МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП 2017

школьная олимпиада математического факультета ТвГУ

Задача 1. (5 баллов) Решите в целых числах уравнение

$$\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}.$$

Решение. Для удобства выгодно домножить обе части уравнения на $\sqrt{5}$. Получим:

$$\sqrt{5x-1}+\sqrt{5y-1}=5.$$

С учетом того, что x, y – целые, из условия неотрицательности подкоренного выражения находим, что $x,\ y\geq 1$.

Таким образом, $\sqrt{5x-1}$, $\sqrt{5y-1}\geq 2$. Поскольку сумма корней должна равняться 5, получаем верхнюю оценку $\sqrt{5x-1}$, $\sqrt{5y-1}\leq 3$, т.е. $x,\ y\leq 2$.

Остается перебором четырех пар целых чисел $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$ определить искомые решения: $x=1$, $y=2$ и $x=2$, $y=1$.

Задача 2. (5 баллов) Существует ли многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами такой, что $P(1)=1,\ P(6)=4$?

Решение. Пусть $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ – произвольный многочлен с целыми коэффициентами a_k. По условию $P(1)=1$, $P(6)=4$. Тогда

$$P(6)-P(1)=a_n(6^n-1)+a_{n-1}(6^{n-1}-1)+...+a_1(6-1)=3.$$

Заметим, что при любом целом k выражение $6^k-1=(6-1)(6^{k-1}+6^{k-2}+...+6+1)$ делится на 5. Таким образом,

$$P(6)-P(1)=5\left\{a_n(6^{n-1}+6^{n-2}+...+1)+a_{n-1}(6^{n-2}+6^{n-3}+...+1)+...+a_1\right\}=3.$$

При этом в фигурных скобках стоит целое число и выражение слева делится на 5. Однако, 3 на 5 не делится. Вывод: многочлен с требуемыми свойствами не существует.

Задача 3. (5 баллов) Город состоит из 50 одинаковых кварталов, имеющих форму квадрата со стороной 400 м. По периметру города проходит шоссе. Кварталы внутри города разделены улицами. Велосипедист объехал город по шоссе за $1,5$ часа. Узнав в путеводителе длину всех улиц города, он установил, что смог бы проехать их с такой же скоростью за $4,25$ часа. Какова скорость велосипедиста?

Решение. Пусть k – число сторон кварталов города, входящих в шоссе, т.е. число внешних по отношению к городу сторон кварталов. Тогда число внутренних сторон кварталов, выходящих на улицы города, равно $50\cdot 4-k$. Заметим, что каждая улица разделяет два прилегающих к ней квартала. Следовательно, число улиц города равно $(50\cdot 4-k)/2$.

Таким образом, длина шоссе составляет $0,4 \cdot k$ км, а сумма длин улиц равна $0,4(50 \cdot 4 - k)/2$ км. Отсюда получаем систему уравнений, выражающих время, необходимое велосипедисту на движение по шоссе и по улицам города с постоянной скоростью v:

$$\begin{cases} \dfrac{0,4 \cdot k}{v} = 1,5, \\ \dfrac{0,4(50 \cdot 4 - k)}{2v} = 4,25. \end{cases}$$

Домножив второе уравнение на 2 и сложив с первым, находим

$$\frac{0,4 \cdot 50 \cdot 4}{v} = 10.$$

Отсюда получаем, что искомая скорость велосипедиста равна 8 км/ч.

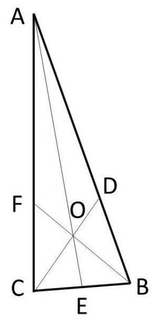
Задача 4. (5 баллов) Найдите в трехмерном пространстве геометрическое место точек, равноудаленных от вершин заданного треугольника.

Решение. Пусть точка P обладает требуемым свойством. Следовательно, соединив точку P с каждой из вершин треугольника ABC, получим пирамиду, боковые грани которой являются равнобедренными треугольниками. Значит P расположена на пересечении серединных перпендикуляров PK, PL и PM треугольников PAB, PBC, и PAC соответственно. По свойству двугранного угла проекция перпендикуляра, проведенного в любой из его граней к его ребру, на другую грань также является перпендикуляром к ребру. Значит, проекции перпендикуляров PK, PL и PM на плоскость треугольника ABC являются серединными перпендикулярами этого треугольника, которые пересекаются в центре O описанной вокруг ABC окружности. Таким образом, всякая искомая точка P расположена на прямой, перпендикулярной плоскости треугольника ABC и проходящей через центр O описанной вокруг этого треугольника окружности.

Очевидно, что любая точка этой прямой обладает требуемым свойством.

Задача 5. (5 баллов) Стороны AB и AC треугольника ABC равны 6 и 7 соответственно, а биссектриса CD делится точкой O пересечения биссектрис в отношении $CO : OD = 3 : 2$. Найдите оставшуюся сторону BC.

Решение. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть O – точка пересечения его биссектрис (см. рис.).



Рассмотрим биссектрису CD. По свойству биссектрис треугольника

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CO}{OD} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, $BC = \frac{3}{2}BD$. С другой стороны, рассуждая аналогично, находим, что

$$\frac{AC}{AD} = \frac{CO}{OD} = \frac{3}{2}$$

и $AC = \frac{3}{2}AD$. Известно, что $AC = 7$ и $BD + AD = 6$, т.е. $BD = 6 - AD$. Отсюда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} BC = \dfrac{3}{2}(6 - AD), \\ 7 = \dfrac{3}{2}AD. \end{cases}$$

Складывая уравнения этой системы, находим $BC = 2$.