Приливные силы на круговых орбитах вокруг гравитирующих конфигураций скалярного поля

Л.Э. Андре, А.Н. Цирулев

Аннотация

Статические гравитирующие конфигурации скалярного поля играют важную роль в математическом моделировании геодезического движения вблизи центральных объектов нормальных галактик. В данной работе получены общие выражения для величины приливной силы, действующей на протяженное тело на круговой орбите, в статическом сферически-симметричном пространстве-времени. Изучаются приливные силы вблизи этих объектов в рамках математической модели, в которой скалярное поле приближенно описывает темную материю, концентрирующуюся вблизи центра галактики.

I. Введение. Тело конечных размеров, движущееся в гравитационном поле массивного объекта по ограниченной орбите, близкой к геодезической, испытывает внутренние напряжения, вызванные приливными силами. В сильном гравитационном поле эти воздействия не подчиняются законам ньютоновской механики и описываются тензорным полем кривизны. Уравнение, которое определяет относительные ускорения пробных частиц на близких геодезических, а следовательно, и силы сжатия или растяжения, обусловленные неоднородностью гравитации и действующие внутри тела, в гравитационной физике называется уравнением девиации геодезических, а в дифференциальной геометрии — уравнением Якоби. Практический смысл расчетов приливных сил обусловлен их значением для интерпретации современных астрофизических наблюдений, в частности, наблюдений звезд класса S вблизи гравитирующего объекта Sgr A* в центре нашей Галактики [1, 2].

В общем случае, астрофизические объекты с сильным гравитационным полем и массой $m \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$, обнаруженные в центрах нормальных галактик, не являются вакуумными. Как известно в настоящее время, они окружены гравитирующей темной материей, поэтому наблюдаемые параметры орбит и приливные силы, действующие на реальные (протяженные) объекты, могут существенно отличаться от тех, что предсказывают вакуумные модели [3, ?]. В данной работе мы предполагаем, что темная материя может моделироваться вещественным скалярным полем, поскольку такая модель содержит достаточное количество свободных параметров для приближенного описания распределения темной материи в пределах, которые определены из современных наблюдений центров галактик. В галактиках масса темной матери по меньшей мере в три раза превосходит массу обычного вещества, причем концентрация ее плотности вблизи центра предсказывается всеми общепринятыми моделями. Отметим, что гравитирующие объекты в центрах галактик обычно отождествляются с черными дырами, однако в настоящее время нельзя уверенно исключить другие возможности (кротовые норы, голые сингулярности и т. д.) [5, 9].

Целью данной работы является сравнение величины приливной силы в окрестности двух сферически-симметричных конфигураций: вакуумной черной дыры, представленной решением Шварцшильда, и самогравитирующей скалярной конфигурации, моделирующей гравитирующий объект в центре галактики. В разделе II описан общий формализм расчета приливных сил в сферически-симметричном пространстве-времени. В разделе III кратко сформулированы результаты, относящиеся к черной дыре Шварцшильда. В разделе IV рассматриваются модели со скалярным полем и проводится сравнение результатов. Всюду используется сигнатура метрики $\{1,-1,-1,-1\}$ и геометрическая система единиц, в которой G=c=1.

II. Основные уравнения. Пусть ξ^k — 4-вектор, нормальный к геодезической. Уравнение девиации геодезических (уравнение Якоби) имеет вид

$$\frac{d^2\xi^k}{ds^2} = R^k_{\ ijl}U^iU^j\xi^l, \tag{1}$$

где $U = U^i\mathrm{e}_i$ — 4-скорость, а $R = R^k_{\ ijl}\,\mathrm{e}_k\otimes\mathrm{e}^i\otimes\mathrm{e}^j\otimes\mathrm{e}^l$ — кривизна в ортонормированном базисе, ассоциированном с метрикой сферически-симметричного пространства-времени, которую — для данной задачи — удобно записать в сферических координатах (t,r,θ,φ) в виде

$$ds^2 = A^2dt^2 - B^2dr^2 - C^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2). \tag{2}$$

В статическом случае, когда метрические функции зависят только от радиальной координаты r, алгебраически независимые компоненты кривизны имеют вид

$$R_{0101} = -\frac{A_{(1)(1)}}{A}, \quad R_{0202} = R_{0303} = -\frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC},$$
$$R_{2323} = \frac{C_{(1)}^2 - 1}{C^2}, \quad R_{1212} = R_{1313} = \frac{C_{(1)(1)}}{C},$$

где индекс (1) означает производную вдоль базисного поля e_1, например, $\mathrm{e}_1 f \equiv f_{(1)} = (1/B)\,\partial_r f$, $\mathrm{e}_1(\mathrm{e}_1 f) \equiv f_{(1)(1)} = (1/B)\partial_r\big(\,(1/B)\partial_r f\,\big)$.

Мы рассматриваем круговые орбиты $\theta = \pi/2$, где отличны от нуля только компоненты 4-скорости $U^0 = A dt/ds$ и $U^3 = C d\phi/ds$. Относительное ускорение и сила, создающая напряжение внутри тела, определяются только начальным пространственноподобным вектором $(0,\xi^1,\xi^2,\xi^3)$, так что нетривиальные уравнения в (1) имеют вид (нет сумм. по k)

$$\frac{d^2\xi^k}{ds^2} = f_k\xi^k, \quad f_k = f_k(r), \quad k = 1,2,3. \tag{3}$$

Учитывая, что на круговой орбите

$$\left(U^0\right)^2 = \frac{AC_{(1)}}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\,, \quad \left(U^3\right)^2 = \frac{A_{(1)}C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\,,$$

для компонент напряжений f_k получим выражения

$$f_1 = \frac{A_{(1)}C_{(1)(1)} - A_{(1)(1)}C_{(1)}}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\,, \;\; f_2 = \frac{-A_{(1)}/C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\,, \;\; f_3 = \frac{-A_{(1)}C_{(1)}^2/C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\,; \quad (4)$$

например, f_2 — сила, действующая на единичный элемент площади, расположенный перпендикулярно координатной кривой θ. Заметим, что $f_1 > 0, f_2 < 0, f_3 < 0$, поскольку $AC_{(1)} - A_{(1)}C \geq 0$ (равенство соответствует фотонной орбите).

III. Окрестность черной дыры Шварцшильда. Для вакуумной черной дыры Шварцшильда $A^2 - 1 - 2m/r = 1/B^2$, $C = r$. Простой подсчет дает для последней устойчивой орбиты с $r = 6m$ значение $f_1 = 1/(108m^2)$, которое совпадает со значением растягивающей приливной силы для радиального падения, в то время как силы, сжимающие тело в направлениях траектории движения и перпендикулярно плоскости орбиты, $f_2 = -1/(108m^2)$ и $f_3 = -1/(162m^2)$, отличаются коэффициентами 2 и 4/3 соответственно. Таким образом, в окрестности последней устойчивой орбиты приливные силы при радиальном падении и при движении по круговой орбите по порядку величины совпадают.

VI. Скалярные конфигурации. В этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = \mathrm{e}^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2), \tag{5}$$

т. е. $A^2 = \mathrm{e}^{2F} f$, $B^2 = 1/f$. Метрические функции восстанавливаются формулами

$$F(r) = -\int\limits_r^\infty \phi'^2 r dr\,, \quad \xi(r) = r + \int\limits_r^\infty \left(1 - \mathrm{e}^F\right) dr\,, \tag{6}$$

$$A^2 = 2r^2 \int\limits_r^\infty \frac{\xi - 3m}{r^4}\, \mathrm{e}^F dr\,, \quad f(r) = \mathrm{e}^{-2F} A^2 \tag{7}$$

по произвольно (с учетом требования асимптотически плоской метрики) заданному скалярному полю $\phi(r)$ [6, 7, 8].

Основные отличия в величине приливной силы вблизи скалярной черной дыры и вблизи вакуумной черной дыры обусловлены тем, что в первом случае радиус горизонта событий и радиус последней устойчивой орбиты r_I могут быть сколь угодно малыми. Пусть r_0 — корень уравнения $xi(r) - 3m = 0$, $r_0 > r_I$. Простые расчеты с использованием тождества

$$\left(A^2\right)' = \frac{2}{r}A^2 - 2\frac{\xi - 3m}{r^2}\, \mathrm{e}^F$$

показывают, что приливные силы растут как $1/(r_0 r_I^2)$ при $r \to r_I + 0$, в то время как знаки компонент соответствуют вакуумной черной дыре: $f_1 > 0, f_2 < 0, f_3 < 0$.

В случае скалярной голой сингулярности, поведение метрической функции A носит принципиально иной характер. В отличие от вакуумного случая, в котором голые сингулярности возможны только с отрицательной массой, скалярные голые сингулярности "в общем положении"имеют положительную массу, а функция A имеет минимум. Как показывают расчеты, вблизи них величина приливных сил для характерных масс центров галактик оказывается на порядки меньше чем для черных дыр, а в области покоя приливные силы отсутствуют.

VI. Заключение. Наблюдения эффектов (разрыв протяженного тела, если рассматривается черная дыра, и т. п.), связанных с приливными силами могут быть полезными для идентификации объектов в центрах галактик, если скалярно-полевая модель темной материи адекватно описывает ситуацию в центрах галактик. Отметим, что в вакуумном случае приливные силы оказываются слишком слабыми, чтобы такие наблюдения были информативны.

Список литературы

[1] P.S. Joshi, D. Malafarina, R. Narayan, Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties. Class. Quant. Grav. **31**, 015002 (2014) arXiv:1304.7331

[2] M. Grould, F.H. Vincent, T. Paumard, G. Perrin, General relativistic effects on the orbit of the S2 star with GRAVITY. Astron. Astrophys. **608**, A22 (2017) arXiv:1709.04492

[3] V.H. Robles, T. Matos, Flat central density profile and constant dark matter surface density in galaxies from scalar field dark matter. Mon. Not. R. Astron. Soc. **422**, 282–289 (2012) arXiv:1201.3032

[4] D. Benisty, E. I. Guendelman, Interacting diffusive unified dark energy and dark matter from scalar fields. Eur. Phys. J. C **77**, 396 (2017) arXiv:1701.08667

[5] P.V. Kratovitch, I.M. Potashov, Ju.V. Tchemarina, A.N. Tsirulev, Topological geons with self-gravitating phantom scalar field. Journal of Physics: Conference Series **934**, 012047 (2017) arXiv:1805.04447

[6] I.M. Potashov, Ju.V. Tchemarina and A.N. Tsirulev. Bound orbits near scalar field naked singularities. Europ. Phys. Journ. C, 79:709, 10pp (2019) doi:10.1140/epjc/s10052-019-7192-7

[7] Ju.V. Tchemarina, A.N. Tsirulev, Spherically symmetric gravitating scalar fields. The inverse problem and exact solutions. Gravitation and Cosmology **15**, 94–95 (2009)

[8] D.A. Solovyev, A.N. Tsirulev, General properties and exact models of static selfgravitating scalar field configurations. Class. Quantum Grav. **29**, 055013 (2012)

[9] M. Cadoni, E. Franzin, F. Masella, M. Tuveri, A solution-generating method in Einstein-scalar gravity. Acta. Appl. Math. (2018) doi:10.1007/s10440-018-00232-2