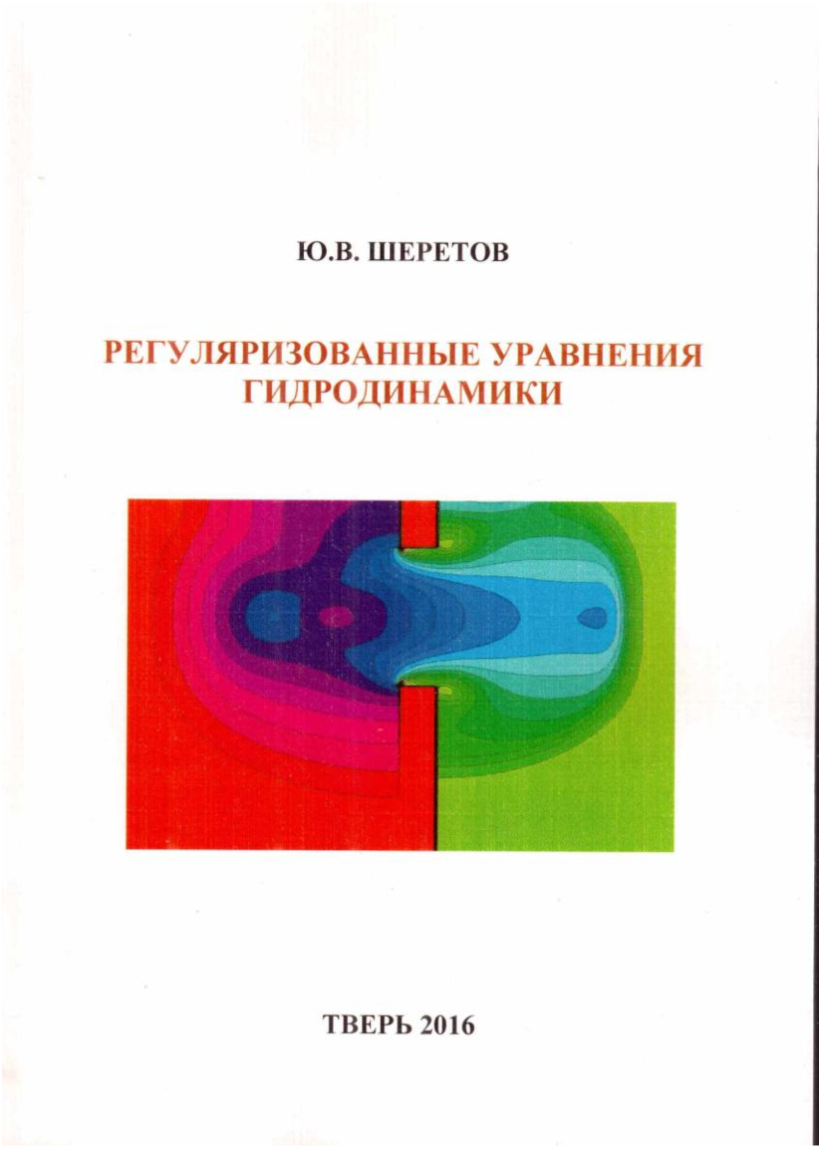
О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Юрий Владимирович Шеретов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.
https://elibrary.ru/item.asp?id=30543818



Шеретов Ю.В. Регулярнизованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской государственный университет, 2016. 222 с.
https://elibrary.ru/item.asp?id=30097584

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости [1, 2] без учета внешних сил в стандартных обозначениях имеет вид

$$div\vec{u} = div\vec{w}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + \left((\vec{u}-\vec{w})\cdot\nabla\right)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u} + \nu\nabla(div\vec{u}) + div(\vec{u}\otimes\vec{w}). \tag{2}$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau\left((\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p\right).$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости. Символом Δ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1) – (2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x},t)$ и давления $p = p(\vec{x},t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. При $\tau \to +0$ система (1) − (2) переходит в классическую систему Навье−Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$div\vec{u} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u}. \tag{4}$$

Присоединим к системам (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) начальное условие

$$\vec{u}\,|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x}\in R^3_{\vec{x}}. \tag{5}$$

Функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $R^3_{\vec{x}}$. Для системы Навье–Стокса векторное поле $\vec{u}_0$ соленоидально, т.е.

$$div\vec{u}_0 = 0. \tag{6}$$

Для КГД системы ограничение (6) не накладывается. Чтобы исключить неоднозначность в определении давления, можно положить

$$p(\vec{0},t) = p_0, \quad t \ge 0. \tag{7}$$

Здесь p_0 – заданное положительное число.

Будем рассматривать гладкие (бесконечно-дифференцируемые) решения задач Коши (1), (2), (5) и (3), (4), (5), ограниченные в пространстве $R^3_{\vec{x}}$ в произвольный фиксированный момент времени, т.е. для любого $t \in [0,+\infty)$ существуют положительные числа $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$, такие, что каждого $\vec{x} \in R^3_{\vec{x}}$ выполняются неравенства

$$|\vec{u}(\vec{x},t)| \le C_1, \qquad |p(\vec{x},t)| \le C_2. \tag{8}$$

Некоторые точные решения задачи Коши для КГД системы построены в [3, 4].

Определение. *Решение* $(\vec{u}, p)$ *назовем однородно-винтовым, если существует такая вещественная постоянная* $\lambda \neq 0$*, что выполнено равенство*

$$\vec{\omega} = \lambda \vec{u},$$

где $\vec{\omega} = rot\ \vec{u}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы пара функций* $(\vec{u}, p)$*, ограниченных на* $R^3_{\vec{x}}$ *в любой момент времени, являлась гладким однородно-винтовым решением задачи Коши для квазигидродинамической системы, необходимо и достаточно, чтобы* $(\vec{u}, p)$ *была таким решением для системы Навье–Стокса.*

Однородно-винтовые решения задачи Коши, общие для систем Навье–Стокса и КГД, можно построить по схеме, предложенной чешским физиком Виктором Тркалом [3, 5].

Пример 1. Одно из таких решений имеет вид

$$u_x = U \sin\left(\frac{z}{H}\right) e^{-\frac{\nu t}{H^2}}, \tag{9}$$

$$u_y = U \cos\left(\frac{z}{H}\right) e^{-\frac{\nu t}{H^2}}, \tag{10}$$

$$u_z = 0, \tag{11}$$

$$p = p_0. \tag{12}$$

Здесь U и H − положительные константы, имеющие размерности скорости и длины соответственно.

Теорема 2. *Пусть* $(\vec{u}, p)$ *– гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, удовлетворяющее неравенствам (8) и обобщенному условию Громеки–Бельтрами*

$$rot\ [\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \tag{13}$$

Кроме того, для каждого $t \in [0,+\infty)$ *существует положительное число* $C_3 = C_3(t)$*, такое, что любого* $\vec{x} \in R^3_{\vec{x}}$ *выполняется неравенство*

$$|\Psi(\vec{x},t)| \le C_3,$$

где

$$\Psi(\vec{x},t) = \int_{\vec{0}}^{\vec{x}} \left([\vec{u}\times\vec{\omega}]\cdot\vec{l}\,\right) ds$$

– криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования, соединяющего точки $\vec{0}$ *и* $\vec{x}$. *Тогда пара* $(\vec{u}, p)$ *является гладким решением задачи Коши для квазигидродинамической системы.*

Подробные доказательства теорем 1 и 2 можно найти в [5]. Приведем пример решения задачи Коши, общего для систем Навье−Стокса и КГД, и удовлетворяющего обобщенному условию Громеки−Бельтрами (13).

Пример 2. Решение имеет вид

$$u_x = -\frac{A}{H}\cos\left(\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{14}$$

$$u_y = \frac{A}{L}\sin\left(\frac{x}{L}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \tag{15}$$

$$u_z = 0, \tag{16}$$

$$p = p_0 + \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{H^2}\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)\right) + \frac{1}{L^2}\left(1-\cos^2\left(\frac{y}{H}\right)\right)\right]e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \tag{17}$$

Здесь A – положительная постоянная, имеющая размерность $см^2/с$. Символами L и H обозначены положительные константы, имеющие размерность $см$. Для системы Навье−Стокса это решение было построено Джеффри Инграмом Тейлором. Подчеркнем еще раз, что наборы функций (9) − (12) и (14) − (17) задают точное решение задачи Коши не только для системы Навье−Стокса, но и для квазигидродинамической системы. Однако они не удовлетворяют классической системе Эйлера

$$div\vec{u} = 0,$$

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\nabla)\vec{u} + \nabla p = 0.$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для уравнений Навье–Стокса – одна из мировых проблем математики [6]. Аналогичная трудная задача для КГД системы может быть поставлена следующим образом.

Нерешенная задача (Ю.В. Шеретов). *Доказать существование и единственность бесконечно дифференцируемого решения задачи Коши (1), (2), (5), (7) для квазигидродинамической системы.*

Если утверждение окажется неверным для бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $R_{\vec{x}}^3$ функции $\vec{u}_0(\vec{x})$, то можно попытаться предъявить более жесткие требования к начальному распределению скорости. Например, считать $\vec{u}_0(\vec{x})$ бесконечно дифференцируемой и финитной функцией на $R_{\vec{x}}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ .Регулярная и хаотическая динамика., 2009. 400 с.
2. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.
3. Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2017. № 3. С. 13 – 25.
4. Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика. 2018. № 3. С. 5 – 18.
5. Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. В печати.
6. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, Вып 2. С. 45 – 78.