

1. Какое наименьшее значение может принимать выражение

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y ?$$

Решение. Преобразуем заданное выражение

$$x^2 - 6x + y^2 + 4y = (x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 4y + 4) - 9 - 4 = (x - 3)^2 + (y + 2)^2 - 13.$$

Наименьшее значение достигается при $x = 3$, $y = -2$ и равно -13 .

2. Какое из чисел больше: $a = \sqrt{2} + 1$ или $b = \sqrt[3]{14}$?

Решение. Возведем оба числа в куб.

$$a^3 = 2\sqrt{2} + 6 + 3\sqrt{2} + 1 = 7 + 5\sqrt{2}, \quad b^3 = 14 = 7 + 7.$$

Сравним теперь числа $c = 5\sqrt{2}$ и $d = 7$, возведя их в квадрат. $c^2 = 50$, $d^2 = 49$. Отсюда заключаем, что $c > d$. Следовательно $a^3 > b^3$, значит $a > b$.

3. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, в котором K — середина стороны AD , M — середина стороны BC и $KM = \frac{1}{2}(AB + CD)$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

Решение. Так как K — середина стороны AD , а M — середина стороны BC , то имеет место векторное равенство

$$2\vec{KM} = \vec{AB} + \vec{DC}.$$

Тогда равны скалярные квадраты левой и правой частей равенства.

$$4KM^2 = AB^2 + 2(\vec{AB}, \vec{DC}) + DC^2.$$

С другой стороны из условия задачи следует, что $4KM^2 = AB^2 + 2AB \cdot CD + CD^2$. Отсюда получаем, что $(\vec{AB}, \vec{DC}) = AB \cdot CD$. Это означает, что угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{DC}$ равен нулю, т.е. эти вектора параллельны.

4. Даны натуральные числа a и b такие, что $a - b = 380$ и наименьшее общее кратное этих чисел равно 2025. Найдите эти числа.

Решение. Разложим число 2025 на простые множители. $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Число 380 не делится на 3, значит только одно из чисел a или b делится на 3 и на $3^4 = 81$. Число 380 делится на 5 и не делится на $5^2 = 25$. Значит оба числа a и b делятся на 5 и только одно из них делится на 25. Возможны следующие варианты:

$$a = 81 \cdot 5 = 405, \quad b = 25 \Rightarrow a - b = 380 \text{ годится};$$

$$a = 81 \cdot 25 = 2025, \quad b = 5 \Rightarrow a - b = 2020 \text{ не годится.}$$

Таким образом получаем ответ: $a = 405, b = 25$.

5. Из множества целых чисел от 1 до n удалено одно число. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $\frac{163}{4}$. Какое число было удалено?

Решение. Обозначим удаленное число через m . Сумма натуральных чисел от 1 до n равна $\frac{n(n+1)}{2}$. Обозначим через S сумму, оставшуюся после удаления одного из чисел.

$$\frac{n(n+1)}{2} - n \leq S \leq \frac{n(n+1)}{2} - 1 \Rightarrow \frac{n^2 - n}{2} \leq S \leq \frac{n^2 + n - 2}{2}.$$

Тогда среднее арифметическое оставшихся после удаления чисел удовлетворяет неравенству

$$\frac{n^2 - n}{2(n-1)} \leq \frac{S}{n-1} \leq \frac{n^2 + n - 2}{2(n-1)} \Rightarrow \frac{n}{2} \leq \frac{S}{n-1} \leq \frac{n+2}{2}.$$

По условию задачи $\frac{S}{n-1} = \frac{163}{4}$. Отсюда получаем условия для n .

$$\frac{n}{2} \leq \frac{163}{4} \leq \frac{n+2}{2}.$$

Этому неравенству удовлетворяют два натуральных числа $n = 80$ и $n = 81$. Если $n = 80$, то $n - 1 = 79$, а при делении натурального числа на 79 знаменатель не может быть равен 4. Остается единственный вариант $n = 81$. Теперь мы можем найти число m .

$$\frac{1}{n-1} \left(\frac{n(n+1)}{2} - m \right) = \frac{163}{4} \Rightarrow \frac{1}{80} \left(\frac{81 \cdot 82}{2} - m \right) = \frac{163}{4},$$

откуда получаем $3321 - m = 3260 \Rightarrow m = 61$. Мы получили, что было удалено число 61.