

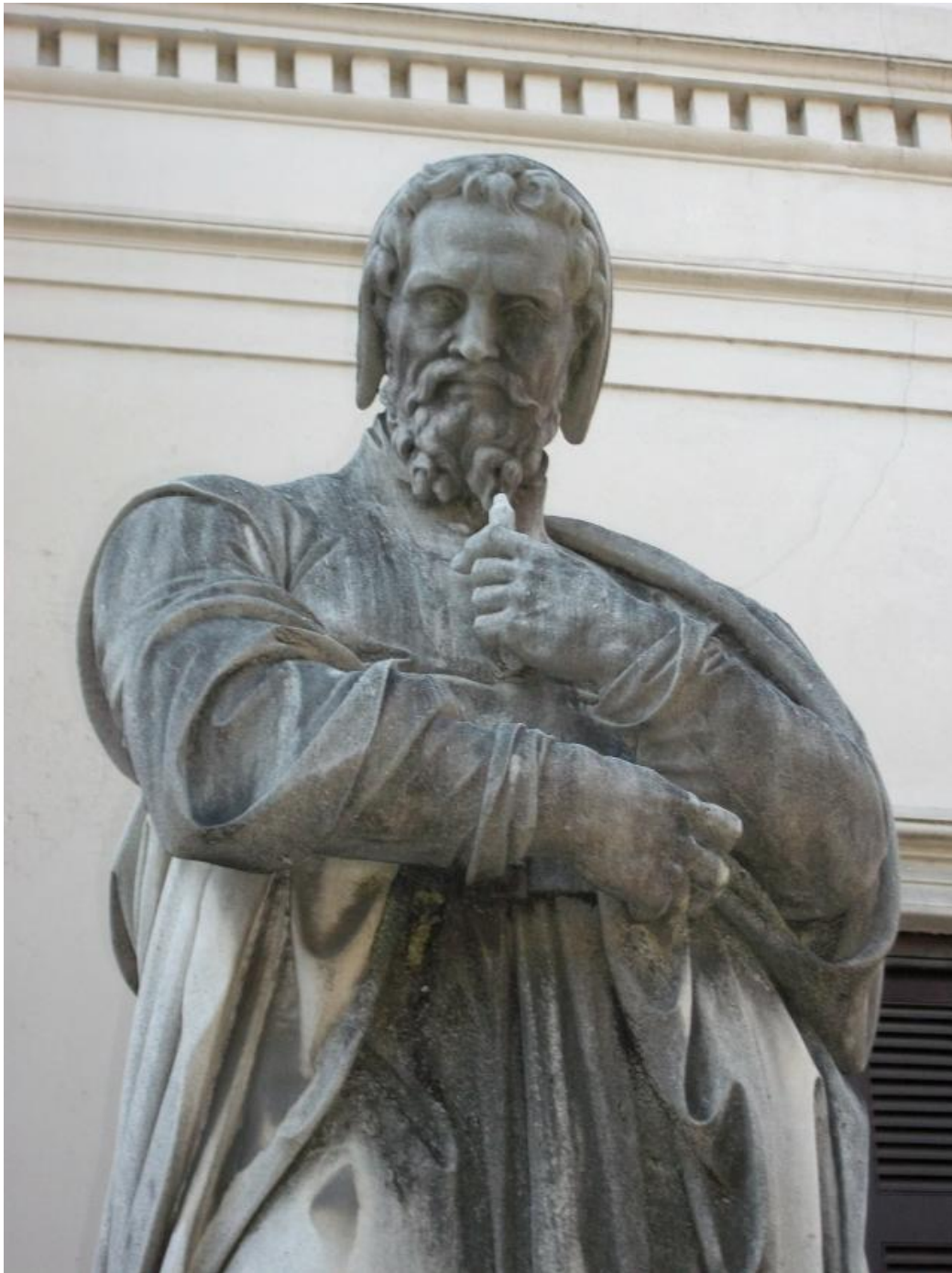
РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА

Елена Михайловна Ершова

Тверской государственный университет, Тверь

Применение систем координат:

В геометрии — для нахождения и исследования уравнений кривых и поверхностей, длин и направлений отрезков, вычисления площадей и углов; в биологии — для построения схем молекул ДНК, диаграмм и графиков, прослеживающих эволюцию развития, изучения экологических проблем и проблем биосферы; в физике — для определения взаимного расположения тел и влияющих на них сил; в географии — для описания местоположений объектов; в военном деле — для составления карт местности, разработки стратегии и тактики; в экономике — для построения графика спроса и предложения, при графическом представлении разнообразных зависимых величин; в медицине — для снятия кардиограммы, проведения флюорографии, разнообразных снимков органов, для лазерных операций; в астрономии — для составления карт звездного неба, запуска спутников и космических кораблей.



Составителем первой географической карты считается Анаксимандр Милетский (около 610 — после 547 до н. э.). Именно он впервые описал широту и долготу места, используя при этом прямоугольные проекции.



Во II веке до н. э., греческий учёный Гиппарх предложил на всю поверхность Земли наложить параллели и меридианы и обозначить их числами.



Создателем координатного метода является Рене Декарт (1596 - 1650).

Им была предложена система нумерации кресел в театре по рядам и местам.

Главное достижение Декарта - построение аналитической геометрии, в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода

координат, который впервые был описан в труде "Рассуждение о методе" в 1637 году.

Изучение метода координат в школе:

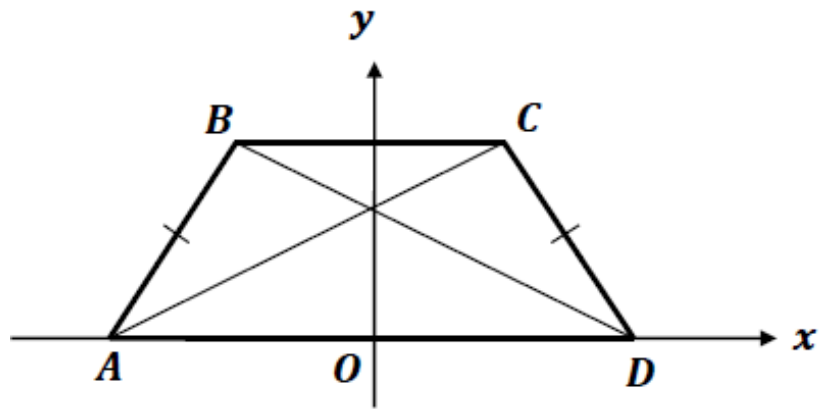
В учебнике Л.С.Атанасяна по геометрии для 7-9 и 10-11 классов разбирается по 2-3 задачи и еще несколько предлагается для самостоятельного решения. В учебнике И.Ф.Шарыгина для 7-9 классов более подробно рассматривается метод введения системы координат на плоскости, исходя из удобства, и подробно разбираются 2 задачи, после чего приводится довольно много задач для самостоятельного решения. В пространстве же подобные задачи не рассматриваются. В учебнике А.В.Погорелова для 7-9 классов среди задач для самостоятельного решения приведены несколько, которые удобно решать, вводя систему координат, но ни теории, ни разобранных примеров на эту тему нет. В учебнике же для 10-11 класса произвольное введение системы координат встречается только в последней теме при выводе уравнений эллипса, гиперболы и параболы. Однако, здесь, как и в учебниках Л.С.Атанасяна, ни слова не говорится о том, как именно удобнее вводить систему координат и почему. Просто говорится: «сделаем так».

Преимущества координатного метода:

Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. С помощью координатного метода некоторые задачи из школьных учебников и из ЕГЭ решаются гораздо проще, поскольку чисто геометрический метод требует интуиции, пространственного воображения, дополнительных построений. При координатном же методе обычно требуется только знание некоторых формул.

Рассмотрим применение координатного метода для решения нескольких геометрических задач на плоскости и в пространстве.

Задача 1: Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны.



$B(-b; c)$, $C(b; c)$, $D(a; 0)$.

Отсюда по формуле расстояния между двумя точками получаем:

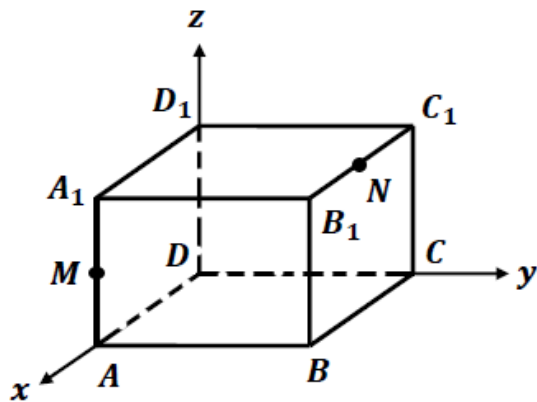
$$\left. \begin{aligned} |AC| &= \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \\ |BD| &= \sqrt{(a+b)^2 + c^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow |AC| = |BD|.$$

Геометрический метод: Известно, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны. Тогда $\triangle ABD = \triangle ACD$ по первому признаку ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, AD – общая). Следовательно, $AC = BD$.

В данной задаче методы практически равноценны. Однако в некоторых планиметрических, а особенно в стереометрических задачах координатный метод нередко является более простым.

Задача 2: Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$, $AA_1 = 2$. Найти угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и $B_1 C_1$.

Координатный метод:



Введем систему координат, как показано на рисунке.

Тогда $A(6; 0; 0)$, $A_1(6; 0; 2)$, $B_1(6; 3; 2)$, $C_1(0; 3; 2)$.

Точка M – середина AA_1 , значит, ее координаты равны полусумме координат точек A и A_1 , т.е.

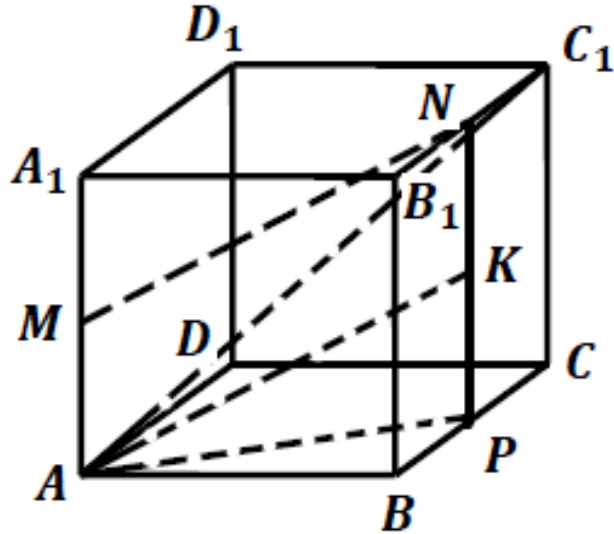
$M(6; 0; 1)$.

Аналогично, N – середина $B_1 C_1$, значит, $N(3; 3; 2)$.

Тогда $\overrightarrow{AC_1} = \{-6; 3; 2\}$, $\overrightarrow{MN} = \{-3; 3; 1\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{MN}|} = \frac{18+9+2}{\sqrt{36+9+4} \cdot \sqrt{9+9+1}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

Геометрический метод:



Проведем прямую NP , параллельную BB_1 . K - середина NP .

$AM \parallel NK$, $AM = NK$, следовательно, $AMNK$ - параллелограмм, откуда $MN \parallel AK$. Значит, искомый угол равен $\angle KAC_1$.

$$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7;$$

$$C_1K = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + B_1B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4} = \sqrt{10};$$

$$AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18};$$

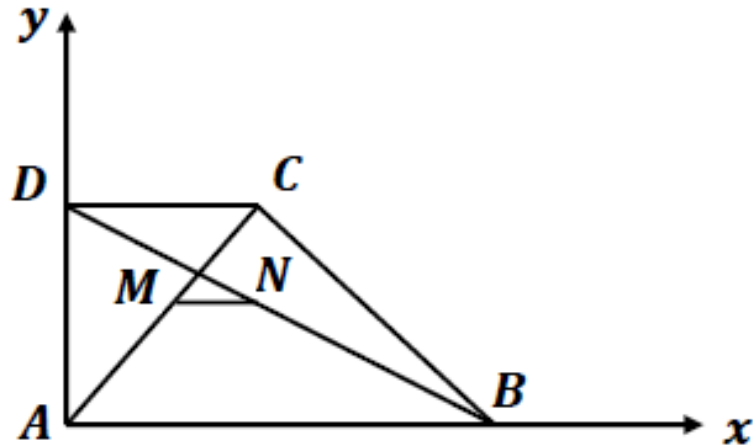
$$AK = \sqrt{AP^2 + KP^2} = \sqrt{18 + 1} = \sqrt{19}.$$

Тогда по теореме косинусов из $\triangle AKC_1$:

$$\cos \angle KAC_1 = \frac{AK^2 + AC_1^2 - KC_1^2}{2AC_1 \cdot AK} = \frac{19 + 49 - 10}{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{19}} = \frac{58}{14\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} \Rightarrow \alpha = \arccos \frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

В данной задаче координатный метод является более коротким, не требующим дополнительных построений, знания геометрических теорем и пространственного воображения. Такой метод подходит даже не очень сильным ученикам, которых, как правило, пугают стереометрические задачи.

Задача 3: Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b , $b > a$. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.



Введем систему координат так, как показано на рисунке.

Пусть $AB = b$, $CD = a$. Обозначим высоту трапеции AD через h . Тогда ее вершины будут иметь координаты $A(0; 0)$, $B(b; 0)$, $C(a; h)$, $D(0; h)$.

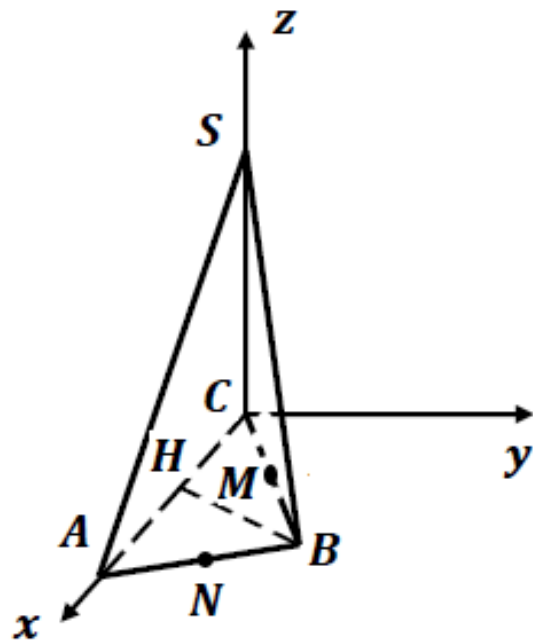
Точка M — середина AC , значит, ее координаты равны полусумме координат

точек A и C , т.е. $M\left(\frac{a}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

Аналогично, N — середина BD , значит, $N\left(\frac{b}{2}; \frac{h}{2}\right)$.

$$\text{Тогда } |MN| = \sqrt{\left(\frac{b}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{b-a}{2}.$$

Задача 4: Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC , длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC , а другая проходит через точку C и середину ребра AB .



Введем систему координат, как на рисунке.

Тогда $A(4\sqrt{2}; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 2)$.

Проведем в $\triangle ABC$ высоту BH . Поскольку треугольник – равносторонний, то BH также является медианой. Значит, $CH = 2\sqrt{2}$.

$$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{32 - 8} = 2\sqrt{6}.$$

Тогда $B(2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}; 0)$. Точка M – середина BC , значит, ее координаты равны полусумме координат точек B и C , т.е. $M(\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$.

Аналогично, N – середина AB , значит, $N(3\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$.

Тогда $\overrightarrow{SM} = \{\sqrt{2}; \sqrt{6}; -2\}$, $\overrightarrow{CN} = \{3\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{SM} \cdot \overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{SM}| \cdot |\overrightarrow{CN}|} = \frac{6+6+0}{\sqrt{2+6+4} \cdot \sqrt{18+6}} = \frac{12}{2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$