено отдельно от условия задачи	+	-	-
Требование в задаче представлено в символьном виде, выведено отдельно от условия задачи	-	+	-
Требование в задаче представлено в текстовом виде, содержится внутри задачи	-	-	+
Предложено описание решения задачи	+	-	-
Предложены этапы решения задачи	-	+	-
Указана необходимость записать описание задачи	-	-	+
Формализация условия задачи, приведены формулы для решения задачи, указаны комментарии по использованию необходимых формул	+	-	-
Формализация условия задачи, приведены формулы для решения задачи	-	+	-
Формализация модели, составленной по условию задачи	-	-	+

Приведем пример прикладной задачи технологического направления для группы В (рис. 1) [2].

Общая схема подготовки композиционного материала заключается в пропитке армирующего материала (например, стеклянной ткани) жидким связующим, придании материалу необходимой формы и полимеризации (отверждении) связующего. Для увеличения жесткости материала разработана схема создания сотовых структур, состоящих из двух слоев материала, разделенных пустотами (областями малой плотности) с тонкими перегородками. Сперва выкладывается нижний слой пропитанной стеклоткани, затем выкладывается слой пенопластовых дисков в виде сотовой структуры, зазоры заливаются связующим и сверху укладывается конечный слой стеклоткани. Слой стеклоткани имеет толщину 0,3 мм, армирующая ткань занимает 50% объёма слоя. Связующее имеет плотность 1200 кг/м^3. Пенопластовые диски имеют диаметр 30 мм, высоту 10 мм, плотность 80 кг/м^3 и выкладываются с шагом 32 мм. Определить поверхностную плотность материала (кг/м^2). 2) Определить необходимое число работников для подготовки 0,05 м^2/мин среднего слоя при условии, что выкладка пенопластовых сот занимает 10 с/шт.

Рис. 1. Прикладная задача технологического направления для группы В

Задачи, соответствующие конструкторскому направлению подготовки в техническом вузе связаны с проведением технических расчетов, отвечающих условиям эксплуатации той или иной конструкции, определение параметров исследуемой системы или характеристик конструктивного решения [2]. Отметим, что для трехуровневых групп предложены требования к содержанию прикладной задачи конструкторского направления (табл. 2).

Таблица 2

Требования к содержанию прикладной задачи конструкторского направления

Требования	**Уровневая группа**		
	А	**Б**	**В**
Условие задачи представлено в текстовом и символьном виде, для предложенных переменных даны комментарии	+	-	-
Условие задачи представлено в текстовом и символьном виде	-	+	-
Условие задачи представлено в текстовом виде	-	-	+
Требование в задаче представлено в текстовом виде, предложена формула для решения	+	-	-
Требование в задаче представлено в текстовом виде	-	+	-

Требование в задаче представлено в текстовом виде, содержатся дополнительные вопросы к задаче	-	-	+
Приведены этапы по проведению расчетов в задаче, для каждого этапа предложена формула и комментарии по ее применению	+	-	-
Приведены этапы по проведению расчетов в задаче, для каждого этапа предложена формула	-	+	-
Приведены этапы по проведению расчетов в задаче в общем виде	-	-	+

Приведем пример прикладной задачи конструкторского направления для группы Б (рис.) [2].

Емкость кубической формы (сторона куба 4 метра) с пенопластовой теплоизоляцией полностью наполнена водяным льдом при температуре 0°C (такая же температура внутренней поверхности теплоизоляции). Плотность льда составляет 917 кг/м^3, а его теплота плавления 330 кДж/кг. Теплопроводность пенопласта 0.4 Вт/(м·К), средняя температура окружающей среды (и внешней поверхности теплоизоляции) равна 15°C. Найти толщину теплоизоляции, обеспечивающей сохранение 30% льда в твердой форме в течение 90 суток. Для оценки плотности теплового потока q (Вт/м^2) через стенку (количества энергии, проходящей через единицу площади поверхности стенки в единицу времени) используется следующая формула: $q = \lambda \frac{(T_2 - T_1)}{\delta}$, где λ (Вт/(м·К)) – теплопроводность материала стенки; T_1 и T_2 (К) – температура внутренней и наружной поверхности стенки; δ (м) – толщина стенки. Тепловой поток направлен со стороны с большей температурой в сторону с меньшей температурой.

Рис. 2. Прикладная задача конструкторского направления для группы Б

Таким образом, в статье представлено содержание разноуровневых прикладных задач. Для обучения математике в инженерно-математическом классе мы выделили и охарактеризовали прикладные задачи технологического и конструкторского направления. Прикладные задачи разных направлений были соотнесены с возможностями использования для трех уровней математической подготовки. Нами выделены требования к содержанию, в соответствии с которыми строится методика разноуровневого обучения. Практическая значимость материалов состоит в возможности составления методических рекомендаций к отбору или конструированию прикладных задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боровская Е.А. Методическое пособие. Решение прикладных задач по математике для обучающихся очной и заочной форм обучения среднего профессионального образования. – Бахчисарай: БКСАиД, 2019. – 31 с.

2. Буркова Е.Г., Леонов В.В. Методические рекомендации по решению задач практической части предпрофессионального экзамена для педагогов. Практические ситуационные задачи (технологическое, исследовательское, конструкторское направление). – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2019. – 21 с.

3. Сапегин В.А., Смыковская Т.К. Разноуровневые тестовые задания по теме «Иррациональные уравнения с параметрами» // Обзор педагогических исследований. – 2023. – Том 5. № 6. – С. 152 – 157.

4. Терешин Н.А. Прикладная направленность школьного курса математики: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1990. – 96 с.

5. Тойбазаров Д. Б., Тажиев М., Токанов М. М. Проблемы использования прикладных задач в обучении студентов - математиков // Вестник КазНацЖенПУ. – 2020. – №3. – URL: https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-ispolzovaniya-prikladnyh-zadach-v-obuchenii-studentov-matematikov (дата обращения: 04.11.2023).

6. Фоминых Ю.Ф. Прикладные задачи по алгебре для 7-9 классов: кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1999. – 112 с.

7. Фридман Л.М., Турецкий Е.Н. Как научиться решать задачи: пособие для учащихся. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

8. Эрентраут Е.Н. Прикладные задачи математического анализа для школьников: Учебное пособие. – Челябинск: Изд-во ЧГПУ, 2004. – 119 с.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2024

Рукопись принята к печати 27.03.2024

УДК 37.013

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЦИФРОВЫХ ИНСТРУМЕНТОВ НА УРОКЕ МАТЕМАТИКИ КАК СРЕДСТВО ПОВЫШЕНИЯ КАЧЕСТВА ЗНАНИЙ

Старикова Наталия Валерьевна
МОУ ГСОШ, г. Калязин
E-mail: natali.starikova.80@mail.ru

Ключевые слова: *цифровизация образования, цифровые технологии, информационные технологии.*

Аннотация. В работе рассматриваются различные цифровые инструменты и их применение на уроках математики. Данная работа создана с целью обобщения педагогического опыта и формирования развития цифровых навыков использования цифровых инструментов на уроках математики.

Цифровизация образования открывает новые возможности для раскрытия интеллектуального и творческого потенциала современных учеников. Как показывает практика, продуманное внедрение цифровых образовательных ресурсов в процесс обучения позволяет дополнять и сочетать традиционные приемы и методы преподавания. Современные технологии позволяют объективно оценивать качество знаний и результаты образовательной деятельности каждого обучающегося с учетом индивидуальных особенностей.

Цифровизация – это вызов современности. Сейчас как никогда необходимо совершенствовать образовательный контент, развивать компьютерную грамотность и цифровые навыки, повышать познавательную мотивацию учащихся и уровень самообразования педагогов.

Нельзя не заметить, что школьный мир постепенно изменяется: стали привычными электронные дневники, интерактивные доски, компьютеры, планшеты, … Всё это техническое многообразие с одной стороны помогает педагогическому сообществу, с другой – создает новые вызовы. Эпоха цифровизации требует от педагогов, формирования новых методик обучения, поиска оптимального баланса цифрового и классического образования. Сам процесс обучения становится гораздо шире.

Чем больше цифровые технологии проникают в школьную жизнь, тем активнее мы должны стараться следовать этим тенденциям.

Учитель должен умело варьировать различными инструментами: создавать обучающие викторины, квесты, делать наглядные презентации, скидывать в «облако» материалы урока, быть доступным в соцсетях и мессенджерах и т.д.

Актуальность заключается ещё и в том, что использование цифровых инструментов – одно из условий эффективной работы учителя математики: их применение на уроках в сочетании с традиционными методами обучения, повышает качество усвоения учащимися нового материала, предоставляет широчайшие возможности для создания разнообразных заданий по математике в традиционной и инновационной формах. Теперь рабочие программы содержат указания на возможность использования электронных образовательных ресурсов (ЭОР). Согласно обновленному ФГОС учителям рекомендуется применять ЭОР и цифровые образовательные ресурсы (ЦОР). Рассмотрим некоторые примеры.

Информационные технологии открывают возможности вариативности учебной деятельности, ее индивидуализации и дифференциации и позволяют по-новому организовать взаимодействие учителя и ученика, построить образовательную систему, в которой ребенок становится активным и равноправным участником образовательной деятельности.

С целью повышения познавательного интереса предлагаю учащимся посмотреть видеоуроки «Академии занимательных наук» [2], в которых профессора Круглов и Разумник, в компании с хомяками по имени Синус и Циркуль, увлеченно рассказывают школьникам о мерах площади, дробях, теореме Пифагора и факториалах. В плейлисте, посвященном математике, 72 сюжета, продолжительность каждого занятия – 12-13 минут.

Высказывание физика Петра Капицы «Наука должна быть веселая, увлекательная и простая» цитирую тем ученикам, которые считают, что математика скучная наука и рекомендую посмотреть видео проекта GetAClass [3] — образовательного ресурса по физике и математике для школьников и учителей.

На платформе Stepik для 5-классников подойдут комплексы уроков с разборами олимпиадных заданий и лекторий, 7-9-классникам — комплексы уроков от педагогов, задавшихся целью подготовить подростков к ОГЭ. Для старшеклассников предлагаются бесплатные пакеты видеоуроков с материалами, актуальными для ЕГЭ, и разборами олимпиадных задач. Эта платформа – находка для тех, кто готов учится самостоятельно. Каждую неделю открывается новый модуль. В модуле есть лекции и задания. За задания даются очки, при получении определенного количества очков выдается сертификат о прохождении, а если очков набралось еще больше, то сертификат с отличием.

Стремительный рост внимания к короткометражному видеоконтенту. Этот метод предполагает, что обучающий контент будет преподноситься учащимся в виде коротких, легко усваиваемых руководств или мини-уроков. Они будут сосредоточены на повторении одних и тех же материалов с целью их лучшего удержания в памяти. Так, например, шестиклассники сами нашли видео способа приведения обыкновенных дробей к общему знаменателю «методом бабочки», а девятиклассников при подготовке к ОГЭ заинтересовало видео нахождения площади фигур с помощью формулы Пика. В рамках внеурочной деятельности учащимися созданы видеопроекты «Учим правила действий с разными знаками», «Раскрой скобки правильно». «Ура! Уравнение!».

Еще одним цифровым инструментом для учителя стало онлайн-тестирование. Педагогический опыт показывает, что в сочетании с другими видами проверки и коррекции знаний учащихся, использование тестовых заданий является весьма эффективным способом оценки знаний, стимулирующим подготовку учащихся к каждому уроку и повышающим мотивацию к изучаемому предмету. Здесь можно создавать собственные интерактивные тесты, используя программные оболочки [4] или воспользоваться готовыми разработками.

Широкие возможности для организации работы обучающихся на уроках и дома предоставляет «Опросникум» Академии Минпросвещения России. В одном кабинете этой платформы собраны различные цифровые инструменты, которые помогут создать рабочий лист или тест [5], провести опрос или викторину, разработать кроссворд или анкету. Сервис сдаёт возможность проводить мониторинг и анализ учебного прогресса учеников, взаимодействовать с родителями или с коллегами.

Целесообразно использование цифровых образовательных ресурсов при подготовке к государственной итоговой аттестации по математике. Прежде всего знакомлю учащихся с открытым банком заданий на сайте ФИПИ [6]. Это бесценный помощник при подготовке к экзаменам. Новый банк заданий возможно использовать и на уроках: вводить на сайте ответы и мгновенно получать обратную связь для заданий первой части, отмечать статусом решённые и нерешённые задания, при помощи фильтра производить отбор заданий по темам.

Подготовка к ОГЭ по математике с использованием ИКТ, безусловно, кропотливая, требующая тщательной подборки разнообразного материала работа, но она становится творческим процессом, который дает возможность интегрировать знания в инновационном формате. А зрелищность, насыщенность, новшество компьютерных элементов урока в сочетании с иными методическими приемами позволяют сделать занятие необыкновенным, интересным, незабываемым.

Как и прежде актуален интерес к одаренным детям. В урочной деятельности развивать математические способности помогают разноуровневые домашние задания, индивидуальные карточки, занимательные задачи, задачи повышенной сложности, загадки, ребусы, кроссворды. Важнейшим средством развития одаренности ребенка является проведение предметных олимпиад. Олимпиада развивает у школьников интерес к предмету, знакомит с нетрадиционными заданиями и вопросами, пробуждает желание работать с дополнительной литературой, формирует навыки самостоятельной работы, помогает раскрыть творческий потенциал.

Для приобщения как можно более широкого круга учащихся к занятиям математикой рекомендую участвовать в дистанционных олимпиадах, проводимых на онлайн платформах «Учи.ру», «Яндекс-Учебник», «Skysmart».

В настоящее время онлайн занятия остаются востребованным форматом обучения. Качественное проведение таких уроков позволяет организовать платформа «СФЕРУМ». К видеоконференции, запущенной учителем, может присоединиться 100 участников, ограничений по времени ее проведения нет. В меню видеоурока – чат звонка, возможность "поднять руку" (учитель получит соответствующее уведомление и включит микрофон этого ученика), демонстрация экрана и др. Видеоуроки можно использовать в повседневной образовательной деятельности, например, когда один или несколько учеников не могут физически присутствовать в школе в связи с болезнью или по иным причинам. Трансляция урока позволит им не только не пропустить изучение материала, но и активно участвовать в работе: отвечать на вопросы учителя, задавать свои, выполнять с одноклассниками групповые задания. Индивидуальные и групповые онлайн занятия актуальны при работе с одаренными детьми: подготовка к олимпиадам и конкурсам, консультирование по решению заданий повышенного уровня.

Способствуют повышению качества знаний по математике и сервисы по созданию интерактивных рабочих листов (ИРЛ). На мой взгляд, ИРЛ позволит решить проблему обучения детей, пропускающих занятия по болезни. Главное, чтобы целью работы учащегося с листом было не только запоминание или повторение конкретного учебного материала, но и овладение новым способом действий. В этом случае интерактивные учебные материалы помогут поддержать процесс обучения при отсутствии ребёнка в классе и помочь ему достичь положительных результатов по изучаемым темам. Так можно организовать учебную деятельность учащихся при помощи облачных технологий и веб-инструментов.

ИРЛ – инструмент, который содействует решению дидактических задач математики, повышает мотивацию учебной деятельности, прививает навыки самостоятельной работы над учебным материалом, способствует развитию критического мышления.

При использовании интерактивных рабочих листов определены два важных правила:

1) при разработке ИРЛ необходимо чётко сформулировать инструкцию по выполнению заданий, учитывая особенности детей и изучаемой ими темы.

2) использовать электронные листы необходимо дозированно.

Выполняя всего два правила применения цифрового инструмента, возможно не только повысить интерес к изучаемому предмету, но и развить у учащихся навыки самостоятельной познавательной деятельности.

Настоящий «цифровой» учитель использует технологии не потому что надо, а потому что не может не использовать. Ему самому это нравится.

Если преподаватель любит свой предмет, это обычно происходит само собой, поскольку ему важно заинтересовать им своих учеников, и он находится в постоянном поиске новых методик и возможностей. А на этом пути рано или поздно он обязательно придет к применению технологий.

Грамотное использование цифровых инструментов при обучении математике позволит не только усилить деятельностную, но и повысить мотивационную и познавательную составляющие урок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287 "Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования" (garant.ru) https://www.garant.ru/products/ipo/prime/doc/401333920/

2. Академии занимательных наук [Электронный ресурс]. –Режим доступа: URL: https://academianauk.ruplayers.com/ (Дата обращения: 21.02.2024)

3. Семейство образовательно-просветительских проектов GetAClass [Электронный ресурс]. –Режим доступа: URL: https://www.getaclass.ru/ (Дата обращения: 21.02.2024)

4. Конструктор тестов Online Test Pad Тест «Треугольник. Равнобедренный треугольник» [Электронный ресурс]. –Режим доступа: URL: https://onlinetestpad.com/axwcdqh66hyzi (Дата обращения: 23.02.2024)

5. «Опросникум» Академии Минпросвещения России Тест «Геометрическая прогрессия» [Электронный ресурс]. –Режим доступа: URL: https://quick.apkpro.ru/poll/53502 (Дата обращения: 23.02.2024)

6. ФИПИ Открытый банк заданий ОГЭ [Электронный ресурс]. –Режим доступа: URL: https://oge.fipi.ru/bank/index.php?crproj=BD98FF424631BFE24D6010A4B1266CA8 (Дата обращения: 23.02.2024)

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 004.421.2

АЛГОРИТМ МИНИМАКС НА ПРИМЕРЕ ИГРЫ «КРЕСТИКИ-НОЛИКИ»

Тишина Елена Валерьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

***Ключевые слова**: алгоритм minimax, алгоритмы ИИ, минимаксный алгоритм, рекурсивный алгоритм, игра крестики-нолики.*

Аннотация. В статье рассматривается алгоритм *minimax*. Данный алгоритм часто используется в играх с искусственным интеллектом. Такие как шахматы, шашки, крестики-нолики и различные игры для двух игроков. Этот алгоритм вычисляет минимаксное решение для текущего состояния системы. Рассмотрим минимаксный алгоритм и его простую реализацию на языке Python.

Минимакс – это алгоритм принятия решений, предложенный в 1945 г. О. Моргенштерном (O. Morgenstern) и Дж. фон Нейманом (J. von Neumann). Используется в задачах искусственного интеллекта, теории принятия решений, теории игр.

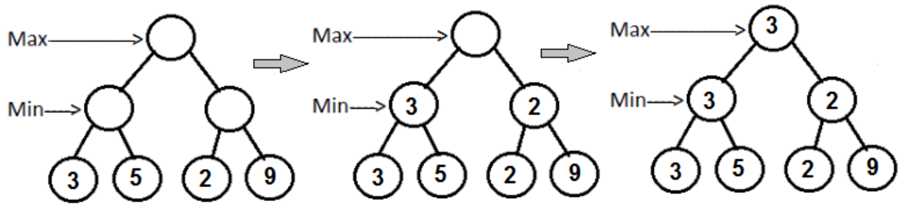
Является одним из примеров класса задач состязательного поиска. Состязательный поиск отличается тем, что он включает в себя противостояние двух игроков. Оба игрока имеют всю полную и доступную им информацию о состоянии игры, и все, что является преимуществом для одного, становится потерей преимущества для другого, каждый игрок пытается достичь противоположной цели. Никакое сотрудничество невозможно. Для решения состязательных задач необходимо предвидеть, понять и нейтрализовать действия противника. К примерам таких задач можно отнести пошаговые игры для двух игроков, такие как «Крестики-нолики», шашки и др. где игроки по очереди делают ходы, изменяя состояние среды в соответствии со своими целями. При этом все сценарии изменения среды определяются набором правил, включая описания условий завершения игры и достижения победы. Также этот алгоритм применяется для решения задач 19-20-21 ЕГЭ по информатике.

Минимакс обозначает стратегию принятия решений, где игроки стремятся минимизировать максимально возможные потери. Минимаксный алгоритм является основой для принятия решений в играх с двумя игроками, где один игрок стремится максимизировать свою выгоду, а другой - минимизировать потери. Правило минимакса позволяет каждому игроку просчитать последствия своих ходов и ходов соперника до конечного состояния игры и выбрать оптимальную стратегию, максимизирующую свои шансы на успех.

Работа минимаксного алгоритма основана на построении дерева игры, в котором каждый узел представляет собой возможное состояние игры, а ребра – возможные ходы игроков. Дерево иллюстрирует все возможные варианты развития игры. Алгоритм, основан на возврате, исследует все варианты ходов путем просмотра каждого возможного варианта, прежде чем принять окончательное решение. Алгоритм начинает свою работу с корня дерева игры и рекурсивно проходит через все узлы дерева, оценивая каждое состояние игры с помощью оценочной функции. Для листьев дерева (терминальных состояний игры) функция оценки присваивает числовое значение, отражающее выигрыш или проигрыш игрока.

В процессе обхода дерева алгоритм принимает решения на основе двух основных принципов:

1. Максимизация: если алгоритм находится в узле, представляющем ход максимизирующего игрока, то выбирается ход, который максимизирует оценку узла.
2. Минимизация: если алгоритм находится в узле, представляющем ход минимизирующего игрока, то выбирается ход, который минимизирует оценку узла.



Максимизатор начинает с корневого узла и выбирает ход с максимальным значением. Однако только листья будут содержат конечные оценки, поэтому алгоритм должен рекурсивно спуститься до «листовых» узлов. Затем перемещаясь по дереву игры обратно вверх, выбрать оптимальные ходы в зависимости от роли игрока (максимизатор или минимизатор). И продолжая рекурсивно оценивать узлы, вернуть оптимальный ход и его оценку. В данном примере, несмотря на то, что в правом поддереве есть значение «9», минимизатор никогда его не выберет, поскольку алгоритм предполагает, что противник играет оптимально. В данном случае максимизатор выберет значение «3» как оптимальное. Следовательно, оптимальным ходом для максимизатора будет пойти «налево», а оптимальным значением будет «3».

Таким образом, минимаксный алгоритм позволяет находить оптимальные стратегии игры для обоих игроков в условиях полной информации о состоянии игры и возможных ходах.

Рассмотрим работу минимаксного алгоритма на примере игры в крестики-нолики. Один из игроков играет крестиками «X», второй – ноликами «0». Чтобы выиграть, игроку нужно создать ряд из своих меток по горизонтали, вертикали или диагонали. Учитывая эту информацию, разработаем стратегию для второго игрока после хода первого: Первый игрок ставит крестик «X» в любую клетку поля 3x3. Намечаем, куда можем поставить метку «0». Это можно сделать в одну из оставшихся 8 клетках и оцениваем ситуацию, чтобы определить, выиграли мы или проиграли. Если это неясно, создаем новые ветки дерева, последовательно перебирая расположение крестиков «X» и ноликов «0», и каждый раз оценивая позицию. Повторяем этот процесс до тех пор, пока все ячейки не будут заполнены, создавая множество ветвей. Для каждой ветви, где мы выигрываем, задаём определенное количество очков, например «+1», а для каждой ветки, где мы проигрываем, задаём отрицательное число, например «-1», для «ничьи» выставляем «0». После подсчёта очков для всех 8 стартовых ячеек мы выбираем ячейку с наибольшим количеством очков за наш ответный ход и ставим там метку «0».

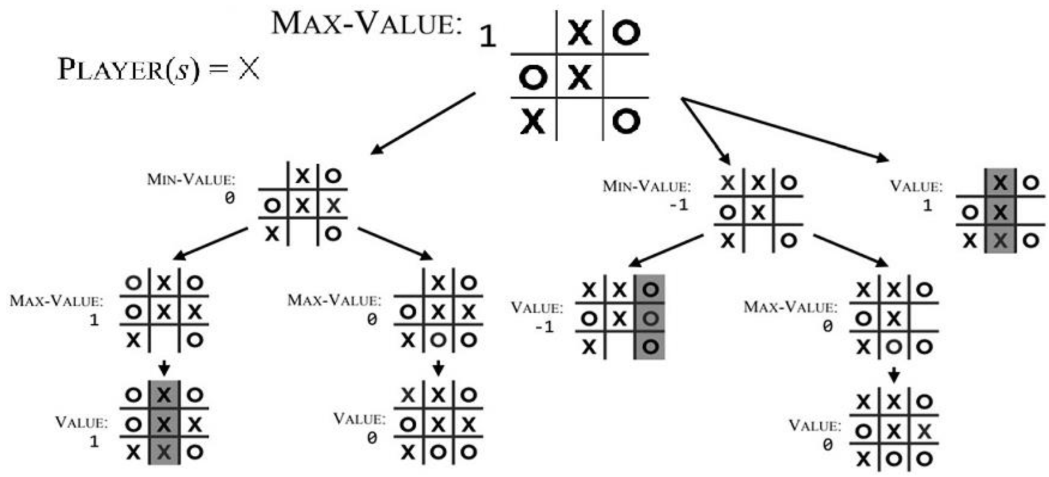


Рисунок со страницы cs50.harvard.edu/ai/2024/notes/0, демонстрирующий один из возможных ходов в игре крестики-нолики.

Из-за простоты игры крестики-нолики ее часто используют как методический пример обучения концепциям алгоритмизации и программирования студентам и школьникам. А также для обучения следующим умениям и навыкам: Алгоритмическое мышление: разбиение сложных проблем на более мелкие, управляемые части и разработка пошаговых процедур для их решения. Структуры данных: использование массивов, деревьев для хранения и управления игровыми данными, такими как игровое поле, ходы игроков и история игры. Алгоритмы поиска: реализация алгоритма минимакс для оценки игровых состояний и поиска оптимального хода (для улучшения и усложнения можно добавить альфа-бета-отсечение). Объектно-ориентированное программирование (ООП): организация кода в объекты и классы, инкапсуляция данных и поведения. Динамическое программирование: разбиение задачи на более мелкие подзадачи. Эвристика: использование эвристических функций для оценки значения состояния игры или направления поиска к более перспективным областям дерева игры.

```
# Простая реализация игры "Крестики-нолики"
class TicTacToe:
    # Начальное состояние игры
    def __init__(this):
        this.board = [0] * 9
        this.current_player = None
        this.number_of_moves = 0

    def make_move(this, cell):
        if this.board[cell] == 0:
            this.board[cell] = this.current_player
            this.number_of_moves += 1
            return True
        return False

    def change_player(this):
        if this.current_player == None or this.current_player == 2:
            this.current_player = 1
        else:
            this.current_player = 2

    def is_winner(this, player): #выигрышные комбинации
        winning_combos = [[0, 1, 2], [3, 4, 5], [6, 7, 8],
                          [0, 3, 6], [1, 4, 7], [2, 5, 8],
                          [0, 4, 8], [2, 4, 6]]
        for combo in winning_combos:
            if all(this.board[i] == player for i in combo):
                return True
        return False

    # проверки завершения игры
    def is_board_full(this):
        return all(cell != 0 for cell in this.board)

    # Получить все возможные позиции для хода игрока
    def possible_moves(this):
      action = [pos for pos in range(len(this.board)) if this.board[pos] == 0]
      return action

    # отображение доски
    def print_board(this):
        for i in range(3):
            print(f"{this.board[i*3]:2} {this.board[i*3+1]:2} {this.board[i*3+2]:2}")
        print()

# Ход человека
```

```
def human_move(env):
    while True:
        human_move = int(input("Введите номер ячейки (от 1 до 9): ")) - 1
        if env.make_move(human_move):
            break
        else:
            print("Ячейка занята. Попробуйте еще раз.")

# Рандомный ход модели
def model_move_random(env):
   print(f"{env.current_player} игрок:", end ='')
   action = random.choice(env.possible_moves())
   env.make_move(action)
   print(f" {env.number_of_moves} ход, {action} позиция")
   env.print_board()

#Рекурсивный минимаксный алгоритм для новой сетки
def minimax_value(env, player_AI, player):
    if env.is_winner(player_AI):
        return 1, None
    if env.is_winner(player):
        return -1, None
    if env.is_board_full():
        return 0, None

    moves = env.possible_moves()
    env_next = [None] * len(moves)
    next_move = [None] * len(moves)
    for move in range(len(moves)):
        env_next[move] = copy.deepcopy(env)
        env_next[move].make_move(moves[move])
        env_next[move].change_player()
        next_move[move] = minimax_value(env_next[move], player_AI,
player)[0]

    if env.current_player == player_AI:
        return max(next_move), moves[next_move.index(max(next_move))]
    return min(next_move), moves[next_move.index(min(next_move))]

# Запуск хода минимаксного алгоритма
def model_move_minimax(env, player_AI, player):
   print(f"{env.current_player} игрок:", end ='')
   action = minimax_value(env, player_AI, player)[1]
   env.make_move(action)
   print(f" {env.number_of_moves} ход, {action} позиция")
   env.print_board()
```

```
  env = TicTacToe()
winner = None
env.print_board()
while True:
    env.change_player()  # первый игрок
    model_move_minimax(env, 1,2)
    if env.is_winner(env.current_player):
        winner = env.current_player
        break
    if env.is_board_full():
        break

    env.change_player() # второй игрок
    model_move_minimax(env, 2,1) #model_move_random(env)
    if env.is_winner(env.current_player):
        winner = env.current_player
        break
    if env.is_board_full():
        break

print(f"Игра завершена на {env.number_of_moves} ходу.")
if winner == None:
    print("Ничья.")
else:
    print(f"Победил {'первый' if winner == 1 else 'второй'} игрок.")
```

Данная программа представляет простую реализацию игры "Крестики-нолики" и включает в себя следующие элементы:

1. Класс TicTacToe, который представляет игровое поле и логику игры. В классе определены методы для выполнения хода, смены игрока, определения победителя, проверки заполненности поля и вывода текущего состояния игрового поля.
2. Функции human_move и model_move_random отвечают соответственно за ход человека и за случайный ход модели.
3. Функция minimax_value, реализующая минимаксный алгоритм для определения оптимального хода модели. Алгоритм рекурсивно оценивает все возможные ходы до достижения конечного состояния игры и выбирает оптимальный ход для модели.
4. Функция model_move_minimax запускает минимаксный алгоритм.
5. Основной игровой цикл содержится в цикле while True. Здесь происходит смена ходов между моделью и игроком (человеком или другой моделью), вызов функций для выполнения ходов и проверка условий завершения игры.

Программа запускает игру "Крестики-нолики" между моделью (играющей минимаксным алгоритмом) и самой собой. По завершении игры программа определяет победителя или объявляет ничью.

Современные методы в сочетании с современными вычислительными возможностями позволяют создавать искусственных соперников, которые мастерски играют в классические игры подобного типа. Минимаксный алгоритм является мощным инструментом для принятия решений в играх и других областях, где необходимо учитывать действия оппонента. Его применение позволяет находить оптимальные стратегии и прогнозировать возможные исходы игры, что делает его важным инструментом в различных областях искусственного интеллекта и теории принятия решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гарднер, М., Крестики-нолики: пер. с англ. / М. Гарднер. - Москва: Мир, 1988. – 352 с.
2. CS50's Introduction to Artificial Intelligence with Python, Гарвардский университет [Электронный ресурс]. URL: cs50.harvard.edu/ai/2024/notes/0 (дата обращения: 20.03.2024).
3. Общие ресурсы по алгоритмизации и программированию URL: https://www.geeksforgeeks.org/minimax-algorithm-in-game-theory-set-1-introduction/?ref=lbp (дата обращения: 20.03.2024).

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 371.3

СОВРЕМЕННАЯ ПРАКТИКА КАК ChatGPT ИСПОЛЬЗОВАТЬ В ШКОЛЕ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

Харинова Галина Вячеславовна
МОУ Гимназия № 12 г. Твери, г. Тверь
E-mail: HGW.72@mail.ru

Ключевые слова: *ChatGPT, нейросеть, современный, урок, задания урока, формы получения знания, самообразование, образовательные инструменты.*

Аннотация. В работе рассматриваются рекомендации, которые помогут учителю при подготовке учащихся к самостоятельным, контрольным, диагностическим и итоговым работам, зачетам и итоговой аттестации. Использование предложенных примеров даст возможность преподавателю развить творческий потенциал ребенка, выявить пробелы в усвоении учебного материала и повысить мотивацию учащихся, а учителю использовать современный инструментарий.

Каждый из нас, и те, кто только работает в школе, и те, кто отдал ей не один десяток лет, задает себе вопрос: в чем суть профессии учителя, чем притягивает эта внешне вроде бы однообразная работа? Вопрос этот из ряда «вечных», и каждый отвечает на него по-своему. Сейчас, когда у меня уже 25 лет педагогического стажа, я ответила бы так: ни с чем не сравнимое чувство видеть, как формируется личность ученика, как склоняется его голова, над твоими заданиями, как горят глаза, когда все отлично получается и как вспыхивает вопрос, если что-то пошло не так. Совершенно волшебная возможность видеть невидимое для многих – процесс взросления, становления и развития нового человека. И я, учитель, не просто причастна к этой тайне, от меня зависят и направление, и скорость, и сам характер этого самого сложного и ответственного процесса.

Развитие искусственного интеллекта продолжается семимильными шагами, и недавно на его основе был разработан чат-бот ChatGPT, который стал очень популярным. Многие учащиеся активно используют ChatGPT в образовании, например, в выполнении домашних работ, в написании проектов, программ на языке программирования, при создании презентаций и т.п. А преподаватели активно задаются вопросом как ученикам не перейти грань в использовании такого помощника.

Что такое ChatGPT. ChatGPT — это уникальный чат-бот на основе искусственного интеллекта, который был разработан компанией OpenAI в ноябре 2022 года. Разработчики утверждают, что этому чат-боту можно доверять такие задачи, как решение математических уравнений, написание компьютерного кода, стихов и даже дипломных работ. Он также способен вести диалог и даже спорить с пользователем.

Можно придумать множество заданий, которые не позволят школьникам привлекать к решению искусственный интеллект. А можно взять искусственный интеллект на вооружение и с его помощью научить мальчишек и девчонок новому, а то и облегчить себе работу. Попробуем сегодня идти не против времени, а в ногу с ним.

Какие возможности есть у ChatGPT? ChatGPT представляет собой универсальную нейросеть, которая может решать множество задач, в том числе:

- Искать и исправлять ошибки в коде, предлагать решения и переводить исходный код на другие языки программирования.
- Отвечать на сложные вопросы лучше, чем поисковик Google, благодаря многолетнему обучению;
- Написание уникальных стихов и текстов песен на основе множества произведений разных жанров, заложенных в ИИ ChatGPT.

Например, по программе 6 класса, есть такое задание составить синквейн по заданным правилам. Одно из заданий опиши себя в синквейне. А вот как опишет искусственный интеллект современного шестиклассника:

Шестиклассник
Умный, целеустремленный
Учится, изучает, растет
Интересы и мечты
Впереди ждёт успех.

- Создание текстов, сочинений, подборки аргументов для анализа ситуаций, составление планов, дискуссии, творческих мероприятий.

Например, в 9 классе есть такое задание: Кто сильнее человек или компьютер? Дома учеником пишется небольшое эссе. Каждый высказывает свою точку зрения. Очень важно научить ребенка думать, сравнивать анализировать, проводить сравнения. Конфуций писал «Всё познаётся в сравнении». Но умеем ли мы сравнивать и сравниваем ли мы эффективно? Насколько истинны результаты нашего сравнения? Ведь у самого сравнения есть цель (зачем мы сравниваем) и результатом сравнения становится принятие решение. Чтобы сделанные нами на основе сравнения выводы и принятое решение не были ошибочным, мы должны получить глубокие значимые и истинные результаты сравнения. А проверяем так:

- что сильнее человек или компьютер:

  - Вычислительная мощность: Компьютеры обладают намного большей вычислительной мощностью и скоростью обработки данных, чем человек.

  - Точность: Компьютеры могут выполнять сложные вычисления с высокой точностью, в то время как человек может допустить ошибки из-за усталости или невнимательности.

  - Память: Компьютеры могут запоминать и хранить огромные объемы информации, в то время как память человека ограничена.

  - Скорость реакции: Компьютеры могут мгновенно реагировать на изменения и команды, в то время как реакция человека может быть замедленной.

- Безошибочность: Компьютеры работают безошибочно, если правильно программированы, в то время как человек может допустить ошибки из-за недосмотра или неправильного принятия решений.

- почему человек лучше, чем компьютер:

  - Творческий подход: Человек способен мыслить творчески, находить нестандартные решения и применять интуицию, что компьютеры не могут делать.

  - Способность к адаптации: Человек способен быстро адаптироваться к новым ситуациям, изменениям и нестандартным условиям, в то время как компьютеры требуют точных инструкций.

  - Эмоциональный интеллект: Человек обладает эмоциональным интеллектом, способностью понимать и учитывать чувства других людей, что компьютеры не могут сделать.

  - Креативность: Человек способен создавать искусство, музыку, литературу, что является проявлением креативности, в то время как компьютеры могут только выполнять заданные им задачи.

  - Этика и мораль: Человек обладает способностью морального и этического мышления, что позволяет ему принимать сложные решения, учитывая последствия для других людей и окружающей среды, в то время как компьютеры действуют по программе без учета моральных аспектов.

Чем не повод для дискуссии. Есть что обсудить и о чем поспорить. Плавно переходим на ступеньки развития человека, как успешной личности в современном информационном мире.

Еще пример: 9 класс, задание: составить облако тегов по теме - современная информатика: плюсы и минусы информационного общества:

- Искусственный интеллект.
- Большие данные.
- Кибербезопасность.
- Алгоритмы.
- Программирование.
- Интернет вещей.
- Облачные вычисления.
- Робототехника.
- Виртуальная реальность.
- Машинное обучение.

Еще пример: в 7 классе - изучаем возможности онлайн графических редакторов.

- Строим фракталы.
- Украшаем граффити наш кабинет информатики.
- Пишем истории о добром искусственном интеллекте и нашем будущем.

- Еще пример: 9 класс, тема Глобальная сеть Интернет и стратегии безопасного поведения в ней. Формируем в процессе дискуссии, правила безопасного поведения в интернет-пространстве:
    - Рассказываем об основных моментах защиты при использовании сетевых сервисов.
    - Обсуждаем типичные угрозы и риски, с которыми можно столкнуться в виртуальном пространстве.
    - Составляем советы по предотвращению негативных ситуаций в глобальной паутине. Знакомимся с принципами сетевого этикета.
- Пример постановки задач для исполнителя РОБОТ при выполнении индивидуальных проектов в любой среде исполнителей, для учащихся 6 классов:
    - Используя робота, создайте макет замка с открывающимся и закрывающимся воротами.
    - Задайте роботу задачу построить мост из разноцветных блоков, способный выдержать вес игрушечной нарисованной машинки.
    - Попросите робота построить маятник, который будет демонстрировать законы физики движения.
    - Придумайте кубик Рубика на плоскости и дайте задание роботу расставить кубики по цветам.
    - Предложите задачу роботу собрать и украсить робота-подругу из квадратов-деталей.
    - Создайте лабиринт из закрашенных клеток и попросите робота найти выход, составьте программу.
    - Подготовьте задание для робота по постройке мини-парка аттракционов.
    - Проведите соревнование для роботов на скорость исполнения заданий по постройке конструкций или преодолению препятствий.

Предложенные примеры заданий должны вдохновлять детей к обучению, стимулировать использование новых возможностей в саморазвитии и развитии. Учителя не должны бояться применять нейросети, а скорее стать наставниками школьников в уникальном мире образования и раскрытия их творческого потенциала. Важно, чтобы они помогали учащимся расширять границы образовательных инструментов.

Подводя итог, хотелось бы еще раз подчеркнуть, что нейросети не призваны заменять человека в процессе обучения, а должны стать удобным инструментом, который поможет всему человечеству обучаться более эффективно и увлекательно. Предложенные методы станут помощником в достижении этих целей. Потому очень важно, чтобы образовательная система научила новое поколение верно использовать нейросети, вместо того чтобы запрещать или опасаться их использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шелкова С.Н. Учимся думать [Электронный ресурс]// Формирование познавательных универсальных умений школьников: обучение сравнению 01.02.2014 URL: https://monitoringofintellect.blogspot.com/2014/02/blog-post.html

2. Корякова К.А., Судакова О.В Нейросети как новые инструменты в образовании [Электронный ресурс]// URL: https://www.sgu.ru/sites/default/files/textdocsfiles/2023/12/12/koryakova_k.a.pdf (дата обращения: 08.03.2024)

3. Беломедведев Г. Новые уроки [Электронный ресурс]//Правила безопасности в Интернете— классный час 04.08.2023 URL: https://newuroki.net/wp-content/uploads/2023/08/Pravila-bezopasnosti-v-Internete-klassnyj-chas-9-klass.pdf

4. Запросы для чата сформированы на сайте [Электронный ресурс]// URL: https://web.telegram.org/k/#@chatsgpts_bot(дата обращения: 15.03.2024, 22.03.2024,25.03.2024)

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2024

Рукопись принята к печати 30.03.2024

УДК 517.977.5, 519.857

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ СИНТЕЗ ДЛЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цирулёва Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *дискретная задача оптимального управления метод динамического программирования, схема Беллмана, управление синтез.*

Аннотация. В работе рассматривается применение метода динамического программирования для дискретной задачи оптимального управления и алгоритм реализации схемы Беллмана, позволяющий построить как программное управление, так и управление синтез.

Еще лет десять назад проблема построения синтеза оптимального управления вызывала трудности, связанные с недостатком оперативной памяти и низкой скоростью выполнения операций на компьютере. Но во многих приложениях в качестве решения задачи требуется получать не программное управление, которое можно построить с помощью необходимых условий оптимальности – Принципа максимума и метода множителей Лагранжа [1], [2], [3], а синтез, так как он позволяет осуществлять коррекцию оптимальной траектории при неучтенных внешних воздействиях на систему. Возросшие возможности современных компьютеров делают проблему синтеза решаемой более точно и за приемлемое время, и поэтому она становится актуальной.

Постановка дискретной задачи оптимального управления [3], [4]. Пусть задан многошаговый процесс, состояние которого на каждом шаге описывается фазовым вектором $x^i = \left(x_1^i, \dots, x_n^i\right)$, $i = 1, \dots, q$. Пусть процесс таков, переход из состояния x^i на i шаге в состояние x^{i+1} на $i+1$ шаге зависит от некоторых параметров $u^i = \left(u_1^i, \dots, u_r^i\right)$, $u^i \in U^i$, $i = 0, \dots, q-1$ – векторов управлений и осуществляется по правилу, задаваемому отображением $x^{i+1} = F_i(x^i, u^i)$, $i = 0, \dots, q-1$, где $F_i: R^n \times R^r \to R^n$; $U^i, i = \overline{0, q-1}$ – заданные подмножества в R^r. Тогда если известно начальное состояние x^0 и выбраны управления на каждом шаге $u^0, u^1, \dots, u^{q-1}$ из допустимых множеств $u^i \in U^i$, $i = 0, \dots, q-1$, то согласно рекуррентным соотношениям можно последовательно найти все векторы x^i, $i = 0, \dots, q$, то есть построить набор векторов, который называется фазовой траекторией $[x] = (x^0, \dots, x^q)$. Наборы векторов $([x], [u]) \in R^{(q+1)n+qr}$, удовлетворяющие условиям, называются дискретным допустимым процессом.

Рассмотрим дискретную задачу оптимального управления вида

$$I([x],[u]) = \sum_{i=0}^{q-1} f_0^i(x^i, u^i) + \Phi^0(x^0) + \Phi(x^q) \to inf, \qquad (1)$$

$$x^{i+1} = F_i(x^i, u^i),\ i = 0, \dots, q-1, \tag{2}$$
$$x^0 \in X^0 \subset R^n, \tag{3}$$
$$x^i \in X^i \subset R^n, \quad i = 1, \dots, q, \tag{4}$$
$$u^i \in U^i \subset R^r,\ i = 0, \dots, q-1, \tag{5}$$

где функции f_0^i, F_i, Φ непрерывно дифференцируемы по совокупности аргументов. Ограничения типа (4) называются фазовыми, условие (3) – начальным, а (5) задают ограничение на управление.

Будем называть набор векторов управлений $[u]$ допустимым в задаче (1) – (5), если он удовлетворяет ограничениям (5) и для некоторого фиксированного $x^0 \in X^0$, построенный с помощью $[u]$ согласно соотношениям (2) набор векторов состояний $[x]$ удовлетворяет фазовым ограничениям на каждом шаге. Обозначим множество допустимых процессов через $U^0(x)$.

$$U^0(x) = \{[u] \big| [u] = (u^0, \dots, u^{q-1}), u^i \in U^i,\ i = \overline{0, q-1}, x^0 \in X^0,$$
$$x^{i+1} = F_i(x^i, u^i) \in X^{i+1}, i = \overline{0, q-1}\}.$$

Определение 1. Пусть управление $[u]$ допустимо, тогда набор векторов $[x] = (x^0, \dots, x^q)$, где $x^0 \in X^0$, $x^{i+1} = F_i(x^i, u^i)$ называется допустимой траекторией, соответствующей управлению $[u]$, а пара $([x],[u])$, состоящая из допустимых элементов, – допустимым процессом. Множество допустимых процессов обозначим через D.

Определение 2. Допустимый процесс $([\overline{x}],[\overline{u}])$ называется глобально оптимальным, если выполняется неравенство $I([\overline{x}],[\overline{u}]) \le I([x],[u])$ для всех $([x],[u]) \in D$.

Последовательность допустимых процессов $([x]_k,[u]_k) \in D$, $k = 0,1,\dots$ назовем минимизирующей последовательностью, если на этой последовательности минимизируемая функция стремится к своему минимальному значению:

$$\lim_{k\to\infty} I([x]_k,[u]_k) = \inf_{[x,u]\in D} I([x],[u]) = I^*,$$

где

$$[u]_k = (u_k^0, \dots, u_k^{q-1}) = (u_{1_k}^0, \dots, u_{r_k}^0, \dots, u_{1_k}^{q-1}, \dots, u_{r_k}^{q-1}),$$
$$[x]_k = (x_k^0, \dots, x_k^q) = (x_{1_k}^0, \dots, x_{n_k}^0, \dots, x_{1_k}^q, \dots, x_{n_k}^q).$$

В пространстве $R^n \times R^r$ введем множества D^i, $i = 0, \dots, q-1$ точек (x,u) следующим образом: $(x,u) \in D^i$, если существует допустимый процесс $([x],[u]) \in D$ такой, что $x^i = x$, $u^i = u$. Иными словами, D^i – множество векторов (x^i, u^i) допустимого процесса на i – ом шаге, $i = 0, \dots, q-1$. Через G_i, $i = 0, \dots, q-1$ обозначим множество всех точек $x^i \in X^i$, для которых существует хотя бы один вектор $u \in U^i$ такой, что $(x,u) \in D^i$. Иными словами $x \in G_i \in X^i$, если существует управление

$[u] \in U^0(x)$, переводящее с помощью рекуррентных соотношений точку $x^0 \in X^0$ в точку $x^i \in X^i$, а затем точку $x^i \in X^i$ в некоторую точку $x^q \in X^q$.

Предположим, что функции $f_0^i,\ F^i,\ \Phi^q,\ i = 0, \dots, q-1$ ограничены снизу в области определения. Если множества $X^0,\ U^i,\ i = 0, \dots, q-1$ ограничены и замкнуты, множество допустимых процессов $D \neq \emptyset$ и функции $f_0^i,\ F^i,\ \Phi^q,\ i = 0, \dots, q-1$ непрерывны по совокупности аргументов в области определения, то по теореме Вейерштрасса решение задачи существует. Действительно, все состояния x^i можно рассматривать как функции набора управлений $[u]$, $x^i = x^i([u])$ и начальной точки, поэтому минимизируемая функция зависит от набора управлений и начального состояния, то есть

$$I([x],[u]) = I(x^0,[u]),(6)$$

а непрерывная функция на замкнутом ограниченном множестве $X^0 \times U^0(x)$ достигает своей нижней грани.

Учитывая замечание (6), перепишем задачу в виде

$$I(x^0,[u]_0^{q-1}) = \sum_{i=0}^{q-1} f_0^i(x^i,u^i) + \Phi^q(x^q) \to inf, \qquad (7)$$

$$x^{i+1} = F_i(x^i,u^i),\ i = 0, \dots, q-1, \qquad (8)$$

$$x^0 \in X^0 \subset R^n, \qquad (9)$$

$$x^i \in X^i \subset R^n, \quad i = 1, \dots, q,$$
(10)

$$u^i \in U^i \subset R^r,\ i = 0, \dots, q-1,$$
(11)

где $[u]_0^{q-1} = (u^0, \dots, u^{q-1})$.

Наряду с задачей (7) – (11) рассмотрим семейство усеченных по отношению к ней задач, каждая из которых отличается от исходной тем, что в ней в качестве начальной точки рассматривается $x^k \in G_k$:

$$I(x^k,[u]_k^{q-1}) = \sum_{i=k}^{q-1} f_0^i(x^i,u^i) + \Phi^q(x^q) \to inf, \qquad (12)$$

$$x^{i+1} = F_i(x^i,u^i),\ i = 0, \dots, q-1, \qquad (13)$$

$$x^0 \in X^0 \subset R^n, \qquad (14)$$

$$x^i \in X^i \subset R^n, \quad i = 1, \dots, q, \qquad (15)$$

$$u^i \in U^i \subset R^r,\ i = 0, \dots, q-1, \qquad (16)$$

где $[u]_k^{q-1} = (u^k, \dots, u^{q-1})$.

Построим множества $U^k(x)$:

$$U^k(x) = \{[u] \big| [u] = (u^k, \dots, u^{q-1}), u^i \in U^i,\ i = \overline{k, q-1},$$
$$x^{i+1} = F_i(x^i,u^i) \in X^{i+1}, i = \overline{k, q-1}\},$$

тогда множества G_k можно определить как $G_k = \{x \in X^k\colon\ U^k(x) \neq 0\}$.

Функция

$$V_k(x) = \inf_{[u]_k^{q-1} \in U^k(x)} I_k(x, [u]_k^{q-1}) = \inf_{[u]_k^{q-1} \in U^k(x)} [\sum_{i=k}^{q-1} f_0^i(x^i, u^i) + \Phi(x^q)],$$

называется функцией Беллмана дискретной задачи оптимального управления.

Обозначим через $D^k(x)$ множество первых компонент допустимых управлений усеченной задачи, то есть

$$D^k(x) = \{u^k \in U^k | \exists u^{k+1} \in U^{k+1}, \dots, u^{q-1} \in U^{q-1}:$$
$$[u^k, u^{k+1}, \dots, u^{q-1}] \in U^k(x)\},$$

или $D^k(x) = \{u^k \in U^k \big| U^k(x) \neq 0\}$.

Теорема 1. (Принцип перехода). Если ни одно из множеств G_k, $k = 0, \dots, q$ не является пустым, то функция Беллмана удовлетворяет рекуррентным соотношениям, называемым уравнением Беллмана

$$V_k(x) = \inf_{u \in D^k(x)} [f_0^k(x, u) + V_{k+1}(F^k(x, u))], \quad x \in G_k,\ k = 0, \dots, q-1. \quad (18)$$

Для индекса $k = q$ оно имеет вид:

$$V_q(x) = \Phi^q(x),\ x \in G_q. \quad (19)$$

Теорема 2. (Принцип оптимальности). Пусть $([\overline{x}], [\overline{u}]_0^{q-1})$ – оптимальный процесс в (7) – (11),

$$I^* = I(\overline{x}^0, [\overline{u}]_0^{q-1}) = \inf_{\substack{x^0 \in G_0, \\ [u]_0^{q-1} \in D_0(x)}} I(x^0, [u]_0^{q-1}), \quad (20)$$

и $x^k \in G_k$ – некоторая точка оптимальной траектории $[\overline{x}]$, тогда управление $[\overline{u}]_k^{q-1}$ является оптимальным в усеченной задаче (12) – (16).

Конкретным выражением метода динамического программирования для дискретных управляемых процессов является схема Беллмана.

Алгоритм схемы Беллмана [3], [4]**.** Предположим, что в задаче (7) – (11) ограничения на управления заданы, т.е. множества $U_i \subset R,\ i = \overline{0, q-1}$.

В этом случае можно рассмотреть следующий алгоритм [5]**.**

Задаем разбиение:

а) отрезка времени $[t_0,\ t_1]$: $\Delta t = \frac{t_1 - t_0}{q},\ t_k = t_0 + k\Delta t,\ k = \overline{0, q}$;

б) ограничения по x, $X^k = [a \quad, b \quad]$: $\Delta x = \frac{b \quad - a}{s}$, $x^{k,j} = a \quad + j\Delta x \quad, j = \overline{0, s}$;

в) ограничения по u, $U^k = [u_{max}, u_{min}]$: $\Delta u = \frac{u_{max} - u_{min}}{m}$, $u^{k,n} = u_{min} +$ $+ n\Delta u, n = \overline{0, m}$.

Первый этап (по убывающему индексу)

1. Вычисляем значение функции Беллмана в точках терминального множества $X^q = G^q$; $V^q = \Phi(x^q)$, $\quad x^{q,i} = a + i\Delta x,\ i = \overline{0, s}$.

2. Начало цикла по $k = \overline{q-1,0}$. Полагаем $k = q - 1$.

3. Полагаем $notx = 0$ – число проколотых точек. Точку будем называть проколотой, если она не принадлежит множеству достижимости.

Организуем цикл по точкам множества X^k: $i = \overline{0, s}$. Полагаем $i = 0$.

4. Вычисляем координаты точки x^k: $x^{k,i} = a + i\Delta x,\ i = \overline{0, s}$.

5. Полагаем $notu := 0$ – число недопустимых управлений в точке $x^{k,i}$.

6. Организуем цикл по допустимым управлениям $u^n,\ n = \overline{0, m}$. $n = 0$.

7. Вычисляем управление по формуле $u^{k,n} = u_{min} + n$.

8. Вычисляем точку $x^{k+1} = F^k(x^{k,i}, u^{k,n})$ по формуле

$$x^{k+1} = f_k(x^{k,i}, u^{k,n})\Delta t + x^{k,i}.$$

9. Проверяем выполнение фазового ограничения

$$x^{k+1} \in X^{k+1} \left| \begin{array}{l} \text{да} \to \text{п. } 10 \\ \text{нет} \to notu := notu + 1 \to \text{п. } 14 \end{array} \right.$$

10. Находим ближайшую к x^{k+1} не проколотую точку $x^{k+1,i0}$ сетки X^{k+1}; если все ближайшие точки сетки являются проколотыми, то

$$notu := notu + 1 \to \text{п. } 14.$$

11.Вычисляем $f^n = f_0^k(x^{k,i}, u^{k,n}) + V^{k+1,i0}(x^{k+1,i0})$.

12. Находим $V^{k,i} = \min\limits_{n=\overline{o,m};\, u^n \neq z} f^n$.

13. Полагаем $u^{k,i} = \operatorname*{argmin}\limits_{n=\overline{o,m};\, u^n \neq z} f^n$.

14. Переходим к следующему шагу цикла по n, т.е. полагаем $n := n + 1$,

$$n \le m \quad \left| \begin{array}{l} \text{да} \to \text{п. } 7 \\ \text{нет} \to \text{п. } 15 \end{array} \right.$$

15. Проверяем, не является ли точка $x^{k,i}$проколотой:

$$notu = m + 1 \left| \begin{array}{l} \text{да} \to u^{k,i,j} := z, \quad z \notin U^k;\ notx := notx + 1 \to \text{п. } 16 \\ \text{нет} \to \text{п. } 16 \end{array} \right.$$

16. Переходим к следующей итерации цикла по i, т.е. полагаем $i := i + 1$,

$$i \le m \left| \begin{array}{l} \text{да} \to \text{п. } 4 \\ \text{нет} \to \text{п. } 17 \end{array} \right. .$$

17. Проверяем, все ли точки $x^{k,i}$ сетки X^k являются не проколотыми:

$$notx = s + 1 \left| \begin{array}{l} \text{да} \to \text{нет решений} \to \text{п. } 32 \\ \text{нет} \to \text{п. } 18 \end{array} \right.$$

18. Переходим к следующей итерации цикла по k, т.е. полагаем $k := k - 1$,

$$k \ge 0 \left| \begin{array}{l} \text{да} \to \text{п. } 3 \\ \text{нет} \to \text{п. } 19 \end{array} \right.$$

19. Получаем функцию Беллмана $V^{k,i}, k = \overline{0, q},\ i = \overline{0, s}$ и

$u^{k,i}, \quad k = \overline{0, q},\ i = \overline{0, s}$ – управление-синтез.

Второй этап

20. Находим ближайшую к x^0 не проколотую точку $x^{0,i0}$ сетки X^0; если все ближайшие точки сетки являются проколотыми, то нет решений и идти к п. 32, иначе идти к п. 21.

21. Вычисляем $V^{0,i0}\left(x^{0,i0}\right)$.

Третий этап (по возрастающему индексу)

Строим оптимальную траекторию и программное управление.

22. Полагаем $x^0 = \overline{x}^0$.

23. Организуем цикл по $k = \overline{0, q-1}$; полагаем $k = 0$.

24. Находим ближайшую к x^k не проколотую точку $x^{k,i0}$ сетки X^k; если все ближайшие точки сетки являются проколотыми, то нет решений и идти к п.32, иначе идти к п.25.

25. Определяем соответствующее точке x^k управление-синтез и полагаем $u^k = u^{k,i0}$.

26. Вычисляем $x^{k+1} = f_k(x^k, u^k)\Delta t + x^k$.

27. Переходим к следующему шаку цикла по k, т.е. полагаем $k := k+1$; $k \leq q-1$ $\left| \begin{array}{l} \text{да} \rightarrow \text{п. } 24 \\ \text{нет} \rightarrow \text{п. } 28 \end{array} \right.$.

28. Получаем оптимальную траекторию и программное управление, вычисляем искомое значение функционала по формуле:

$$I = \sum_{i=0}^{q-1} f_k^o(x^k, u^k)\, \Delta t.$$

29. Проверяем точность полученного решения:

$$\left| I - V^{0,i*}(x^{0,i*}) \right| \leq \varepsilon \ \left| \begin{array}{l} \text{да} \rightarrow \text{п. } 31 \\ \text{нет} \rightarrow \text{п. } 30 \end{array} \right. .$$

30. Для получения более точного решения увеличиваем число точек разбиения $q,\ s, m$ множеств $[t_0,\ t_1],\ X^k,\ U^k$: $s := 2s, m := 2m, q := 2q$; и идем на п. 0.

31. $[x],\ [u],\ I$ – решение задачи.

32. Конец алгоритма.

Отметим достоинства метода Беллмана.

1) Метод может быть использован для решения различных задач, в которых функции $f_0,\ f_i, i = \overline{1, n}$ являются линейными, квадратичными, тригонометрическими и др.
2) Метод позволяет относительно просто учитывать фазовые ограничения.
3) Найденное на I этапе оптимальное управление является синтезом. В отличие от программного управления, которое зависит только от момента времени t (шага k) и определено только для точек $\overline{x_k}$, $k = 0, \dots, q-1$, принадлежащих оптимальной траектории, синтезирующая функция управления $u^{k,i}$, $k = \overline{0, q},\ i = \overline{0, s}$ зависит от всех $t \in [t_0,\ t_1]$ и всех точек $x^k \in \bigcup_{k=0,\dots,q-1} D^k(x)$. Таким образом, решение уравнения Беллмана равносильно решению проблемы синтеза для задачи (7) – (11).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учеб. пособие. – М: Высшая школа, 2006. – 584 с.

2. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Вариационное исчисление и методы оптимизации: Учеб. пособие. – Оренбург-Тверь: ГОУ ОГУ, Твер. гос. ун-т, 2004. – 575 с. Издание переработанное, дополненное.

3. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Дискретная оптимизация: Учеб. пособие. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2004. – 281 с.

4. Андреева Е.А., Цирулева В.М. Численные методы решения экстремальных задач: Учеб. пособие – 2-е изд. – Тверь: Тверской филиал МЭСИ, 2004. – 311 с.

5. Рафальская Н.В., Цирулева В.М. Достаточные условия оптимальности в задаче, линейной по фазовым переменным, и в модели очистки водоема / Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь, Изд-во ТвГУ, 2001. С. 108 – 124.

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2024

Рукопись принята к печати 26.03.2024

УДК 004.424

ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ В АУДИТЕ БЕЗОПАСНОСТИ

Шалин Глеб Романович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: powerfulletafan@gmail.ru

Литышев Александр Николаевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: wwwq181@bk.ru

Ключевые слова: *искусственный интеллект, пентест, компьютерная безопасность.*

Аннотация. Материал собран для ознакомления с темой: «Искусственный интеллект в аудите безопасности». Также собранные сведения могут быть полезны для ознакомления с темой искусственного интеллекта в теме «Penetration test» в компьютерной безопасности.

Во время изучения, новых тем, связанных с компьютерной безопасностью, бывает сложно найти описание современной и востребованной технологии, в простом и доступном формате. Мы предоставляем необходимую информацию, чтобы читатель смог открыть для себя новую технологию для последующего изучения.

Доклад представляет введение в нейросети и машинное обучение, а затем переходит к основам пентеста (англ. pentest, сокр. от penetration test) и применению методов данной области. В рамках доклада будут рассмотрены этапы проведения пентеста, а также технологии, используемые специалистами во время тестирования на проникновение.

Нейронная сеть (искусственный интеллект). Нейронные сети и машинное обучение это две важные и перспективные области в современной науке и технологиях. Нейронные сети представляют собой математическую модель, вдохновленную работой человеческого мозга, которая используется для обработки информации и решения сложных задач. Они состоят из большого количества взаимосвязанных и взаимодействующих "нейронов", которые передают сигналы друг другу через веса, оптимизируемые в процессе обучения.

Машинное обучение, в свою очередь, является подразделением искусственного интеллекта, которое изучает алгоритмы и модели, способные обучаться на данных и делать прогнозы или принимать решения без явного программирования. Оно применяется в различных областях, таких как анализ данных, распознавание образов, обработка языка, автоматическое управление и другие.

Сочетание нейронных сетей и машинного обучения открывает широкие возможности для решения сложных задач, которые ранее были недостижимы. Они используются в реальном времени для обнаружения обмана в финансовых операциях, распознавания лиц и голоса, рекомендации товаров, обнаружения аномалий в сетевой безопасности и многих других приложениях.

Нейронные сети и машинное обучение представляют собой возможности и инструменты, которые могут привести к глубокой трансформации нашего мира.

Основы пентеста. Пентест (англ. pentest, сокр. от penetration test), представляет собой специфический процесс тестирования системы на наличие уязвимостей и оценку ее защищенности в условиях реальной атаки. Аудит с использованием пентеста является неотъемлемой частью современных стратегий информационной безопасности, поскольку позволяет выявить и скорректировать слабые места в защите информационных ресурсов организаций.

Основы пентеста

1. **Цели и классификация пентестов:**

- Исследовательский пентест: оценка уязвимостей системы без предварительной информации о ней, с целью полного разоблачения слабых мест.
- Целенаправленный пентест: основывается на конкретной информации о системе, с целью выявления уязвимостей и доказательства их эксплуатации.
- Внутренний пентест: проводится внутри самой организации, симулируя атаки от внутренних пользователей.
- Внешний пентест: проводится с внешней стороны, симулируя атаки от злоумышленников извне.

2. **Этапы пентеста**:

- Планирование и сбор информации: исследование целевой системы, определение ее особенностей, постановка целей и требований.
- Разведка: сбор информации о целевой системе, ее архитектуре, используемых технологиях и уязвимостях.
- Анализ уязвимостей: исследование целевой системы с использованием автоматизированных инструментов и моделирование атаки.
- Эксплуатация: проверка действительности уязвимостей путем их активного использования.
- Отчет и рекомендации: подготовка детального документа о найденных уязвимостях, причинах их возникновения и рекомендациях по устранению.

3. **Методы и техники пентеста**:

- Сканирование сети: исследование сетевой инфраструктуры для обнаружения активных хостов, открытых портов и служб.
- «Уязвимостный сканинг»: автоматизированное сканирование целевой системы с использованием специальных инструментов для выявления уязвимостей.

- Социальная инженерия: использование манипулирования межличностными отношениями и доверия, с целью получения доступа к информации или системам.

- Эксплойты и обходы: использование известных уязвимостей и методов обхода защитных механизмов для получения несанкционированного доступа к системе.

- Последующая эксплуатация: использование полученного несанкционированного доступа для демонстрации уязвимости и получения дополнительной информации.

Пентестирование является неотъемлемой частью стратегии информационной безопасности и позволяет организациям выявить и исправить слабые места в их системах защиты. Знание основ пентеста позволяет проводить такие исследования эффективно и комплексно. Однако, следует помнить, что пентест должен проводиться только с согласия владельца системы и в рамках договоренных параметров.

Проведение пентеста. Проведение пентеста это специальный процесс, который выполняется с целью проверки уязвимостей и оценки безопасности информационной системы, сети или приложения. Обычно пентест проводится следующим образом:

Планирование и согласование. В начале процесса пентеста определяются цели и объем проверки, а также согласовываются все необходимые договоренности и разрешения с владельцами системы или сети.

Разведка. В этой фазе пентестер собирает информацию о целевой системе или сети. Он анализирует открытые порты, сетевую инфраструктуру, службы и системы, а также идентифицирует потенциальные цели для атаки.

Анализ уязвимостей. В этой фазе пентестер проводит сканирование и тестирование уязвимостей, чтобы определить слабые места системы или сети. Он может использовать автоматизированные инструменты или выполнять ручные проверки, чтобы найти уязвимости, например, неправильные настройки безопасности, уязвимые версии программного обеспечения или неисправности в коде.

Эксплуатация уязвимостей: если пентестер обнаружил уязвимость, он может попытаться эксплуатировать ее, чтобы получить несанкционированный доступ к системе или сети. Это позволяет проверить, насколько система устойчива к реальным атакам.

Пост-эксплуатация и анализ данных: после успешной эксплуатации уязвимости, пентестер анализирует полученные данные и информацию, чтобы оценить влияние и потенциальные последствия таких атак. Это позволяет разработать рекомендации по устранению обнаруженных проблем и повышению безопасности системы или сети.

Подготовка отчета: в завершении процесса пентеста, пентестер составляет подробный отчет, в котором описываются все обнаруженные уязвимости, результаты атак и предлагаемые рекомендации по устранению проблем.

Отчет может содержать также рекомендации по повышению безопасности и обучению персонала.

Важно отметить, что проведение пентеста должно осуществляться только с согласия владельцев системы или сети и должно быть выполнено квалифицированными специалистами, чтобы избежать нанесения ущерба или нарушения конфиденциальности данных. После завершения пентеста рекомендуется разработать детальный отчет о выявленных уязвимостях и предложениях по их устранению для дальнейшего повышения уровня безопасности. Команда, проводящая пентест, должна обладать не только техническими навыками, но и этичностью, чтобы соблюдать принципы конфиденциальности и законности в процессе тестирования. После анализа результатов пентеста, необходимо принять меры по устранению обнаруженных уязвимостей и регулярно повторять тестирование для поддержания высокого уровня безопасности. Важно обеспечить конфиденциальность полученной информации и обсудить с владельцами системы или сети дальнейшие шаги по улучшению безопасности. Проведение пентеста является важным этапом в обеспечении информационной безопасности и требует профессионального подхода для эффективного выявления и устранения уязвимостей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. "Machine Learning Yearning"от Andrew Ng, 2017

2. Статья Deep Exploit - Fully Automatic Pentest[Машинное обучение] [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://codeby.net/threads/deep-exploit-fully-automatic-pentest-mashinnoe-obuchenie.63759/
(последнее обращение 23.03.2024 г.)

3. Penetration test [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://en.wikipedia.org/wiki/Penetration_test (последнее обращение 23.03.2024 г.).

4.DeepExploit–Полностью автоматический инструмент для испытания на проникновение с использованием машинного обучения. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://itsecforu.ru/2018/06/20/deep-exploit-полностью-автоматический-инструм/ (последнее обращение 23.03.2024 г.).

5. Машинное обучение для компьютерной безопасности" – новые методы защиты [Электронный ресурс]. Режим доступа: Машинное обучение в безопасности (последнее обращение 23.03.2024 г.).

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2024

Рукопись принята к печати 26.03.2024

УДК 519.862.6

МЕТОДЫ ЭКСПЕРТНЫХ КОММУНИКАЦИЙ

Шапель Денис Александрович
НИИ «Центрпрограммсистем», г. Тверь
E-mail: shapel@cps.tver.ru

Лощенков Валерий Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: codenamenoon@gmail.com

Ключевые слова: *децентрализованное управление, коммуникативный подход, модель знаний, транзакционный подход.*

Аннотация. В работе рассматриваются коммуникативные взаимодействия субъектов, рассматриваемых как абстракции в информационно-управляющей системе, реализованные в виде моделей, запросов, параметров и качества передачи данных.

Естественные науки и математические дисциплины, пожалуй, больше других, в разные времена балансировали на разных уровнях образования, между усложнением и упрощением массового преподавания. Большая потребность в инженерно-технических кадрах порождала массовость и полноту подачи сложного материала, усреднение требований к выпускникам– уменьшение объёма преподавания и сложности изучаемых вопросов.

Текущие социальные и экономические реалии, казалось бы, продуцируют массовую пользовательскую грамотность, но, кажется, жизнь продемонстрировала нам очередную злую шутку или парадокс: повсеместно «квалифицированные пользователи» не становятся компьютерно грамотными, не становятся специалистами в области информационных технологий, не становятся программистами, и уж тем более на становятся алгоритмистами или математиками. Кажется даже, что они становятся менее грамотными в целом [1], доверясь спеллчекеру и LLM, а кто-то – исключительно голосовым сообщениям, потому что на слух ошибки не так заметны. Самое интересное, что за ними и массовые коммуникационные машины и сервисы, прежде всего поисковые машины, ориентируются на обесцененные «массовые запросы». И это становится проблемой сильнее популярного потокового телевещания в своё время. Сами алгоритмы и статистические методы взяты в плен таргетологами-аналитиками, а Учителем года смело можно считать не до конца обученный, но неограниченно распространённый «GPT предыдущей версии» [2].

Однако, растёт и мастерство специалистов, преподавателей. ИКТ обеспечили хорошие прорывы в прикладной и фундаментальной естественной науке, математика не стала исключением. Существенный толчок в преподавании математических дисциплин могут дать новые подходы, обеспечивающие новые возможности, например:

- применение виртуальных лабораторий и компьютерного моделирования, что позволяет студентам исследовать математические модели и принципы в интерактивной среде, помогает лучше понять и визуализировать сложные концепции. Талантливо, профессионально реализованная визуализация математических понятий и абстракций не хуже хорошего учебника позволит сэкономить месяцы и годы разъяснений;

- адаптивное преподавание сложных вопросов в более раннем возрасте, игровые сценарии освоения ряда математических дисциплин;

- групповую и совместную деятельность, когда задействуются другие каналы коммуникаций, нежели те, что используются при шаблонном, стандартном образовательном подходе.

Взаимодействие в группах и решение проблем разными по уровню информированности субъектами позволяет не просто осуществить прямую передачу знаний, но и передать контекст, метазнание, образ решения задач.

Такое взаимодействие наилучшим образом раскрывается при взаимодействии с экспертами [3]. Обладая собственными характеристиками и психофизиологическими особенностями, субъекты коммуникации реализуют интерактивный диалог как способ познания, осуществляемый в формах совместной деятельности, т.е. моделирование ситуаций; оценку проведенных действий; создание реальной атмосферы коллективного разрешения проблем. И это крайне важно именно для практикоориентированности преподавания математических дисциплин.

Если принять обучающихся как объекты/субъекты информатизации [4] или системы управления, то можно рассмотреть несколько абстракций, такие как модель знаний субъекта, механизм обновления и уточнения запросов [5], корректировку моделей.

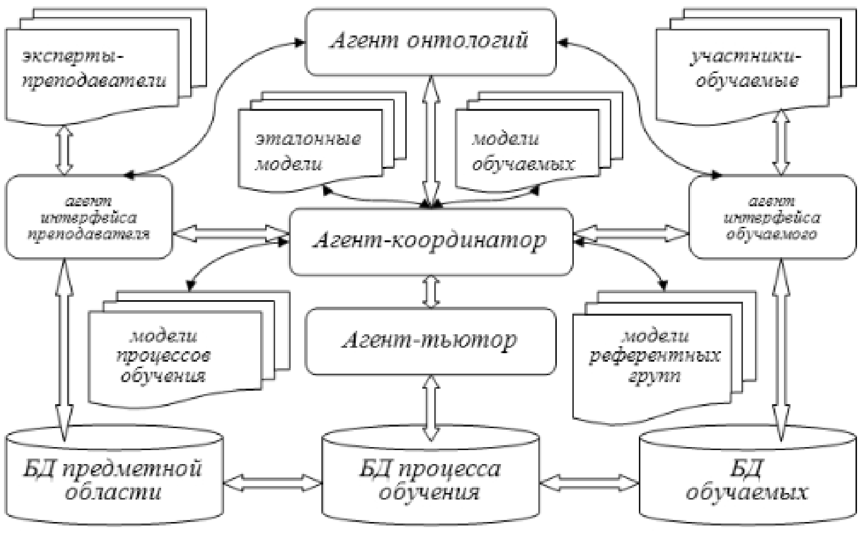


Рис. 1. Структура адаптивной информационной обучающей системы [7]

При этом, механизмы организации и контроля деятельности включают ряд инструментов, процедур и методов, обеспечивающих эффективность такого подхода [6]. На основе моделей обучающихся [8] и моделей референтных групп появляется возможность генерировать процесс обучения и координировать ролевые обязанности в групповом учебном проекте, а также поддерживать активную обратную связь участников проекта с преподавателем-экспертом.

Рассматривая **обеспечение понимания**, как одну из задач коммуникации, можно говорить о стратегии, направленной на уменьшение препятствий [9], затрудняющих осуществление этой своего рода «сделки» – достижения адекватного понимания, ведущего к успешному общению с партнером по коммуникации [10].

Учитывая нынешний межкультурный контекст и гибридизацию коммуникаций, можно рассмотреть коммуникационный акт как транзакцию, проведение которой требует определенных затратных ресурсов. Очевидно, что чем меньше эти издержки, тем эффективнее сделка. Со стороны отправителя сообщения – это затраты на подготовку и предоставление информации в определенной форме получателю – партнеру по коммуникации, со стороны которого тоже требуются затраты на получение информации и ее обработку. Используя аналогию подписки на услуги, можно довольно точно оперировать понятиями микроплатежей, а также качества обслуживания, которое в данном контексте становится мерой оптимизируемых величин, таких как производительность передающей системы, отражая качество передачи и доступность услуг. Применив теорию рядов, мы получаем возможность, придавать показателям значения по осям, оперировать историей значений и другими понятиями. Придавая значениям по x абсолютные величины, а значениям по y – временной шкалы и/или времени синхронизации значений, мы можем реализовать все условия для обеспечения принятой «сделки». С этой точки зрения каждый отдельно взятый участник описывается как входной или исходящий поток ресурсов, баланс, время синхронизации и т.д. Данная абстракция позволяет в любой момент времени произвести синхронизацию находящихся у участника ресурсов и понять, что и кому поступает.

В классическом случае финансирования подобной «сделки», получатель никогда не может быть уверен в исполнении требований в полном объеме, а с точки зрения исполнителя зачастую невозможно определить точную платежеспособность заказчика, а также его исполнительность. Предлагаемый метод обеспечивает получателю дополнительный контроль над расходованием средств на исполнение. Это также обеспечит уверенность исполнителю, так как предполагается, что как только исполнитель приступает к работе, получатель открывает «подписку» на него.

Если рассматривать специалиста в качестве элемента производственной системы предприятия, то процесс извлечения новых идей и знаний при формировании модели знаний специалиста можно рассматривать как активную систему с неоднородными агентами со встречным способом сообщения информации и активным воздействием центра в форме запросов для получения рефлексивных оценок и позволяет обеспечить взаимодействие университетов и организации при управлении их интеллектуальным капиталом.

Таким образом, одним из важных инструментов в математическом образовании видится групповая проектная работа с применением информационно-обучающих систем. Использование такого подхода обеспечивает не просто точность, параметризацию и в целом, адаптивность учебного процесса, но и позволяет получать значительную дополнительную эффективность за счёт экспертной коммуникационности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Селезнева В.С. Экспертная система как инструментарий метаязыковой коммуникации // Russian Linguistic Bulletin 2023 № 8 (44) https://doi.org/10.18454/RULB.2023.44.14

2. Космарский А.А., Картавцев В.В., Подорванюк Н.Ю., Боде М.М. Трайбы и транспарентность: перспективы цифровых механизмов самоорганизации в российской науке // Мониторинг общественного мнения: Экономические и социальные перемены. 2019. № 6. С. 65—90. https://doi.org/10.14515/monitoring.2019.6.05.

3. Виноградов Г.П., Кузнецов В.Н. Самоорганизующиеся экспертные среды в образовательных проектах // Открытое образование 2018, №1, (Том 22), https://doi.org/10.21686/1818-4243-2018-1-38-47

4. Покровская Н.Н., Вэй Ф. Сетевая коммуникация цифровых инициативных действий как предмет социокультурной регуляции в условиях мобилизационной экономики // Журнал интегративных исследований культуры, 2023, № 1 (т.5), https://www.doi.org/10.33910/2687-1262-2023-5-1-17-24

5. Кравченко Ю.А., Бова В.В. Нечеткое моделирование разнородных знаний в интеллектуальных обучающих системах // Открытое образование 2013, №4.

6. Моисеева Т.В., Поляева Н.Ю. Инфокоммуникационная поддержка взаимодействия акторов в теории интерсубъективного управления // Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки. 2018; 45 (2): 158-170. DOI:10.21822/2073-6185-2018-45-2-158-170

7. Кравченко Ю.А. Интеграция свойств когнитивных стилей и интеллектуальных агентов как основа создания адаптивных информационных обучающих систем // Открытое образование 2010 №4.

8. Шапель Д.А. Управление моделью математических знаний обучающегося в электронной образовательной среде. Математические методы управления. сборник научных трудов. ТВГУ, 2021, с. 84-95;

9. Молчанова Г.Г. Когнитивная коммуникация и транзакционные подходы к устойчивым вербальным символам // Язык. Культура. Перевод. Коммуникация, Сборник научных трудов КДУ, 2018, выпуск 2;

10. Ибрагимов Н.Г. Специфика развития мобильных умений самоорганизации студента в интерактивной образовательной среде // Международный научно-исследовательский журнал ▪ № 6 (96) ▪ Часть 3

Рукопись поступила в редакцию 01.04.2024

Рукопись принята к печати 04.04.2024

УДК 004.853

ВОПРОСЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНОМ ПРОЦЕССЕ

Шевчук Елена Владимировна
Сибирский государственный университет геосистем и технологий, г. Новосибирск
E-mail: evshevch@mail.ru
Михайлова Анастасия Павловна
Сибирский государственный университет водного транспорта, г. Новосибирск
E-mail: ananas.tya@mail.ru
Пустовалов Евгений Евгеньевич
Сибирский государственный университет водного транспорта, г. Новосибирск
E-mail: moskowepic@gmail.com

Ключевые слова: информационные технологии, Компас-3D, NanoCAD, образовательный процесс

Аннотация. В статье рассматриваются частные вопросы применения систем автоматизированного проектирования в образовательном процессе технического вуза. Рассмотрены примеры и эффективность использования отечественных систем автоматизированного проектирования «Компас-3D» и «NanoCAD» в процессе обучения студентов первого курса.

Использование информационных технологий в учебном процессе – неотъемлемая часть современного образования, позволяющее сделать обучение практикоориентированным, а также развить в студентах самостоятельность и креативность [1].

Как показывает опыт, современные первокурсники достаточно легко осваивают и используют информационные технологии и системы, в том числе системы искусственного интеллекта и системы автоматизированного проектирования.

Анкетирование студентов технических специальностей/направлений показало, что 82% студентов самостоятельно осуществляют поиск и изучают современные средства информационных технологий, включая системы искусственного интеллекта (особенно нейросети), в процессе обучения с целью экономии времени, которое они тратят на «рутинные» (с их точки зрения) операции.

В связи с вышеизложенным, авторы считают, что в процессе проектирования образовательных программ всех технических специальностей/направлений целесообразно уже на первом курсе предусматривать наличие дисциплин, в рамках которых приобретаются умения и навыки работы в современных системах автоматизированного проектирования.

В современных технических ВУЗах применяется большое число компьютерных программ, используемых для проектирования различных объектов и устройств.

Одними из самых распространенных отечественных программ, применяемых образовательном процессе, являются «Компас-3D» и «NanoCAD».

Основные функции «Компас-3D»:

- возможность моделирования;
- возможность сборки конструкции из отдельных деталей и добавлять анимацию;
- возможность проектирования чертежей;
- возможность работы с файлами обменных форматов данных DXF, DWG, Step, Sat, IGES;
- настройка параметров моделей и чертежей;
- редактирование файлов в формате STL.

Преимущества работы в «Компас-3D»:

- простой интерфейс;
- наличие встроенной библиотеки;
- версия на русском языке;
- относительно доступная цена;
- наличие сервисного центра;
- возможность импорта и экспорта файлов в разных форматах[2,3].

Основные функции «NanoCAD»:

- позволяет устанавливать оптимальные размеры для элементов чертежа;
- наличие палитры инструментов для быстрого доступа к популярным командам или блокам, созданным самим пользователем;
- редактор таблиц предлагает множество удобных инструментов, напоминающих специализированные базы данных, и позволяет вставлять макросы или формулы в ячейки;
- возможность работы с внешними ссылками;
- возможность добавления, изменения и сохранения растровых изображений различных форматов;
- применение интеллектуальных размеров для сокращения времени оформления проектов и поддержания связи между элементами;
- наличие встроенной библиотеки фактур для создания реалистичных и детализированных моделей;
- возможность пакетной печати для одновременной печати нескольких проектов с индивидуальными настройками [4].

Преимущества работы в «NanoCAD»:

- простой интерфейс;
- версия на русском языке;
- относительно доступная цена;

- обладает широким набором инструментов для 2D и 3D моделирования;
- совместимость с AutoCAD;
- возможность оптимизации для работы на компьютерах с низкой производительностью.

Примеры работ студентов первого курса технических специальностей/направлений, успешно выполненных в компьютерных программах «Компас-3D» и «NanoCAD», приведены на рис. 1 – 5.

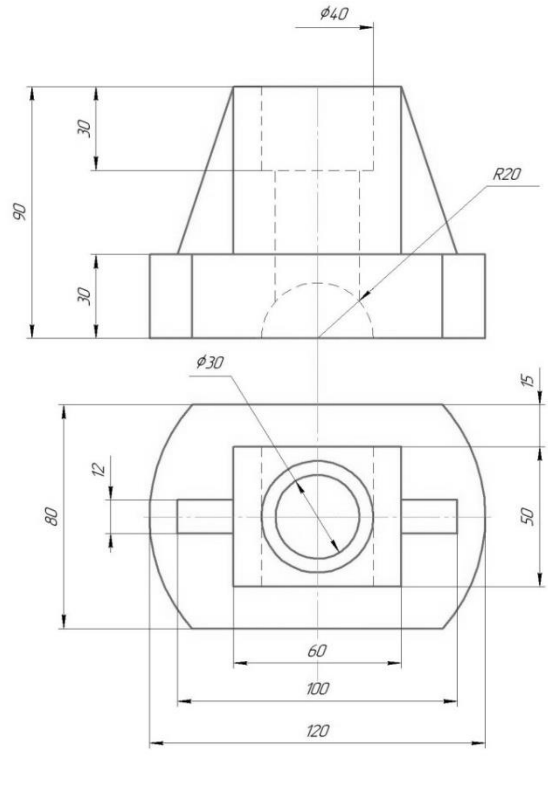


Рис. 1. Деталь 1 Компас-3D

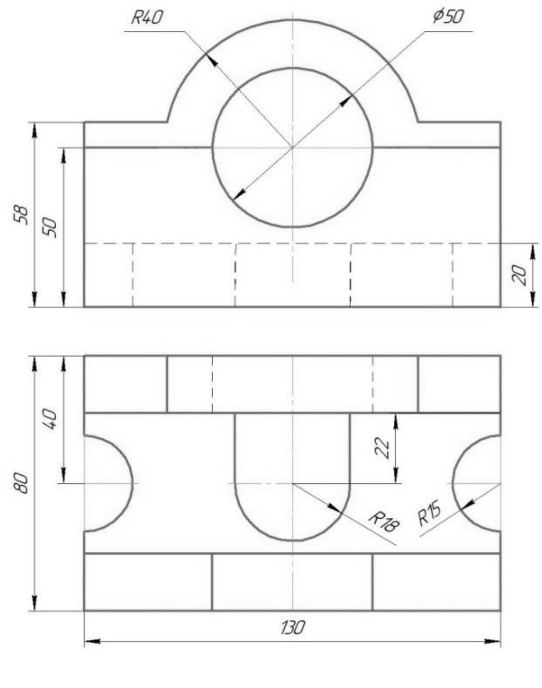


Рис. 2. Деталь 2 Компас-3D

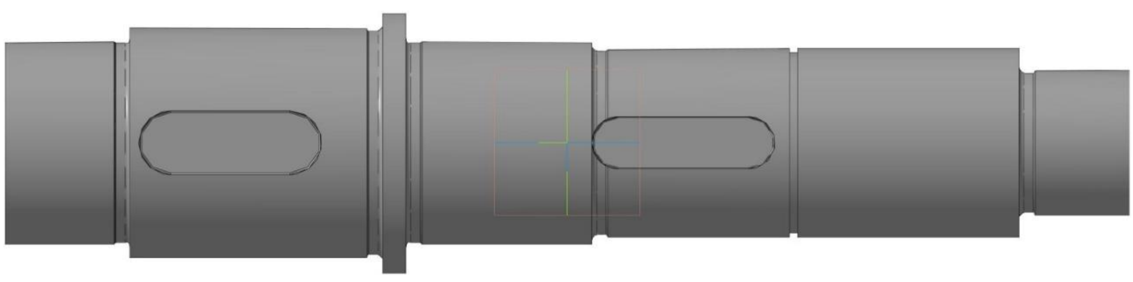


Рис. 3. Деталь 3 Компас-3D

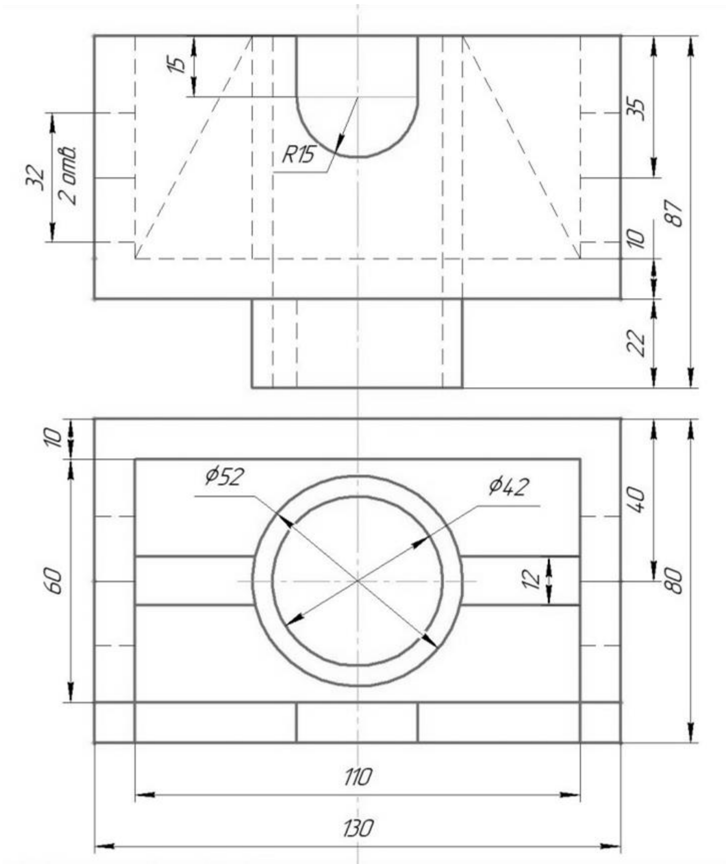


Рис. 4. Деталь 4 Компас-3D

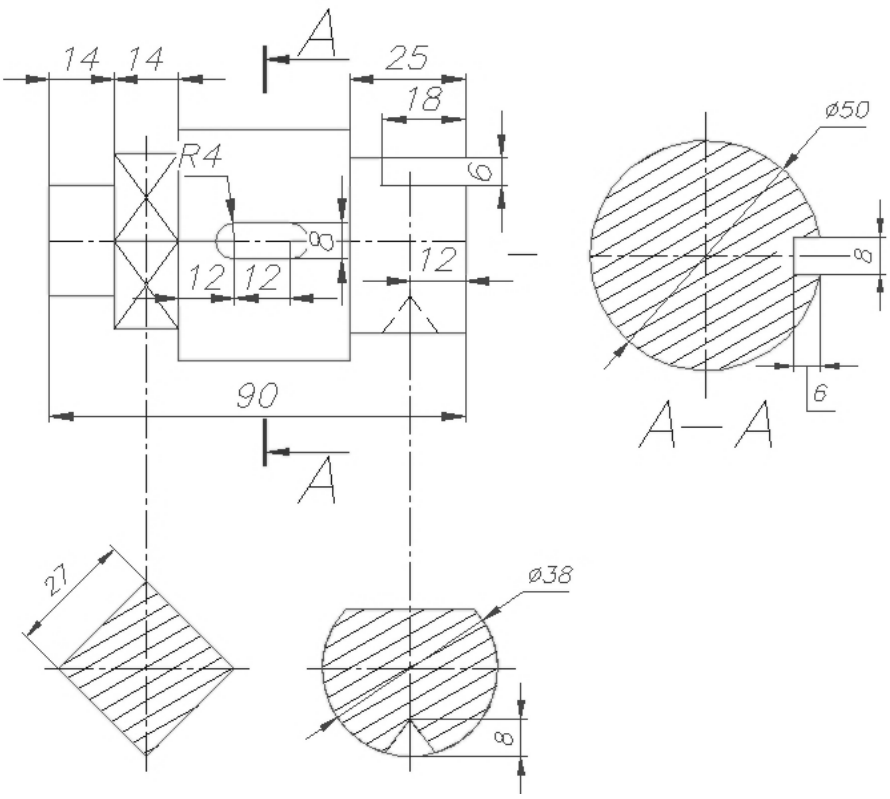


Рис. 5. Деталь 1 NanoCAD

С учетом вышеизложенного в качестве выводов можно отметить следующее:

- современные студенты первого курса готовы к изучению и использованию в учебном процессе современных информационных технологий и систем;
- внедрение средств компьютерного моделирования проектирования в процесс обучения будущих инженеров значительно сокращает время, затрачиваемое студентами на моделирование, разработку конструкций, что позволяет оптимизировать объем и структуру соответствующей дисциплины, и методику проведения лабораторных/практических занятий;
- навыки применения современных отечественных систем автоматизированного проектирования, полученные студентами в рамках освоения образовательных программ на первом курсе, в дальнейшем будут использоваться при изучении профильных дисциплин, в процессе реализации практической подготовки при конструировании изделий и проектировании технологических процессов на производстве, а также в рамках курсового и дипломного проектирования, повышая эффективность образовательной деятельности.

Вышеизложенное в совокупности позволяет сделать вывод о том, что проектирование образовательных программ технических вузов с обеспечением изучения современных отечественных систем автоматизированного проектирования начиная с первого курса поспособствует усилению конкурентоспособности образовательной программы и повышению качества образовательного процесса в целом [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Троицкая Е. А., Артюшина Л. А. Информационные технологии в учебном процессе. : учеб. пособие / Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. Владимир : Изд-во ВлГУ, 2020. 166 с.
2. КОМПАС-3D Home – профессиональная САПР для дома и хобби. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://habr.com/ru/companies/ascon/articles/351490/ (последнее обращение 18.03.2024 г.).
3. Самсонов В. В., Красильникова Г.А. Автоматизация конструкторских работ в среде Компас-3D. Москва : Academia, 2016. 224 с.
4. Полещук Н. Н. Путь к nanoCAD. СПб.: БХВ-Петербург, 2017. 365 с.
5. Иванова Н.А., Архипова И.И. Информационные технологии и образовательный процесс // Журнал прикладных исследований. 2023. №7. С. 152-157.

Рукопись поступила в редакцию 06.03.2024

Рукопись принята к печати 08.03.2024

УДК 517.95, 533

ОБ ОДНОМ ТОЖДЕСТВЕ В ГАЗОВОЙ ДИНАМИКЕ

Шеретов Юрий Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *система Эйлера, тождество в газовой динамике.*

Аннотация. Доказано новое тождество, которому подчиняются макропараметры идеального политропного газа. Это тождество позволяет легко установить известный факт эквивалентности двух различных записей системы Эйлера на классе непрерывно дифференцируемых функций.

Классическая система Эйлера [1, 2] в газовой динамике без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{u}) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + div(\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \nabla p = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon\right)\right] + div\left[\rho \vec{u}\left(\frac{\vec{u}^2}{2} + \varepsilon + \frac{p}{\rho}\right)\right] = 0. \qquad (3)$$

Дополним ее уравнениями состояния совершенного газа

$$p = \rho RT, \qquad \varepsilon = c_v T = \frac{p}{\rho(\gamma - 1)}, \qquad s = c_v \ln\left(\frac{RT}{\rho^{(\gamma-1)}}\right) + s_0. \qquad (4)$$

Здесь R − газовая постоянная,

$$c_v = \frac{R}{\gamma - 1}, \qquad c_p = \frac{\gamma R}{\gamma - 1} \qquad (5)$$

– удельные теплоемкости при постоянном объеме и давлении соответственно, $\gamma = c_p / c_v$ – показатель адиабаты, s_0 – произвольная постоянная. Неизвестными функциями в (1.1) – (1.4) являются плотность $\rho = \rho(\vec{x}, t) > 0$, скорость $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давление $p = p(\vec{x}, t) > 0$. Температура $T = T(\vec{x}, t) > 0$, удельная внутренняя энергия $\varepsilon = \varepsilon(\vec{x}, t) > 0$ и удельная энтропия $s = s(\vec{x}, t)$ могут быть найдены с помощью соотношений (4). Скорость звука в газе определим по формуле Лапласа

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\gamma RT}\,. \qquad (6)$$

Из (4) следует, что для макропараметров газа выполняется тождество Гиббса

$$Tds = d\varepsilon + pd\left(\frac{1}{\rho}\right). \qquad (7)$$

Теорема 1. *Пусть на множестве* $V\times\lfloor 0,\ T_f\rfloor$, *где* V *– область в* $R^3_{\vec{x}}$, T_f *– заданное положительное число, определены непрерывно дифференцируемые функции* $\rho=\rho(\vec{x},t)>0$, $p=p(\vec{x},t)>0$, $T=T(\vec{x},t)>0$, $\varepsilon=\varepsilon(\vec{x},t)>0$ *и* $s=s(\vec{x},t)$, *подчиняющиеся уравнениям состояния (4). Кроме того, задано векторное поле* $\vec{u}=\vec{u}(\vec{x},t)$ *класса гладкости* $C^1(V\times\lfloor 0,\ T_f\rfloor)$. *Тогда для всех* $(\vec{x},t)\in V\times\lfloor 0,\ T_f\rfloor$
справедливо равенство

$$\frac{p}{\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\vec{u})\right)^2+\frac{1}{\rho\varepsilon}\left(\rho\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\rho(\vec{u}\cdot\nabla)\varepsilon+pdiv\vec{u}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\rho c_s^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)p+\rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2+\frac{\rho T}{c_p}\left(\frac{\partial s}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla)s\right)^2. \qquad (8)$$

Доказательство. Введем дифференциальный оператор

$$D=\frac{\partial}{\partial t}+(\vec{u}\cdot\nabla) \qquad (9)$$

и представим (8) в виде

$$\frac{p}{\rho^2}\left(D\rho+\rho div\vec{u}\right)^2+\frac{1}{\rho\varepsilon}\left(\rho D\varepsilon+pdiv\vec{u}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\rho c_s^2}\left(Dp+\rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2+\frac{\rho T}{c_p}\left(Ds\right)^2. \qquad (10)$$

Раскрывая в (9) квадраты суммы двух слагаемых, получим

$$\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2+2\frac{p}{\rho}(D\rho)div\vec{u}+p\left(div\vec{u}\right)^2+$$

$$+\frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2+2\frac{p}{\varepsilon}(D\varepsilon)div\vec{u}+\frac{p^2}{\rho\varepsilon}\left(div\vec{u}\right)^2=$$

$$=\frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2+2(Dp)div\vec{u}+\rho c_s^2\left(div\vec{u}\right)^2+\frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2. \qquad (11)$$

Представим (10) в эквивалентном виде

$$\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2+\frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2=\frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2+\frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2+$$

$$+2\left(Dp-\frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon-\frac{p}{\rho}D\rho\right)div\vec{u}+\left(\rho c_s^2-\frac{p^2}{\rho\varepsilon}-p\right)\left(div\vec{u}\right)^2. \qquad (12)$$

Так как

$$Dp-\frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon-\frac{p}{\rho}D\rho=(\gamma-1)D(\rho\varepsilon)-\frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon-\frac{p}{\rho}D\rho=$$

$$=(\gamma-1)\rho D\varepsilon+(\gamma-1)\varepsilon D\rho-\frac{p}{\varepsilon}D\varepsilon-\frac{p}{\rho}D\rho=$$

$$= \frac{p}{\varepsilon} D\varepsilon + \frac{p}{\rho} D\rho - \frac{p}{\varepsilon} D\varepsilon - \frac{p}{\rho} D\rho = 0, \qquad (13)$$

$$\rho c_s^2 - \frac{p^2}{\rho\varepsilon} - p = \rho\left(\frac{\gamma p}{\rho}\right) - (\gamma - 1)p - p = 0, \qquad (14)$$

соотношение (12) можно записать следующим образом:

$$\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2 = \frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2 + \frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2. \qquad (15)$$

При проведении выкладок (13), (14) были использованы второе уравнение состояния (4) и формула Лапласа (6).
Преобразуем первое слагаемое в правой части (15):

$$\frac{1}{\rho c_s^2}(Dp)^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}(D(\rho\varepsilon))^2 = \frac{(\gamma-1)^2}{\rho c_s^2}(\rho D\varepsilon + \varepsilon D\rho)^2 =$$

$$\frac{(\gamma-1)^2\varepsilon^2}{\rho c_s^2}(D\rho)^2 + \frac{(\gamma-1)^2\rho}{c_s^2}(D\varepsilon)^2 + 2\frac{(\gamma-1)^2\varepsilon}{c_s^2}(D\rho)D\varepsilon =$$

$$= \frac{p}{\gamma\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\rho}{\varepsilon}(D\varepsilon)^2 + 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \qquad (16)$$

Из тождества Гиббса (7) следует, что

$$TDs = D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho. \qquad (17)$$

Принимая во внимание (17), преобразуем второе слагаемое в правой части (15):

$$\frac{\rho T}{c_p}(Ds)^2 = \frac{\rho}{c_p T}(TDs)^2 = \frac{\rho}{c_p T}\left(D\varepsilon - \frac{p}{\rho^2}D\rho\right)^2 =$$

$$= \frac{p^2}{c_p T\rho^3}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{c_p T}(D\varepsilon)^2 - 2\frac{p}{c_p T\rho}(D\varepsilon)D\rho =$$

$$= \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{p}{\rho^2}(D\rho)^2 + \frac{\rho}{\gamma\varepsilon}(D\varepsilon)^2 - 2\frac{\gamma-1}{\gamma}(D\rho)D\varepsilon. \qquad (18)$$

Складывая (16) и (18), выводим (15).

Повторяя рассуждения из [2], представим систему (1) – (3) в недивергентной форме

$$D\rho + \rho\, div\vec{u} = 0, \qquad (19)$$

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \qquad (20)$$

$$\rho D\varepsilon + p\, div\vec{u} = 0. \qquad (21)$$

В [2] на странице 33 система Эйлера выписана также в симметрической форме

$$\rho D\vec{u} + \nabla p = 0, \qquad (22)$$

$$\frac{1}{\rho c_s^2} Dp + div\vec{u} = 0, \qquad (23)$$

$$Ds = 0. \qquad (24)$$

Системы (19) − (21) и (22) − (24) необходимо дополнить уравнениями состояния (4).

Теорема 2. *Всякое непрерывно дифференцируемое на множестве решение* $\rho = \rho(\vec{x},t) > 0$, $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$, $p = p(\vec{x},t) > 0$ *системы* (19) − (21) *является решением системы* (22) − (24). *Обратное утверждение также справедливо.*

Доказательство. Уравнения (20) и (22) в обеих системах совпадают. Если справедливы равенства (19) и (21), то левая часть (8) обращается в нуль. Таким образом,

$$\frac{1}{\rho c_s^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)p + \rho c_s^2 div\vec{u}\right)^2 + \frac{\rho T}{c_p}\left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)s\right)^2 = 0. \qquad (25)$$

Из (25) следует, если принять во внимание определение (9), что равенства (23) и (24) также выполняются. Обратное утверждение доказывается аналогично.

Итак, тождество (8) позволяет легко установить известный факт эквивалентности двух рассматриваемых систем на указанном классе функций. Другие приложения подобных тождеств можно найти в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. – 840 с.

2. Овсянников Л.В. Лекции по основам газовой динамики. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. – 336 с.

3. Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. – 129 с.

Рукопись поступила в редакцию 06.03.2024

Рукопись принята к печати 08.03.2024

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
V Всероссийской научно-практической конференции

29–30 марта 2024 года, Тверь

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано в печать 12.04.2024. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 8,84. Заказ № 50.
Электронное издание
Издательство Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. (4822) 35-60-63.