



**«ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ»**

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ  
(MS EXCEL) И РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ  
НА ЯЗЫКЕ PASCALABC.NET  
ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ**

*ГОЛУБЕВ А.А., ЛОБАНОВ А.В., ТИШИНА Е.В.*

*ТВЕРСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ, 2020 г.*

**Теория функций комплексного переменного**  
(комплексный анализ) в рамках университетского курса является в основном продолжением курса математического анализа.

На *математическом факультете Тверского государственного университета* данная дисциплина читается студентам, обучающимся по направлениям подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата), 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата), а также студентам специалитета 10.05.01 Компьютерная безопасность.

В докладе рассматриваются возможности применения электронных таблиц MS Excel при изучении конформных отображений на примере целой линейной функции.

Под целой линейной функцией понимают функцию вида  $f(z) = Az + C$ , где  $A, C \in \mathbb{C}$ ,  $A \neq 0$ . Целая линейная функция  $f$  определена на всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ . Функция  $f$  голоморфна в комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ ,  $f'(z) = A$ . Так как  $A \neq 0$ , то  $f$  – отображение конформное в каждой точке  $\mathbb{C}$ . Так как  $f$  действует однолистно в  $\mathbb{C}$ , то  $f$  – отображение конформное во всей комплексной плоскости  $\mathbb{C}$ .

Если коэффициент  $A$  записать в показательной форме  $A = |A|e^{i\varphi}$ , где  $\varphi = \arg A$ , то отображение  $f$  можно представить в виде композиции функций:

$$w = \omega + C,$$

$$\omega = e^{i\varphi} \zeta,$$

$$\zeta = |A|z.$$

Полученное покажем схематично:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbf{C}_z & \xrightarrow{w = Az + C} & \mathbf{C}_w \\
 \downarrow \zeta = |A|z & & \uparrow w = \omega + C \\
 \mathbf{C}_\zeta & \xrightarrow{\omega = e^{i\varphi} \zeta} & \mathbf{C}_\omega
 \end{array}$$

Отображение  $\zeta = |A|z$  в действительной записи имеет вид  $\begin{cases} \xi = |A|x, \\ \eta = |A|y \end{cases}$ , где

$\xi + i\eta = \zeta$ ,  $x + iy = z$ , и представляет собой гомотетию плоскости  $\mathbf{C}_z$  (сжатие при  $|A| < 1$  и растяжение при  $|A| > 1$ ). Второе отображение,  $\omega = e^{i\varphi} \zeta$ , есть поворот плоскости  $\mathbf{C}_\zeta$  относительно точки  $\zeta = 0$  на угол  $\varphi$  против часовой стрелки.

Это следует, из действительной записи отображения

$$\begin{cases} p = \xi \cos \varphi - \eta \sin \varphi, \\ q = \xi \sin \varphi + \eta \cos \varphi \end{cases}, \text{ где } p + qi = \omega.$$

Функция  $w = \omega + C$  отвечает сдвигу плос-

кости  $\mathbf{C}_\omega$  на вектор  $C$  (действительная запись  $\begin{cases} u = p + \operatorname{Re} C, \\ v = q + \operatorname{Im} C \end{cases}$ , где  $u + iv = w$ ).

Таким образом, целое линейное преобразование есть композиция гомотетии, поворота и сдвига.

В качестве самостоятельного исследования студентам можно предложить изучение геометрических свойств целой линейной функции с привлечением возможностей MS Excel.

**Задача.** Целое линейное отображение  $w = az + b$  задается коэффициентами  $a$  и  $b$ . Необходимо выписать отображения, составляющие композицию (гомотетию, поворот и сдвиг), и проследить за образом треугольника (вершины которого могут задаваться произвольно) для каждом из этих отображений.

*Решение.* На рис. 1 в выделенных цветом ячейках заданы действительные и мнимые части коэффициентов  $a$  и  $b$ , затем рассчитаны модуль и главное значение аргумента заданного значения  $a$ . Здесь же приведены формулы модуля и главного значения аргумента комплексного числа.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$w = az + b$ - целая линейная функция							
2								
3	Введите параметр $a$ :	-9,00	+	1,00	$\cdot i$	$a_1 = \operatorname{Re} z$	$a_2 = \operatorname{Im} z$	
4	Введите параметр $b$ :	1,00	+	4,00	$\cdot i$	$b_1 = \operatorname{Re} z$	$b_2 = \operatorname{Im} z$	
5								
6	Модуль $a$ ( $k =  a $ ) равен	9,06					$ a  = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$	
7	Главное значение аргумента $a$ ( $\varphi = \operatorname{arg} a$ ) равно	3,03					$\operatorname{arg} a = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}, & a_1 > 0, a_2 \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & a_1 = 0, a_2 > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}, & a_1 < 0, \\ \frac{3\pi}{2}, & a_1 = 0, a_2 < 0, \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{a_2}{a_1}, & a_1 > 0, a_2 < 0 \end{cases}$	

Рис. 1.

На рис. 2 в выделенных цветом ячейках заданы координаты вершин треугольника  $ABC$ . Ниже изображен заданный треугольник в плоскости  $S_z$ .

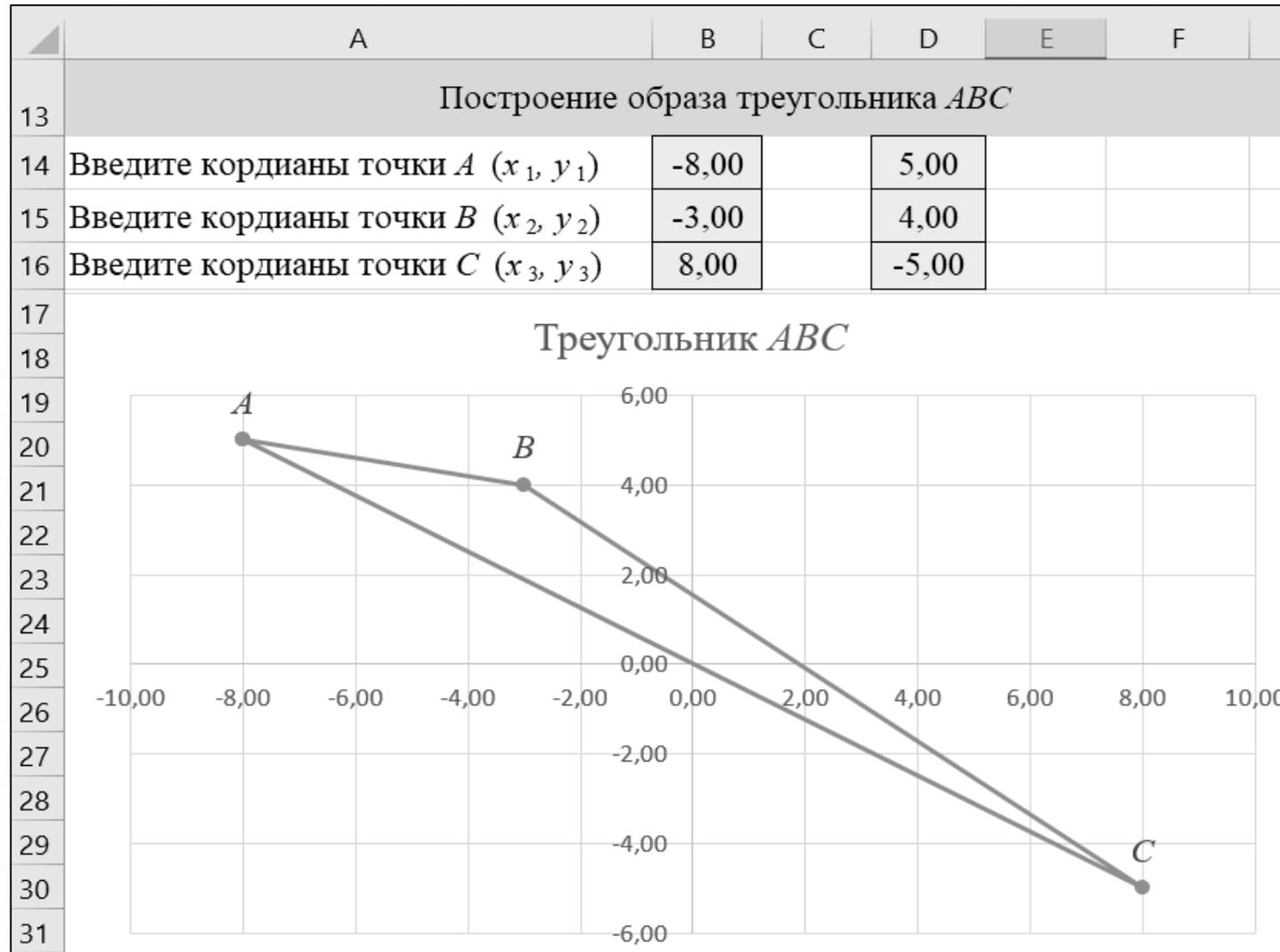


Рис. 2.

На рис. 3 в плоскости  $C_\zeta$  показан образ  $A_1B_1C_1$  треугольника  $ABC$  при отображении  $\zeta = |a|z$  (гомотетии).

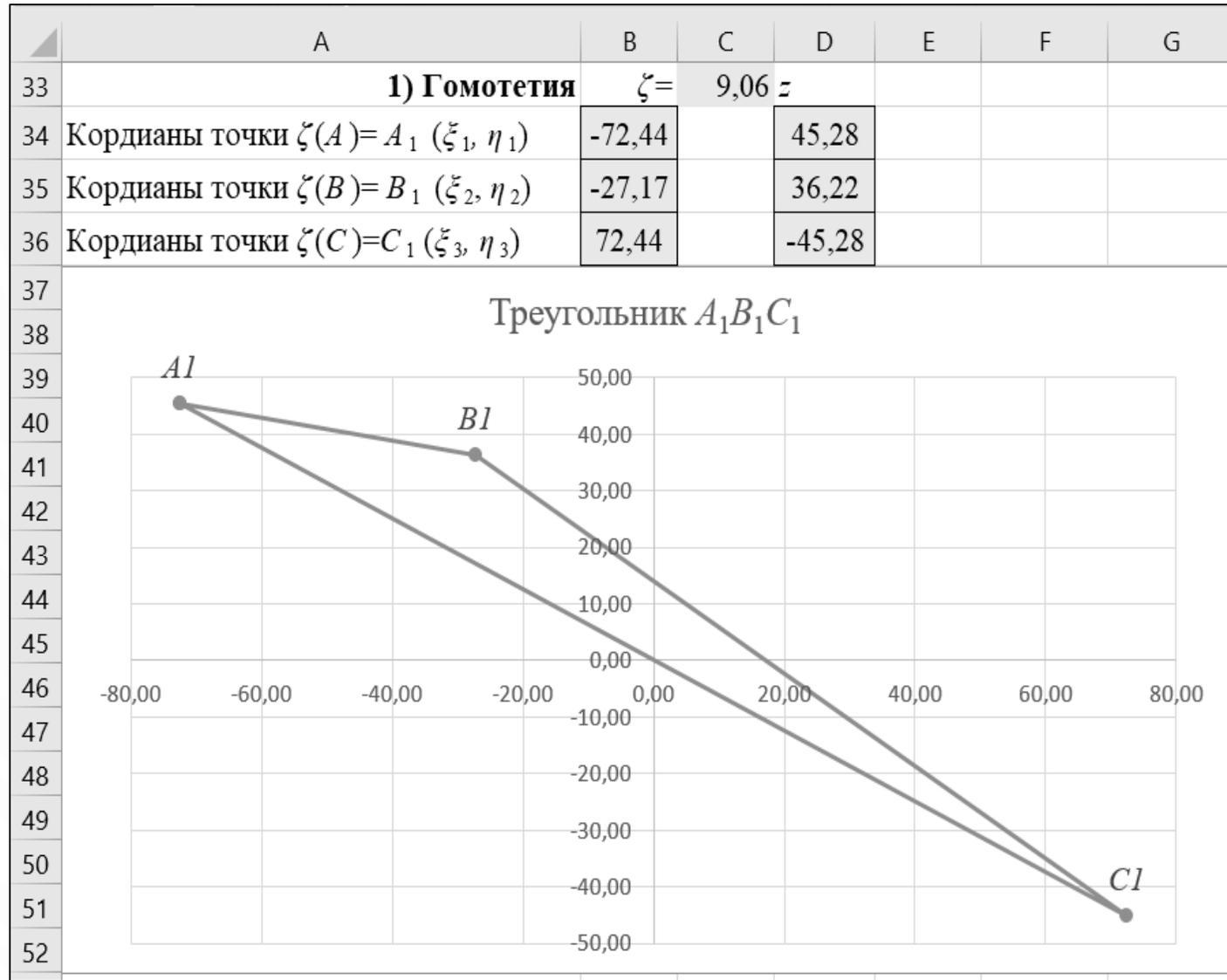


Рис. 3.

На рис. 4 в плоскости  $C_\omega$  показан образ  $A_2B_2C_2$  треугольника  $A_1B_1C_1$  при отображении  $\omega = e^{i\varphi} \zeta$  (повороте  $C_\zeta$  относительно точки  $\zeta = 0$  на угол  $\varphi$ ).

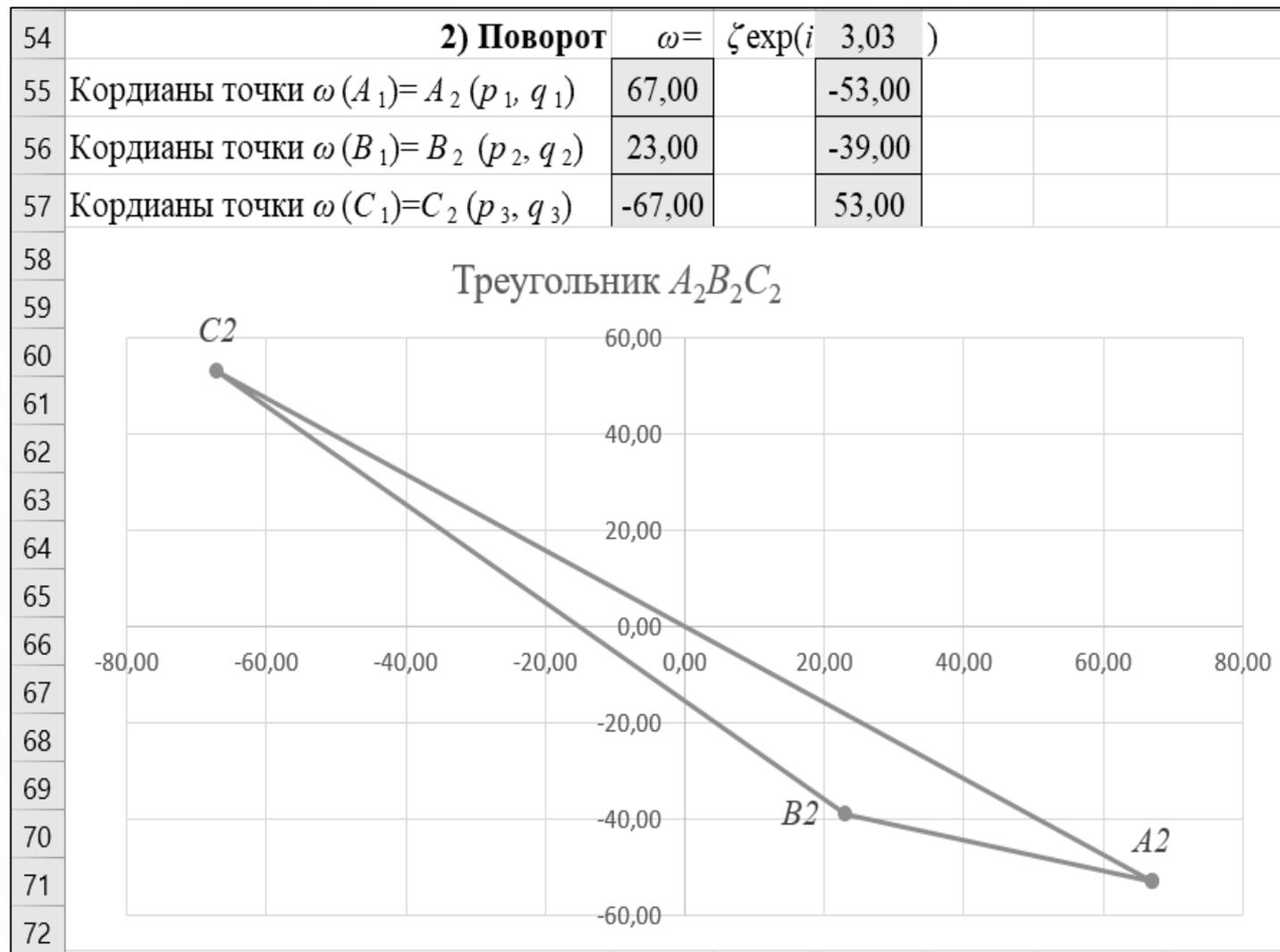


Рис. 4.

Наконец, на рис. 5 в плоскости  $C_w$  показан образ  $A_3B_3C_3$  треугольника  $A_2B_2C_2$  при отображении  $w = \omega + b$  (сдвиге плоскости  $C_\omega$  на вектор  $b$ ).

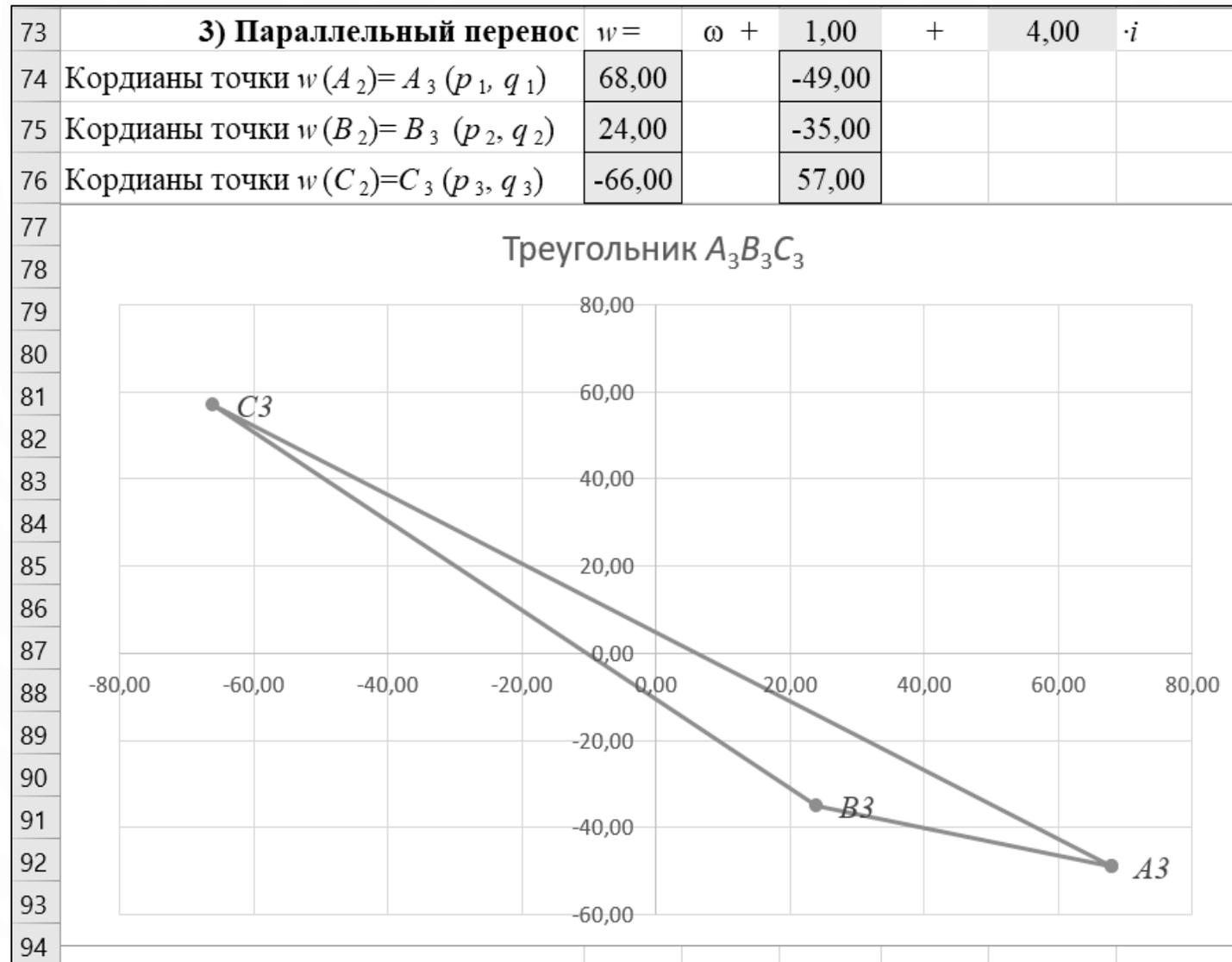
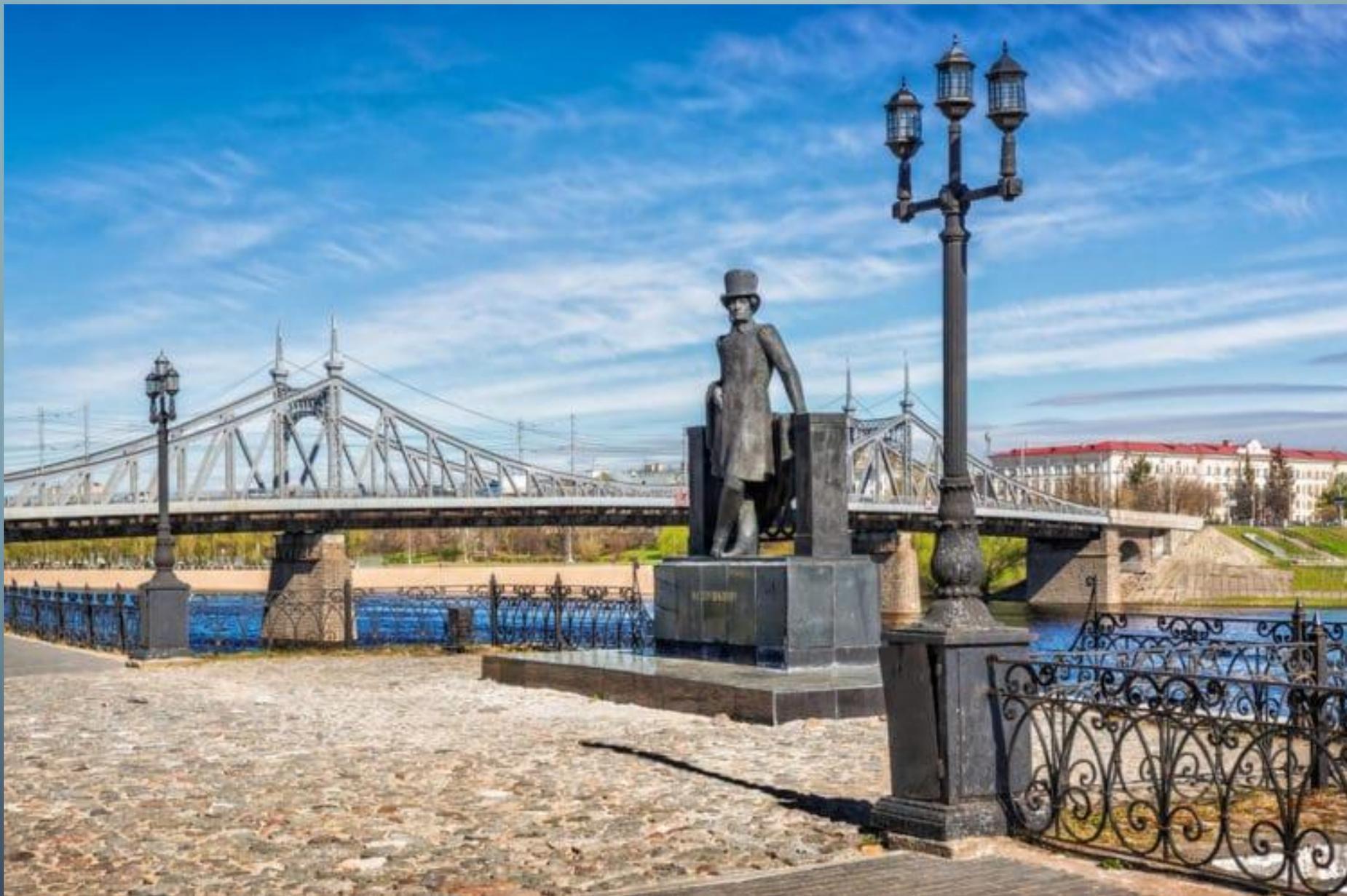


Рис. 5.

# Полезно рассмотреть реализацию вычислений на алгоритмическом языке PascalABC.NET, чтобы показать *междисциплинарную связь математики и языков программирования.*

```
program e1;
uses GraphWPF;
var a1, a2, b1, b2, x1, y1, x2, y2, x3, y3, k, phi, xx1, xx2, xx3, yy1, yy2, yy3: real;
begin
  writeln('Введите коэф для целвой функции w=az+b - целая линейная функция:');
  write('a1='); readln(a1); write('a2='); readln(a2); write('b1='); readln(b1);
  write('b2='); readln(b2); k := sqrt(a1 * a1 + a2 * a2);
  writeln('Модуль целевой функции = ', k:4:2);
  if (a1 > 0) and (a2 >= 0) then phi := ArcTan(a2 / a1) else if (a1 = 0) and (a2 > 0)
  then phi := pi / 2 else if (a1 < 0) then phi := pi + ArcTan(a2 / a1) else
  if (a1 = 0) and (a2 < 0) then phi := 3*pi / 2 else
  if (a1 > 0) and (a2 < 0) then phi := 2 * pi + ArcTan(a2 / a1);
  writeln('Главное значение аргумента а ( $\varphi = \arg a$ ) = ', phi:4:2);
  writeln ('w=az+b является композицией:');
  writeln ('(1) гомотетии  $\zeta =$ ', k:4:2, '* z');
  writeln ('(2) поворота  $\omega = \zeta \exp(i * \phi)$ ', phi:4:2, ');');
  writeln ('(3) параллельного переноса  $w = \omega + (b1:4:2, ') + (b2:4:2, ') * i$ );');
  writeln ('Построение образа треугольника ABC:');
  write ('Введите координаты точки А (x1, y1)='); readln(x1, y1);
  write ('Введите координаты точки В (x2, y2)='); readln(x2, y2);
  write ('Введите координаты точки С (x3, y3)='); readln(x3, y3);
```

```
SetMathematicCoords (-100, 100, -100, true);
  DrawText (x1, y1, 5, 5, 'треугольника ABC');
  Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
  Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0));
  x1:=x1*k; y1:=y1*k; x2:=x2*k; y2:=y2*k; x3:=x3*k; y3:=y3*k;
  Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
  Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0)); DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Гомотетия');
  xx1:=x1; yy1:=y1; xx2:=x2; yy2:=y2; xx3:=x3; yy3:=y3;
  x1:=xx1*cos(phi)+yy1*sin(phi); y1:=yy1*cos(phi)+xx1*sin(phi);
  x2:=xx2*cos(phi)+yy2*sin(phi); y2:=yy2*cos(phi)+xx2*sin(phi);
  x3:=xx3*cos(phi)+yy3*sin(phi); y3:=yy3*cos(phi)+xx3*sin(phi);
  Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
  Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0)); DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Поворот');
  x1:=x1+b1; y1:=y1+b2; x2:=x2+b1; y2:=y2+b2; x3:=x3+b1; y3:=y3+b2;
  Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
  Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0)); DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Параллельный
  перенос');
end.
```



*Спасибо за внимание*