МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ОЛИМП 2018

школьная олимпиада математического факультета ТвГУ

9-10 классы

РЕШЕНИЯ

Задача 1. (4 балла) Решить систему уравнений

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$$

Решение. Из второго уравнения выражаем $|x-1|=y-5$, $y\geq 5$, и подставляем в первое:

$$y+|y-5|=6.$$

Решаем полученное уравнение, учитывая, что $y \geq 5$:

$$2y=11,\ y=11/2.$$

Находим x из соотношения

$$|x-1|=1/2.$$

Отсюда $x=1/2$ и $x=3/2$.

Ответ: система имеет два решения $x=1/2$, $y=11/2$ и $x=3/2$, $y=11/2$.

Задача допускает также простое графическое решение.

Задача 2. (4 балла) Можно ли с помощью циркуля и линейки (без делений) разделить угол раствора $\pi/4$ на три равных угла?

Решение. Да, возможно. Третья часть от угла $\pi/4$ составляет 15 градусов. Для искомого разделения достаточно построить внутри данного угла на его сторонах вспомогательные углы по 30 градусов (с теми же вершинами, что и исходный угол), а затем построить биссектрисы этих углов. Для построения углов в 30 градусов можно воспользоваться широко известным фактом: в прямоугольном треугольнике катет, расположенный напротив угла в 30 градусов, в два раза короче гипотенузы.

Задача 3. (4 балла) Доказать, что если m, n и k – натуральные числа, такие, что $m^2+n^2=k^2$, то хотя бы одно из чисел m или n нацело делится на 3.

Решение. Заметим, что квадрат натурального числа при делении на 3 не может давать остаток 2. Действительно, пусть $a=3b+c$, где $a,b\in\mathbb{N}$ и $c=0,1$ или 2 – остаток при делении a на 3. Тогда $a^2=9b^2+6bc+c^2$. Очевидно, что $9b^2+6bc$ делится на 3. Выражение c^2 может принимать значения 0, 1 или 4, т.е. остаток при делении на 3 может составлять 0 или 1.

Предположим, что $m^2+n^2=k^2$, однако ни m, ни n не делятся на 3, т.е.

$$m=3m_1+c_1,\ n=3n_1+c_2,$$

где c_1, c_2 могут принимать значения 1 или 2. Тогда

$$k^2 = m^2 + n^2 = 9(m_1^2 + n_1^2) + 6(m_1c_1 + n_1c_2) + c_1^2 + c_2^2.$$

Выражение $9(m_1^2+n_1^2)+6(m_1c_1+n_1c_2)$ делится на 3. Однако, при c_1, c_2 равных 1 или 2 выражение $c_1^2+c_2^2$ может принимать лишь значения 2, 5 или 8, т.е. k^2 при делении на 3 во всех случаях будет давать остаток 2, что невозможно. Следовательно, среди чисел m или n хотя бы одно делится на 3.

Задача 4. (4 балла) На сколько частей три различных прямые могут разделять плоскость?

Решение. 1). Допустим, что две из трех различных прямых на плоскости параллельны. Тогда третья может быть также параллельна им (в этом случае плоскость делится прямыми на 4 неограниченные части) или же третья прямая будет пересекать обе параллельные прямые в двух различных точках и плоскость будет разделена на 6 неограниченных частей.

2). Теперь предположим, что среди трех различных прямых нет пары параллельных. Тогда они либо попарно пересекаются в одной общей точке и в этом случае делят плоскость на 6 неограниченных частей, либо попарно пересекаются в трех различных точках и делят плоскость на 7 частей, 6 из которых не ограничены, а седьмая представляет собой треугольник, ограниченный данными прямыми.

Ответ: плоскость может быть разделена на 4, 6 или 7 частей.

Задача 5. (4 балла) Пусть натуральное число n заканчивается на 3. Доказать, что число $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 120 нацело.

Решение. Заметим, что $120 = 3\cdot 5\cdot 8$ и покажем, что $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на взаимно простые числа 3, 5 и 8.

Во-первых, по условию n заканчивается на 3, а значит $n+2$ заканчивается на 5 и делится на 5. Следовательно, $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 5.

Во-вторых, среди трех последовательных чисел ровно одно обязано делиться на 3 (поскольку остатки при делении трех последовательных чисел на 3 обязательно равны 0, 1 и 2 в некотором порядке). Значит $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 3.

Наконец, число n нечетно, а значит $n+1$ и $n+3$ – последовательные четные числа и одно из них делится на 2, а второе – на 4 (поскольку остатки при делении двух последовательных четных чисел на 4 обязательно равны 0 и 2 и не могут равняться 1 или 3). Значит $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 8.

Таким образом, $(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 120.