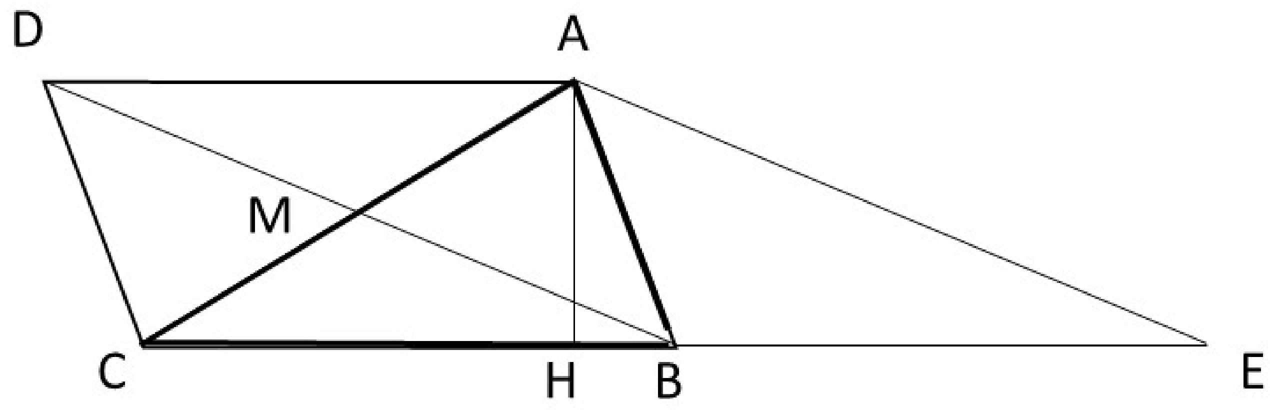
Решения задач олимпиады „Математический олимп“ 2022 года

1. Левая часть уравнения — четная функция. Следовательно, ровно 3 действительных корня возможны т. и т.т., когда один из них $x = 0$. Следовательно $a = \pm 1$, три корня существуют только при $a = -1$

Ответ. При $a = -1$: $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$.

2. Построим на плоскости равносторонний треугольник со стороной 2022. Две из его вершин имеют одинаковый цвет.

3. Пусть ABC — заданный треугольник.



Достроим треугольник ABC до параллелограмма, проведя $AD \parallel BC$ и $CD \parallel AB$. диагонали параллелограмма $ABCD$ делятся пополам в точке пересечения M. Поэтому $BD = 2 \cdot BM = 2 \cdot AH$. Проведем теперь $AE \parallel BD$ и получим параллелограмм $AEBD$, в котором $AE = BD = 2 \cdot AH$. В прямоугольном треугольнике AEH гипотенуза AE вдвое больше катета AH. Поэтому $\angle AEH = 30°$. Так как $AE \parallel BD$, то $\angle DBC = \angle MBC = \angle AEH = 30°$.

4. Заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$xy - px - py + p^2 = p^2 \;\Rightarrow\; (x-p)(y-p) = p^2.$$

Откуда получаем 6 пар решений:

$$(2p, 2p),\; (0,0),\; (p+1, p+p^2),\; (p-1, p-p^2),\; (p+p^2, p+1),\; (p-p^2, p-1).$$

5. Заметим прежде всего, что A существует как вещественное число при $\sqrt{x} \le 29$, т.е. $x \le 29^2 = 841$. Вычислим A^2.

$$A^2 = 29 + \sqrt{x} + 2\sqrt{(29+\sqrt{x})(29-\sqrt{x})} + 29 - \sqrt{x} = 58 + 2\sqrt{29^2 - x}.$$

По условию задачи A^2 есть целое неотрицательное число. Отметим, что функция $f(x) = 58 + 2\sqrt{29^2 - x}$ убывает и достигает своего наибольшего значения на множестве натуральных чисел при $x = 1$. Значит

$$A^2 \le f(1) = 58 + 2\sqrt{29^2 - 1} < 58 + 2\sqrt{29^2} = 58 + 2 \cdot 29 = 116.$$

Рассмотрим квадраты целых чисел, меньшие 116. Наибольшим из таких квадратов является число 100. В этом случае получаем уравнение для x.

$$58 + 2\sqrt{29^2 - x} = 100 \;\Rightarrow\; \sqrt{29^2 - x} = 21 \;\Rightarrow\; 841 - x = 441 \;\Rightarrow\; x = 400.$$

Если $A^2 < 100$, например $A^2 = 81$ или $A^2 = 64$, то $x > 400$. Тем самым получаем *ответ:* $x = 400$.

6. Выберем в качестве координатных осей данные прямые (точка A — начало координат). Обозначив центр круга $C(x_1, y_1)$ (по условию $|AC|^2 = x_1^2 + y_1^2 = a^2$), составим уравнение окружности:

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 = R^2 \quad\Longrightarrow\quad x^2 + y^2 - 2(x_1 x + y_1 y)^2 + a^2 - R^2 = 0.$$

Ось Ox отсекает хорду, ее концы — корни уравнения $x^2 - 2x_1 x + a^2 - R^2 = 0$, а именно: $x_\pm = x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - a^2 + R^2}$. Длина хорды равна $x_+ - x_- = 2\sqrt{x_1^2 - a^2 + R^2}$. Аналогично, длина хорды, отсекаемой осью Oy, равна $2\sqrt{y_1^2 - a^2 + R^2}$. Сумма их квадратов равна $S = 4(x_1^2 - a^2 + R^2 + y_1^2 - a^2 + R^2) = 8R^2 - 4a^2$ и не зависит от азимута точки C (от положения прямых относительно AC).
Ответ. $8R^2 - 4a^2$.