О ВЫЧИСЛЕНИИ ЧИСЛА π

И.Ш. Могилевский

математический факультет ТвГУ

31 марта 2026 г.

Число π в нашей цивилизации

Число π, равное отношению длины окружности к ее диаметру, играет выдающуюся роль в мировой цивилизации. Умение находить величину этого числа с достаточной точностью необходимо в самых разных сферах человеческой деятельности. Но кроме чисто утилитарных целей внимание думающих людей привлекало нахождение способов эффективно вычислять π с любой заданной точностью. Порой это превращалось в своего рода математическое развлечение, которому насчитывается несколько сотен лет.

Формула Валлиса

Прежде всего отметим, что число π является трансцендентным, т.е. оно не может быть получено как корень полинома с рациональными коэффициентами.
Это было доказано в 1882 году немецким математиком Фердинандом Линдеманом (1852 — 1939). Так что представить число π можно лишь как предел некоторой последовательности. По-видимому, по этой причине найти относительно точное значение π в античные времена не смогли, а удалось это сделать только в новое время.

Формула Валлиса

Одним из первых последовательность, сходящуюся к π, получил английский математик
Джон Валлис (John Wallis, 1616 — 1703). Вывод этой формулы имеется в Курсе Г.М.Фихтенгольца, и вывод этот не такой простой.
Вычисляя и оценивая интегралы

$$J_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\, dx, \quad J'_m = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x\, dx, \ \ m \geq 0,$$

приходим к предельному соотношению

$$\pi = \lim_{n \to \infty} \left[\frac{[(2n)!!]^2}{[(2n-1)!!]^2} \frac{1}{n} \right],$$

которое и представляет формулу Валлиса.

Формула Валлиса

Сходится эта последовательность очень медленно.

$$a_5 \approx 3.3024, \quad a_{10} \approx 3.2211, \quad a_{20} \approx 3.1811, \; a_{50} \approx 3.1573,$$
$$a_{60} \approx 3.1547, \quad a_{80} \approx 3.1514, \quad a_{100} \approx 3.1495$$
$$a_{120} \approx 3.1481, a_{200} \approx 3.1455, \quad a_{300} \approx 3.1442, \quad a_{400} \approx 3.1436,$$
$$a_{500} \approx 3.1432, \quad a_{1000} \approx 3.1424, \quad a_{2000} \approx 3.1420$$

Ряд для арксинуса

Разложим арксинус в степенной ряд

$$\arcsin x = x + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{9}{5!}x^5 + \ldots = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}, \qquad |x| < 1$$

и положим $x = \frac{1}{2}$. Получим

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{2^{2k+1}},$$

или

$$\pi = 3\left[1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{1}{2k+1}\,\frac{1}{2^{2k}}\right].$$

Ряд для арксинуса

Частичные суммы этого ряда нетрудно найти

$$S_5 = 3.141576715774867, \quad S_{10} = 3.141592646875561.$$

Учитывая, что $\pi \approx 3.141592653589793$, мы можем заключить, что ряд сходится весьма быстро.

Ряд для арктангенса

Разложим в степенной ряд арктангенс

$$\arctan(x) = x - \frac{2}{3!}\,x^3 + \frac{24}{5!}\,x^5 - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)}\,x^{2k+1}, \quad |x| < 1$$

и положим $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Так как $\arctan(\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{\pi}{6}$, то

$$\frac{\pi}{6} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)}(\sqrt{3})^{-(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)}\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{1}{3^k},$$

откуда следует

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)}\frac{1}{3^{k-1}}.$$

Ряд для арктангенса

Частичные суммы находятся просто.

$$S_3 = 3.1479, \quad S_5 = 3.141309, \quad S_{10} = 3.141593.$$

Так что ряд для арктангенса сходится достаточно быстро.

Используя элементарные тригонометрические формулы для тангенса суммы и разности,
Джон Мэчин (John Machin, 1686 — 1751, Лондон) получил соотношение

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239},$$

из которого, раскладывая арктангенсы в ряды, находим

$$\pi = 4 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)} \left[\frac{4}{5^{2k+1}} - \frac{1}{239^{2k+1}} \right].$$

Ряд этот сходится весьма быстро.

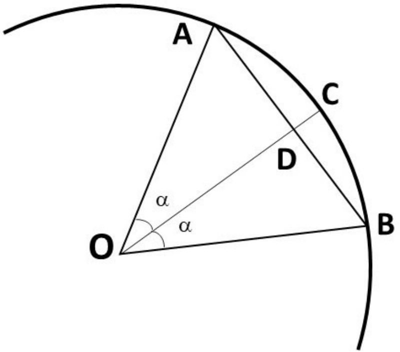
$S_3 = 3.1415918$ (5 верных знаков), $S_5 = 3.1415926526$ (8 знаков).

Вписанные многоугольники

Рассмотрим окружность радиуса 1. Ее длина равна 2π. Пусть в эту окружность вписан квадрат. Диагонали этого квадрата суть диаметры окружности, пересекающиеся под прямым углом. Поэтому сторона квадрата есть гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника с катетами равными 1. Следовательно сторона квадрата равна $\sqrt{2}$. Будем теперь удваивать количество сторон вписанного в единичную окружность правильного многоугольника, опуская из центра окружности срединные перпендикуляры на стороны имеющегося многоугольника и продолжая их до пересечения с окружностью. Таким образом мы получим вписанные в единичную окружность правильные 2^k-угольники, $k = 2, 3, \ldots$. Обозначим через a_k длину стороны правильного вписанного 2^k-угольника и найдем соотношение между числами a_k и a_{k+1}.

$a_2 = \sqrt{2}$.

Вписанные многоугольники



На рисунке O — центр единичной окружности, AB — сторона правильного 2^k-угольника, OD — срединный перпендикуляр к AB, C — точка пересечения прямой OD с окружностью, AC и CB — стороны вписанного правильного 2^{k+1}-угольника длиной a_{k+1}.

Вписанные многоугольники

Пользуясь теоремой косинусов получим соотношение

$$a_{k+1} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_k^2}}.$$

Так как $a_2 = \sqrt{2}$, то

$$a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_4 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - (2 - \sqrt{2})}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}},$$

$$a_5 = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a_4^2}} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}}.$$

В общем случае

$$a_k = \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}}_{\text{k-2 корня}}}, \quad k = 2, 3, \dots.$$

Вписанные многоугольники

Периметр вписанного в единичную окружность правильного 2^k-угольника равен $2^k a_k$ и стремится к 2π при $k \to \infty$. Поэтому получаем предельное соотношение

$$2^k a_k = 2^k \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{k-2 корня}}} \to 2\pi$$

или

$$\pi = \lim_{k \to \infty} 2^{k-1} \sqrt{2 - \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{2}}}}_{\text{k-2 корня}}}.$$

Сходится эта последовательность довольно быстро.

$$apn(2) = 2.8284,\ \ apn(5) = 3.1365, \ldots, apn(10) = 3.141588.$$