Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Тверская региональная общественная организация
«Ассоциация учителей и преподавателей математики
Тверской области»

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
II Всероссийской научно-практической конференции
Тверь, 25–27 марта 2021 года

ТВЕРЬ 2021

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я43
П27

Редакционная коллегия:

Ю.В. Чемарина
кандидат физико-математических наук, доцент,
декан математического факультета ТвГУ

А.А. Голубев
кандидат физико-математических наук, доцент,
председатель региональной общественной организации
«Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области»

П27 **Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации:** материалы II Всероссийской научно-практ. конф. (25–27 марта 2021 года, г. Тверь) // под ред. Ю.В. Чемариной, А.А. Голубева. – Тверь: Тверской государственный университет, 2021. – 224 с.

ISBN 978-5-7609-1629-7

В сборнике трудов представлены материалы II Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 25–27 марта 2021 г. в г. Твери. Организаторами конференции выступили математический факультет Тверского государственного университета и Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области».

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я43

ISBN 978-5-7609-1629-7

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 530.12

ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ ВБЛИЗИ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ СО СКАЛЯРНЫМ ПОЛЕМ

Андре Лумонансони Эдуарду
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: leandre@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *орбиты, приливные силы, скалярное поле, черная дыра*

Аннотация. Мы рассматриваем статические асимптотически плоские сферически-симметричные черные дыры, которые поддерживается минимально связанным скалярным полем с произвольным потенциалом самодействия. Мы рассматриваем скалярную черную дыру как простую модель сверхмассивных черных дыр в центрах галактик, окруженных темной материей. И радиус самой внутренней стабильной круговой орбиты, и радиус горизонта событий такого объекта меньше, чем у черной дыры Шварцшильда с такой же массой. При этом они могут быть сколь угодно малыми, так что приливные силы, действующие на звезду, которая вращается вокруг черной дыры со скалярным полем около своей фотонной сферы, могут быть чрезвычайно большими и могут разрушить звезду. Это, в свою очередь, означает, что приливные эффекты могут играть важную роль для интерпретации наблюдений в галактической астрофизике.

1. **Введение**. Одна из ключевых проблем современной астрофизики – уверенное определение природы сильно гравитирующих объектов в центрах нормальных галактик [1 – 4]. Наблюдения звезд, разрушенных приливными силами, дают нам новые возможности для идентификации этих объекты. В данной статье мы сравниваем приливные силы в центральных областях черных дыр со скалярным полем некоторой фиксированной массы с таковыми в черной дыре Шварцшильда той же массы. Мотивация возникает из двух следующих концепций о сверхмассивных черных дырах в центрах галактик. Такие черные дыры окружены темной материей [5 – 7] и, таким образом, не следует рассматривать как объекты, расположенные в пустом пространстве. В нашем подходе темная материя в галактиках моделируется нелинейным самогравитирующим скалярным полем [7 – 9].

2. Сферически-симметричные черные дыры

Действие для самодействующего вещественного скалярного поля, минимально связанного с гравитацией, имеет вид

$$S=\frac{1}{8\pi}\int\left(-\frac{R}{2}-\ \langle d\emptyset,d\emptyset\rangle-2V(\emptyset)\sqrt{|g|}d^4x\right), \qquad (1)$$

где R – скалярная кривизна, угловые скобки обозначают точечное скалярное произведение с относительно метрики $\emptyset$ – скалярное поле, а $V(\emptyset)$ – его потенциал самодействия. Для наших целей удобно записать метрику статического сферически-симметричного пространства-времени в координаты области как

$$ds^2=Adt^2-\frac{dr^2}{f}-r^2(d\theta^2+sin^2\theta d\varphi^2)\,,\qquad A=e^{2F}f\,, \qquad (2)$$

где F и f зависят только от радиальной координаты. Уравнения поля Эйнштейна-Клейна-Гордона сводится к трем независимым уравнениям

$$-\frac{f'}{r}-\frac{f-1}{r^2}=\varepsilon\emptyset'^2 f+2V, \quad (3)$$

$$\frac{f}{r}\left(2F'+\frac{f'}{f}\right)+\frac{f-1}{r^2}=\varepsilon\emptyset'^2 f-2V, \quad (4)$$

$$-f\emptyset''-\frac{\emptyset'}{2}f'-\emptyset' f\left(F'+\frac{1}{2}\frac{f'}{f}+\frac{2}{r}\right)+\varepsilon\frac{dV}{d\emptyset}=0, \quad (5)$$

где штрих означает дифференцирование по r.

Наш подход основан на варианте «метода восстановленного потенциала» для построения решения уравнений Эйнштейна-Клейна-Гордона [10 –14]:

$$F(r)=-\int_r^\infty \emptyset'^2 r dr\ ,\ \xi(r)=r+\int_r^\infty(1-e^F)dr, \quad (6)$$

$$A(r)=2r^2\int_r^\infty \frac{\xi-3M}{r^4}e^F dr\ ,\quad f(r)=e^{-2F}A, \quad (7)$$

$$\tilde{V}(r)=\frac{1}{2r^2}\left(1-3f+r^2\emptyset'^2 f+2e^{-F}\frac{\xi-3M}{r}\right), \quad (8)$$

которые сводят уравнения (3) - (5) к тождествам. Здесь мы будем использовать квадратуры следующим образом [14]. Прежде всего отметим, что $F<0$, $\xi>0, \xi'=e^F>0$, и $\xi''=r\emptyset'^2 e^F>0$ для всех $r>0$. Поэтому для заданной строго монотонно возрастающей и выпуклой вниз функции $\xi\ (r)$, удовлетворяющей условиям (10), можно последовательно вычислить функции $e^{F(r)}$, $A\ (r), f\ (r)$.

Из квадратуры (7) и асимптотических условий (10) имеем

$$A(r)=1-\frac{2M}{r}+o(1/r)\ ,\ r\to\infty\ ,\qquad A(r)=\frac{2}{3}\frac{\xi\ (0)-3M}{r}e^{F(0)}+O(1)\ ,\ r\to 0,$$

так что параметр M – это масса Шварцшильда, а рассматриваемое пространство-время – это черная дыра тогда и только тогда, когда $\xi\ (r)<3M$. Из (7) и условия $\xi\ (r)$ видно, что радиус горизонта событий r_h черной дыры с массой $M>\xi\ (0)/3$ всегда меньше соответствующего радиус Шварцшильда $r_s=2M$. Кроме того, $r_h\to 0+0$, если $M\to\xi\ (0)/3+0$. По большей части, нас интересуют компактные черные дыры, массы которых достаточно близко к пороговому значению $\xi\ (0)/3$: из условия $M\gtrapprox\xi\ (0)/3$ следует $r_h\ll 2M$.

3. Приливные силы в системе координат центра масс

Мы будем использовать ортонормированный базис, связанный с метрикой (2):

$$e_0=\frac{1}{e^F\sqrt{f}}\partial_t\ ,\ e_1=\sqrt{f}\partial_r\ ,\ e_2=\frac{1}{r}\ \partial_\theta\ ,\ e_3=\frac{1}{r sin\theta}\ \partial_\varphi\ , \quad (9)$$

и

$$e^0=e^F\sqrt{f}dt,\ e^1=\frac{1}{\sqrt{f}}dr\ ,\ e^2=rd\theta\ ,\ e^3=r sin\theta d\varphi. \quad (10)$$

В ортонормированном базисе связность ω_j^i подчиняется соотношениям $\omega_0^\alpha=\omega_\alpha^0\ ,\ \omega_\beta^\alpha=-\omega_\alpha^\beta\ \ (\alpha,\beta=1,2,3)$. Связность и кривизну можно найти из структурных уравнений Картана. Алгебраически независимые 1-формы и компоненты кривизны в базисах (9) и (10) соответственно равны

$$\omega_0^1 = \sqrt{f}\left(\frac{f'}{2f} + F'\right)e^0 = \sqrt{f}\frac{A'}{2A}e^0\,, \omega_1^2 = \frac{\sqrt{f}}{r}e^2\,, \omega_1^3 = \frac{\sqrt{f}}{r}e^3,\ \omega_2^3 = \frac{cot\theta}{r}e^3,$$

и

$$R_{0101} = -\frac{f''}{2} - \frac{3}{2}F'f' - F''f - F'^2 f = \frac{1-f}{r^2} + \emptyset'^2 f,\quad R_{1212} = R_{1313} = \frac{f'}{2r}$$

$$R_{0202} = R_{0303} = -\frac{F'f}{r} - \frac{f'}{2r} = -\frac{f'}{2r} - \emptyset'^2 f,\quad R_{2323} = -\frac{1-f}{r^2} \tag{11}$$

Будем рассматривать жидкую звезду, движущуюся по геодезической в пространстве-времени черной дыры с метрикой (2). Центр масс следует рассматривать как движущийся по геодезической, в то время как другие части звезды отклоняются от геодезического движения. Будем считать, что геодезическая расположена в экваториальной плоскости, и что масса звезды намного меньше массы черной дыры. Пусть $U = U^i e_i$ – четыре-скорость центра масс, такая что $U^2 = 0$. Интегралы движения можно записать как

$$E = \sqrt{A}U^0, J = rU^3\ ,\qquad (U^1)^2 = \frac{1}{f}\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \frac{1}{A}(E^2 - Veff)\,,\ Veff = \left(1 + \frac{J^2}{r^2}\right), \tag{12}$$

где E - удельная энергия, J - удельный угловой момент.

Для простоты и аналитической наглядности ниже мы будем рассматривать круговые геодезические с $U^1 = 0$. На круговой орбите уравнения геодезических для компоненты U^1 и соотношения (11) дают

$$\frac{rA'}{2A}(U^0)^2 = (U^3)^2\,, E^2 = A\left(1 - \frac{rA'}{2A}\right)^{-1}\,,\ J^2 = \frac{r^3A'}{2A}\left(1 - \frac{rA'}{2A}\right)^{-1}. \tag{13}$$

Правильное описание приливных эффектов должно основываться на «мгновенной местной инерциальной системе отсчета» в котором центр масс звезды в момент наблюдения покоится. Другими словами, в соответствующих касательных пространствах вдоль геодезической, выберем дуальные ортонормированные базисы (они имеют очевидные формы)

$$\varepsilon_0 = U = U^0 e_0 + U^3 e_3\,,\qquad \varepsilon_1 = cos(\sigma s)e_1 - sin(\sigma s)e_3^*\,,\qquad \varepsilon_2 = e_2,$$
$$\varepsilon_3 = sin(\sigma s)e_1 + cos(\sigma s)e_3^* \tag{14}$$

$$\varepsilon^0 = U^0 e^0 - U^3 e^3\,,\qquad \varepsilon^1 = cos(\sigma s)e^1 - sin(\sigma s)e_*^3\,,\qquad \varepsilon^2 = e^2,$$
$$\varepsilon^3 = sin(\sigma s)e^1 + cos(\sigma s)e_*^3 \tag{15}$$

где $e_3^* = U^3 e_0 + U^0 e_3\,,\ e_*^3 = -U^3 e^0 + U^0 e^3,\ \sigma = \frac{\omega_0^1(U)}{U^3} = \frac{\omega_1^3(U)}{U^0} = \frac{\sqrt{f}}{r}\frac{U^3}{U^0}.$

Частота σ определяется из условий параллельного переноса пространственных базисных векторов: $\nabla_U \varepsilon_\alpha = 0\,, \alpha = 1,2,3$; следует учитывать выражения (11) и первое равенство в (13), которое выполняется на круговых орбитах.

Составляющие удельной приливной силы (ускорения) даются выражением

$$F_t^i \equiv \frac{D^2\eta^i}{ds^2} = R_{jkl}^i U^j U^k \eta^l = P_l^i n^l,$$

где n^i вектор «соединяющий» центр масс с какой-либо другой точкой звезды, и $P = R(.,U,U,.)$ – приливной тензор. Для простоты вычислений (и без потери общности), в (14) и (15) можно положить s = 0, тогда из (11) - (13) следует, что

$$P = \left(1 - \frac{rA'}{2A}\right)^{-1} [U(r)\varepsilon_1 \otimes \varepsilon^1 + v(r)\varepsilon_2 \otimes \varepsilon^2 + \omega(r)\varepsilon_3 \otimes \varepsilon^3] \qquad (16)$$

где

$$U(r) = \frac{1-f}{r^2} + \emptyset'^2 f + \frac{f'A'}{4A}\,,\ v(r) = -\frac{f'}{2r} - \emptyset'^2 f - \frac{A'}{2A}\frac{1-f}{r}\,,\ \omega(r) = -\frac{f'}{2r} - \emptyset'^2 f.$$

Непосредственно прямым дифференцированием в (7) можно проверить, что

$$1 - \frac{rA'}{2A} = \frac{\xi - 3M}{rA} e^F > 0$$

в регионе, в котором $\xi > 3M$. Прежде всего отметим, что равенство $\xi = 3M$ определяет орбиту фотона некоторого радиуса r_{ph} ; и, во-вторых, для черных дыр со скалярным полем различные численные модели показать, что (аналогично черным дырам Шварцшильда) $r_{ph} \approx (3/2)r_h$ и $r_{ISCO} \approx 3r_h$.

4. Модельный пример

Как это обычно делается в гравитационной физике, мы будем далее использовать массу M как единицу длины, т.е., с этого момента будет установлено $M = 1$. Строго монотонная кусочно аналитическая функция

$$\begin{aligned} &\xi = a + (1 - a/6)r + (a/108)r^2, \qquad 0 < r \le 6\,, \\ &\xi = r + 2a/r\,, \qquad 6 \le r < \infty, \end{aligned} \qquad (17)$$

имеет непрерывные производные до второго порядка в точке $r = 6$ и определяет скалярное поле черной дыры для $0 < a < 3$, где a – параметр интенсивности скалярного поля. Явные выражения для соответствующих метрических и полевых функций слишком громоздки, чтобы их можно было представить здесь. Метрические функции A и f показаны на рисунке 1 (левая панель) в сравнении с черная дыра Шварцшильда той же массы M. В первом случае $r_h \approx 0.242\,, r_{ph} \approx 0.368$, и $r_{ISCO} \approx 0.821$, а в последнем случае $r_{Sch} = 2$, $r_{ph} = 3$, и $r_{ISCO} = 6$; заметим, что радиус r измеряется в единицах M. Одно из важных следствий этого различия состоит в том, что следующее: для вектора отклонения приливные силы на радиусе r_{ISCO} обычно порядка $|\eta|$ и $10^{-3}|\eta|$ для черной дыры со скалярным полем и черной дыры Шварцшильда соответственно.

Для определенности рассмотрим звезду солнечного типа, вращающуюся вокруг сверхмассивной черной дыры вблизи (в перицентр) самая внутренняя стабильная круговая орбита. Звезда претерпевает истечение материи или разрушение, если сила притяжения F_g на поверхности звезды равно или, соответственно, намного меньше приливной силы F_t на поверхности. Для сверхмассивной черной дыры Sgr A* $\left(M \approx 4 \cdot 10^6 M_{\odot}\right)$ в нашей Галактике, грубую оценку этой ситуации можно получить следующим образом. Пусть M_* и R_* - масса и радиус звезды соответственно. В единицах M имеем $M_* \approx 2{,}5 \cdot 10^{-7}$ и $R_* \sim 7 \cdot 10^{-2}$, так что $F_g \sim M_*/R_*^2 \sim 5 \cdot 10^{-5}$, тогда как приливная сила $F_t^{(v)} \sim 7 \cdot 10^{-5}$, если черная дыра находится в вакууме, но $F_t^{(sf)} \sim 7 \cdot 10^{-2}$, если она окружена скалярным полем. В этом случае сила $F_t^{(v)}$приводит к истечению вещества с поверхности звезды, а сила $F_t^{(sf)}$ приводит к разрыву звезды.

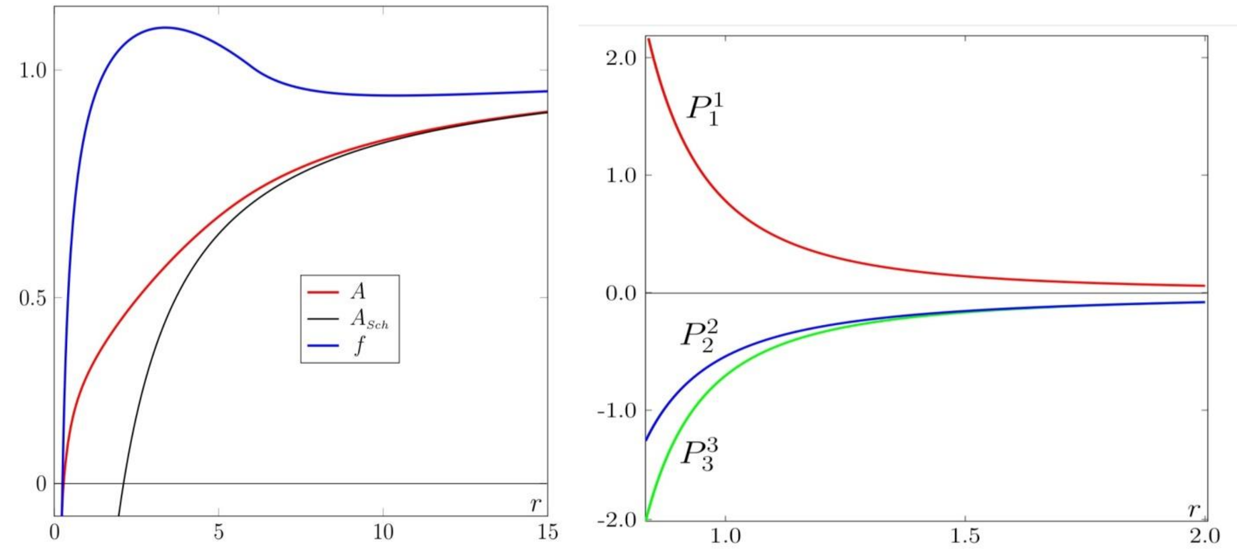


Рис. 1. На левой панели показаны основные метрические функции, определенные с помощью распределения поля (17), в сравнении с метрикой Шварцшильда с той же массой: $r_h \approx 0.242$, $r_{ph} \approx 0.368$, и $r_{ISCO} \approx 0.821$. Всюду радиус r измеряется в единицах массы. На правой панели показаны компоненты приливного тензора $P = P^1_1 \varepsilon_1 \otimes \varepsilon^1 + P^2_2 \varepsilon_2 \otimes \varepsilon^2 + P^3_3 \varepsilon_3 \otimes \varepsilon^3$, которые определены выражением (16)

5. Заключение

Мы рассматриваем результаты этой статьи как «первое приближение» к будущей реалистичной теоретической модели деформаций и разрушений звезд в приливном поле сверхмассивной черной дыры, расположенной в центре нормальной галактики и, следовательно, окруженной темной материей, которая, в свою очередь, сосредоточена в области горизонта. В нашей модели, в которой темная материя рассматривается как самогравитирующее скалярное поле, приливные силы возрастают до бесконечности, поскольку радиус орбиты приближается к орбите фотона; это видно непосредственно из выражений (12) и (13). В разделе 4 наглядный пример также показывает, что звезда солнечного типа будет разрушена приливными силами в нашей модели. Однако, если окажется, что Sgr A* – вакуумная черная дыра, то звезда испытывает только истечение вещества. В последнем случае белые карлики и нейтронные звезды не претерпят заметного воздействия от приливных сил в области $r > r_h$; это означает, что эти эффекты становятся совершенно ненаблюдаемыми.

Несмотря на ограничение нашего рассмотрения случаем круговых орбит, численное моделирование проблемы показывает, что полученные таким образом результаты имеют более общий смысл: можно быть уверенным, что радиальные и азимутальные приливные силы в перицентре не меньше по величине, чем на круговой орбите того же радиуса. Можно надеяться, что будущем точные астрономические инструменты увеличат возможности различения черных дыр в центрах галактик от других сильно гравитирующих объектов, использующих, среди прочего, приливные эффекты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kardashev N S, Novikov I D, and Shatskiy A A 2007 Int. J. Mod. Phys. D, V. 16, 909.
2. Joshi P S, Malafarina D, and Narayan R 2014 Class. Quant. Grav. V. 31, 015002 (arXiv: 1304.7331).
3. Li Z and Bambi C 2014 Phys. Rev. D, V. 90, 024071 (arXiv: 1405.1883).
4. Goel A, Maity R, Roy P, and Sarkar T C 2014 Phys. Rev. D, V. 91, 104029 (arXiv: 1504.01302).
5. Ivanov P B and Novikov I D 2001 Astrophys. J., V. , V. 549, 467 (arXiv: astro-ph/0005107).
6. Ivanov P B, Chernyakova M A, and Novikov I D 2003 MNRAS, V. 338, Issue 1, 147 (arXiv: astro-ph/0205065).
7. van Velzen S et al 2019 Astrophys. J., V. 878, Issue 2, 82 (arXiv: 1809.00003.
8. Dokuchaev V I and Eroshenko Yu N 2015 JETP Letters, V. 101, 777 (doi: 10.1134/S0021364015120048).
9. Zakharov A F 2019 Int. J. Mod. Phys. D, V. 28, 1941003 (arXiv: 1901.08343).
10. Bechmann O and Lechtenfeld O 1995 Class. Quantum Grav. , V. 12, 1473 (arXiv: gr-qc/9502011).
11. Bronnikov K A and Shikin G N 2002 Grav. Cosmol. , V. 8 107 (arXiv: gr-qc/0109027).
12. Tchemarina Ju V and Tsirulev A N 2009 Grav. Cosmol. , V. 15, 94.
13. Azreg-Ainou M 2010 Gen. Rel. Grav. 42 1427 (arXiv: gr-qc/0912.1722).
14. Solovyev D A and Tsirulev A N 2012 Class. Quantum Grav., V. 29, 055013.
15. De Laurentis M, Younsi Z, Porth O, Mizuno Y, and Rezzolla L 2018 Phys. Rev. D 97, 104024.
16. Stashko O S and Zhdanov V I 2018 Gen. Relat. Grav. , V. 50, 105 (arXiv: 1702.02800).
17. Potashov I M, Tchemarina Ju V, and Tsirulev A N 2019 Eur. Phys. J. C, V. 2019, 79:709 (arXiv: 1908.03700).
18. Potashov I M, Tchemarina Ju V, and Tsirulev A N 2019 Journal of Physics: Conference Series, V. 1390, 012097 (arXiv: 1912.03654).

УДК 004.032.26

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

Андреева Елена Аркадьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Кожеко Людмила Георгиевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Ключевые слова: *нейронная сеть, дискретная задача оптимального управления, искусственный интеллект, нейросетевое управление.*

Аннотация. В работе искусственная нейронная сеть, формализуемая как задача управления динамической системой с запаздыванием, исследуется с помощью методов математической теории оптимального управления.

Непрерывное развитие таких отраслей как авиация, ракетная техника, а также наукоёмких технологий приводит к потребности в разработке новых более совершенных средств автоматизации, основанных на искусственном интеллекте, нелинейном управлении и современных информационных и коммуникационных технологиях. Среди них важную роль играет робототехника, нейроинформатика, нейронные сети и другие системы и технологии.

При этом очень важную роль играет система управления робота, которая должна решать поставленные роботу задачи, а также обеспечивать взаимодействие всех его функциональных частей.

В работе рассматриваемая искусственная нейронная сеть формализуется как задача оптимального управления динамической системой с запаздыванием и исследуется с помощью методов математической теории оптимального управления и методов оптимизации. Целью управления искусственной нейронной сетью является ее обучение и построение оптимального управления ансамблем нейронов с целью оптимизации заданного функционала в задаче оптимального управления.

Информационная система состоит из датчиков (сенсорных элементов) внутренней информации, конструктивно встроенных в двигательную систему, и внешней информации, сигнализирующей о состоянии окружающей среды. Управляющая система включает в себя электронные преобразователи цифровой и аналоговой информации, микропроцессоры или компьютеры для обработки сенсорной информации от информационной системы и управления двигательной системой вместе со встроенным программным обеспечением реального времени.

Целью управления роботом является его перевод из начального состояния в заданное конечное состояние или осуществление (отслеживание) заданного программного движения. Синтезируемые для управляющей системы законы управления должны обеспечивать требуемые показатели качества (точность, быстродействие) по всем управляемым координатам с учётом заданных ограничений на управления и состояния двигательной системы. Кроме того, для практических целей важно, чтобы эти законы управления были оптимальными (по отношению к заданному функционалу качества), гибкими (по отношению к изменению цели управления) и адаптивными (по отношению к неизвестным параметрам и возмущениям). Несмотря на противоречивость этих требований, искомые законы управления могут быть синтезированы в аналитической форме.

Однако в ряде случаев этого недостаточно и требуется синтезировать адаптивные законы управления, обеспечивающие достижение цели управления в широком классе неопределённости моделей динамики двигательной системы. Для таких задач используется интеллектуальное управление.

Принцип интеллектуального управления роботами основывается на использовании в их управляющей системе элементов искусственного интеллекта: моделирование управляющей системой неизвестных препятствий на основе локальной сенсорной информации; планирование кратчайших маршрутов и траекторий движения в среде с известными или неизвестными препятствиями; распознавание образов по внешней информации; диагностика состояний двигательной системы.

Приведём таблицу методов нейросетевого управления:

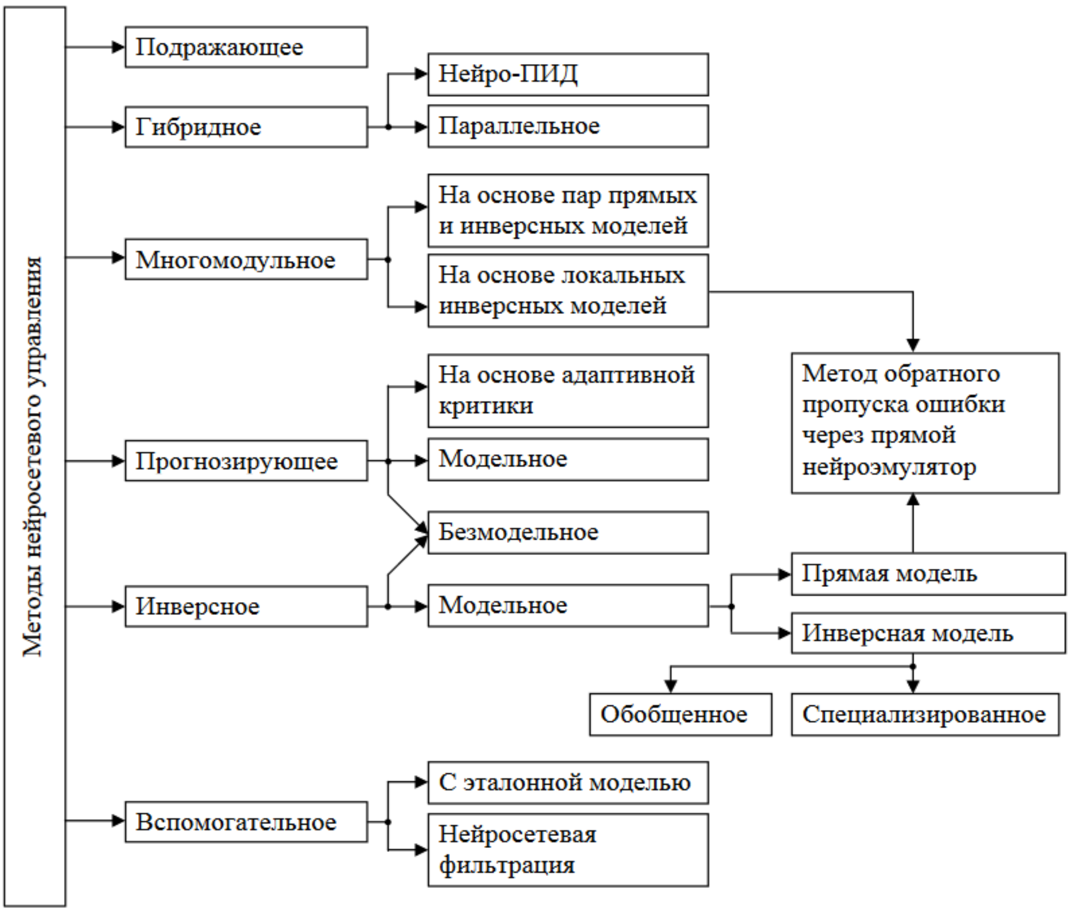


Рис. 1. Методы нейросетевого управления

Под нейроуправлением понимается использование искусственных нейронных сетей для выработки управляющих сигналов в системах управления. Использование нейронных сетей эффективно при наличии в процессе обучения достаточно большого объёма обучающей информации, а также грамотного синтеза многослойной нейронной сети (наличие множественных нелинейных функций активации в многослойной нейронной сети обеспечивает эффективную реализацию достаточно гибких нелинейных преобразований). Это важно для решения задач с существенными нелинейностями, для которых традиционные подходы пока не дают практически реализуемых решений.

Методы адаптивного и интеллектуального управления нашли применение в различных отраслях машиностроения и промышленности. В частности, были созданы транспортные роботы с элементами искусственного интеллекта, испытаны макеты планетоходов с адаптивным и интеллектуальным управлением, спроектированы системы управления для бортовых манипуляторов орбитального комплекса “Буран”, внедрены адаптивные робототехнические системы для порошковой металлургии и лазерной обработки материалов.

Рассмотрим случай, когда двигательная система робота представляет собой манипулятор с поступательными и вращательными кинематическими парами, имеющий m степеней. В этом случае управляемые движения робота описываются нелинейными уравнениями Лагранжа II рода вида:

$$U(q,\dot{q},\ddot{q}) \equiv A(q)\ddot{q} + B(q,\dot{q}\ ) = u, q(t_0) = \ q_0, \dot{q(t_0)} = \ \dot{q_0},$$

где $A(q)$ - матрица $[m \times m]$ - функция размерности, характеризующая массо - инерционные свойства манипулятора; $B(q,\dot{q}\ )$– m- мерная вектор-функция, характеризующая действие сил тяжести, кориолисовых и центробежных сил, u - m-мерный вектор управляющих моментов, развиваемых в приводах манипулятора.

Рассмотрим пример использования управления динамической системой с помощью искусственной нейронной сети, состоящей из n нейронов

$$\ddot{x}_i(t) + \varepsilon\left(1-\beta_i {x_i}^2(t)\right) + {\nu_i}^2 x_i(t) = u_i(t) + \ F\ (\textstyle\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}(t)\left(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)\right)) \qquad (1)$$

$i = 1,..,N, t \in [0,T]$.

Введём следующие обозначения

$$\dot{x}_i(t) = y_i(t), \qquad (2)$$

$$z_j(t) = y_j(t\ ),\ \ j = 1,..,N, t \in [0,T] \qquad (3)$$

уравнение (1) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_i(t) = y_i(t), i = 1,..,\in [0,T] \qquad (4)$$

$$\dot{y}_i(t) = -{\nu_i}^2 x_i(t) - \varepsilon\left(1-\beta_i {x_i}^2(t)\right) + u_i(t) + F\ \ (\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}(t)\left(y_j(t) - y_i(t)\right)) \qquad (5)$$

с начальными условиями

$$x_i(0) = a_i\ , \qquad (6)$$

$$\dot{x}_i(t) = \varphi_i(t),\ \ i = 1,..,N,\ \ \ t \in \left[-\max\{h_j\}, 0\right] \qquad (7)$$

и ограничениями на функцию управления

$$|u_i(t)| < B_i, |\omega_{ij}(t)| < C_{ij} \tag{8}$$

Здесь $x_i(t)$ – амплитуда колебаний i-нейрона; нейрона; $u(t)$ – функция управления, N – количество нейронов

Целью управления является обучение ИНС и включает в себя построение процесса, при котором минимизируются в конечный момент времени характеристики нейронов принимают заданные значения.

Задача оптимального управления состоит в минимизации функционала:

$$I(u) = R_1 \int_0^T f_0(t, x(t), u(t), \omega(t))dt + R_2 \Phi(x(T)) \inf \tag{9}$$

при ограничениях (4) – (8). Здесь R_1, R_2 – весовые коэффициенты в двухкритериальной задаче оптимального управления.

Для построения функции управления в задаче (4)–(9) воспользуемся принципом максимума для динамических систем с запаздывающим аргументом, описанным в [2], [3], [4].

Функция Понтрягина задачи имеет вид:

$$H(\lambda_0, x, y, z, p(t), q(t), u, \omega) = -\lambda_0 R_1 f_0(t, x, u, \omega) + \sum_{i=1}^{N} p_i(t) y_i +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} q_i(t)(-\nu_i^2 x_i - \varepsilon\left(1 - \beta x_i^2\right) + u_i + F \quad \sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}\left(z_j - y_i\right)), \tag{10}$$

$z_j = y_j\left(t - h_j\right),\ p(t),\ q(t)$ – сопряженные вектор-функции.

Для построения оптимального управления запишем необходимые условия оптимальности решения.

Тогда краевая задача принципа максимума запишется в виде:

$$\dot{x}_i(t) = y_i(t), i = 1, .., \in [0, T]$$

$$\dot{y}_i(t) = -\nu_i{}^2 x_i(t) - \varepsilon\left(1 - \beta_i x_i{}^2(t)\right) + u_i(t) + F\ \left(\sum_{j=1}^{N} \omega_{ij}(t)\left(y_j(t) - y_i(t)\right)\right)$$

$$p_k(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_k}\left(\bar{x}(T)\right),$$

$$q_k(T) = -\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}\left(\bar{x}(T)\right),$$

$$q_k(t) = 0, t > T, k = 1, \dots, N.$$

$$\overline{\omega_{ij}}(t) = \begin{cases} \dfrac{q_i(t)\left(\overline{z}_j - \overline{y}_i\right)}{2\lambda_0 R_2}, \text{если } \left|\dfrac{q_i(t)\left(\overline{z}_j - \overline{y}_i\right)}{2\lambda_0 R_2}\right| \le C_i \\ C_i, \text{если } \dfrac{q_i(t)\left(\overline{z}_j - \overline{y}_i\right)}{2\lambda_0 R_2} > C_i \\ -C_i, \text{если } \dfrac{q_i(t)\left(\overline{z}_j - \overline{y}_i\right)}{2\lambda_0 R_2} < -C_i \end{cases}$$

Сопряженная система

$$\dot{p}_k(t) = q_k(t)\nu_k^2 - 2q_k(t)\varepsilon\beta\bar{x}_k(t),$$

$$\dot{q}_k(t) = -p_k(t) + \sum_{i=1}^{N} q_i(t)\omega_{ik}(t) - \sum_{i=1}^{N} q_i(t+h_i)\omega_{ik}(t),$$

удовлетворяет граничным условиям:

$$p_k(T) = -2\lambda_0(x_k(T) - A_k)R_3,$$

$$q_k(t) = 0, t \geq T.$$

$$i = \overline{1,N},\ k = \overline{1,N},\ t \in [0,T].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Ждид М.А. *Дискретные задачи оптимального управления* – Тверь: ТвГУ, 2002.

2. Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. *Управление системами с последействием.* – М.: Наука, 1992. – 336 с.

3. Андреева Е.А. Оптимальное управление системами с запаздывающим аргументом. // Препринт. – М.: ВЦ АНСССР, 1987. – 32 с.

4. Андреева Е.А. *Оптимизация нейронных сетей* – Тверь: ТвГУ, 2008.

5. Андреева Е.А., Кратович П.В. *Оптимизация нейронных сетей:* учебное пособие. – Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2015. – 116 с.

6. Андреева Е.А., Пустарнакова Ю.А. Численные методы обучения искусственных нейронных сетей с запаздыванием. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. – Т. 42. С. 1383–1391.

7. Андреева Е.А., Кожеко Л.Г. Математическая модель искусственной нейронной сети с запаздыванием. Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27-28 марта 2020 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2020. С. 16–20.

УДК 004.032.26

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В МЕДИЦИНЕ

Андреева Елена Аркадьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Кожеко Людмила Георгиевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Ключевые слова: *нейронная сеть, искусственный интеллект в медицине, визуальная диагностика, нейросетевой прогноз, нейросетевая диагностическая модель, многослойный персептрон*

Аннотация. В работе проанализированы актуальные направления медико-биологических исследований по разработке и внедрению интеллектуальных систем для диагностики и прогнозирования заболеваний. Особое внимание уделено применению искусственных нейронных сетей (ИНС) в медицине.

Одним из актуальных направлений медико-биологических исследований является разработка и внедрение интеллектуальных систем для диагностики и прогнозирования современных заболеваний человека. В основе подобного рода систем лежат различные математические методы и алгоритмы. Особенно эффективными для решения задач медицинской диагностики и прогнозирования являются системы, базирующиеся на математическом аппарате искусственных нейронных сетей (ИНС).

В последнее время активно развиваются методы анализа и синтеза систем автоматического управления на базе искусственных нейронных сетей (ИНС). Это объясняется рядом причин. Нейронные сети один из лучших способов аппроксимации сложных зависимостей при наличии достаточно большого объема обучающей выборки, а также синтеза структуры сети. Использование нелинейных функций активации в ИНС обеспечивает более эффективную реализацию нелинейных отображений (это достоинство наиболее значимо для решения нелинейных задач регулирования, для которых традиционные подходы пока не дают практически реализуемых решений). Распараллеливание входной информации обеспечивает высокое быстродействие и хорошо сочетается с обучаемостью НС. Необходимым условием применения традиционных методов оптимального и адаптивного управления является наличие большого объема априорной информации об объекте (благодаря способности ИНС к обучению и самообучению для нейрорегуляторов такой объем априорной информации не требуется, в связи с этим можно утверждать, что нейрорегуляторы пригодны для управления в условиях существенных неопределенностей).

Одной из перспективных сфер применения результатов решения этих задач с помощью ИНС являются так называемые «Системы поддержки принятия врачебных решений» (СППВР). Разработка и внедрение СППВР в практику принадлежат к самым главным направлениям развития искусственного интеллекта в медицине.

Диагностика заболеваний

Двумя основными направлениями применения ИНС в диагностике являются применение компьютерного зрения для визуальной диагностики и применение для диагностики на основе статистических данных.

Для визуальной диагностики, входными данными являются изображения. Для их обработки чаще всего используются сверточные нейронные сети и их ансамбли. Результатом обычно является диагноз с некоторой точностью.

Диагностика на основе статистических данных охватывает более широкую область применения. Входными данными в ней являются симптомы и различные данные измерений физических показателей, например, температуры тела. Результатом обычно является диагноз с некоторой точностью.

Обычно для обработки выбирают различные виды персептронов, чаще всего – многослойный персептрон (MLP). Для обучения обычно используют метод обратного распространения ошибки.

Принятие решений осуществляется на основе анализа множества групп информативных признаков, полученных посредством различной методики технологий диагностики.

Прогнозирование течения заболеваний является расширением задачи диагностирования. Исследования проводятся на основе выборки из пациентов с уже поставленным диагнозом. Варианты выходных данных и прогнозов на их основе различаются в зависимости от конкретной области. В большинстве случаев, как и в задаче диагностирования, используются многослойные персептроны и метод обратного распространения ошибки.

Прогнозирование заболеваемости с помощью ИНС

ИНС могут применяться в эпидемиологическом анализе с целью прогнозирования и оценки эффективности работы медицинского персонала. Входными данными являются статистические данные о заболеваемости прошлых лет.

Обычно для исследования выбирают многослойный персептрон.

Для выбора оптимального типа нейронной сети провели его обучение на моделях: линейной сети, многослойном персептроне и сети с радиальной базисной функцией. Программа автоматически выбирала из одной тысячи созданных моделей 5 наилучших. Оптимальную архитектуру сети определяли в процессе эксперимента опытным путем. Выбор оптимальной модели осуществлялся на основе показателя отношение стандартных отклонений, которое представляет собой отношение стандартного отклонения ошибки прогноза к стандартному отношению исходных данных. Модель оценивали, как удачную, если отношение стандартного отклонения приближалось к нулю.

Критерием успешного обучения являлось последовательное уменьшение ошибки на обучающем множестве. Критерием остановки процесса обучения служил рост ошибки на контрольном множестве при продолжающемся её уменьшении или остановке на обучающем множестве. Это свидетельствовало о «переобучении» сети, то есть сеть слишком близко аппроксимировала выборку, в результате чего снижалось качество прогноза при подаче на сеть новых данных.

Установлено, что для прогноза первичной заболеваемости значение на месяц эффективнее прогнозировать по данным за год. В течение одной попытки компьютер на основе заданных параметров создавал и анализировал 1000 моделей, из которых только 5 сохранялись как наиболее эффективные. Таким образом, проанализировано более 100 тысяч пробных моделей только для создания одной модели прогнозирования первичной заболеваемости. Кроме того, было определено, что та скорость обучения, которая заложена в программу по умолчанию, не позволяет эффективно «обучить сеть», для чего её уменьшили до 0,001. К улучшенному результату так же привело и изменение на выходе значения максимального стандартного отклонения и минимального среднего, а оптимальный результат был достигнут при значении, соответственно, 0,75 и 0,2.

В ходе математического эксперимента определили наилучшую модель обученной нейросети для прогноза первичной заболеваемости сотрудников, архитектура которой представлена на рисунке 1.

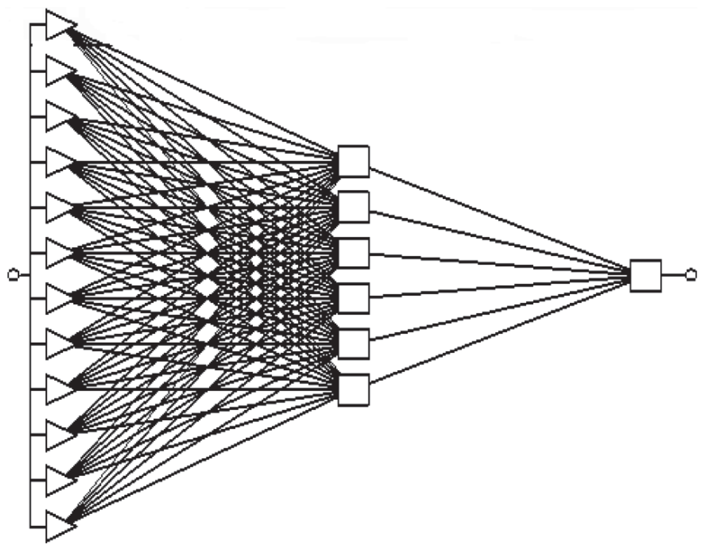


Рис. 1. Архитектура нейронной сети

Структура наилучшей модели – это трехслойный персептрон, который содержит в выходном слое – 12 нейронов, в среднем – 6, во входном слое – 1. Контрольная и тестовая ошибки равны 0,08 и 0,05, отношение стандартных отклонений – 0,25.

Прогноз первичной заболеваемости первоначально провели на известные данные с 49-го наблюдения (после 4 лет с начала сбора данных) на 12 шагов, что соответствовало одному году. В последующем осуществили прогноз на область неизвестных сети данных, т.е. прогноз на двенадцать следующих месяцев. Для этого более целесообразным было начинать проекцию временного ряда с 61-го наблюдения на 12 шагов. На рисунке 2 представлены прогнозные и реальные значения уровня первичной заболеваемости. Описание прогноза первичной заболеваемости сотрудников МЧС России математически подтверждает распределение фактических значений по времени, однако прогноз предусматривал более высокие значения уровня первичной заболеваемости.

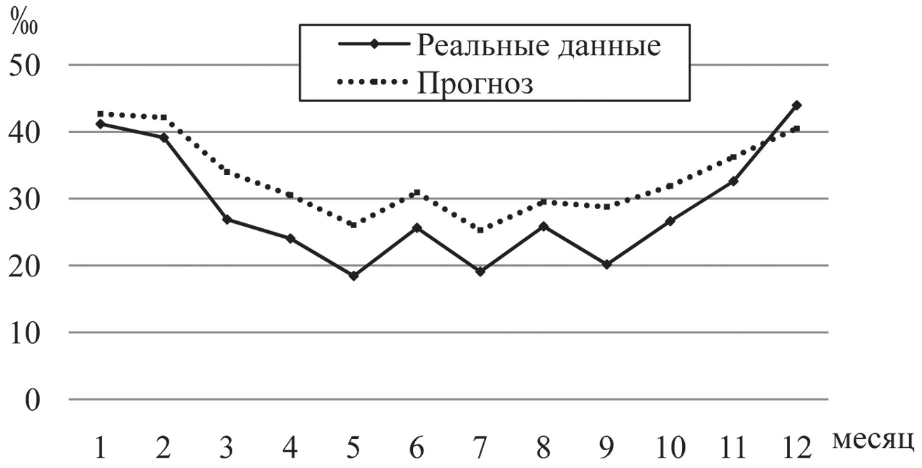


Рис. 2. Динамика первичной заболеваемости сотрудников МЧС России и нейросетевого прогноза

Прогнозные значения первичной заболеваемости сотрудников болезнями органов дыхания., полученные с использованием нейросетевой (рисунок 3), практически полностью совпадали с фактическими.

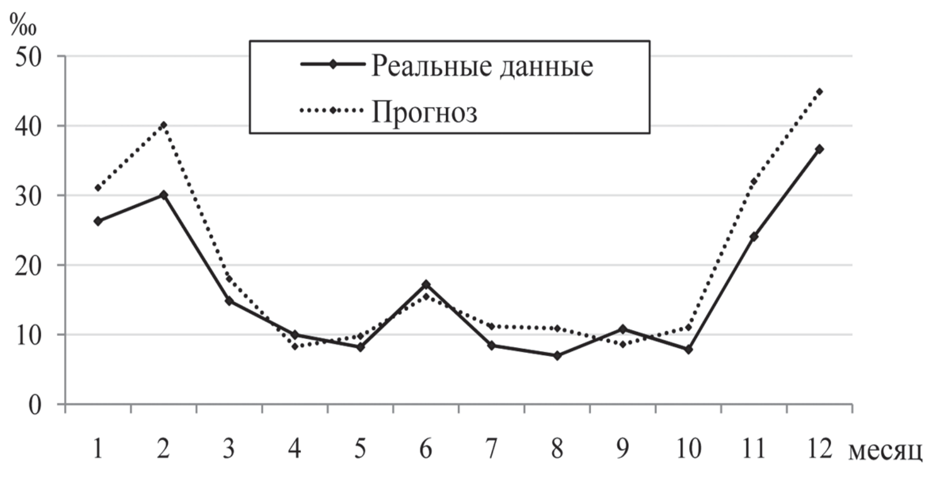


Рис. 3. Динамика первичной заболеваемости болезнями органов дыхания сотрудников МЧС России и нейросетевого прогноза

Особенности применения

Особенностями использования ИНС для прогнозирования в сфере медицины является специфичность разработки для каждой конкретной задачи, что снижает вероятность использования успешного метода в смежных областях. С другой стороны, разнообразие задач дает множество возможностей для практического применения специалистами разнообразных теоретических моделей из сферы ИНС на практике.

Еще одной особенностью является невозможность полной автоматизации процесса диагностики в обозримом будущем и использование методов на основе ИНС лишь в вспомогательной роли.

Исходя из уже существующих обзоров применения ИНС для решения задач прогнозирования в медицине и собственного анализа литературы, можно сделать следующие выводы:

- наиболее оптимальной моделью искусственных нейронных сетей для решения задач медицинской диагностики и прогнозирования является многослойный персептрон;
- оптимальными алгоритмами обучения многослойного персептрона являются алгоритм обратного распространения ошибки;
- высокая точность функционирования нейросетевых диагностических моделей, описанных в литературе, свидетельствует о перспективности применения искусственных нейронных сетей в различных областях медицины для диагностики и прогнозирования заболеваний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А. *Оптимизация нейронных сетей* – Тверь: ТвГУ, 2008.
2. Андреева Е.А., Кратович П.В. *Оптимизация нейронных сетей:* учебное пособие. – Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2015. – 116 с.
3. Андреева Е.А., Кожеко Л.Г. Математическая модель искусственной нейронной сети с запаздыванием. Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27-28 марта 2020 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2020. С. 16–20.
4. Нейросетевые технологии в диагностике заболеваний (обзор) / М.В. Вычейская, И.Н. Крайнова, А.В. Грибанов // Журн. мед.-биол. исследований. – 2018. – Т. 6, № 3. – С. 284–294.
5. Классификация степени тяжести заболевания на основе искусственных нейронных сетей / А.И. Молодченков, В.П. Фраленко, В.М. Хачумов // Вестник РУДН. Серия Математика. Информатика. Физика. – 2014. – № 2. – С. 150–156.
6. Нейросетевые модели прогнозирования заболеваемости в организованных коллективах / В.Ю. Головинова, С.Г. Киреев, П.К. Котенко, Ю.Л. Минаев, И.Н. Штамбург, С.Г. Кузьмин // Вестник российской военно-медицинской академии – 2014. – № 4. – С. 150–154.

УДК 378.14

НАПРАВЛЕНИЕ 01.03.01 МАТЕМАТИКА: ПОДГОТОВКА СПЕЦИАЛИСТОВ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ И ЕЁ ПРЕПОДАВАНИЯ НА МАТЕМАТИЧЕСКОМ ФАКУЛЬТЕТЕ ТВЕРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Баранова Ольга Евгеньевна
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: Baranova.OE@tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *математический факультет ТвГУ, направление подготовки 01.03.01 Математика, профиль подготовки «Преподавание математики и информатики», профиль подготовки «Фундаментальная и прикладная математика», профессионально-общественная аккредитация.*

Аннотация. Представлены результаты работы и планы на ближайшие годы математического факультета Тверского государственного университета по обучению студентов факультета на основной образовательной программе ВО по направлению подготовки 01.03.01 Математика.

Подготовка специалистов в области математики является уникальной особенностью математического факультета ТвГУ, одного из старейших в вузе. Глобальные изменения в сфере высшего образования, связанные с информатизацией общества и социальным заказом на подготовку специалистов в сфере информационных технологий, привели к временной приостановке подготовки специалистов-математиков и кадров, ориентированных на занятие исключительно педагогической деятельностью в предметной области «Математика и информатика».

Осознавая состояние катастрофической нехватки квалифицированных математических кадров в целом и учителей математики и информатики в частности, с 2017 года математический факультет Тверского государственного университета возобновил обучение студентов по основной образовательной программе высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика с профилем подготовки «Преподавание математики и информатики», ориентированной на подготовку выпускников к осуществлению педагогической и научно-исследовательской деятельности в области математики и информатики.

Потребность отдельных отраслей экономики и социальной сферы в кадрах, владеющих математическими методами и готовых эффективно использовать их при решении аналитических задач в различных сферах деятельности, выраженная в заявках работодателей, необходимость дополнения образовательных программ высшего образования по всем специальностям и направлениям подготовки разделами по изучению технологий искусственного интеллекта в целях обучения применению таких технологий в различных сферах деятельности, продиктованная [1], увеличение количества контрольных цифр приёма по направлению 01.03.01 Математика создали необходимые и достаточные условия для разработки нового (второго) профиля подготовки по направлению 01.03.01 Математика: «Фундаментальная и прикладная математика». Обучение по новому профилю ориентировано на подготовку выпускников к осуществлению научно-исследовательской деятельности и области математики, её приложений и информационных технологий.

С 2021 года обучение по направлению подготовки бакалавров 01.03.01 Математика будет вестись по двум профилям подготовки: уже реализующемуся «Преподавание математики и информатики» и новому – «Фундаментальная и прикладная математика». Возможность получения обучения более высокого уровня (уровня магистратуры) реализована на факультете двумя магистерскими программами «Математический анализ» и «Преподавание математики и информатики» по направлению 02.04.01 Математика и компьютерные науки.

Руководителем ООП ВО 01.03.01 Математика является Голубев Александр Анатольевич, к.ф.-м.н., доцент. Нормативный срок освоения ООП – 4 года. Трудоёмкость образовательной программы – 240 зачетных единиц. Форма обучения – очная. Язык образования – русский. Срок действия государственной аккредитации – до 19.09.2024 г.

Подробное описание основной образовательной программы высшего образования подготовки бакалавров по направлению 01.03.01 Математика размещено на сайте Тверского государственного университета в разделе «Ссылка на описание образовательной программы» [2] и содержит информацию об ООП как о комплексе основных характеристик образования, организационно-педагогических условий, форм аттестации, соответствующих актуализированному федеральному государственному образовательному стандарту высшего образования по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденному приказом Минобрнауки России от 10.01.2018 № 8, разработанных с учётом развития науки, культуры, экономики, техники, технологий и социальной сферы, потребностей регионального рынка труда и следующих профессиональных стандартов: профстандарт: 01.001 «Педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель)» (утв. приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 18 октября 2013 г. № 544н); профстандарт: 40.011 «Специалист по научно-исследовательским и опытно-конструкторским разработкам» (утв. приказом Министерства труда и социальной защиты РФ от 04.03.2014 № 121н).

В текущем 2021 году в рамках прохождения профессионально-общественной аккредитации была сформирована комиссия. Ответственная за подготовку материалов и документов по образовательной программе 01.03.01 Математика – Баранова Ольга Евгеньевна, доцент кафедры математического анализа.

На основании результатов самообследования подготовки выпускников по направлению 01.03.01 Математика комиссия пришла к следующим выводам:

1. *Анализ выполнения критериев стандарта: соответствие компетенций лиц, освоивших образовательные программы, требованиям ФГОС, профессиональных стандартов, иным общероссийским квалификационным требованиям или требованиям, предъявляемым рынком труда.*

Компетенции выпускников ОПОП соответствуют требованиям ФГОС, запросам рынка труда, соотнесены с профессиональными стандартами.

Образовательная организация разрабатывает и обеспечивает формирование компетентностной модели выпускника (КМВ) как совокупного ожидаемого результата освоения ОПОП. В разработке и реализации данной модели принимают участие в качестве потребителей ожидаемых результатов ОПОП работодатели.

Образовательная организация выстраивает образовательный процесс по реализации ОПОП, предусматривающий контроль знаний и оценку уровня сформированности запланированных компетенций, обучающихся на всех этапах освоения ОПОП, регулярные процедуры по оценке знаний и уровня сформированности компетенций обучающихся, а также системный подход к проведению и анализу результатов оценки знаний и уровня сформированности компетенций, обучающихся как совокупного ожидаемого результата освоения ОПОП.

Образовательная организация разрабатывает с участием работодателей, согласовывает с ними и утверждает документы, предусматривающие оценивание знаний/компетенций в соответствии с планируемыми результатами обучения, назначением (текущее, промежуточное или итоговое оценивание) и отвечаю-щие целям программы и требованиям работодателей.

Образовательная организация обеспечивает открытость критериев и процедур оценки знаний и умений/компетенций обучающимся и их родителям, работодателям и профессиональному сообществу, всем заинтересованным сторонам.

Образовательная организация обеспечивает оценку уровня знаний на профессиональной основе с учетом современных достижений в области тестовых и экзаменационных процедур и использования современных технологий оценки знаний /компетенций обучающихся.

Образовательная организация привлекает работодателей к оценке результатов образования обучающихся и выпускников, созданию фонда оценочных средств.

Образовательная организация обеспечивает объективность, профессионализм и независимость оценочного процесса в соответствии с процедурами и системой оценивания, установленной в Образовательной организации.

Образовательная организация информирует обучающихся об экзаменационных требованиях, используемых процедурах оценивания и возможных их последствиях.

Оценка соответствия результатов освоения ОПОП запланированным показателям и требованиям рынка труда проводится Образовательной организацией с участием работодателей посредством фонда оценочных средств ОПОП.

2. *Анализ соответствия критериям стандарта: востребованность выпускников, освоивших образовательные программы, рынком труда.*

Организация осуществит первый выпуск по направлению 01.03.01 Математика в 2021 году.

Организация имеет возможности и средства для накопления статистических данных, характеризующих трудоустройство выпускников.

Организация анализирует потребности в выпускниках ОПОП.

Организация ведет базу данных организаций-работодателей для трудоустройства выпускников.

Организация имеет возможности и средства для отслеживания карьерных продвижений выпускников программы.

3. *Анализ соответствия критериям стандарта: качество материально-технических, информационно-коммуникационных, кадровых и иных ресурсов, влияющих на качество подготовки выпускников.*

Организация определяет и располагает ресурсами, необходимыми для реализации ОПОП: материально-техническими, кадровыми, информационно-образовательными, финансовыми.

Организация обеспечивает ресурсами, соответствующими требованиям ФГОС и работодателей, законодательных и нормативных актов, обучающихся и их родителей.

Организация планирует с учетом привлечения активов работодателей необходимые для реализации ОПОП образовательные, финансовые и материально-технические ресурсы, при возможности, привлекает активы организаций-партнеров и других заинтересованных сторон.

Организация проводит мониторинг использования ресурсов, задействованных в реализации ОПОП, анализ результативности использования ресурсов, задействованных в реализации ОПОП, итоги которого учитывает при развитии ресурсной базы Образовательной организации.

Ресурсное обеспечение программы доступно для обучающихся, носит инновационный характер; обеспечивает обучающимся необходимые возможности для самостоятельной, учебно- и научно-исследовательской работы, способствует формированию компетенций, реализации электронного обучения и дистанционных технологий обучения.

Для реализации и достижения целей образовательной программы Образовательная организация определяет потребности ОПОП в научно-педагогических работниках (НПР), в том числе специалистов-практиков, обеспечивает реализуемую ОПОП НПР с уровнем квалификации, соответствующим требованиям ФГОС, квалифицированным персоналом.

Для обеспечения соответствия уровня компетентности преподавателей и сотрудников целям образовательной программы и предполагаемым компетенциям выпускников Образовательная организация повышает квалификацию НПР, определяет результативность повышения квалификации, имеет систему повышения квалификации НПР с учетом требований и условий Образовательной организации.

4. *Анализ соответствия критериям стандарта: управление основной профессиональной образовательной программой.*

При разработке ОПОП учтены и идентифицированы мнения работодателей, в т. ч. ресурсы образовательных учреждений Тверской области.

ОПОП разработана в соответствии с требованиями ФГОС, работодателей, согласована с работодателями, утверждена, поддерживается в актуальном состоянии и находится в управляемых условиях, ежегодно проверяется на выполнение ожидаемых потребностей отечественного рынка труда, на соответствие возможностям Образовательной организации.

Изменения, вносимые в ОПОП, прослеживаются, идентифицированы, проанализированы, проверены и утверждены до начала их реализации.

Анализ изменений разрабатываемой ОПОП включает оценку влияния этих изменений на другие разделы разрабатываемой ОПОП. Поддерживаются записи о действиях, необходимых для реализации изменений ОПОП, и полученных результатах.

Образовательная организация в ходе разработки и реализации ОПОП в целях достижения запланированных результатов обучения взаимодействует с работодателями на всех этапах планирования, анализа и улучшения ОПОП на постоянной основе.

Образовательная организация проводит мониторинг реализации ОПОП с целью проверки соблюдения требований ФГОС, работодателей, обучающихся и профессионального сообщества, потенциальных потребностей рынка труда.

При наличии соответствующих возможностей и необходимости Образовательная организация обеспечивает реализацию ОПОП с применением дистанционных технологий обучения или по технологии электронного обучения.

Образовательная организация проводит внеучебную работу с обучающимися на территории Образовательной организации, обеспечивает участие обучающихся в планировании и реализации внеучебной работы.

5. *Анализ соответствия критериям стандарта: цели, стратегия и развитие основной профессиональной образовательной программы.*

Образовательная организация обеспечивает установление в рамках каждой ОПОП четких целей и конечных результатов.

При постановке целей предусматриваются измеримость целей ОПОП, согласованность целей ОПОП с Политикой в области качества, со стратегическими целями Образовательной организации и государственной политикой в области образования, труда и занятости населения.

Образовательная организация доводит цели образовательных программ до сведения обучающихся, персонала организации и работодателей, родителей обучающихся, профессионального сообщества и всех заинтересованных сторон.

При формировании целей ОПОП учитывает тенденции и требования рынка квалификаций региона.

Образовательная организация в рамках ОПОП имеет ясные и прозрачные процедуры гарантии качества, планирует и анализирует реализацию процедур гарантии качества, документирует и улучшает процедуры гарантии качества с учетом лучших практик, поддерживает систему гарантии качества образования.

Процедуры гарантии качества ОПОП являются пригодными с точки зрения различных групп пользователей и их нужд, в них вовлечены руководители образовательной программы и представители рынка труда, персонал, обучающиеся, профессиональное сообщество, а выпускники и другие заинтересованные стороны, в том числе зарубежные партнеры – в систему гарантии качества ОПОП.

6. *Анализ соответствия критериям стандарта: система информирования и информационная открытость.*

Организация проводит ежегодное самообследование реализуемых ОПОП для эффективного управления ими с целью гарантии качества и выполнения законодательных, нормативных и иных требований, сравнительную оценку реализуемой ОПОП с аналогичными программами других образовательных организаций региона ОПОП.

Организация осуществляет связь с обучающимися, работодателями и профессиональным сообществом региона и проводит мониторинг их удовлетворенности, реализуемой ОПОП, в том числе:

– устанавливает способы, методы, средства доведения информации и получения обратной связи с обучающимися и их родителями, работодателями, персоналом;

– планирует проведение мониторинга удовлетворенности;

– анализирует результаты мониторинга и выявляет тенденции удовлетворенности потребителей;

– с использованием информационных систем улучшает процесс поддержания связи с потребителями и заинтересованными сторонами; совершенствует процедуру мониторинга удовлетворенности следующих аспектов реализации ОПОП: содержание образовательных программ и присваиваемых квалификаций, преподавание отдельных дисциплин; выполнение целесообразных для достижения целей ОПОП требований и удовлетворение запросов заинтересованных сторон; доступность предоставляемых образовательных ресурсов и их инновационность; степень удовлетворенности обучающихся образовательными услугами и системой социальной поддержки; прогресс обучающихся и уровень успеваемости; востребованность выпускников на рынке труда; осуществление обратной связи, прохождение жалоб и предложений;

– анализирует тенденции удовлетворенности заинтересованных сторон и использует результаты анализа для совершенствования ОПОП.

Организация публикует и поддерживает в актуальном состоянии объективную, точную, беспристрастную количественную и качественную информацию о реализуемой ОПОП, публикация которой является обязательной в соответствии с законодательными, нормативными и иными требованиями.

Организация публикует дополнительную информацию о планируемых результатах обучения, присваиваемых квалификациях; качестве и достижениях преподавателей; образовательных траекториях, ресурсах и технологиях; процессе обучения, процедурах и формах оценки; академической мобильности и других образовательных возможностях и сервисах для обучающихся; успехах, трудоустройстве и востребованности выпускников ОПОП; качестве подготовки выпускников по мнению работодателей; качестве и достижениях обучающихся по ОПОП; положении в сфере занятости населения в регионе по реализуемым профессиям, специальностям и направлениям подготовки;

Организация анализирует результативность используемых каналов информирования о реализуемых ОПОП.

Организация использует информационно-коммуникационные технологии и результаты анализа обратной связи с общественностью для повышения информационной открытости, реализуемой ОПОП.

Таким образом, сильными сторонами являются:

– Высокая ориентация на кадровые потребности в сфере образовательных услуг в регионе.

– Взаимодействие с профессиональным сообществом Тверского региона (Тверской региональной общественной организацией «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области»).

– Привлечение работодателей к оценке результатов образования выпускников.

– Соответствие компетенций выпускников требованиям отечественного рынка труда.

– Реализация процедуры согласования содержания образовательной программы подготовки с работодателями.

– Практика реализована в реально действующих организациях.

– Информирование обучающихся и выпускников о вакансиях на территории Тверского региона, других регионов.

– Реализация процесса планирования и проведения мероприятий, направленных на трудоустройство выпускников, с участием работодателей.

– Наличие механизмов учета статистических данных, характеризующих трудоустройство выпускников.

– Осуществление научно-исследовательской деятельности НПР и руководство научно-исследовательской работой обучающихся.

– Разработаны и реализованы процессы повышения квалификации НПР

– Работающие научные библиотеки.

– Разработка ОПОП в соответствии с требованиями ФГОС и работодателей.

– Участие работодателей в реализации ОПОП.

– Взаимодействие с работодателями на протяжении всего периода реализации ОПОП.

– Развитый институт студенческого самоуправления.

– Согласованность целей ОПОП со стратегическими целями вуза.

– Наличие каналов доведения целей ОПОП до сведения обучающихся.

– Информационная открытость.

Угрозами для развития являются:

– Низкий уровень вовлеченности обучающихся и выпускников в разработку документов.

– При реализации ОПОП не привлекаются зарубежные партнеры.

– Слабая вовлеченность обучающихся, родителей и других заинтересованных сторон в процедуры гарантии качества.

– Потребность в постоянной модернизации под современные условия оснащения материально-технической базы.

Проведенный анализ позволяет сформулировать следующее заключение.

Содержание и качество подготовки обучающихся ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» по направлению подготовки 01.03.01 Математика соответствуют требованиям профессионально-общественной аккредитации и свидетельствуют о готовности к проведению независимой экспертизы качества образования.

По результатам проведённой в рамках профессионально-общественной аккредитации экспертизы сделан вывод о том, что образовательная программа по направлению подготовки 01.03.01 Математика ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» успешно прошла аккредитационную экспертизу и признана соответствующей показателям и критериям профессионально-общественной аккредитации Ассоциации по сертификации «Русский Регистр» (свидетельство №: 0РР00 0000264 от 16 февраля 2021 года действительно до 15 февраля 2025 года, [3]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Поручения Президента России. [Сайт Президента России]. Режим доступа: http://kremlin.ru/acts/assignments/orders/64859 (последнее обращение 06.03.2021 г.)

2. Информация по образовательным программам, реализуемым в Тверском государственном университете. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.tversu.ru/sveden/files/OOP_Bak_01.03.01_Matematika_28.08.2019.pdf (последнее обращение 02.03.2021 г.).

3. ПОА свидетельства. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://-clck.ru/TWmRX (последнее обращение 02.03.2021 г.).

УДК 372.851

НЕКОТОРЫЕ ПРИЕМЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ ПРИ РЕШЕНИИ ПЛАНИМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Баранова Ольга Евгеньевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: baranova.oe@tversu.ru

Романова Светлана Анатольевна
МОУ СОШ «Тверская гимназия №8», г. Тверь
E-mail: svetaromadoma@yandex.ru

Ключевые слова: *метод координат на плоскости, планиметрические задачи.*

Аннотация. В работе продемонстрированы способы применения метода координат при решении планиметрических задач разных типов.

Метод координат, предложенный Р. Декартом, предполагает использование средств алгебры при решении геометрических задач и основан на описании геометрических объектов и их свойств, с помощью уравнений и неравенств.

Систематическое применение, связанное с такими преобразованиями как параллельный перенос, гомотетия, симметрия относительно прямой, координатный метод находит в курсе алгебры при исследовании числа корней уравнения или решений системы уравнений, построении графиков обратной функции, функций $y = f(x + x_0) + y_0$, $y = af(x)$, $y = f(ax)$, $y = -f(x)$, $y = f(|x|)$, $y = |f(x)|$ по известному графику функций $y = f(x)$. При изучении курса стереометрии как правило удается уделить время решению содержательных задач с использованием метода координат. Структура и объем курса планиметрии традиционно не позволяют продемонстрировать специфику и богатые возможности координатного метода, в этом случае приходится ограничиваться лишь решением простейших задач в координатах. При наличии элективных или факультативных курсов по математике, считаем разумным посвятить несколько занятий изучению применения метода координат при решении планиметрических задач. Такой подход позволит продемонстрировать тесную связь алгебры и геометрии, естественность подхода к решению планиметрических задач, основанного на получении уравнений и неравенств, даже без использования метода координат, преимущества и недостатки формального, алгоритмического координатного метода по сравнению с методом решения, требующим «догадывания» о свойствах геометрических объектов, полезных для решения задачи. Кроме того, ученик может получить опыт изучения объекта с разных точек зрения, выбора наиболее эффективного метода или синтеза различных известных ему методов решения задачи.

Далее продемонстрируем технику применения метода координат для решения геометрических задач на плоскости трёх типов:

1) исходные объекты сразу заданы в некоторой системе координат, требуется определить их свойства или числовые характеристики;

2) требуется установить свойства объектов, не заданных в координатах, для успешного решения задачи систему координат нужно ввести удобным способом,

3) требуется определить геометрическое место точек, обладающих некоторым свойством.

Задача № 1. [1] *В окружность с центром O вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке P и взаимно перпендикулярны. Доказать, что середины сторон AB и CD, центр O и точка P являются вершинами параллелограмма.*

Решение. Введём систему координат xPy. Пусть $A(-x_1;0)$, $B(0;y_1)$, $C(x_2;0)$, $D(0;-y_2)$, $O(a;b)$ (рис.1). Обозначим радиус окружности через R, тогда ее уравнение запишется в виде $R^2=(x-a)^2+(y-b)^2$. Пусть E и F –середины сторон AB и DC соответственно. Эти точки имеют координаты $E\left(-\frac{x_1}{2};\frac{y_1}{2}\right)$, $F\left(\frac{x_2}{2};-\frac{y_2}{2}\right)$. Для векторов $\overrightarrow{EP}$ и $\overrightarrow{OF}$ находим $\overrightarrow{EP}\left\{\frac{x_1}{2};-\frac{y_1}{2}\right\}$, $\overrightarrow{OF}\left\{\frac{x_2}{2}-a;-\frac{y_2}{2}-b\right\}$.

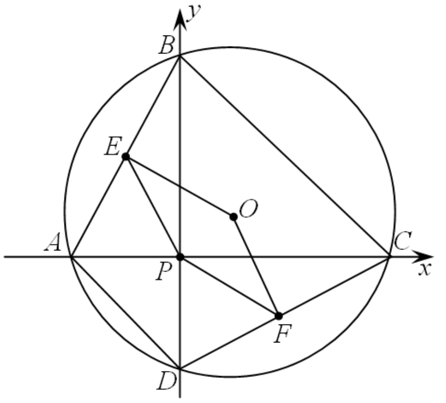


Рис. 1

Подстановка координат точек A, B, C и D в уравнение окружности дает систему уравнений

$$\begin{cases}(x_1+a)^2+b^2=R^2,\\(x_2-a)^2+b^2=R^2,\\a^2+(y_1-b)^2=R^2,\\a^2+(y_2+b)^2=R^2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_1+a)^2-(x_2-a)^2=0,\\(y_1-b)^2+(y_2+b)^2=0,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{x_1}{2}=\dfrac{x_2}{2}-a,\\-\dfrac{y_1}{2}=-\dfrac{y_2}{2}-b.\end{cases}$$

Из последнего равенства координат следует, что векторы $\overrightarrow{EP}$ и $\overrightarrow{OF}$ равны. Тогда четырёхугольник $EOFP$ является параллелограммом.

Задача № 2. [1] *Известны координаты середин сторон треугольника $M_1(-1;2), M_2(2;-3)$, $M_3(-3;-1)$. Найти координаты точки пересечения его медиан.*

Решение. Зададим координаты вершин треугольника $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Точка M пересечения медиан треугольника имеет координаты

$$M\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}; \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right).$$

Пусть M_1, M_2 и M_3 – середины сторон AB, AC и CB соответственно. Тогда одновременно выполнятся следующие равенства:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=-1,\ \frac{y_1+y_2}{2}=2,\ \frac{x_1+x_3}{2}=2,\ \frac{y_1+y_3}{2}=-3,\ \frac{x_3+x_2}{2}=-3,\ \frac{y_3+y_2}{2}=-1.$$

Складывая отдельно уравнения, содержащие абсциссы и ординаты вершин треугольника, находим

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-2, \\ y_1+y_2+y_3=-2. \end{cases}$$

Тогда искомая точка $M\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

Задача № 3. [2] *Даны три точки* A, B, C *и три числа* α, β, γ. *Найти множество всех точек* M, *для каждой из которых сумма* $\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2$ *имеет постоянное значение.*

Решение. Введем систему координат так, что точки A, B лежат на оси Ox, а ось Oy проходит через точку C. Тогда $A(x_1;0), B(x_2;0)$, $C(0; y_3)$. Пусть $M(x; y)$ – текущая точка множества. Координаты точки M удовлетворяют уравнению

$$\alpha AM^2 + \beta BM^2 + \gamma CM^2 = k,\ k = const.$$

Вычисляя квадраты расстояний, перепишем уравнение в виде

$$\alpha(x-x_1)^2 + \alpha y^2 + \beta(x-x_2)^2 + \beta y^2 + \gamma x^2 + \gamma(y-y_3)^2 = k.$$

Сгруппируем слагаемые в последнем равенстве, собирая коэффициенты при первых и вторых степенях переменных x и y,

$$(\alpha+\beta+\gamma)x^2 - 2x(\alpha x_1 + \beta x_2) + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + (\alpha+\beta+\gamma)y^2 - 2y(\gamma y_3) + \gamma y_3^2 = k. \quad (1)$$

Если $\alpha+\beta+\gamma=0$, то уравнение (1) принимает вид

$$2x(\alpha x_1 + \beta x_2) - 2y(\gamma y_3) + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma y_3^2 = k$$

и определяет

1) прямую, если $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + (\gamma y_3)^2 \neq 0$,

2) всю плоскость, если $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + (\gamma y_3)^2 = 0$ и $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma y_3^2 = k$,

3) пустое множество, если $(\alpha x_1 + \beta x_2)^2 + (\gamma y_3)^2 = 0$ и $\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma y_3^2 \neq k$.

Если $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$, то перепишем уравнение (1), выделяя полные квадраты по x и y, т.е. в виде

$$\left(x - \frac{\alpha x_1 + \beta x_2}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2 + \left(y - \frac{\gamma y_3}{\alpha+\beta+\gamma}\right)^2 = \frac{k}{\alpha+\beta+\gamma} -$$

$$- \frac{\alpha(\beta+\gamma)x_1^2 + \beta(\alpha+\gamma)x_2^2 + \gamma(\alpha+\beta)y_3^2 - 2\alpha\beta x_1 x_2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Последнее уравнение определяет

1) окружность, если

$$\frac{k}{\alpha+\beta+\gamma} > \frac{\alpha(\beta+\gamma)x_1^2+\beta(\alpha+\gamma)x_2^2+\gamma(\alpha+\beta)y_3^2-2\alpha\beta x_1x_2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2},$$

2) точку, если

$$\frac{k}{\alpha+\beta+\gamma} = \frac{\alpha(\beta+\gamma)x_1^2+\beta(\alpha+\gamma)x_2^2+\gamma(\alpha+\beta)y_3^2-2\alpha\beta x_1x_2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2},$$

3) пустое множество, если

$$\frac{k}{\alpha+\beta+\gamma} < \frac{\alpha(\beta+\gamma)x_1^2+\beta(\alpha+\gamma)x_2^2+\gamma(\alpha+\beta)y_3^2-2\alpha\beta x_1x_2}{(\alpha+\beta+\gamma)^2}.$$

Задача № 4. [2] *Даны прямая a и точка A, не лежащая на этой прямой. Для каждой точки M_1 прямой a на луче AM_1 взята такая точка M, что $AM_1 \cdot AM = k$, где k – заданное положительное число. Найти множество всех точек M.*

Решение. Введём систему координат так, что ось Ox проходит через прямую a, ось Oy – через точку A (рис.2). Тогда $A(0;d)$, $M_1(t;0)$, где $d=\rho(A;a)$, $t\in R$. Пусть $M(x;y)$ – текущая точка множества.

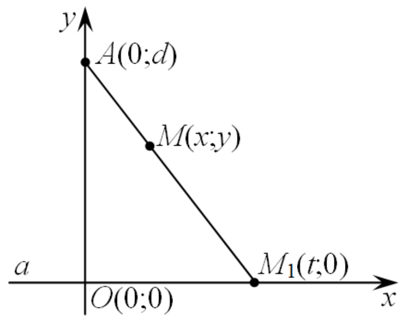


Рис. 2

Точка M лежит на луче AM_1, тогда её координаты удовлетворяют уравнению $\frac{x}{t}=\frac{y-d}{-d}$ прямой AM_1 и неравенству $y\le d$.

Тогда искомое множество задаётся системой

$$\begin{cases} AM_1\cdot AM=k, \\ \dfrac{x}{t}=\dfrac{y-d}{-d}, \\ y<d \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (AM_1)^2\cdot(AM)^2=k^2, \\ \dfrac{x}{t}=\dfrac{d-y}{d}, \\ d-y>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+(y-d)^2\right)\cdot\left(t^2+d^2\right)=k^2, \\ \dfrac{d\cdot x}{d-y}=t, \\ d-y>0. \end{cases}$$

Из последней системы находим

$$\begin{cases} x^2+(y-d)^2=\dfrac{k(d-y)}{d}, \\ d-y>0. \end{cases}$$

Выделяя в первом равенстве полный квадрат по y, получим

$$x^2+(y-d)^2+\frac{k(y-d)}{d}=0 \Leftrightarrow x^2+\left(y-d+\frac{k}{2d}\right)^2=\frac{k^2}{4d^2}.$$

Таким образом, координаты точки M удовлетворяют условиям

$$x^2+\left(y-\frac{2d^2-k}{2d}\right)^2=\frac{k^2}{4d^2} \text{ и } y<d,$$

тогда искомое множество есть окружность с диаметром $\frac{k}{d}$, проходящая через точку A, центр которой лежит на перпендикуляре, опущенном из точки A на прямую a. Саму точку A множество не содержит.

Задача № 5. [2] *Даны две точки A и B. Найти множество всех точек M таких, что $AM=k\cdot BM$, где k – заданное положительное число.*

Решение. Если $k=1$, то искомое множество есть множество точек равноудаленных от концов отрезка, т.е. серединный перпендикуляр к отрезку AB.

Рассмотрим случай $k\neq 1$. Введём систему координат так, что точки A и B лежат на оси Ox. Пусть $A(a;0)$, $B(b;0)$, а $M(x;y)$ – текущая точка множества. Условие $AM=k\cdot BM$ перепишем в виде

$$(x-a)^2+y^2=k^2\cdot\left((x-b)^2+y^2\right).$$

Преобразуем последнее равенство, выделяя полный квадрат по x, к виду

$$\left(x-\frac{a-k^2b}{1-k^2}\right)^2+y^2=\left(\frac{k\cdot AB}{1-k^2}\right)^2.$$

Таким образом, искомое множество является окружностью с центром в точке $C\left(\dfrac{a-k^2b}{1-k^2};0\right)$, лежащим на прямой AB, радиуса $R=\dfrac{k\cdot AB}{\left|1-k^2\right|}$.

Такие окружности называются окружностями Аполлония. Выясняя расположение центра найденной окружности относительно точек A и B, можно доказать одно из свойств окружностей Аполлония: для любой точки M этой окружности луч MK является биссектрисой угла AMB.

Следующий набор задач может послужить отправной точкой в освоении координатного метода при решении планиметрических задач.

1. Диаметры AB и CD окружности S перпендикулярны. Хорда EA пресекает диаметр CD в точке K, хорда EC пересекает диаметр AB в точке L. Докажите, что если $CK:KD=2:1$, то $AL:LB=3:1$. [3]

2. С помощью метода координат докажите, что суммы квадратов расстояний от произвольной точки плоскости до противоположных вершин прямоугольника равны между собой. [4]

3. Найти геометрическое место точек плоскости, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна. [4]

Ответ: прямая, перпендикулярная отрезку с концами в данных точках.

4. Составьте уравнение окружности с центром в точке $M(3;2)$, касающейся прямой $y = 2x + 6$. [4]

Ответ: $(x-3)^2 + (y-2)^2 = 20$.

5. Известны координаты вершин треугольника $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$. Найти координаты точки пересечения его медиан. [2]

Ответ: $\left(\dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \dfrac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$

6. Докажите, что четырёхугольник – ромб, если его вершинами являются середины сторон прямоугольника. [1]

7. Даны координаты двух вершин равностороннего треугольника $A(-2;2)$ и $B(-2;-4)$. Найти его площадь и координаты третьей вершины. [1]

Ответ: $S_{\Delta ABC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$, $C\left(-2+3\sqrt{3};-1\right)$ или $C\left(-2-3\sqrt{3};-1\right)$.

8. В параллелограмме $ABCD$ точка K – середина стороны BC, а точка M – середина стороны CD. Найдите AD, если $AK = 6$, $AM = 3$, $\angle KAM = 60°$.
Ответ: $AD = 4$.[1]

9. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника, обращенный к гипотенузе. [1]

Ответ: $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right) \approx 143°$.

10. Даны окружность и точка O, не лежащая на этой окружности. Для каждой точки M_1 окружности на луче OM_1 взята такая точка M, что $OM = k \cdot OM_1$, где k – заданное положительное число. Найти множество всех точек M. [2]

Ответ: Окружность радиуса kR, центр которой лежит на прямой, проходящей через точку O и центр исходной окружности, на расстоянии ka от точки O, где a расстояние от точки O до центра окружности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сборник задач по математике для поступающих во втузы / В. К. Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др.; под ред. М. И. Сканави. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательство «Мир и Образование»: ООО «Издательство «ОНИКС-ЛИТ», 2013. – 608 с.

2. Геометрия. 7–9 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др.]. – 20-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.

3. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии. / В. В. Прасолов – 7-е изд., испр. и дополн. – М.: МЦНМО, 2019. – 640 с.

4. Гордин Р. К. Геометрия. Планиметрия. 7-9 классы. / Р. К. Гордин – 6-е изд., стереотип. – М.: МЦНМО, 2014. – 416 с.

УДК 372.851(303.732.4+330.45)

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИСТЕМНОГО АНАЛИЗА В ЭКОНОМИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Васильев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru

Ключевые слова: *исследование операций, математическое программирование, системный анализ, экономико-математические методы.*

Аннотация. В работе рассмотрен состав математических методов системного анализа, а также его взаимосвязь с методами математического программирования, исследования операций и экономико-математическими методами. Проанализировано учебно-методическое обеспечение дисциплины “Системный анализ в экономике” в части математических методов по рекомендованным экономистам учебным пособиям. Предложен вариант распределения математических методов системного анализа по дисциплинам, изучаемым студентами бакалариата направления подготовки “Экономика” в Тверском государственном университете.

Введение. Федеральный государственный образовательный стандарт бакалавриата по направлению подготовки “Экономика”, утвержденный в 2020 г., в одной из универсальных компетенций (УК-1) требует формирования у студентов способности применять системный подход для решения поставленных задач. В 6 из 34 профессиональных стандартов, устанавливающих требования к выпускникам бакалавриата направления подготовки “Экономика”, упоминается дисциплина “Системный анализ” [1, с. 88]. В связи с этими обстоятельствами в основной образовательной программе бакалавриата по направлению подготовки “Экономика”, разработанной в Тверском государственном университете (ТвГУ) в 2021 г., предусмотрено изучение дисциплины “Системный анализ в экономике”.

Системный анализ использует как концептуально-методологические представления, так и формализованные методы, и модели [2, с. 13]. Пионером в преподавании и разработке учебно-методического обеспечения дисциплины “Системный анализ в экономике” в России является Финансовый университет при Правительстве РФ. В настоящее время к основным учебным пособиям по этой дисциплине, разработанным в Финансовом университете и рекомендованным для студентов направления подготовки “Экономика”, относятся учебник И.Н. Дрогобыцкого [3] и учебное пособие под редакцией Л.С. Звягина [4]. В учебнике [3] основное внимание уделено концептуально-методологическим аспектам системного анализа (в предположении, что математические методы изучаются в других дисциплинах), а в учебном пособии [4] – в основном, математическим методам системного анализа (концептуальные основы составляют около 20 %).

Соотношение между концептуальными основами и математическими методами в преподавании системного анализа определяется перечнем и трудоемкостью математических методов системного анализа, изучаемых в других учебных дисциплинах. Поэтому объектом данного исследования являются математические методы системного анализа. Предмет исследования состоит в анализе математических методов системного анализа, применяемых в экономическом образовании. Цель исследования заключается в определении перечня и структуры изучения математических методов при преподавании дисциплины “Системный анализ в экономике” студентам бакалавриата направления подготовки “Экономика” в ТвГУ.

1. Математические методы системного анализа. В настоящее время существует много определений понятия “системный анализ”. Одно из них формулируется следующим образом [5, с. 42]: “Системный анализ – это прикладная научная методология, опирающаяся на широкое многообразие системно организованных и функционально взаимодействующих эвристических процедур, методических приемов, математических методов, алгоритмических программных и вычислительных средств, обеспечивает в условиях концептуальной неопределенности формирование целостных, междисциплинарных знаний об исследуемом объекте как о совокупности взаимосвязанных процессов различной природы для последующего принятия решений относительно его дальнейшего развития и поведения с учетом множества конфликтующих критериев и целей, наличия факторов риска, неполноты и недостоверности информации”.

Основой системного анализа около полувека служили математические методы исследования операций [6, с. 11] (которые базируются на методах математического программирования), так как исторически системный анализ явился развитием исследования операций и системотехники [7, с. 57; 8, с. 5]. Предмет исследования операций составляют хорошо (количественно) структурированные проблемы [6, с. 19; 7, с. 55].

Классический набор дисциплин исследования операций включает [7, с. 57-58]: 1) задачи выбора; 2) многокритериальное принятие решений; 3) линейное, нелинейное и динамическое программирование; 4) марковские случайные процессы; 5) теорию массового обслуживания; 6) игровые методы обоснования решений; 7) сетевое планирование; 8) теорию надежности.

Кроме системного анализа, исследование операций оказало влияние на формирование экономико-математических методов – условного названия комплекса научных дисциплин на стыке экономики с математикой и кибернетикой [9, с. 639]. Экономико-математические методы включают в себя, в том числе, математические методы исследования операций. В [10, с. 410] к методам принятия оптимальных решений (включая исследование операций) отнесены: 1) математическое программирование (линейное, нелинейное, динамическое, дискретное (целочисленное), блочное, дробно-линейное, параметрическое, сепарабельное, стохастическое, геометрическое); 2) сетевые методы планирования и управления; 3) программно-целевые методы планирования и управления; 4) теория управления запасами; 5) теория массового обслуживания; 6) теория игр; 7) теория решений; 8) теория расписаний.

Предмет системного анализа составляют слабо структурированные проблемы, содержащие как качественные, так и количественные элементы

[6, с. 19; 7, с. 55]. В связи с этим методы оптимизации применяются в системном анализе только для решения частных хорошо структурированных задач, но не рассматриваются в качестве концептуальной основы решения системных проблем [6, с. 36-37]. Поэтому в настоящее время методы исследования операций дополнены понятийными (логико-лингвистическими) моделями, основанными на мягких вычислительных процедурах, теории нечетких множеств и языковых средствах, близких к естественному языку [6, с. 11]. Это дает возможность более адекватного описания систем (в том числе экономических) в результате объединения методов классической математики, формальной логики и лингвистики на базе современных информационных технологий [6, с. 11].

Современный системный анализ как интегративная наука включает в себя следующие науки [7, с. 57]: 1) общая теория систем; 2) системотехника; 3) оптимизация (в том числе нечеткая и генетические алгоритмы); 4) исследование операций; 5) анализ данных и принятие решений; 6) информационные технологии; 7) искусственный интеллект.

2. Математические методы системного анализа в экономическом образовании. Системный анализ как самостоятельная дисциплина появился в учебных планах подготовки экономистов некоторых вузов в начале XXI века. Первая учебная программа дисциплины и ее методическое обеспечение были разработаны в 2005 г. в Финансовом университете при Правительстве РФ, в 2007 г. было опубликовано первое учебное пособие с названием “Системный анализ в экономике”.

В настоящее время математические методы системного анализа изучаются студентами экономических направлений подготовки в рамках других дисциплин по учебным пособиям с названиями: математическое программирование; исследование операций в экономике; экономико-математические методы; методы оптимальных решений. Сравнение структуры изучения математических методов системного анализа по учебным пособиям [4, 11-15] приведено в табл. 1.

Таблица 1

Математические методы системного анализа в обучении экономистов

Математический метод	Учебное пособие					
	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[4]
Классические методы оптимизации	-	+	-	-	-	-
Линейное программирование	+	+	+	+	+	+
Целочисленное программирование	+	+	+	+	-	-
Нелинейное программирование	+	+	+	+	-	-
Динамическое программирование	+	+	+	+	+	-
Параметрическое программирование	+					
Стохастическое программирование	+					
Многокритериальная оптимизация	+	-	+	+	-	-
Теория игр	+	+	-	-	-	+

Окончание табл. 1

Математический метод	Учебное пособие					
	[11]	[12]	[13]	[14]	[15]	[4]
Сетевое планирование	+	+	+	+	+	+
Теория массового обслуживания	-	+	-	-	-	-
Теория управления запасами	-	+	-	-	+	-
Имитационное моделирование	-	-	-	-	+	+

Анализ табл. 1 показывает, что среди математических методов системного анализа студенты традиционных профилей направления “Экономика” изучают, в основном, математические методы исследования операций, предназначенные для описания хорошо структурированных проблем. Математические методы системного анализа, предназначенные для описания слабо структурированных проблем, не рассматриваются (за исключением имитационного моделирования).

3. Математические методы системного анализа при подготовке бакалавров по направлению подготовки “Экономика” в ТвГУ. В ТвГУ при подготовке бакалавров направления “Экономика” по профилям “Учет, анализ и аудит”, “Финансы и инвестиции” и “Финансовые рынки и банки” планируется структура изучения математических методов системного анализа, представленная в табл. 2.

Таблица 2

Структура изучения математических методов экономистами в ТвГУ

Семестр	Дисциплина	Математические методы
2	Математический анализ	Классические методы оптимизации
2	Линейная алгебра	Линейное программирование
3	Системный анализ в экономике	Теория игр; теория управления запасами; теория массового обслуживания; имитационное моделирование.
4	Методы оптимальных решений	Целочисленное программирование; нелинейное программирование; динамическое программирование; сетевое планирование; многокритериальная оптимизация.

4. Программное обеспечение в преподавании математических методов системного анализа. Известный советский и российский математик Н.Н. Моисеев, внесший существенный вклад в развитие теории системного анализа, подчеркивал, что системный анализ появился в эпоху электронных вычислительных машин (ЭВМ), и его развитие во многом определяется их возможностями. Поэтому в [8, с. 5] он рассматривал системный анализ в узком смысле как “совокупность методов, основанных на использовании ЭВМ и ориентированных на исследование сложных систем – технических, экономических, экологических и т. д.” При этом в качестве одного из основных инструментов системного анализа Н.Н. Моисеев рассматривал имитационное моделирование [8, с. 182]. Современный системный анализ базируется на использовании компьютерных программ и приобретает черты информационной технологии [6, с. 26]. Поэтому преподавание системного анализа должно опираться на использование компьютерных программ.

Как правило, практическая часть преподавания системного анализа в экономике `у студентов традиционных профилей подготовки направления "Экономика" базируется на использовании табличного процессора MS Excel в предположении, что выпускник бакалавриата пройдет дополнительное обучение по конкретным компьютерным программам, применяемым в конкретной организации [4, с. 10]. Однако при изучении имитационного моделирования целесообразно использовать какую-либо систему имитационного моделирования.

Выводы

1. Математические методы системного анализа включают методы для описания хорошо и слабо структурированных проблем.

2. Учебно-методическое обеспечение учебного процесса по дисциплине "Системный анализ в экономике" для студентов традиционных профилей направления подготовки "Экономика" основано на изучении, в основном, математических методов для описания хорошо структурированных проблем (методов исследования операций).

3. Математические методы системного анализа (исследования операций) студенты бакалавриата направления подготовки "Экономика" в ТвГУ будут изучать в рамках дисциплин: математический анализ; линейная алгебра; системный анализ в экономике; методы оптимальных решений.

4. В рамках дисциплины "Системный анализ в экономике" студенты бакалавриата направления подготовки "Экономика" будут изучать имитационное моделирование (как один из методов описания слабо структурированных проблем).

5. В качестве основного программного продукта при изучении дисциплины "Системный анализ в экономике" планируется использовать табличный процессор MS Excel.

6. Полноценное изучение математических методов системного анализа для описания слабо структурированных проблем, основанных на мягких вычислениях, в рамках разработанной основной образовательной программы направления "Экономика" для профилей "Учет, анализ и аудит", "Финансы и инвестиции" и "Финансовые рынки и банки" не представляется возможным. Такое изучение возможно в рамках профиля подготовки "Бизнес-информатика" или в рамках математических направлений подготовки с большим набором математических дисциплин и дисциплин, связанных с информационными технологиями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А.А., Васильева Е.В. Математическая подготовка экономистов в условиях перехода к цифровой экономике [Текст] // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. 2020. № 2(50). – С. 84-93.

2. Теория систем и системный анализ [Текст]: справочник: учеб. пособие / Под ред. В.Н. Волковой и А.А. Емельянова. М.: Финансы и статистика, 2006. 848 с.

3. Дрогобыцкий И.Н. Системный анализ в экономике [Текст]: учеб. для студентов вузов, обучающихся направлению подготовки “Экономика”. 3-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2017. 607 с.

4. Звягин Л.С. Системный анализ деятельности предприятий в экономике и финансах [Текст]: учеб. пособие / Л.С. Звягин, А.И. Сатдыков, О.В. Беспалова-Милек; под ред. Л.С. Звягина. М.: КНОРУС, 2020. 590 с.

5. Панкратова Н.Д. Тенденции и проблемы развития системного анализа как прикладной научной методологии [Текст] / Системный анализ в проектировании и управлении: сб. науч. тр. XXII Междунар. научно-практ. конф., Санкт-Петербург, 22-24 мая 2018 г. Часть 1. СПб: СПб. политехн. ун-т Петра Великого, 2018. – С. 28-44.

6. Теоретические основы системного анализа [Текст] / В.И. Новосельцев [и др.]; под ред. В.И. Новосельцева. М.: Майор, 2006. 592 с.

7. Новиков Д.А. Кибернетика: Навигатор. История кибернетики, современное состояние, перспективы развития [Текст]. М.: ЛЕНАНД, 2016. 160 с.

8. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа [Текст]. М.: Наука, 1981. 488 с.

9. Математика и кибернетика в экономике [Текст]: словарь-справочник / Отв. ред. Н.П. Федоренко. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Экономика, 1975. 700 с.

10. Лопатников Л.И. Экономико-математический словарь: [Текст]: словарь современной экономической науки / Под ред. Г.Б. Клейнера. 5-е изд., перераб. и доп. М.: Дело, 2003. 520 с.

11. Костевич Л.С. Математическое программирование: Информационные технологии оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие. Мн.: Новое знание, 2003. 424 с.

12. Исследование операций в экономике [Текст]: учеб. пособие / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко, И.М. Тришин, М.Н. Фридман; под. ред. Н.Ш. Кремера. М.: ЮНИТИ, 2005. 407 с.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели: учеб. для бакалавриата и магистратуры / А.Н. Гармаш, И.В. Орлова, В.В. Федосеев; под ред. В.В. Федосеева. 4-е изд., перераб. и доп. М.: Юрайт, 2019. 328 с.

14. Шелехова Л.В. Методы оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие. 2-е изд, стер. СПб.: Лань, 2017. 304 с.

15. Бородин А.В. Методы оптимальных решений [Текст]: учеб. пособие / А.В. Бородин, К.В. Пителинский. М.: ИНФРА-М, 2020. 203 с.

УДК 372.862

ЗНАКОМСТВО ШКОЛЬНИКОВ С ПРИНЦИПАМИ РАБОТЫ БЕСПРОВОДНОЙ КОМПЬЮТЕРНОЙ СЕТИ

Гаврилов Дмитрий Борисович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: dbgavrilov@edu.tversu.ru

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова: *беспроводная компьютерная сеть, wi-fi, коммутатор.*

Аннотация. В работе рассматриваются примеры заданий в виде лабораторных работ, которые позволяют познакомить школьников с принципами работы беспроводных компьютерных сетей на уроках информатики и ИКТ.

Сети и телекоммуникации – одно из самых бурно развивающихся направлений науки и техники в современном мире. Современный человек не может представить свой день без интернета. В свою очередь, интернет не может существовать без правильно настроенных, стандартизированных и стабильно работающих сетей.

В настоящее время наибольшую популярность набирают беспроводные компьютерные сети (Wi-fi). Это обусловлено удобством получения информации для человека. Нельзя не отметить, что беспроводные сети благоприятно влияют на экологию, не требуя дополнительного построения проводной сети. Беспроводная технология широко развивается, используется не только дома, но в различных социальных учреждениях: школах, университетах, библиотеках. Текущие беспроводные сети по мощности не уступают проводным. Ярким примером этого является отсутствие в современных ноутбуках специального разъёма, куда можно вставить сетевой кабель.

В современной школе не уделяется достаточного времени на развитие навыков, ориентированных на практическую работу с компьютерными сетями. Это связано с несколькими факторами. С одной стороны, действующие стандарты не требуют такого уровня подготовки, с другой – отсутствие желания и времени у учителей средней школы для рассмотрения этого вопроса [1]. В 10 классе ученикам рассказывается о представлении информации в компьютере, решаются задачи на кодирование и декодирование информации в компьютере: перевод адреса из двоичной системы счисления в десятичную и обратно, нахождение маски по IP-адресу компьютера. При этом практического закрепления полученных теоретических навыков нет. Отсутствует дальнейшее развитие даже простейших навыков администрирования у пользователя.

Для развития таких навыков у учащихся и закрепления ранее изученного материала (требуются навыки программирования, которые были получены ещё в 9-ом классе), могут быть предложены лабораторные работы. Перед их проведением необходимо познакомить учащихся с основными понятиями в работе беспроводной компьютерной сети.

В технологии Wi-fi используется технология беспроводной локальной сети IEEE 802.11.

Устройства беспроводной передачи данных: роутер, точка доступа, повторитель. Они обладают рядом специфических свойств. К характеристикам передатчика можно отнести: кодирование данных с помощью радиосигналов; частоту и мощность передачи; требования к декодированию и приёму сигналов; проектирование и возведение антенн;

Средства беспроводного обмена данными обеспечивают передачу двоичных данных в виде электромагнитных сигналов радиочастотного или микроволнового диапазона. Благодаря этому обеспечивается наибольшая стабильность передачи данных воздуху.

К ограничениям беспроводной связи относится:

Область покрытия – физические характеристики места, на котором расположено устройство передачи данных. Может повлиять на скорость и качество передачи данных.

Помехи. Среда беспроводной связи чувствительна к помехам. Передача данных по каналу связи, может быть, нарушена вследствие различных помех: электромагнитные волны, толщина стен.

Безопасность. Передача данных происходит без участия кабеля, вследствие чего любой пользователь может получить доступ к передаваемым данным.

Совместный доступ к средству подключения. Сети WLAN (*Wireless Local Area Network*) используют так называемый полудуплексный режим – это способ связи, когда устройство в один момент времени может либо отдавать информацию, либо её принимать. При большом количестве подключившихся пользователей пропускная способность точки доступа падает, общая скорость соединения делится на каждого из абонентов.

Для выполнения лабораторных работ рекомендуется следующий комплект оборудования, из расчёта на учебную группу, состоящую из 10 человек:
Коммутатор DES-3810-28 – 2 шт.
Коммутатор DES-3528 – 8 шт.
Коммутатор DES-1005A – 5 шт.
Рабочая станция – 20 шт.
Кабель Ethernet – 35 шт.
Консольный кабель – 10 шт.

Каждая лабораторная работа должна содержать схему установки с указанием количества рабочих мест, на которое она рассчитана. Предварительная настройка коммутаторов осуществляется через интерфейс командной строки, путём подключения управляющей рабочей станции к его консольному порту. Команды в описании лабораторных работах приведены для коммутаторов со следующими версиями программного обеспечения:
Коммутатор DES-3810-28 – ПО версии 2.10.b024 или выше;

Коммутатор DES-3528 – ПО версии 2.80.b042 или выше.

Для проведения лабораторных работ потребуется следующее программное обеспечение:

1. Генератор трафика iperf (http://sourceforge.net/projects/iperf/);
2. TFTP-сервер Tftpd32 (http://tftpd32.jounin.net);
3. Анализатор трафика Wireshark (http://www.wireshark.org).

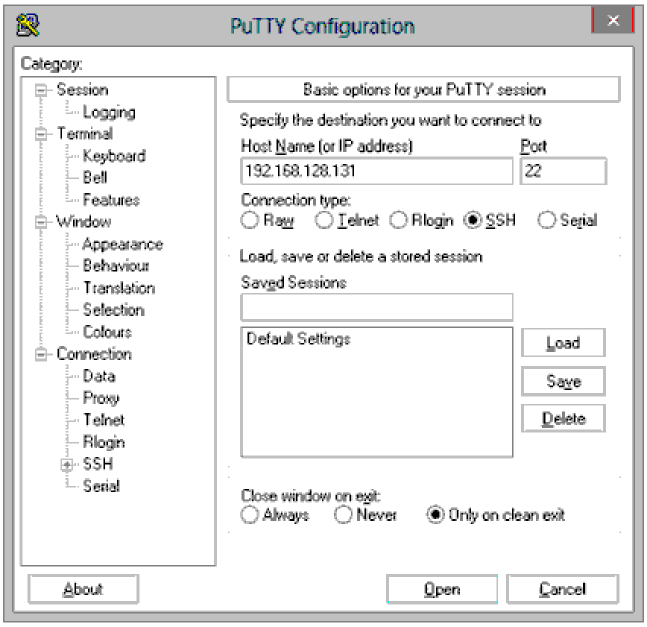
Перед началом лабораторной работы необходимо напомнить учащимся о соблюдении правил техники безопасности при работе с электрическими приборами.

Лабораторная работа №1 (*Основные команды коммутатора*)

Данная лабораторная работа посвящена изучению основных команд и принципов работы управляемого коммутатора.

Вызов помощи по командам

Необходимо подключить компьютер к консольному порту коммутатора с помощью кабеля *RS-232*. После подключения к консольному порту коммутатора, на персональном компьютере необходимо запустить программу эмуляции терминала *Putty*.



В программе следует установить требуемые параметры подключения:

В появившейся консоли следует для вызова помощи следует ввести:

Введите в консоли: ?

Введите в консоли: config

Введите в консоли: show

Команды мониторинга сети

Рассмотрим статистику о пакетах, передаваемых и принимаемых портом 2 коммутатора: *show packet ports 2*

Затем посмотрим статистику об ошибках передаваемых и принимаемых портом пакетов: *show error ports 2*

Данная команда позволяет определять ошибки передаваемых данных и локализовать проблемы в коммутируемой сети.

После этого очистим счётчики статистики на порте: *clear counters ports 2*
show utilization cpu
Посмотрим загрузку портов коммутатора: *show utilization ports*
Посмотрим журнал работы коммутатора: *show log*
Посмотрим журнал работы коммутатора с определенного индекса (ID):
show log index 5
Очистим журнал работы: *clear log*
Протестируем состояние кабелей, подключённых к портам коммутатора:
cable_diag ports all
После этого лабораторную работу нужно закончить. Необходимо отключить оборудование и убрать в специально отведённые для этого места хранения.

Лабораторная работа №2 (Настройка времени на коммутаторе)

В начале целесообразно повторить материал предыдущей лабораторной работы.
Введите команду: *config time 30102007 15:45:30*
Установка часового пояса: *config time_zone operator + hour 3 min 0*
Введите команду для првоерки времени: *show time*

Лабораторная работа №3 (Настройка параметров идентификации коммутатора)

Команда для настройки имени коммутатора:
config snmp system_name HQ-SW01
Настройка месторасположения коммутатора:
config snmp system_location HQ 5F
Команда для проверки внесённых настроек: *show switch*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Желтов С.А., Миловидов А.Е. Знакомство с криптографией на уроках информатики и ИКТ // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27–28 марта 2020 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2020. – С. 83 – 86.

2. Технологии современных беспроводных сетей Wi-Fi : учебное пособие / [Е. В. Смирнова, А. В. Пролетарский и др.] ; под общ. ред. А. В. Пролетарского. – Москва: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 446, [2] с. : ил. – (Компьютерные системы и сети).

УДК 372.851

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ НЕРАВЕНСТВ: ВОЗМОЖНОСТИ СКА MAPLE И DESMOS

Готова Наталья Евгеньевна
Приамурский Государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: nata.ya28@mail.ru

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский Государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Ключевые слова: *неравенства, системы неравенств, система компьютерной математики (СКА) Maple, графический калькулятор Desmos*

Аннотация. В работе описывается опыт применения системы компьютерной математики Maple и графического калькулятора Desmos при изучении неравенств и систем неравенств в курсе математики средней школы.

Неравенства являются важной частью математического аппарата, применяющегося для решения многих практических задач, например, на выбор оптимального варианта, нахождения наибольших и наименьших значений. Тема «Неравенства» тесно связана с темами «Функции» и «Тождественные преобразования», в ней больше потенциала, чем предлагается в формальном образовании. Данную тему можно преподносить в абсолютно разных формах, изучать с разных сторон и более углубленно.

Понимание геометрического истолкования неравенств поможет учащимся не только успешно сдать ОГЭ и ЕГЭ по математике как базового, так и профильного уровней, но и подготовиться к обучению в ВУЗе, особенно тем из них, которые планируют поступать на технические специальности. Так, например, при изучении кратных интегралов в университетском курсе математического анализа необходимо умение задавать плоскую область в виде неравенств от двух переменных.

Авторами статьи довольно давно и активно используются в учебном процессе возможности современных компьютерных систем, таких как Desmos и СКА Maple [1, 7, 11]. Обе эти системы удобно использовать в учебном процессе и для объяснения нового материала, и для самостоятельных творческих заданий.

Графический калькулятор Desmos реализован как приложение для браузера. Опишем основные преимущества Desmos:

- сервис бесплатный (при желании можно зарегистрироваться) и русифицирован;
- не требуется установка, нужен лишь выход в Интернет;
- имеются примеры готовых графиков;
- нет необходимости прописывать программы, достаточно в боковом окне написать функцию, график которой нужно построить;

– позволяет строить графики функций с параметром (система предлагает «добавить ползунок»), что позволяет наглядно демонстрировать геометрические преобразования графиков различных функций [3].

Система компьютерной математики (СКА) Maple – это мощная символьная и числовая вычислительная среда, имеющая свой язык программирования. Графические возможности системы поистине безграничны. Функция plot, которая используется для построения 2d-графиков, имеет более трех десятков различных опций: можно изменять цвета, размеры и виды линий, выбирать систему координат, создавать анимацию и многое другое. В Maple также можно строить 3d-графики и рассматривать их с разных сторон, поворачивая в любом направлении. Однако для построения графиков в Maple необходимо прописывать программу, поэтому для использования системы необходимо изучить интерфейс и режимы работы системы, основные команды и синтаксис языка программирования. Для работы с Maple требуется установка, программа платная.

Обе системы применяются в учебном процессе многими педагогами: при решении уравнений с параметрами [6], для решения уравнений и неравенств графическим методом [12], при решении задач по теме «Многочлены» [8], для более доступного (наглядного) метода изучения математической индукции [5], для построения графиков элементарных функций [4] и для построения трехмерных объемных фигур [10]. При использовании визуализации на уроках математики с помощью компьютерных программ, отмечается простота визуального восприятия сложного материала [9]. А овладение умением строить графики функций с помощью компьютера поможет учащимся в дальнейшем при обработке и оформлении результатов экспериментального исследования любого выполняемого ими проекта [4].

Мы предлагаем вариант использования возможностей систем Desmos и Maple при изучении темы «Неравенства», в частности для геометрической интерпретации неравенств. Приведем несколько примеров таких заданий и способы выполнения их в компьютерных системах.

Пример 1. Изобразить на прямой (на плоскости, и в пространстве) множество решений, задаваемого неравенством $a \leq x \leq b$.

Выполнение этого задания позволяет сделать акцент на том, что вид множества, задаваемого одним и тем же неравенством, зависит от пространства, в котором мы находимся при решении задачи. Так на прямой данное неравенство задает отрезок (рис. 1), на плоскости – полосу или «толстую прямую» (рис. 2), а в пространстве – множество, ограниченное двумя плоскостями (рис. 3).

Пример 2. Решить неравенство $(x-y-2)(x+3y-6)>0$ [2, стр.241].

Геометрически решением данного неравенства является пара вертикальных углов (рис. 4-5), образованных пересечением прямых $x-y=2$ и $x+3y=6$. Выбираем ту пару углов, в которых оба множителя имеют одинаковые знаки.

```
T := pointplot([1, 0], symbolsize = 16, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
T1 := pointplot([1, 0], symbolsize = 12, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
T2 := pointplot([1, 0], symbolsize = 8, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
K := pointplot([2, 0], symbolsize = 16, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
K1 := pointplot([2, 0], symbolsize = 12, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
K2 := pointplot([2, 0], symbolsize = 8, symbol = circle, color = [blue], axis[1] = [gridlines = [2, color = grey]],
    axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]], scaling = constrained, ) :
TK := line([1, 0], [2, 0], color = "DodgerBlue", linestyle = solid, thickness = 3, ) : display(T, T1, T2, K, K1, K2, TK,
    view = [-4 ..4, -3 ..3])
```

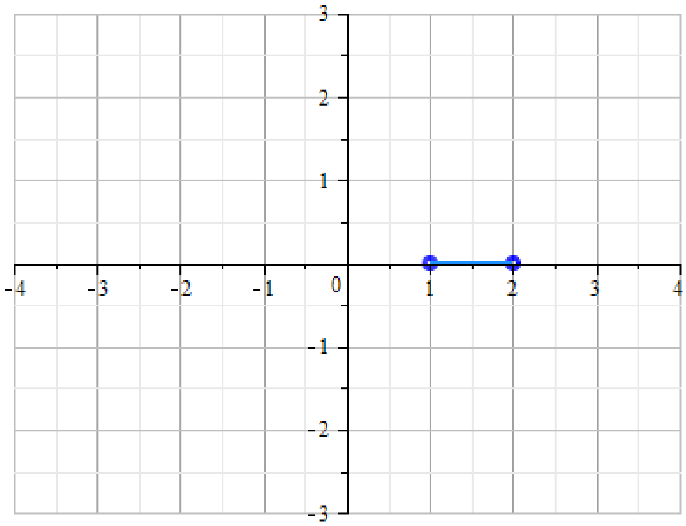


Рис. 1. Геометрическая интерпретация неравенства $1 \le x \le 2$ на прямой

```
> L := plot([1, t, t = -3 ..3], x = -4 ..4, scaling = constrained, color = "Blue", linestyle = solid, thickness = 3, axis[1]
    = [gridlines = [8, color = grey]], axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]]) :
  L1 := plot([2, t, t = -3 ..3], x = -4 ..4, scaling = constrained, color = "Blue", linestyle = solid, thickness = 3, axis[1]
    = [gridlines = [8, color = grey]], axis[2] = [gridlines = [6, color = grey]]) :
  LL1 := inequal({1 ≤ x ≤ 2}, x = -4 ..4, y = -3 ..3, color = "DodgerBlue") :
  display(L, L1, LL1)
```

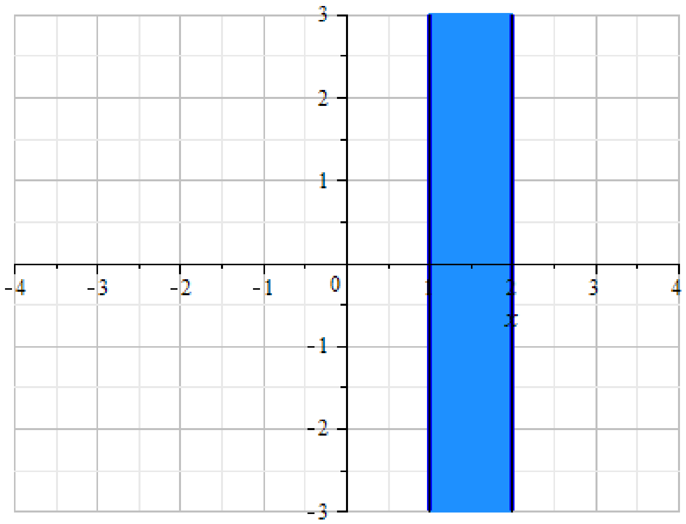


Рис. 2. Геометрическая интерпретация неравенства $1 \le x \le 2$ на плоскости

```
> P := plot3d([1, t, s], t=-3..3, s=-3..3, scaling=constrained, color="Blue", axes=normal) :
  P1 := plot3d([2, t, s], t=-3..3, s=-3..3, scaling=constrained, color="Blue", axes=normal) :
  N := 10 :
  for i from 1 to N do PP[i] := plot3d([2 - i/N, t, s], t=-3..3, s=-3..3, scaling=constrained, color
      ="DodgerBlue", axes=normal) od:
  PP1 := seq(PP[i], i=1..N) :
  display(P, P1, PP1, view=[-4..4, -3..3, -3..3])
```

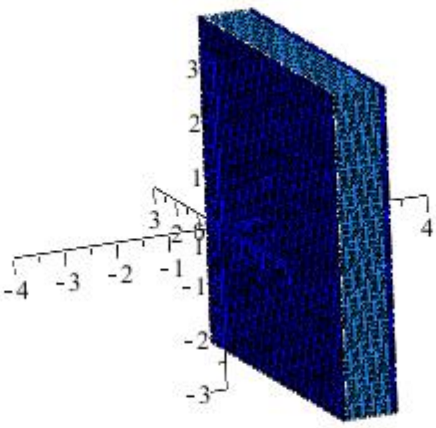


Рис. 3. Геометрическая интерпретация неравенства $1 \leq x \leq 2$ в пространстве

```
> with(plots) : with(plottools) :
> L := plot([x - 2, 2 - x/3], x=-3..8, y=-4..6, scaling=constrained, color="Blue", thickness=3, axis[1]
      =[gridlines=[12, color=grey]], axis[2]=[gridlines=[10, color=grey]]) :
  L1 := inequal({(x - y - 2)·(x + 3·y - 6) > 0}, x=-3..8, y=-4..6, color="DodgerBlue") :
  display(L); display(L, L1)
```

Рис. 4. Геометрическая интерпретация неравенства
$(x - y - 2)(x + 3y - 6) > 0$ в Maple

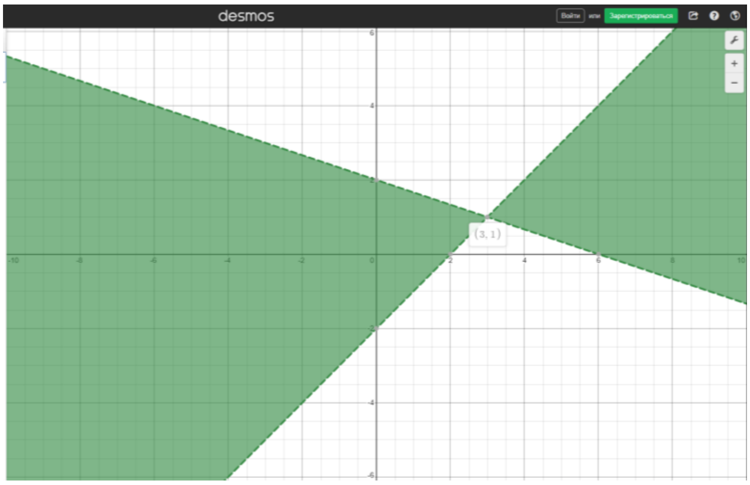


Рис. 5. Геометрическая интерпретация неравенства
$(x - y - 2)(x + 3y - 6) > 0$ в Desmos

Пример 3. Найти множества точек координатной плоскости, удовлетворяющих системе неравенств [2, стр.241].

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0, \\ 2y - x - 1 \leq 0. \end{cases}$$

На плоскости изображается четырехугольник, образованный при пересечении четырех полуплоскостей (рис. 6).

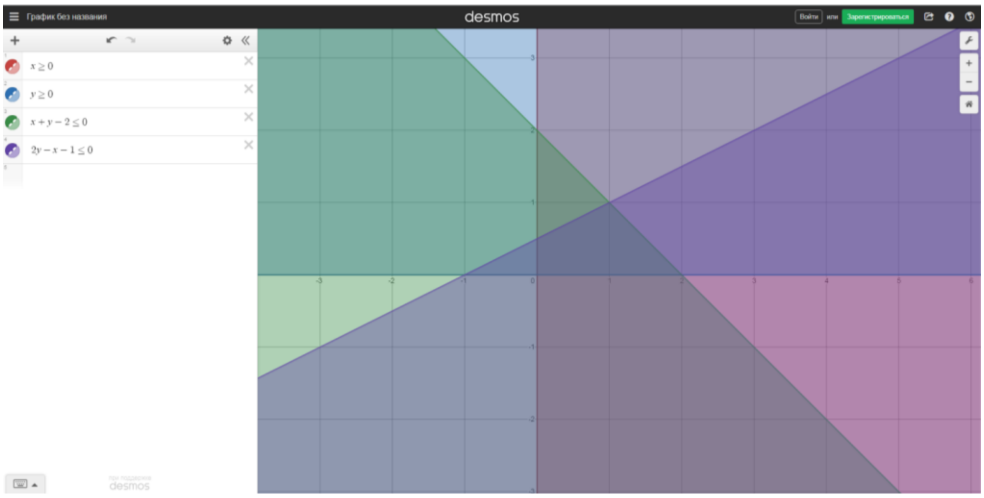


Рис. 6. Геометрическая интерпретация системы неравенств в Desmos

Авторы используют аналогичные задания при проведении интегрированнных уроков по математике и информатике.

Использование при изучении темы «Неравенства» современных компьютерных программ Desmos и Maple позволяет быстро строить качественные графики и дает наглядное представление о множестве решений неравенств и систем неравенств. Следует отметить, что, выполняя подобные задания в СКА Maple, учащиеся знакомятся также и с основами программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Eyrikh N.V., Bazhenov R.I., Markova N.V., Putkina L.V. Applying Maple Computing Environment In Teaching Mathematics To University Students Majoring In Technical // В сборнике: Proceedings of the 2018 International Conference "Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies", IT and QM and IS 2018. 2018. С. 623-628.

2. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / [Ю.М. Колягин, М.В. Ткачева, Н.Е. Федорова, М.И. Шабунин]; под ред. А.Б. Жижченко. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2010. – 336 с.

3. Кабанова Н.В., Шулежко О.В. О графических возможностях редактора Desmos // Актуальные направления научных исследований XXI века: теория и практика. – 2015. – Т. 3. № 7-4 (18-4). – С. 239-243.

4. Леонтьева А.И. Построение графиков элементарных функций с помощью компьютера // Матрица научного познания. – 2019. – № 11. – С. 7-14.

5. Оленев А.А., Назаренко А.В. Метод математической индукции в системе компьютерной алгебры Maple // Научное обозрение. Педагогические науки. – 2020. – № 6. – С. 27-31.

6. Преснякова Ю.С. Использование графического калькулятора Desmos при решении уравнений с параметрами // Обучение и воспитание: методики и практика. – 2016. – № 28. – С. 45-50.

7. Ушакова И.А., Эйрих Н.В. Об использовании динамических компьютерных визуализаций при изучении темы «Предел последовательности» // В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы научно-практической конференции. 2017. С. 130-133.

8. Цыбикова Л.Х., Гачегова Н.С. Элективный курс: "решение задач по теме "многочлены" с помощью Maple" // В сборнике: Геометрия многообразии и ее приложения. Материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. Отв. ред. В.Б. Цыренова. – 2018. – С. 309-313.

9. Чудаева Т.Д. Визуализация на уроках математики // Научный альманах. –2016. – № 11-3 (25). – С. 168-170.

10. Шпилев Е.М. Использование математического программного комплекса maple для построения трехмерных фигур // Достижения науки и образования. – 2018. – Т. 1. № 8 (30). – С. 78-79.

11. Эйрих Н.В., Прохорова Н.Ю. Визуализация в системе Maple элементарных преобразований графика линейной функции // Информатика в школе. 2017. № 6 (129). С. 42-46.

12. Ярушкин А.И. Современные компьютерные технологии, как помощь в решении математических задач // Информация и образование: границы коммуникаций. – 2018. – № 10 (18). – С. 251-253.

УДК 517.54

К ТЕОРЕМЕ ГУРВИЦА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Граф Сергей Юрьевич
Тверской государственный университет, Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

Никитин Иван Александрович
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: ianikitin20@gmail.com

Ключевые слова: *гармонические функции, теорема Гурвица.*

Аннотация. В настоящей заметке анонсируется обобщение теоремы Гурвица на случай произвольной гармонической функции.

Существенную роль в геометрической теории функций комплексного переменного играет теорема Гурвица, которая описывает связь нулей голоморфной функции $f(z) \neq const$ с нулями локально равномерно сходящейся к ней последовательности голоморфных функций $\{f_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$. В частности теорема Гурвица применяется, например, для анализа однолистности предела последовательности конформных отображений.

Теорема 1 (Теорема Гурвица) [1]. *Пусть последовательность функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, голоморфных в некоторой области D, сходится локально равномерно к функции $f(z)$, не равной тождественно константе. Тогда, если $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, то в любой окрестности $U(z_0, \varepsilon) = \{z \in D: |z - z_0| < \varepsilon\}$ все функции последовательности функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, начиная с некоторого номера, также обращаются в нуль.*

Напомним, что последовательность функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится *локально равномерно* к функции f в области D, если $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится равномерно к f на любом компакте $K \subset D$. В действительности справедливо более сильное утверждение: *начиная с некоторого номера, количество нулей функций f_n, попадающих в достаточно малую окрестность точки z_0, с учётом кратностей равно порядку нуля z_0 функции $f(z)$.*

Доказательство теоремы Гурвица опирается на не менее значимый для комплексного анализа результат – принцип аргумента.

Теорема 2 (Принцип аргумента) [1]. *Пусть функция f голоморфна в жордановой области D с кусочно-гладкой границей γ, непрерывна в замыкании области D и $f(z) \neq 0$ на γ. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = N,$$

где $N \in \mathbb{Z}$ равно количеству нулей функции f в области D с учетом их кратностей, а $\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z)$ обозначает приращение аргумента точки $f(z)$ при однократном обходе точкой z кривой γ в положительном направлении.

Известно [2,3], что принцип аргумента имеет чисто топологический характер и обобщается на значительно более широкий класс функций [3,4]. В частности результаты М. Кристи [3] позволяют привести следующую формулировку принципа аргумента, существенную в рамках данной заметки:

Теорема 3 [3]. *Пусть функция f непрерывна в замыкании жордановой области D с границей γ, $f(z) \neq 0$ на γ и множество $f^{-1}(0) = \{z_k \in D: f(z_k) = 0\}_{k=1}^{N}$ дискретно. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = \sum_{k=1}^{N} ind(f, z_k),$$

где $ind(f, z_k)$ – топологический индекс функции f в точке z_k, т.е. число оборотов $f(z)$ вокруг начала координат при однократном обходе точкой z в положительном направлении окружности малого радиуса с центром в z_k.

Напомним, что дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая в области $D \subset \mathbb{C}$ уравнению Лапласа $f_{z\bar{z}} \equiv 0$, называется *гармонической*. Известно [4], что любая гармоническая функция в односвязной области может быть представлена в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, где h, g – голоморфные функции.

Отдельный интерес для геометрической теории функций представляют обобщения теоремы Гурвица на случай гармонических функций в комплексной плоскости. Такие обобщения, так же как и обобщения принципа аргумента, неоднократно предпринимались [4,5], однако с тем ограничением, что функция f либо сохраняет, либо меняет ориентацию в области D.

Теорема 4 [4]. *Пусть гармоническая функция f непрерывна в замыкании жордановой области D границей γ, $f(z) \neq 0$ на γ и f сохраняет ориентацию в области D. Тогда*

$$\frac{1}{2\pi}\Delta_\gamma \operatorname{Arg} f(z) = N,$$

где N равно количеству нулей f в области D с учетом их кратностей.

Напомним, что если гармоническая функция f сохраняет ориентацию в $U(z_0, \varepsilon)$ и $f(z_0) = 0$, то точка z_0 является изолированным нулем функции f и

$$f(z) = \sum_{l=k}^{\infty} a_l (z - z_0)^l + \overline{\sum_{l=m}^{\infty} b_l (z - z_0)^l} = a_k (z - z_0)^k (1 + \varphi(z)),$$

где $|\varphi(z)| < 1$ в $U(z_0, \varepsilon)$ и число k называется порядком нуля f в точке z_0. Все нули гармонических функций, расположенные вне нулевых линий якобиана $J_f = |h'|^2 - |g'|^2$ являются изолированными. Нули, расположенные на нулевых линиях якобиана, называются сингулярными и могут не быть изолированными. Следствием из теоремы 4 является теорема Гурвица для сохраняющих ориентацию гармонических функций.

Теорема 5 [5]. *Пусть последовательность сохраняющих ориентацию гармонических функций $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ сходится локально равномерно в области D к сохраняющей ориентацию гармонической функции f. Тогда функция f имеет в точке $z_0 \in D$ ноль кратности k тогда и только тогда, когда все функции f_n, начиная с некоторого номера, имеют в достаточно малой окрестности $U(z_0, \varepsilon)$ суммарное количество нулей, равное k с учетом кратностей.*

В настоящей заметке анонсируется обобщение теорем 1 и 5 на случай произвольной гармонической функции без ограничения на сохранение или смену ориентации в области D, т.е. с учетом сингулярных нулей.

Теорема 6. *Пусть последовательность гармонических функций* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *сходится локально равномерно к гармонической в области* D *функции* f, *имеющей изолированный нуль в точке* $z_0 \in D$. *Тогда в любой достаточно малой окрестности* $U(z_0, \varepsilon)$, *все функции* f_n, *начиная с некоторого номера, могут иметь лишь изолированные нули, и при этом для любого* n *справедливо равенство*

$$\sum_k ind(f_n, z_{n_k}) = ind(f, z_0),$$

где z_{n_k} *– нули функций* f_n, *расположенные в* $U(z_0, \varepsilon)$.

Заметим, что индекс $ind(f, z_0)$ совпадает с порядком нуля f в точке z_0, если f сохраняет ориентацию и $ind(f, z_0)$ равен по модулю, но противоположен по знаку порядку нуля f в точке z_0, если f меняет ориентацию. Однако [6] в сингулярных нулях значение индекса может быть различным (положительным, отрицательным или равным нулю). Кроме того, функции f_n могут и не иметь нулей в $U(z_0, \varepsilon)$. Поэтому подсчет кратностей и порядков нулей в теореме 6 уже невозможен, речь идет лишь о равенстве сумм индексов и данное ограничение существенно.

Проиллюстрируем теорему 6 примером. Рассмотрим гармонический полином

$$f_0(z) = z^2 + 2\bar{z} + 1.$$

Якобиан $J_{f_0}(z) = 4(|z|^2 - 1) = 0$ на единичной окружности. Функция f_0 имеет три нуля в плоскости $\mathbb{C}$. Нули первого порядка в точках $z_{1,2} = 1 \pm 2i$ расположены в области, где f_0 сохраняет ориентацию, но ноль в точке $z_0 = -1$ является сингулярным и индекс $ind(f_0, -1) = 0$, что продемонстрировано на рис. 1.

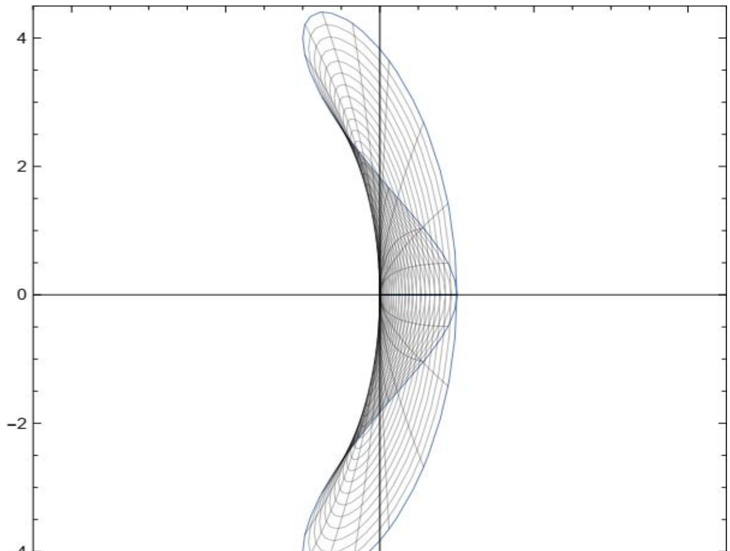


Рис. 1. Образ полярной сетки в круге $|z + 1| \leq 0.5$ при отображении f_0

Очевидно, что функции $f_n^{(-)} = f_0 - \frac{1}{n}$ равномерно в $U(-1,1)$ стремятся к f_0 и имеют по два нуля порядков 1 и -1 в окрестности точки $z_0 = -1$, в то время как $f_n^{(+)} = f_0 + \frac{1}{n}$ равномерно стремятся к f_0, но не обращаются в ноль в $U(-1,1)$. Тем не менее, суммы индексов, как для функций $f_n^{(-)}$, так и для и $f_n^{(+)}$ в окрестности точки $z_0 = -1$ равны нулю и совпадают с $ind(f_0, -1)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шабат, Б.В. *Введение в комплексный анализ*. Ч. 1. Функции одного переменного : учебник для университетов // Под ред. М. М. Горячей. – 3-е изд. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1985 –336 с.

2. Стоилов, С. *Лекции о топологических принципах теории аналитических функций* // Под. ред. В. А. Зорича. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1964 – 228 с.

3. Cristea, M. *A Generalization of the Argument Principle [article]* // Complex Variables. – Vol. 42, 2000 – pp. 333-345.

4. Duren, P. L. *Harmonic mappings in the plane* // P. L. Duren. – Cambridge University Press, 2004. – 212 pp

5. Duren, P. L. Hengartner W., Laugesen R. S. *The Argument Principle for Harmonic Functions* // The American Mathematical Monthly. – Vol. 103. – No. 5, 1996 – pp. 411-415.

6. Luce, R, Sète, O. *The index of singular zeros of harmonic mappings of anti-analytic degree one* // Complex Variables and Elliptic Equations, 2019. DOI: 10.1080/17476933.2019.1695787.

УДК 004.9

УЧЕБНЫЙ ПРИМЕР РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА DBSCAN

Григорьева Вера Владимировна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: pontida@list.ru

Григорьев Пётр Викторович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: pegrig.8@gmail.com

Ключевые слова: *Информатика, математическая статистика, кластеризация, DBSCAN, преподавание, школьники, студенты, методология, интеллектуальный анализ данных, Scratch, Python*

Аннотация. В статье рассматривается учебный пример решения задачи кластеризации точек на плоскости с помощью алгоритма DBSCAN.

Задачи по программированию, в основе которых лежит изучение и реализация известных методов анализа и обработки данных, прекрасно развивают алгоритмическое мышление. Многие из алгоритмов, применяемых в статистическом анализе данных, вполне применимы для разбора при изучении программирования как в ВУЗах, так и в школе. Получив простую реализацию алгоритма, учащийся может экспериментировать с ней и делать улучшения на основе изучения многочисленных доступных информационных источников. В этой статье пойдет речь о том, как в рамках учебной задачи для школьников или студентов изучить применения известного алгоритма кластеризации DBSCAN [1] для объектов, которые могут быть представлены точками на плоскости.

Алгоритм DBSCAN появился относительно недавно, в 1996 году и быстро завоевал признание у аналитиков данных. Напомним суть простой версии этого алгоритма, так называемого *наивного* DBSCAN:

Пусть задана некоторая симметричная функция расстояния $D(\text{x}, y)$ и константы ε и m. Тогда

1) Определим область $E(x)$, для которой $\forall y: D(x, y) \leq \varepsilon$ как ε–окрестность объекта x.
2) Определим корневым объектом степени m объект, ε–окрестность которого содержит не менее m объектов: $|E(x)| \geq m$.
3) Объект p непосредственно плотно-достижим из объекта q, если $p \in E(q)$ и q – корневой объект.
4) Объект p плотно-достижим из объекта q, если $\exists p_1, p_2 \dots p_n$, $p_1 = q$, $p_n = p$ такие, что $\forall i \in 1 \dots n-1: p_{i+1}$ непосредственно плотно достижим из p_i.
5) Выберем какой-нибудь корневой объект, пометим его и поместим всех его непосредственно плотно-достижимых соседей в список обхода. Теперь можно пометить каждую точку из этого списка, и, если она тоже корневая, добавим всех её соседей в список обхода. Можно доказать,

что кластеры помеченных точек, сформированные в ходе этого алгоритма максимальны и связны в смысле плотно-достижимости. Поэтому если мы обошли не все точки, нужно перезапустить обход из какого-нибудь другого корневого объекта, и новый кластер не поглотит предыдущий.

Теперь рассмотрим подробно, как показать и объяснить школьникам и студентам этот алгоритм. Для начала необходимо объяснить или напомнить понятия «кластер» и «кластеризация» и привести примеры их использования. Затем представим текстовое описание алгоритма на примере поиска кластеров из людей, находящихся в помещении. Пусть кластеры выделяются на основании расположения людей. Как выделить скопления людей разных форм и выявить одиночек, которые не попадают в кластеры?

Буквы DB в названии алгоритма DBSCAN означают density based – основанный на плотности. Будем считать, что рядом с некоторым человеком формируется кластер, если близко к нему стоят несколько других человек. Введем два параметра – *наибольшее расстояние до соседа* и *минимум соседей*. Первый параметр – максимальное расстояние, на которое могут быть разнесены два человека, которых мы будем называть *соседями*. Второй параметр определяет минимальное число элементов в кластере. Каждому из людей сопоставим логический признак *затронут*, который в начале работы алгоритма для каждого человека инициализируется отрицательным значением.

Будем последовательно перебирать людей из списка людей в помещении, задействовав для дальнейшего анализа только тех, для которых признак *затронут* имеет отрицательное значение. Для каждого из таких людей сразу же устанавливаем положительное значение признака *затронут*. Затем, с учетом параметра *наибольшее расстояние до соседа* для каждого рассматриваемого человека, определяем состав соседей. Если соседей меньше, чем указано в параметре *минимум соседей*, то человек помечается как одиночка, т. е. не входящий ни в один из кластеров. Если, напротив, число близко расположенных соседей больше или равно параметра минимум соседей, то рассматриваемый человек входит в новый кластер. Необходимо зафиксировать факт отнесения человека к новому кластеру, и провести отдельный процесс – *расширение кластера*. После этого можно приступать к анализу принадлежности к кластерам следующего человека из списка людей в помещении.

Расширение кластера – отдельный подпроцесс алгоритма для анализа соседей. Для каждого из соседей, у которых признак *затронутый* имеет отрицательное значение, производится поиск множества *соседей в кластере*. Перед началом поиска признаку *затронутый* человека, для которого выполняется подсчет соседей в кластере, присваивается положительное значение. Если для какого-либо соседа найдется количество *соседей в кластере*, которое не меньше *минимума соседей*, то найденное множество *соседей в кластере* объединяется с множеством *соседей в кластере* и дальнейший перебор *соседей* продолжается с учетом этой операции. После проведения всех проверок в случае, если *сосед* еще не приписан ни к одному из кластеров, то он заносится в состав кластера, с которым в данный момент ведется работа.

Для студентов и старшеклассников проиллюстрируем алгоритм кодом на Python:

```
from itertools import cycle
from math import hypot
from numpy import random
import matplotlib.pyplot as plt
def dbscan_наивный(P, eps, m):
    I = 0
    Затронутые = set()
    clustered_points = set()
    clusters = {0: []}
    def НайтиРасстояниеИСоседей(p):
        return [q for q in P if hypot(p[0] - q[0], p[1] - q[1]) < eps]
    def РасширениеКластера(p, Соседи):
        if I not in clusters:
            clusters[I] = []
        clusters[I].append(p)
        clustered_points.add(p)
        while Соседи:
            q = Соседи.pop()
            if q not in Затронутые:
                Затронутые.add(q)
                СоседиВКластере = НайтиРасстояниеИСоседей(q)
                if len(СоседиВКластере) > m:
                    Соседи.extend(СоседиВКластере)
            if q not in clustered_points:
                clustered_points.add(q)
                clusters[I].append(q)
                if q in clusters[0]:
                    clusters[0].remove(q)
    for p in P:
        if p in Затронутые:
            continue
        Затронутые.add(p)
        Соседи = НайтиРасстояниеИСоседей(p)
        if len(Соседи) < m:
            clusters[0].append(p)
        else:
            I += 1
            РасширениеКластера(p, Соседи)
    return clusters
if __name__ == "__main__":
    Объекты = [(random.rand()*480-240, random.rand()*360-180) for i in range(100)]
    Кластеры = dbscan_наивный(Объекты, 50, 3)
    for c, Точки in zip(cycle('bgrcmykgrcmykgrcmykgrcmykgrcmykgrcmyk'), Кластеры.values()):
        X = [p[0] for p in Точки]
        Y = [p[1] for p in Точки]
        plt.scatter(X, Y, c=c)
    plt.show()
```

Особое внимание уделим Scratch-версии алгоритма для школьников и вопросам объяснения реализации в этой среде объектов и данных алгоритма.

Назовем *объектом* фигуру (например, точку), которая располагается на рабочем экране. В Scratch-среде это будет спрайт, который помещается в некоторую область экрана. Например, можно написать код, который разместит на экране несколько клонов спрайта-объекта. Спрайты можно программным способом разместить по определенному закону или дать возможность редактирования их положения на экране.

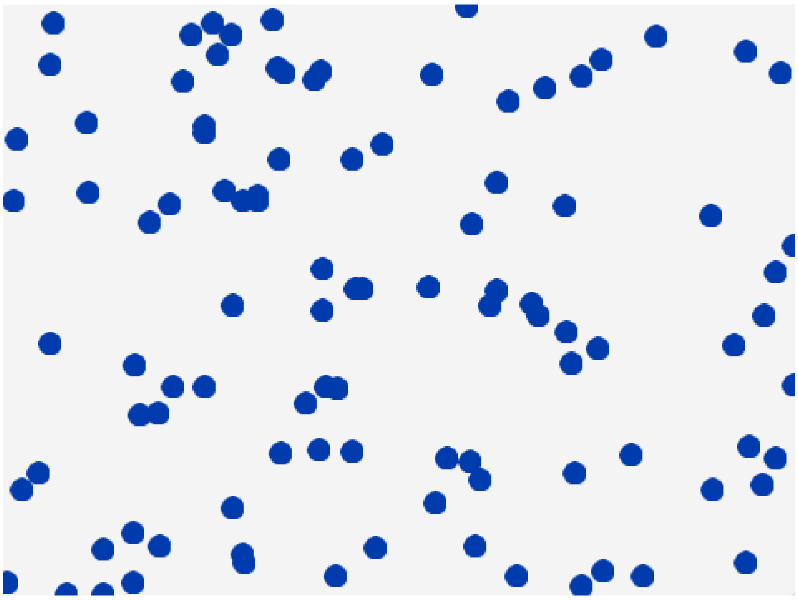


Рис. 1. Пример исходного набор объектов для кластеризации

На рисунке 1 показан пример исходного размещения объектов для кластеризации на рабочем экране Scratch. Будем считать, что координаты объектов будут совпадать с их координатами в системе Scratch, в которой начало координат находится в середине экрана, абсцисса меняется от -240 до +240; ордината – от -180 до +180. Для визуализации отнесения объекта к тому или иному кластеру применяется изменение цвета и/или его формы (в Scratch это можно сделать, например, изменив *костюм* спрайта). На рисунке 2 показан пример работы алгоритма. Объекты с рисунка 1 отнесены к 5 различным кластерам причем те из них, которые относятся к одному кластеру, приобрели одинаковый внешний вид. Объекты, которые не попали ни в один из кластеров отображаются также, как и на рисунке 1.

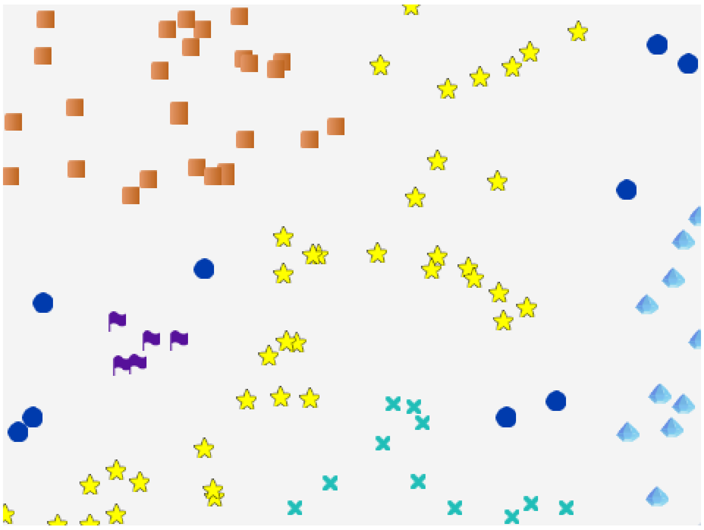


Рис. 2. Объекты на рабочем экране Scratch после кластеризации

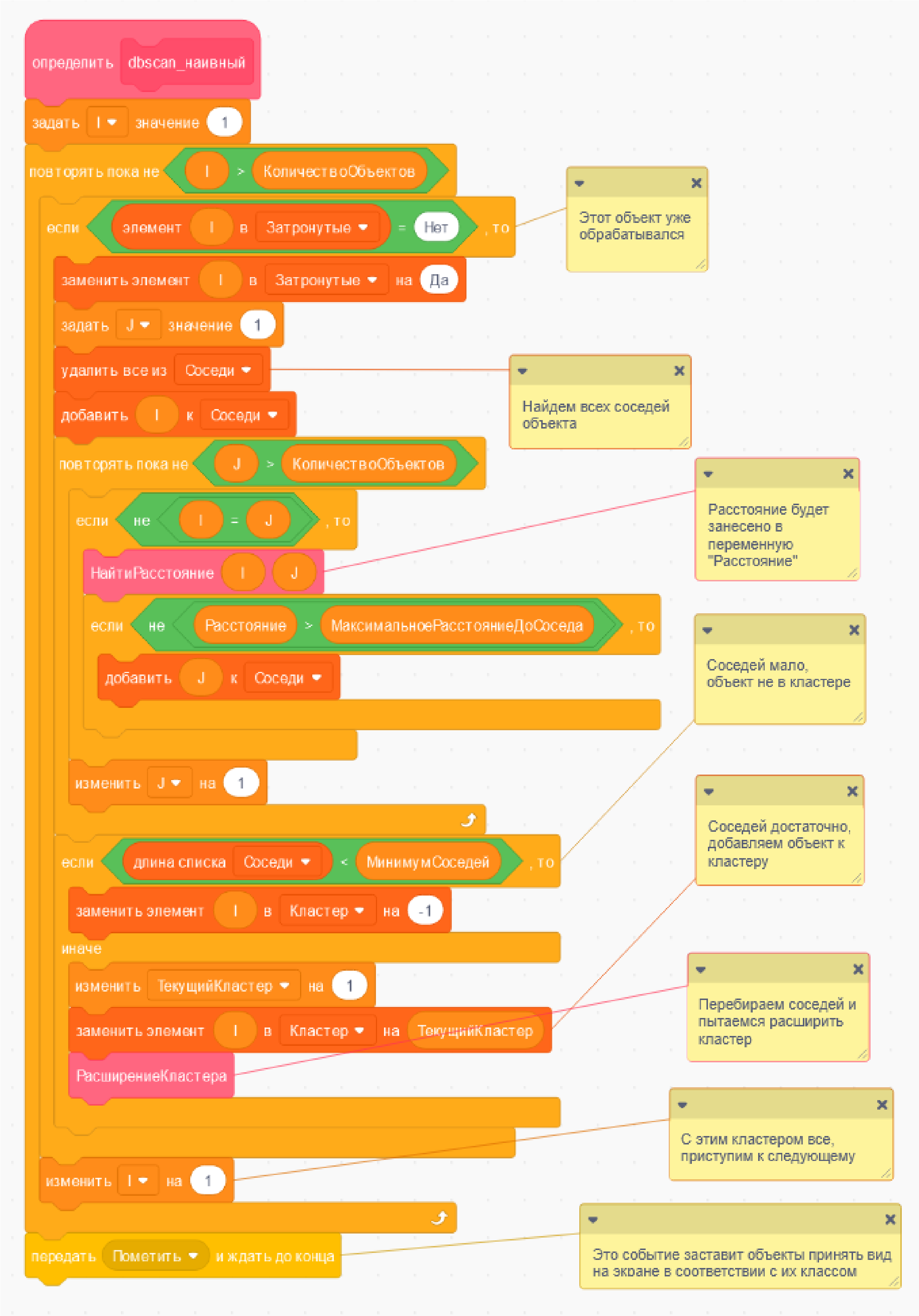


Рис. 3. Scratch – код основной части алгоритма

Рис. 4. Scratch – код подпроцесса для расширения кластера

Теперь определимся со связью визуальных элементов и представлением данных для алгоритма в среде Scratch. Во-первых, это списки x и y, в которые будут помещаться координаты каждого из объектов. Передачу координат от объектов на экране в Scratch можно реализовать, например, следующим образом: для всех объектов, расположенных на экране, рассылается сигнальное сообщение, а каждый из них должен в ответ добавить свои координаты в списки x и y. В нашем примере каждый из спрайтов на экране хранит во внутренней переменной спрайта номер позиции (индекса) в списках x и y, в которой хранятся его координаты. После окончания работы алгоритма всем спрайтам рассылается сообщение «*Пометить*», получив которое они меняют внешний вид объектов в зависимости от значений элемента с нужной позицией в списке *Кластер*. Таким образом, объекты на экране, представленные спрайтами в Scratch перед началом работы алгоритма отправляют свои текущие координаты в списки x и y, а после завершения работы алгоритма меняют свой вид на основании значений списка *Кластер*. На рисунке 3 представлена структура основного алгоритма. Входными параметрами являются переменные *КоличествоОбъектов*, в которой хранится количество объектов для кластеризации, *МаксимальноеРасстояниеДоСоседа* представляющее собой максимальное расстояние, при расположении на котором два объекта могут считаться *соседями* и *МинимумСоседей* – минимальное число соседей, которое должно быть у объекта для того, чтобы он мог быть включен в кластер.

Обратим внимание на то, что алгоритм, представленный на рисунке 3 последовательно перебирает объекты, для каждого из которого определяется, будет ли он помечен в списке *Кластер* как элемент, не относящийся ни к одному из кластеров, либо войдет в новый кластер. В последнем случае для нового кластера будет проведен дополнительный поиск входящих в него объектов. Для этого будет использован подпроцесс, представленный на рисунке 4. Для одного элемента полный анализ производится однократно. Для проверки этого используется список *Затронутые*, в котором для каждого объекта с номером i хранится признак проведения анализа элемента – константа *«Да»*, либо константа *«Нет»* – маркер того, что элемент еще не анализировался. Перед началом работы алгоритма весь список *Затронутые* заполняется константой *«Нет»*.

Если объект еще на анализировался, то для него с учетом значения переменной *МаксимальноеРасстояниеДоСоседа* выполняется подсчет соседей. Для того, чтобы определить расстояние между элементами, используется Евклидова метрика, ее вычисление вынесено в отдельный блок. В процессе подсчета соседей из номеров объектов, являющихся соседями, формируется заново список *Соседи.* В зависимости от количества найденных соседей объект либо помечается как не входящий в кластеры, либо вписывается в кластер как корневой объект с номером, хранящимся в переменной *Текущий кластер*. Для каждого корневого объекта, добавляемого к кластеру, выполняется дополнительный подпроцесс *РасширениеКластера*, представленный на рисунке 4.

Алгоритм подпроцесса уже рассмотрен выше, и его можно легко связать со структурой предложенной реализации основного алгоритма на Scratch.

В заключении укажем на достоинства и недостатки DBSCAN. К достоинствам можно отнести способность искать кластеры произвольной формы, отсутствие необходимости указывать заранее число кластеров, простоту реализации и настройки алгоритма, устойчивость к выбросам. Недостаток – неспособность соединять кластеры через проёмы. Другой недостаток – способность связывать явно различные кластеры через плотные перемычки (см, например, кластер из «звездочек» на рисунке 2. Возможно, для него нужна дополнительная проверка). Впрочем, при некоторых видах анализа (например, моделировании передачи вирусов) это свойство алгоритма может быть полезным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Ester, H. P. Kriegel, J. Sander, X. Xu. 1996. A densitybased algorithm for discovering clusters in large spatial databases with noise. Proc. 2nd Int. Conf. on Knowledge Discoveryand Data Mining. Portland, OR, 226231.

2. Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. – Springer, 2001. ISBN 0-387-95284-5.

УДК 378

МЕСТО SOFT SKILLS В КОМПЕТЕНТНОСТНОЙ МОДЕЛИ СОВРЕМЕННОГО ВЫПУСКНИКА ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ

Гризовская Дарья Викторовна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Grizovskaya.DV@tversu.ru

Ключевые слова: *soft skills, мягкие навыки, модель 4К, универсальные компетенции.*

Аннотация. В статье рассматриваются подходы к определению soft skills и проблема необходимости формирования мягких навыков у обучающихся вузов.

XXI век убеждает, что человеческая цивилизация входит в новую стадию развития, которая характеризуется доминированием цифровых технологий, переходом к сетевому взаимодействию как бизнеса, так и отдельных людей, ростом числа «бесполезных профессий», умирающих под напором искусственного интеллекта и стремительными изменениями во всех сферах жизни. Это бросает вызов существующей системе образования, заставляя ее переходить в цифровой формат, выдвигая на первый план Soft skills - мягкие навыки, еще недавно больше известные как универсальные или ключевые компетенции, без которых уже нельзя стать успешным в наше время.

Все навыки, формируемые системой образования, представляется возможным разделить на две большие группы: (hard skills) – твёрдые навыки и (soft skills) – мягкие навыки. Твёрдые навыки легче измерить и продемонстрировать. Твёрдые навыки необходимы для эффективного занятия определенным видом деятельности. Сюда же входят и профессиональные навыки. Мягкие навыки – это социальные навыки. Они сложно измеримы, но именно они помогают продемонстрировать и применить твёрдые навыки.

Мягкие навыки необходимы в любом виде деятельности. В научной сфере одно из первых упоминаний датируется еще 1972 г., когда этот термин был употреблен в выступлении на одной из конференций в США. Так появилось определение soft skills, которое пересекается с понятиями некогнитивных навыков, эмоционального интеллекта, социальных навыков и т.д.

В 2016 г. на Всемирном экономическом форуме в Давосе были сформулированы топ-10 гибких навыков будущего, которые к 2020 г. понадобятся специалисту в любой профессии:

1. Умение решать комплексные задачи.
2. Критическое мышление.
3. Творческое мышление.
4. Умение управлять людьми.
5. Умение работать в команде.
6. Способность распознавать свои и чужие эмоции, управлять ими.
7. Умение формировать суждения и принимать решения.
8. Клиентоориентированность.
9. Ведение переговоров.
10. Переключение с одной задачи на другую [2].

Конъюнктура развития российской экономики и специфика системы образования РФ определили отечественную модель мягких навыков. Это адаптированная и более простая модель «4К». Это четыре ключевых компетенции, названия которых начинаются на букву К. Их необходимо развивать каждому обучающемуся, чтобы в будущем быть востребованным на рынке труда.

Модель «4К» включает в себя:

- **критическое мышление** – способность критически поступающую извне оценивать информацию, анализировать её и проверять на достоверность, выделять причинно-следственные связи, отбирать релевантную информацию и выделять главное, делать выводы;
- **креативность** – умение нешаблонно мыслить, находить неожиданные решения проблемы, гибко реагировать на происходящие изменения;
- **коммуникативные навыки** - умение общаться, доносить свою мысль, слышать собеседника, договариваться;
- **координация** – способность работать в команде, брать на себя как лидерские, так и исполнительские функции, распределять роли, контролировать выполнение задач [3].

Необходимость формирования и развития гибких навыков подтверждается и в академической среде. Например, Гарвардском Университете и Стенфордском исследовательском институте было проведено исследование о влиянии твердых и мягких навыков на профессиональную карьеру выпускников. Его результаты свидетельствуют о том, что вклад твёрдых навыков составляет всего 15%, тогда как мягкие определяют оставшиеся 85%.

В 2018 г. в Беларуси также провели исследование, посвященное востребованности гибких навыков при трудоустройстве специалистов в IT-сфере. Одной из задач исследования было разрушение стереотипного представления о том, что «технарям» необязательно уметь общаться, быстро принимать решения или управлять другими людьми. Опрос проводился среди 262 сотрудников и 3 руководителей крупных IT-компаний. 97,4% из них назвали гибкие навыки необходимым условием при принятии на работу. Для сотрудников сервисных IT-компаний самыми актуальными оказались:

- умение чётко излагать свои мысли (89%);
- просто говорить о сложном (84%);
- быстро определять проблему (83%) [1].

В этой связи, компетентностная модель современного обучающегося и выпускника должна включать в себя и перечень мягких навыков, наиболее востребованных в определенной профессиональной области *(концепция «soft через «hard»).* Высокомотивированный профессионал с развитыми навыками адаптивности, гибкости, кооперативной работы и критического мышления ещё долгое время будет оставаться, востребованным на рынке труда. Например, по данным исследований Wall Street Journal около 90% руководителей отмечают недостаток работников с развитыми soft skills [5].

Исходя из этого, основной задачей современного образования является решение данной проблемы и развитие у обучающихся компетенций XXI века.

Так, новое поколение ФГОС ВО включает перечень мягких навыков в качестве обязательных образовательных результатов обучающегося под названием «универсальные компетенции». Группы универсальных компетенций из ФГОС ВО 3++ разработаны на основании качественного измерения в терминологии Soft skills:

1. Системное и критическое мышление.
2. Разработка и реализация проектов.
3. Командная работа и лидерство.
4. Коммуникация.
5. Межкультурное взаимодействие.
6. Самоорганизация и саморазвитие (в том числе и здоровьесбережение).
7. Безопасность жизнедеятельности.
8. Инклюзивная компетентность.
9. Экономическая культура, в том числе финансовая грамотность.
10. Гражданская позиция [4].

Их формирование и развитие в высшей школе предполагает использование как традиционных, так и современных образовательных технологий: кейсы, ситуационные задачи, рефлексивные дневники, проекты, дискуссии и т.д.

Еще одной задачей вузов является грамотная разработка индикаторов компетенций. Рекомендации по формулированию индикаторов достижения компетенций могут выглядеть следующим образом:

- должны быть лаконичными;
- являются обобщенными характеристиками, уточняющими и раскрывающими формулировку компетенции;
- не могут дублировать наименование компетенции;
- могут быть представлены в виде результатов обучения, или в виде конкретных действий, выполняемых выпускником, освоившим данную компетенцию (1 индикатор = 1 действие);
- должны быть измеряемы с помощью средств, доступных в образовательном процессе;
- должны быть сопоставимы с трудовыми функциями и (или) трудовыми действиями профессионального стандарта, но не равны им;
- не должны полностью повторять знания, умения и навыки (ЗУНы).

Перечень глаголов, рекомендуемых к использованию при формулировке индикаторов достижения компетенций *(не является исчерпывающим)*:

- «анализирует»;
- «рассматривает»;
- «сравнивает»;
- «участвует»;
- «использует»;
- «формулирует»;
- «применяет»;
- «планирует»;

- «организует»;
- «оценивает»;
- «решает».

С развитием современного общества должен развиваться и институт образования. Развивающаяся на протяжении многих столетий педагогическая система не должна разрушаться, а должна эволюционировать с учетом тенденций и трендов мирового развития, должны смещаться педагогические акценты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Какие IT-профессии востребованы в Беларуси// it-academy. [Электронный ресурс]. URL: https://www.it-academy.by/media/stati/kakie-it-professii-vostrebovany-v-belarusi/

2. Материалы Всемирного экономического форума в Давосе (2016 г.) // Harvard Business Review Россия. [Электронный ресурс]. URL: https://hbr-russia.ru/karera/professionalnyy-i-lichnostnyy-rost/p26131

3. 4K: измерение критического мышления, креативности, коммуникации и кооперации // ВШЭ. [Электронный ресурс]. URL: https://ioe.hse.ru/monitoring/4k

4. Портал Федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования. [Электронный ресурс]. URL: http://fgosvo.ru/fgosvo/-151/150/24

5. Employers Find ‘Soft Skills’ Like Critical Thinking in Short Supply // Wall Street Journal. [Электронный ресурс]. URL: https://www.wsj.com/articles/employers-find-soft-skills-like-critical-thinking-in-short-supply-1472549400

УДК 514.12

МЕЖПРЕДМЕТНЫЕ СВЯЗИ В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ершова Елена Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ershova.EM@tversu.ru

Ключевые слова: *межпредметные связи, аналитическая геометрия, система координат, вектор, линия, поверхность.*

Аннотация. В работе рассматривается использование сведений из аналитической геометрии в других областях знания.

В настоящее время от школьников и студентов нередко приходится слышать заявления: «Мне ваш предмет дальше не понадобится!», хотя данное заявление весьма далеко от истины. Именно поэтому так важно использовать в преподавании межпредметные связи.

В изучении математики приходится иметь дело с тремя видами таких связей: предшествующими, сопутствующими и перспективными:

- предшествующие межпредметные связи – это связи, когда при изучении материала опираются на ранее полученные знания по другим предметам;
- сопутствующие межпредметные связи – это связи, учитывающие тот факт, что ряд вопросов и понятий изучаются как по данному предмету, так и по другим;
- перспективные межпредметные связи используются, когда изучение материала по данному предмету опережает его применение в других.

В школьном курсе математики используется огромное количество межпредметных связей: с рисованием (знание формы, взаимного расположения предметов, а также представления о точке, линиях, их пересечении), с географией (знание понятий расстояния, формы, масштаба, умение строить план, владение циркулем и линейкой), с технологией (знание формы предметов, умение пользоваться линейкой, транспортиром), с физикой (знание понятий угла, вектора, уравнения, операций над векторами, прямой и обратной зависимости, умения работать с формулами, таблицами, графиками) и т.д.

На 1 курсе математического факультета студенты изучают три основные математические дисциплины: математический анализ, линейную алгебру и аналитическую геометрию. Предшествующие межпредметные связи состоят в том, что было изучено в школе, сопутствующих имеется не так уж много. Поэтому большую роль в преподавании данных дисциплин играют перспективные связи. Важно показать, что каждый из этих предметов стоит не особняком, а будет использоваться в дальнейшем. С математическим анализом в этом отношении проще всего: понятия производной, интеграла, предела, последовательности используются практически во всех разделах математики, так что данный предмет, по сути, является фундаментом дальнейшего обучения. Элементы линейной алгебры также позднее пригодятся: методы решения систем линейных уравнений и их свойств, работа с матрицами и определителями используются в аналитической геометрии, дифференциальных уравнениях, теории случайных процессов, линейном программировании. С аналитической геометрией ситуация же не настолько очевидна, здесь используются, в основном, перспективные межпредметные связи, из-за чего студентам-первокурсникам трудно понять важность изучения данной дисциплины.

С предшествующими межпредметными связями в курсе аналитической геометрии также не все гладко. В школьном курсе математики многие учителя время, отведенное для изучения геометрии, используют для уроков алгебры, поскольку геометрических задач в ЕГЭ гораздо меньше. Из-за этого многие абитуриенты плохо владеют геометрическим материалом, считают этот предмет неважным, да и порой заранее убеждены в собственной неспособности разобраться в данной дисциплине. Между тем аналитическая геометрия весьма важна для дальнейшего обучения, в частности, без понятий системы координат, вектора, координат объекта не обходится практически ни одна отрасль математики и не только ее: данные понятия используются в биологии, экономике, географии, военном деле, медицине, астрономии. Покажем важность изучения аналитической геометрии, указав ее взаимосвязи с другими предметами, преподаваемыми на математическом факультете.

Связь с линейной алгеброй

Задача 1. *Найти матрицу перехода от базиса* $\left\{e_1^{(1)}, e_2^{(1)}, e_3^{(1)}\right\}$ *к базису* $\left\{e_1^{(2)}, e_2^{(2)}, e_3^{(2)}\right\}$.

При этом необходимо знать понятия вектора, базиса, пространства, координат вектора; уметь выполнять операции с векторами, записывать их через координаты.

Задача 2. *Доказать, что конечное множество* G, *в котором определена ассоциативная операция и каждое из уравнений* $ax=b$, $ya=b$ *для любых* $a,b\in G$ *имеет в* G *не более одного решения, будет группой.*

Для решения данной задачи необходимо знать уравнения прямой; знать и применять методы нахождения точек, лежащих на прямой.

Задача 3. *Проверить, что векторы* $(1;-2;2;-3)$ *и* $(2;-3;2;4)$ *попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов.*

Здесь используются понятие скалярного произведения векторов и умение его вычислять в координатной форме.

При изучении евклидовых пространств требуется знать понятия вектора и его координат, уметь вычислять угол между векторами. При рассмотрении систем линейных неравенств нужно владеть понятием системы координат, уметь строить уравнение прямой.

Связь с физикой

Задача 1. *Вычислить работу равнодействующей сил* $F_1=\{3;-4;5\}$, $F_2=\{2;1;-4\}$, $F_3=\{-1;6;2\}$, *приложенных к материальной точке, которая под их действием перемещается прямолинейно из точки* $M_1(4;2;-3)$ *в точку* $M_2(7;4;1)$.

Для решения данной задачи нужно знать понятие вектора, уметь находить сумму векторов в координатной форме и скалярное произведение.

Задача 2. *Траектория, скорость и ускорение материальной точки в декартовых координатах.*

При рассмотрении этой задачи используются понятия системы координат, координат точки, вектора, проекции, векторного произведения векторов.

При изучении законов Кеплера и уравнения орбиты используются понятия эллипса, гиперболы, параболы, эксцентриситета кривой второго порядка.

Связь с компьютерной геометрией и геометрическим моделированием

Для успешного освоения данного курса необходимо знать понятия системы координат, кривой, поверхности, секущей, касательной, радиус-вектора, способы задания кривых и поверхностей.

Связь с методами оптимизации

Задача 1. *Найти максимум и минимум графическим методом:* $f(x_1, x_2) = -6x_1 + 9x_2$, *если* $x_1 + 3x_2 \geq 9$, $-2x_1 + x_2 \leq 5$, $2x_1 - 3x_2 \leq 0$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Задача 2. *Для данной задачи составить двойственную, решить ее графическим методом и найти экстремальное решение исходной задачи* $f = 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$, $\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9, \\ x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6, \end{cases}$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$.

Задача 3. *Дана задача нелинейного программирования и несколько векторов. Используя необходимые условия оптимальности, проверить, какая из точек может быть точкой локального минимума.*

Для решения этих задач нужно знать понятие системы координат, вектора, уметь работать с прямыми и кривыми на плоскости.

Связь с нестандартными задачами в школьном курсе математики

В данном курсе используется графический метод решения уравнений, неравенств и их систем (необходимо уметь работать с системами координат, строить линии на плоскости), координатный метод решения геометрических задач (необходимо уметь работать с декартовыми координатами на плоскости и в пространстве, знать координаты вектора, формулу вычисления координат середины отрезка, длины вектора и расстояния между двумя точками, угол между векторами, скалярное произведение векторов, уравнение плоскости, правила вычислений углов между прямыми и плоскостями, расстояния от точки до плоскости, уравнение окружности).

Связь с приемами и методами решения стереометрических задач в школьном курсе математики

Для успешного освоения этого курса необходимо знать декартовы координаты на плоскости и в пространстве, координаты вектора, операции над векторами, поверхности второго порядка, уравнение плоскости, уметь находить длину вектора, расстояние между двумя точками, угол между векторами, скалярное произведение векторов, углы между прямыми и плоскостями, расстояние от точки до плоскости.

Связь с экономикой

Необходимо знать понятие системы координат для построения всевозможных зависимостей. Кроме того, при решении экономических задач линейного программирования необходимо строить в системе координат прямые и векторы.

Связь с дифференциальной геометрией и топологией

Данный предмет является прямым продолжением аналитической геометрии и использует многие понятия из нее: декартовы и полярные координаты, эллипс, гипербола, окружность, уравнение прямой, плоскость, нормальный вектор, уравнение линии, поверхности и их виды.

Связь с дифференциальными уравнениями

Для построения интегральных кривых нужно уметь работать с системами координат, составлять уравнения прямых и изображать их на чертеже. Среди задач на составление дифференциальных уравнений многие основаны на геометрических сведениях: системе координат, координатах точки, прямых и кривых линиях, угловом коэффициенте прямой, координатах середины отрезка, полярных координатах. При рассмотрении систем дифференциальных уравнений используются понятия векторов, операций над ними, скалярного произведения векторов. Например:

Задача 1. *Зеркало отражает все лучи, выходящие из заданной точки, параллельно данному направлению. Определить форму зеркала.*

При решении этой задачи нужно использовать систему координат, знать уравнение параболы, иметь представление о параболоиде вращения.

Связь с теорией вероятностей и математической статистикой

В теории вероятностей сведения из геометрии используются, главным образом, при вычислении геометрической вероятности. Например:

Задача 1. *Точку бросают наугад в круг радиуса 1. Какова вероятность того, что расстояние от точки до центра круга превысит 0,5?*

Задача 2. *Заданы эллипсоид, граница которого имеет уравнение* $\frac{x^2}{25}+$ $+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$, *и шар с центром в начале координат и радиусом 3. Какова вероятность того, что выбранная внутри эллипсоида случайная точка попадет в этот шар?*

Задача 3. *В сфере радиуса* r *находится* n *молекул газа. Найдите вероятность того, что ровно* m *молекул будут находиться на расстоянии, меньшем* λr *от центра этой сферы* ($m \leq n,\ \lambda \leq 1$).

Для решения данных задач нужно вводить системы координат на плоскости и в пространстве, знать уравнения окружности и сферы для описания пространства элементарных исходов, знать, что такое эллипсоид, и уметь вычислять его объем.

Однако и в других разделах данной математической дисциплины используются сведения из геометрии. Например, при построении диаграмм Эйлера-Вьенна используется наглядное представление событий в качестве геометрических объектов. С системами координат и графиками линий приходится иметь дело при изучении дифференциальной и интегральной функций Лапласа, функции распределения и плотности вероятности, а также при построении многоугольника распределения. Для нахождения графика плотности вероятности по графику используется уравнение прямой.

В теории случайных процессов системы координат и уравнения линий используются при построении траекторий.

В математической статистике применяются системы координат для изображения различных зависимостей, при изучении линейной регрессии находятся уравнения прямых, которые затем строятся на графике.

Таким образом, видим, что роль аналитической геометрии выходит за рамки данного предмета и является весьма важной при обучении высшей математике. Межпредметные связи при изучении математических дисциплин в университете обеспечивают не только прикладную направленность обучения, но и служат для взаимосвязи различных предметов. Этого можно добиться, решая прикладные задачи из других областей знания, тем самым демонстрируя студентам важность изучаемого материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердюгина О.Н., Платонов М.Л. Межпредметные связи алгебры и геометрии при обучении студентов математических направлений университета // URL: http://mir-nauki.com/PDF/44PDMN315.pdf.

2. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., БИНОМ, 2005.

3. Ольховский И.И. Курс теоретической механики для физиков. М., изд. Московского университета, 1978.

4. Лунгу К.Н. Линейное программирование. Руководство к решению задач. М., ФИЗМАТЛИТ, 2005.

5. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М., URSS, 2016.

6. Агапов Г.И. Задачник по теории вероятностей. М., Высшая школа, 1994.

УДК 372.862 : 004.942

МОДЕЛИРОВАНИЕ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ И ИКТ

Желтов Сергей Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Zheltov.SA@tversu.ru

Ключевые слова: *моделирование, компьютерный эксперимент, Монте-Карло, столкновение атомов.*

Аннотация. В работе рассматриваются примеры задач, которые позволяют в доступной форме на уроках информатики и ИКТ познакомить школьников с понятием компьютерного моделирования и вычислительного эксперимента.

В настоящее время практически каждый человек сталкивается с различными моделями. Компьютерное моделирование относительно новое явление, получившее свое развитие из математического моделирования. Сегодня без помощи компьютерных экспериментов невозможно представить решение крупных научных задач, исследования сложных проблем.

В школьном курсе информатики есть раздел «Моделирование и формализация», цель изучение которого в лучшем случае сводится к умению решать всего две задачи. Ровно столько заданий соответствует разделу «Моделирование и компьютерный эксперимент» в структуре КИМ ЕГЭ [1].

Хотя существует достаточное количество методик и подходов к изучению темы компьютерное моделирование [2, 3, 4], на практике далеко не все выпускники средней школы способны решать задачи, предлагаемые в рамках ЕГЭ.

В современных реалиях компьютерное моделирование так же является инструментом для изучения основного материала по программированию.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫЛЕТОВ АТОМОВ С ПОВЕРХНОСТИ

Одним из способов описания процесса вылетов атомов с поверхности конденсированной фазы является метод Монте-Карло, при этом можно использовать модель жестких сфер [5]. Атом – это сфера с радиусом $r = 1.5\cdot10^{-10}$м и массой $m = 40$ а.е.м. Центры атомов в момент вылета находятся в плоскости $z=0$. Будем считать, что атомы вылетают с квадратной площадки конденсированной фазы со стороной размером $3\cdot10^{-9}$м. Схема вылета двух атомов показана на рисунке 1. Положение атомов на площадке, т.е. координаты (x_1,y_1) и (x_2,y_2) – это случайные величины, распределенные по равномерному закону.

В рамках школьного курса можно предложить провести численное моделирование процесса вылетов n-пар атомов и определения максимального и минимального расстояний между центрами пары атомов.

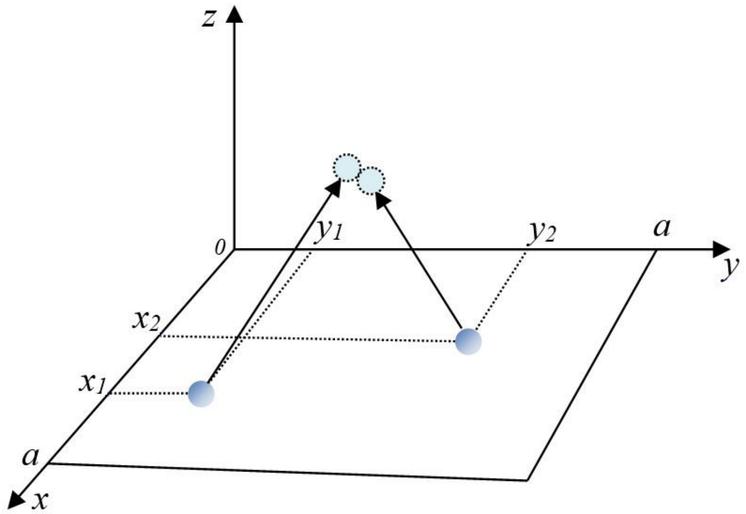


Рис. 1. Схема вылета двух атомов с поверхности конденсированной фазы

АЛГОРИТМ КОМПЬЮТЕРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

Программную реализацию можно выполнить с применением любого ПО, используемого для освоения навыков программирования: pascal, delphi, python, C, C++ и др. В качестве датчика случайных величин достаточно использовать генераторы из стандартных библиотек с заданными параметрами, соответствующим равномерному распределению.

Алгоритм:

- Ввести n – количество пар атомов;
- Инициализируем радиус $r = 1.5 \cdot 10^{-10}$;
- Инициализируем $a=3 \cdot 10^{-9}$;
- Инициализируем *aMax := 0*;
- Инициализируем *aMin := sqrt(a*a + a*a)*;
- В цикле *i=1,..,n*
  - Генерируем (x_1,y_1) координаты 1-го атома;
  - Генерируем (x_2,y_2) координаты 2-го атома;
  - Вычисляем *a12* - расстояние между атомами;
  - Если *a12>aMax* то *aMax := a12* Иначе Если *a12<aMin* то *aMin := a12*
- Вывод *aMax, aMin*

Как вариант, вместо определения максимального и минимального расстояний между центрами атомов, можно предложить рассчитать среднее расстояние.

Можно заметить, что моделирование и компьютерный эксперимент не совсем адекватно представляют реальный процесс испарения. Сгенерированные случайные величины могут не всегда удовлетворять физическим условиям. Например, координаты атомов могут оказаться за пределами исходной площадки, или быть слишком близкими друг к другу. Очевидно, что расстояние между центрами атомов не может быть меньше размера атома.

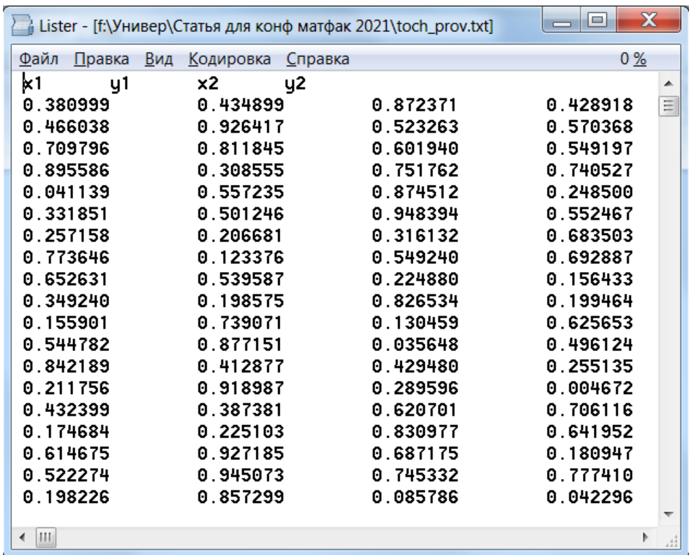
В качестве более сложного варианта данной задачи добавим в алгоритм нормировку сгенерированных случайных величин и проверку минимального возможного расстояния между центрами пары атомов.

Модифицированный алгоритм:

- Ввести *n* – количество пар атомов;
- Инициализируем радиус $r = 1.5 \cdot 10^{-10}$;
- Инициализируем $a=3 \cdot 10^{-9}$;
- Инициализируем *aMax := 0*;
- Инициализируем *aMin := sqrt(a*a + a*a)*;
- В цикле *i=1,..,n*
  - Генерируем (x_1,y_1) координаты 1-го атома;
  - Генерируем (x_2,y_2) координаты 2-го атома;
  - Вычисляем *a12* - расстояние между атомами;
  - В цикле пока *a12<2*r*
    - Генерируем (x_2,y_2) координаты 2-го атома;
    - Вычисляем *a12* - расстояние между атомами;
  - Если *a12>aMax* то *aMax := a12* Иначе Если *a12<aMin* то *aMin := a12*
- Вывод *aMax, aMin*

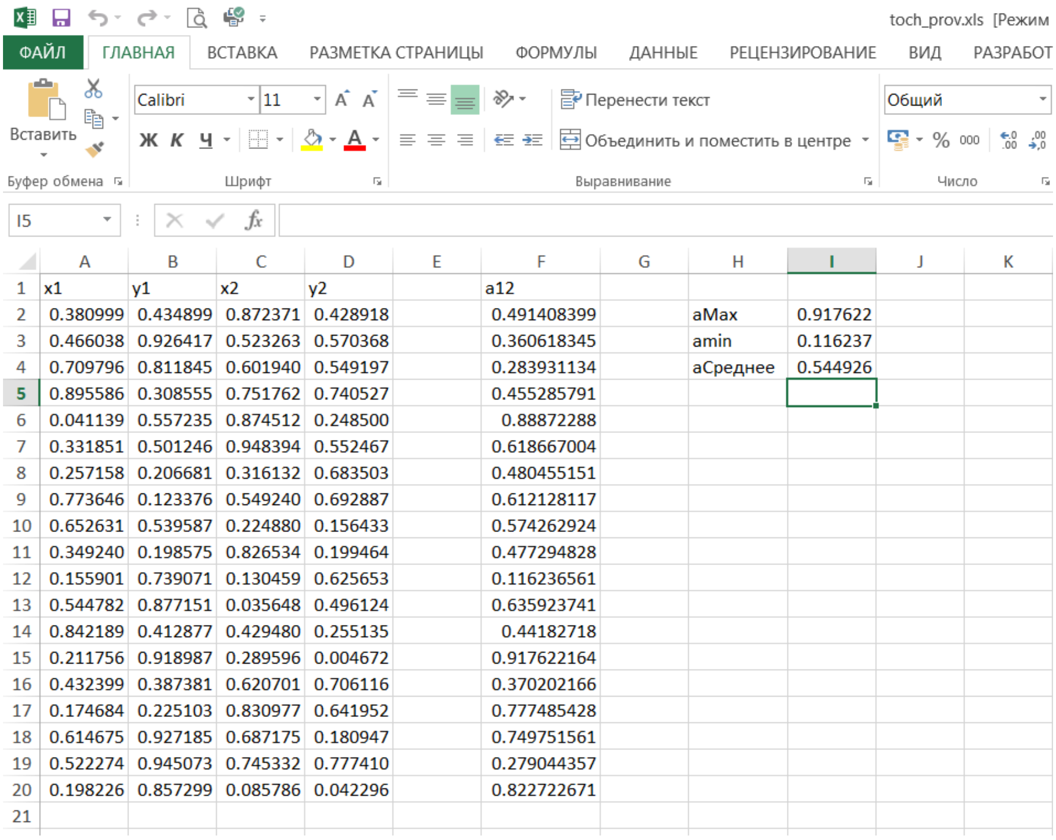
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ

На примере данной задачи можно закрепить навыки по работе с файлами и электронными таблицами. Для этого достаточно добавить в алгоритм запись в текстовый файл (или CSV) всех координат пар атомов и вычисленных расстояний между атомами. После компьютерного моделирования учащиеся могут экспортировать данные из файла в электронную таблицу (например EXCEL) и ее средствами рассчитать расстояния, максимальное, минимальное и среднее значение и сверить полученные результаты с результатами программы. Возможное содержимое текстового и EXCEL файлов показано на рисунках 2 и 3 соответственно.


Lister - [f:\Универ\Статья для конф матфак 2021\toch_prov.txt]
Файл Правка Вид Кодировка Справка 0 %

x1	y1	x2	y2
0.380999	0.434899	0.872371	0.428918
0.466038	0.926417	0.523263	0.570368
0.709796	0.811845	0.601940	0.549197
0.895586	0.308555	0.751762	0.740527
0.041139	0.557235	0.874512	0.248500
0.331851	0.501246	0.948394	0.552467
0.257158	0.206681	0.316132	0.683503
0.773646	0.123376	0.549240	0.692887
0.652631	0.539587	0.224880	0.156433
0.349240	0.198575	0.826534	0.199464
0.155901	0.739071	0.130459	0.625653
0.544782	0.877151	0.035648	0.496124
0.842189	0.412877	0.429480	0.255135
0.211756	0.918987	0.289596	0.004672
0.432399	0.387381	0.620701	0.706116
0.174684	0.225103	0.830977	0.641952
0.614675	0.927185	0.687175	0.180947
0.522274	0.945073	0.745332	0.777410
0.198226	0.857299	0.085786	0.042296

Рис. 2. Результаты работы программы, записанные в текстовый файл



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x1	y1	x2	y2		a12			
2	0.380999	0.434899	0.872371	0.428918		0.491408399		aMax	0.917622
3	0.466038	0.926417	0.523263	0.570368		0.360618345		amin	0.116237
4	0.709796	0.811845	0.601940	0.549197		0.283931134		aСреднее	0.544926
5	0.895586	0.308555	0.751762	0.740527		0.455285791			
6	0.041139	0.557235	0.874512	0.248500		0.88872288			
7	0.331851	0.501246	0.948394	0.552467		0.618667004			
8	0.257158	0.206681	0.316132	0.683503		0.480455151			
9	0.773646	0.123376	0.549240	0.692887		0.612128117			
10	0.652631	0.539587	0.224880	0.156433		0.574262924			
11	0.349240	0.198575	0.826534	0.199464		0.477294828			
12	0.155901	0.739071	0.130459	0.625653		0.116236561			
13	0.544782	0.877151	0.035648	0.496124		0.635923741			
14	0.842189	0.412877	0.429480	0.255135		0.44182718			
15	0.211756	0.918987	0.289596	0.004672		0.917622164			
16	0.432399	0.387381	0.620701	0.706116		0.370202166			
17	0.174684	0.225103	0.830977	0.641952		0.777485428			
18	0.614675	0.927185	0.687175	0.180947		0.749751561			
19	0.522274	0.945073	0.745332	0.777410		0.279044357			
20	0.198226	0.857299	0.085786	0.042296		0.822722671			
21									

Рис. 3. Результат расчетов в электронной таблице

Рассмотренные задачи позволяют продемонстрировать школьнику возможность практического применения моделирования, использовать межпредметные связи, развить абстрактное мышление и повысить интерес к предмету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Демоверсии, спецификации, кодификаторы. Единый государственный экзамен по информатике и ИКТ URL: https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-5
2. Макарова Н. В. Информатика. 9 класс – СПб: Издательство «Питер», 2015. – 304 с.
3. Семакин И. Г., Залогова Л.А., Русаков С. В., Шестакова Л. В.. Информатика и информационно-коммуникационные технологии. Базовый курс: Учебник для 9 класса – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. – 371 с.
4. Селиванова Э. Т. О различных подходах к изучению моделирования в курсе информатики. //Аспирантский сборник НГПУ, под редакцией А.Ж. Жафярова. – Новосибирск: НГПУ, 2014, ч.3, – С. 170-179.
5. Плетнев Л.В., Желтов С.А. Моделирование столкновения двух атомов над поверхностью конденсированной фазы. Программные продукты и системы. Т. 33, №2, 2020. сс. 297-303.

УДК 372.851

СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ПОДХОДОВ К ИЗУЧЕНИЮ ПРОИЗВОДНОЙ В ШКОЛЕ

Захаров Максим Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: zaxaroff.maksim2014@yandex.ru

Ключевые слова: *производная функции, методы исследования производной некоторых функций.*

Аннотация. В настоящей работе были определены концептуальные подходы к исследованию и практическому применению понятия «Производная». Определены общие черты и различия ее изучения в разных учебниках, выделены достоинства и недостатки.

Изучение темы «Производная» является в современном школьном курсе алгебры и начал анализа важнейшей задачей, так как позволяет учащимся не только получить мощнейший инструмент для исследования большинства функциональных закономерностей, но и почувствовать себя настоящим ученым благодаря множественным применениям изученного материала. Исследование данной темы весьма актуально, так как оно имеет большое образовательное значение, ведь с нее начинается изучение элементов математического анализа, а это дает новые методы решения математических задач.

С производной учащимся предстоит столкнуться еще много раз, как в курсе математики, так и при изучении других школьных предметов – физики, химии, экономики – везде, где мы имеем дело с неравномерно протекающими процессами. В математике производная активно используется при исследовании функции, что позволяет показать скорость ее изменения в данной точке. В физике производная будет использоваться при описании ускоренного движения. В химии и естествознании – для нахождения дозы лекарства, при которой побочный эффект будет минимальным, а реакция максимальной. В экономике – для анализа производственных функций, широко используемых в современных экономических исследованиях.

Великий английский учёный Исаак Ньютон доказал, что путь и скорость связаны между собой формулой $v = s\,'(t)$, и такая связь существует между количественными характеристиками самых различных процессов, исследуемых:

• Физикой – ускорение $a = v' = s''(t)$, сила $F = ma = ms''$, импульс $P = mv = ms'$, кинетическая энергия $E = \frac{mv^2}{2} = \frac{ms'^2}{2}$.

• Химией – скорость химической реакции $v(t) = p'(t)$.

• Биологией – производительность жизнедеятельности популяции $P(t) = x'(t)$.

Изучение производной позволяет:

• наглядно показать ученикам широту использования математических методов в современной науке и технике, ввести понятие скорости изменения любых процессов;

• продемонстрировать необходимость математических знаний для самых широких слоев населения, важность математики для современного общества и при овладении новыми специальностями, которых раньше просто не было;

• сформировать у учеников некоторые трудовые и исследовательские навыки, позволяющие успешно планировать, измерять и анализировать.

• продемонстрировать экскурс в ход развития математической мысли.

Использование физического материала содействует развитию навыков в применении математического аппарата, дает возможность применять различные методы для решения прикладных задач, помогает формировать у учеников представление о роли математики в изучении окружающего мира, видеть разницу между физическим явлением и его математической моделью, вызывает дополнительный интерес и мотивацию к учению.

В настоящей статье рассмотрим учебники, используемые при изучении производной в школьном курсе алгебры и начал математического анализа. Были отобраны три учебных пособия старшей общеобразовательной школы авторов: Мордковича А. Г., Алимова Ш. А., Мерзляка А. Г. В представленных мной учебниках выделим сходства и отличия, достоинства и их недостатки.

Тема «Производная» у Мордковича [1] и Мерзляка [3] начинается с определения понятий предела последовательности и предела функции. Хотелось бы отметить, что в учебнике Алимова [2] изучение теории пределов не входит в программу средней школы. По этой причине в школьном курсе математики некоторые формулы производных принимаются без доказательств.

Во всех учебниках рассматриваются две задачи на нахождение мгновенной скорости и определение касательной к графику функции. С этого и начинается изучение производной. Последовательность преподнесения материала сравнительно одинаковая. Некоторые теоремы строго доказываются, а некоторые и вовсе опускаются, как, например, при изучении производной функции $y = \sin x$ Мордкович [1] и Мерзляк [3] опускают полное разъяснение того, откуда она берется. В учебнике Алимова [2] вводится понятие первого замечательного предела и наглядно показывается, что производная синуса равна косинусу. Производная некоторых элементарных функций в учебнике Алимова [2] выносится как отдельный параграф, в котором показаны производные показательной, логарифмической и тригонометрических функций. Стоит отметить, что справедливость нахождения производной синуса через первый замечательный предел даётся на интуитивном уровне. Строгое доказательство первого замечательного предела ученики смогут узнать на первом курсе дисциплины «Математический анализ», опираясь на школьные знания.

В учебнике Алимова [2], в отличие от других пособий, сначала рассматривается производная степенной функции, а только потом вводятся правила дифференцирования.

У Мордковича [1] приведены задачи, которые требуют обратного хода решения, т. е. дана производная функции и необходимо найти саму функцию. Этот факт является полезным, потому что иногда к задачам нужно подходить с разных сторон, решать различными способами.

В отличие от Мордковича, в учебниках Алимова [2] и Мерзляка [3] вводятся понятия второй производной для исследования графиков функций на выпуклость и точки перегиба. У Мордковича [1] это не объясняется, лишь показаны вычисления производной второго, третьего, и n-го порядка и говорится, что ускорение есть вторая производная координаты по времени. Задачи на отыскание наибольших и наименьших значений величин (задачи на оптимизацию) в пособии Мордковича [1] разбиваются на этапы, в которых показывается, как можно решать подобные задачи, что позволяет ученикам углубиться в применение производной в жизни.

Теперь выделим достоинства и недостатки учебников.

А.Г. Мордкович [1]. *Достоинства*. Учебник Мордковича помогает в дифференцированном обучении. В нём достаточно много теоретических объяснений и примеров для самостоятельной работы учащихся. На уроках математики у учителя всегда есть возможность дополнительно позаниматься со школьниками или наиболее успешным по математике ученикам предложить дополнительную работу на уроке и в домашнем задании.

Введение понятия производной начинается поэтапно с разбора двух примеров (физический и геометрический), которые как раз и подводят к возникновению новой математической модели – производной.

Автор четко ставит вопросы перед полным изложением материала, что дает понять дальнейший курс изучения новой математической модели для школьников. В параграфах дается алгоритм выполнения всех действий на нахождение значений и свойств производной функции.

В профильном уровне дополнительно приводятся выведения формул дифференцирования. В учебнике присутствует большое количество примеров с подробным решением. В задачнике вспомогательно (отдельным параграфом) рассматривается дифференцирование сложной и обратной функций.

К учебнику прилагается соответствующий задачник. Он содержит два блока системы упражнений, выстроенных по каждой теме: первый блок состоит из базового уровня (никак не отмечен) и среднего уровня трудности (отмечен белым кружком), второй блок – из дополнительных заданий среднего уровня и заданий повышенной трудности (отмечены черным кружком). Количество задач представлено в достаточном и даже избыточном объеме, что дает возможность реализовать уровневую дифференциацию на уроке.

Недостатки. Задачи предложены в достаточно большом количестве и разного уровня сложности, решать их в полном объеме просто не хватает времени. Однако автор предупреждает, что в большинстве случаев весь материал, который содержится в том или ином параграфе, учитель не успеет рассмотреть на уроках, но это и не нужно, поскольку данная книга предназначена в первую очередь для неспешного домашнего чтения и изучения школьниками.

Ш.А. Алимов [2]. *Достоинства*. Учебник рассчитан на обучение на базовом и профильном уровнях, что позволяет успешно организовать работу с учащимися различного уровня подготовки. В учебнике разобраны многие типовые примеры, выделены правила, задания поделены на разные уровни сложности. Положительной стороной является последовательный переход от теории к практике.

Учебник Алимова делает больший упор на практическую сторону. В тексте много примеров решения задач, некоторые пункты даже целиком состоят из них. К каждому пункту прилагается большой набор задач для самостоятельного решения.

Недостатки. В пособии нет разбиения на уровни. Отсутствуют упражнения на повторение ранее пройденного материала. Нет заданий в виде тестов, что заставляет искать дополнительные дидактические материалы.

Доказательства - слабая сторона учебника, т. к. они кратки, а зачастую их нет совсем. Некоторые аспекты темы опущены. В учебнике при изложении темы «Производная» используется понятие предела, которое формулируется после определения производной, но подробно не рассматривается, формируется оно на интуитивной основе. К параграфам нет плана изучения материала и хода дальнейших действий, что вызывает проблемы у школьников, которые впервые видят эту тему.

А.Г. Мерзляк [3]. *Достоинства*. Данный учебник рассчитан на 2 уровня (базовый и профильный). В этих книгах автор предлагает познакомить школьников с целым рядом важных теорем. К некоторым из них приведены полные доказательства. В тех случаях, когда доказательства выходят за пределы рассматриваемого курса, автор ограничивается только формулировками теорем.

Как правило, изложение теоретического материала завершается примерами решения задач. Эти записи можно рассматривать как один из возможных образцов оформления решения.

К каждому параграфу подобраны задачи для самостоятельного решения, к которым автор советует приступать только после усвоения теоретического материала. Среди заданий есть как простые и средние по сложности упражнения (помечены знаком «♦» по возрастанию сложности), так и трудные задачи (из рубрики "Задачи высокой сложности"). Свои знания школьники могут проверить, решая задачи в тестовой форме из рубрики "Проверь себя".

Если после выполнения домашних заданий остаётся свободное время, то автор рекомендует обратиться к рубрике "Когда сделаны уроки". Материал, изложенный там, непростой.

Все изложено очень четко и ясно. В каждом параграфе сначала раскрывается тема, потом она разбирается на примерах, затем помещены задачи по теме. Правила и определения выделены жирным шрифтом, все предельно прозрачно, написано простым, доступным языком.

Здесь глубоко прорабатывается каждая тема, объяснения – ёмкие, простые, понятные, немногословные. Задач по каждой теме достаточно, это позволяет подобрать индивидуальный подход в обучении: кому-то побольше задач и полегче, кому-то – поменьше и посложнее. Учебник является универсальным и подойдет как для углубленного изучения математики, так и для поверхностного.

Перед изучением главы «Производная и ее применение» автор обращает внимание на те понятия, которым обучатся школьники. После главы приведены ее итоги, что помогает закрепить пройденный материал.

В конце учебника присутствует дополнительная глава «Дружим с компьютером», позволяющая строить на компьютерах математические модели и алгоритмы для решения задач. В этом разделе находится более двух десятков задач, включая задачи на тему «Производная». Так как авторы попытались связать две дисциплины, это способствует более удобному прохождению материла и позволяет давать ученикам задания по программированию, что способствует закреплению на практике полученных знаний.

Авторы уточняют, что уровень реализации этих моделей и алгоритмов может зависеть от того, в каком объёме ученики изучают информатику и насколько близко планируют связать свою будущую профессию с этим видом деятельности.

В главе «Дружим с компьютером» приведены такие задачи:

- Задачи о мгновенной скорости и касательной к графику функции.
- Правила дифференцирования.
- Признаки возрастания и убывания функции.
- Точки экстремума функции.
- Построение графикой функции.

Недостатков по учебнику Мерзляка не обнаружено.

Подводя итог, стоит отметить, что изучение производной в школьном курсе алгебры и начал анализа дается приблизительно на одинаковом уровне. Исходя из сравнительного анализа трех пособий можно сделать вывод о том, что, опираясь на любой учебник, учитель сам прекрасно разберется в том, что надо рассказать учащимся на уроке, что порекомендовать им запомнить, а что просто прочитать дома и, возможно, обсудить на следующем уроке в классе. При этом учащимся необходимо объяснить фундаментальную важность этого понятия, без четкого понимания которого будет невозможно продвигаться дальше в изучении наук. Используя современные методы программирования, возможно демонстрировать поведение производной функций, что наглядно показывает практическую значимость ее изучения, потому что, как было сказано ранее, использование различных методов для решения прикладных задач, помогает формировать у учеников представление о роли математики в изучении окружающего мира, видеть разницу между физическим явлением и его математической моделью, вызывает дополнительный интерес и мотивацию к учению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч. 1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 6-е изд., стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 424 с. ISBN 978-5-346-01201-6.

2. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е., Шабунин М. И. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / [Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачёва и др.], - 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 463 с. ISBN 978-5-09-037071-4.

3. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углублённый уровень. Учебное пособие. 2-е издание, стереотипное. Москва. Издательство: Вентана-Граф. Год издания: 2019. – 469 с. ISBN 978-5-360-12200-5.

УДК 378.14 : 371.27

ВСТУПИТЕЛЬНЫЕ ИСПЫТАНИЯ И ВЫПУСКНЫЕ ЭКЗАМЕНЫ ПО МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ П.П. МАКСИМОВИЧА В НАЧАЛЕ XX ВЕКА

Иванов Виктор Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *Тверская земская женская учительская школа имени П.П. Максимовича, программа вступительных испытаний по математике, конкурс среди поступающих, программы выпускных экзаменов по арифметике, алгебре, геометрии.*

Аннотация. В статье рассматриваются требования к математической подготовке на вступительных и выпускных экзаменах в Тверской женской учительской школе имени П.П. Максимовича.

В школе Максимовича существовали только вступительные испытания и выпускные экзамены. Переводные экзамены по окончании каждого года обучения отсутствовали.

Поступающие в приготовительный класс сдавали три предмета: Закон Божий, русский язык и арифметику. Программа вступительных испытаний по арифметике для поступающих в приготовительный класс предполагала «знание разложения чисел первой сотни; умение решать умственно небольшие задачи и выполнять действия с отвлеченными и именованными числами на все четыре правила» [1, с. 50].

Экзамен по арифметике проходил дважды: сначала в письменной форме, а затем – в устной. Показавшие слабые успехи на письменном экзамене к устному экзамену не допускались. Для подготовки рекомендовались «учебники: «Арифметика» А. Малинина и К. Буренина, задачник Евтушевского» [1, с. 50].

Приведем требования к подготовке поступающих, изложенные в примечании к программе по арифметике: «уметь разлагать числа первой сотни на слагаемые, множители и решать устно задачи с числами в пределе сотни. При решении задач особенное внимание обращается на объяснение хода решения задачи, на последовательность действий; причем необходимо успеть выяснять причину, почему следует употребить то или другое действие над числами, данными в задаче; при выяснении причины действия требуется уметь сравнивать числа: как одно число должно быть больше или меньше другого, а именно: во сколько-нибудь раз или на сколько-нибудь единиц. Требуется уметь сообразить, который из двух производителей должен быть множимым, т.е. с именем, и который множителем, т.е. без имени, и почему. Требуется понимание отношений между разрядами многозначных чисел и единиц мер.

При выполнении действий с многозначными числами и составными именованными требуется понимание, почему каждое из них производится так, а не иначе; почему складывать в одну сумму можно только однородные предметы и одноименные разряды и единицы мер; как образуются разряды произведения и частного, почему деление начинается с высших разрядов и с крупных единиц мер; почему при делении следует обращать высшие разряды в низшие и крупные единицы в мелкие, почему следует перемножать делителя и найденную цифру частного и полученное произведение вычитать из одноименных ему единиц мер множимого» [1, с. 50-51].

Поступающие в первый класс сдавали пять предметов: Закон Божий, русский язык, арифметику, географию и естественную историю. Программа по арифметике включала «четыре действия с числами отвлеченными и именованными. Изустные и письменные задачи на четыре действия с отвлеченными и именованными числами и изложение правил и хода действий. Пропедевтический курс дробей» [1, с. 51-52].

Рекомендованные учебники: «Арифметика» А. Малинина и К. Буренина, задачник Евтушевского 1-я и 2-я части.

Требования к подготовке поступающих совпадают с примерной программой по арифметике для начальных народных училищ ведомства Министерства народного просвещения [2, с. 150-153] (приложение 1). Для поступления в школу Максимовича вполне хватало знаний, полученных в начальной школе.

На основании протоколов заседаний педагогического совета школы Максимовича [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9], хранящихся в Государственном архиве Тверской области (ГАТО), составлена таблица 1, из которой следует, что количество желающих учиться в школе Максимовича в начале XX века постоянно увеличивалось. Конкурс среди поступающих высокий: от 3,7 до 5,1 человека на место. После сдачи всех испытаний – конкурс около двух человек на место.

Таблица 1

Год	Подано прошений	Не явились	Оказали слабые успехи на письменном экзамене	Осталось после устных испытаний	Принято	Конкурс	Конкурс после всех испытаний
1910	172	15	60	97	42	4,1	2,3
1911	190	14	65	111	51	3,7	2,2
1912	190	11	63	116	47	4,0	2,5
1913	192	12	45	80	43	4,5	1,9
1914	205	20	96	82	42	4,9	2,0
1915	200	15	47	101	51	3,9	2,0
1916	214	18	нет сведений		42	5,1	–

Преподаванию математики в школе Максимовича посвящено несколько статей. В работах [10, 11] разбираются цели преподавания математики, программы обучения, учебники, приводятся краткие сведения о преподавателях математики. Список учебно-вспомогательного персонала школы Максимовича [12, с. 177-182] содержит информацию обо всех преподавателях математики.

В начале XX века в приготовительном классе обучала математике Екатерина Ивановна Яковлева. Она работала в школе Максимовича с 1889 года [13, 14].

М.И. Модестова

Мария Ивановна Модестова преподавала арифметику в приготовительном, 1 и 2 классах школы Максимовича с 16 августа 1887 года, а с 1904-05 учебного года – математику в 1, 2, 3, 4 классах. Она училась в Смольном институте (1872-1879 гг.), окончила педагогические курсы в Петербурге в 1882 году [13, 14, 15].

М.И. Грифцова отмечала: «С удовольствием вспоминаю нашу преподавательницу М.И. Модестову, ее улыбающееся круглое лицо, обрамленное короткими седыми волосами, когда она с мелком в руке у доски, будто пританцовывая, говорит с сияющей улыбкой, что математика – это не только формулы, но и путь к ним, что доказывать в математике надо красиво, последовательно, что это дисциплинирует ум» [16, с. 38].

Каждый год в 4-ом классе школы Максимовича в апреле-мае проходили выпускные экзамены. Приведем расписание экзаменов в 1914 году [17] (таблица 2).

Таблица 2

Дата	Предмет
2.04	гигиена
20.04	закон Божий
22.04	русский язык (письменный)
25.04	арифметика (письменный)
29.04	математика (устный)
4.05	педагогика
7.05	геометрия
11.05	физика
16.05	русский язык (устный)
20.05	история
24.05	география

Программы экзаменов по математике составляла М.И. Модестова. В приложении 2 приведены программы по арифметике, алгебре и геометрии 1913 года. Вопросы каждой программы распределялись по билетам: арифметика и алгебра по 30 билетов, геометрия – 28. Ко многим вопросам в билетах указаны номера нескольких задач, но нигде не удалось обнаружить сведения, в каких именно задачниках искать приведенные номера.

Экзамен по педагогике включал вопрос: «Методика арифметики. Значение и цели преподавания арифметики в начальной школе» [18].

В инструкции для учительских семинарий отмечалось, что «преподавание арифметики имеет целью привести воспитанников: во 1) к полному знакомству учащихся со свойствами чисел и действий над ними, во 2) развитию в учащихся умения скоро и верно считать и в 3) приучении их к хорошему преподаванию арифметики в начальных народных училищах» [2, с. 522], а «преподавание геометрии обнимает собою главные статьи планиметрии – менее подробно, чем это делается в гимназиях и реальных училищах, но пользуясь по возможности тою же системой доказательств, и вычисление поверхностей и объемов в стереометрии» [2, с. 523].

Полученная выпускницами школы Максимовича подготовка по математике значительно превосходила минимум, необходимый учителям для преподавания не только в начальной школе с трех- или четырехлетним сроком обучения, но и школах повышенного типа с пяти- или шестигодичным обучением.

Приложение 1

Примерные программы предметов, преподаваемых в начальных народных училищах ведомства Министерства народного просвещения. Арифметика [2, с. 150-153]

1-й год. Счет прямой и обратный до 100. Четыре действия в пределах первых двух десятков. Знакомство с цифрами и знаками действий. Указание на примерах основных арифметических понятий (прибавить, отнять, повторить, сколько раз содержится, разделить, на сколько больше или меньше, во сколько раз больше или меньше). Римская нумерация до XX.

2-й год. Нумерация и 4 действия в пределе 100 и 1000. Объяснение арифметических выражений: сложение, вычитание, умножение, деление; разностное и кратное сравнение чисел. Увеличение и уменьшение в 10, в 100 раз. Ознакомление с наиболее употребительными русскими мерами. Решение задач, устно и письменно, соответствующих курсу. Знакомство с долями.

3-й год. Нумерация и 4 действия над числами любой величины и поверка действий. Действия над составными именованными числами. Простейшие вычисления с долями. Решение устных и письменных задач.

Приложение 2

Программа по арифметике (7 мая 1913 года) [19]

1. Понятие о единице и числе. Устное и письменное счисление. Действия над целыми числами. Сложение. Основное свойство суммы. Зависимость между числами, данными для сложения и результатом действия. Поверка.
2. Вычитание. Зависимость между числами, данными для вычитания и результатом действия. Поверка.
3. Умножение. Основное свойство произведения. Умножение многозначных чисел на однозначные, на разрядную единицу, на значащую цифру с нулями. Умножение многозначных чисел. Изменение произведения от изменения данных для умножения. Поверка.
4. Деление. Два случая деления. Определение числа цифр в частном. Зависимость между данными для деления и результатом действия. Поверка. Изменение частного от изменения данных для деления.

5. Именованные числа. Мера веса, времени, поверхности и объема. Метрическая система мер. Раздробление и превращение.
6. Сложение и вычитание составных именованных чисел.
7. Умножение составных именованных чисел.
8. Деление составных именованных чисел.
9. Измерение поверхности и объема.
10. Признаки делимости на 2, 5, 4 и 25, 8 и 125, 3, 9, 7, 11 и 37.
11. Числа простые и составные. Разложение чисел на простые множители. Нахождение общего наибольшего делителя и наименьшего общего кратного.
12. Дроби. Происхождение дробного числа от измерения и от деления целого числа на равные части. Обращение целого числа в неправильную дробь. Обращение неправильной дроби в смешанное число или целое. Увеличение и уменьшение дробей. Сокращение дробей.
13. Приведение дробей к общему знаменателю. Сложение и вычитание дробей с одинаковыми и разными знаменателями.
14. Умножение простых дробей.
15. Деление простых дробей.
16. Десятичные дроби. Особенности их обозначения. Сравнение величины десятичных дробей. Сложение и вычитание десятичных дробей.
17. Умножение десятичных дробей.
18. Деление десятичных дробей. Случай, когда делитель целое число. Частное приближенное. Случай, когда делитель десятичная дробь.
19. Обращение обыкновенной дроби в десятичную: 1) посредством разложения знаменателя на простые множители и 2) посредством деления числителя на знаменатель. Конечные и бесконечные десятичные дроби. Дроби периодические чистые и смешанные.
20. Геометрическое отношение. Геометрическая пропорция. Главное свойство членов. Решение пропорций. Сокращение и освобождение от дробей. Геометрическое среднее.
21. Простое тройное правило. Прямая и обратная пропорциональная зависимость величин, входящих в условие задач. Решение задач пропорциями и приведением к единице.
22. Сложное тройное правило. Решение задач пропорциями и приведением к единице.
23. Правило товарищества. Деление числа пропорционально данным числам, целым и дробям. Деление числа пропорционально данным числам, если условия деления выражены равенствами.
24. Правило пропорционального деления. Деление числа пропорционально данным числам, связанными несколькими условиями. Приведение нескольких условий к одному. Деление числа обратно пропорционально данным числам.
25. Правило процентов. Зависимость между величинами, входящими в задачи на правило процентов. Определить процентные деньги и первоначальный капитал.
26. Правило процентов. Определить наращенный капитал по первоначальному и первоначальный по наращенному.

27. Правило смешения. Проба. Задачи на смешение первого рода.
28. Правило смешения. Задачи на смешение второго рода.
29. Правило смешения. Задачи на смешение второго рода, когда в смесь входят более двух сортов.
30. Правило процентов. Определить время и таксу.

Программа по алгебре (7 мая 1913 года) [20]

1. Предмет алгебры. Коэффициент. Степень, корень. Понятие о положительных и отрицательных величинах. Подобные члены. Приведение подобных членов.
2. Сложение одночленов и многочленов. Вычитание одночленов и многочленов. Правило знаков при сложении и вычитании.
3. Умножение. Правило знаков. Умножение одночленов. Умножение многочленов на одночлены. Умножение многочленов на многочлены.
4. Умножение по формулам:

1. $(a + b)(a - b)$, 2. $(a + b)^2$, 3. $(x \mp a)(x \mp b)$.

5. Умножение по формулам:

1. $(x \mp a)(x \pm b)$, 2. $(a \mp b)^3$, 3. $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

6. Разложение многочленов на простые множители.
7. Общий наибольший делитель и наименьшее кратное.
8. Сокращение дробей. Приведение к общему знаменателю. Сложение и вычитание дробей.
9. Умножение дробей.
10. Деление дробей.
11. Уравнения 1-ой степени с одним неизвестным.
12. Уравнения 1-ой степени с двумя неизвестными. Различные способы исключения одного из неизвестных. Способ уравнения коэффициентов или способ сложения и вычитания.
13. Уравнения 1-ой степени с двумя неизвестными. Способ сравнения величин неизвестных.
14. Уравнения 1-ой степени с двумя неизвестными. Способ подстановки.
15. Извлечение квадратного корня из чисел целых и дробных.
16. Иррациональные выражения. Приведение корней к нормальному виду. Сложение и вычитание корней.
17. Квадратные уравнения. Решение квадратных уравнений вида

$x^2 + px + q = 0$ и вида $ax^2 + bx + c = 0$.

18. Свойства корней квадратного уравнения. Составить уравнение по данным корням. Найти корни уравнения, не пользуясь формулой.
19. Арифметическая прогрессия. Определить каждый член арифметической прогрессии.
20. Арифметическая прогрессия. Сумма двух членов арифметической прогрессии, равноудаленных от концов ее, есть величина постоянная, равная сумме крайних членов.
21. Определить сумму членов арифметической прогрессии.

22. Логарифмы. Определение. Выбор основания. Свойства логарифмов:
1) при всяком основании,
2) при основании большем единицы,
3) при основании меньшем единицы.
23. Определить, чему равен логарифм произведения.
24. Определить, чему равен логарифм частного и логарифм дроби.
25. Логарифм степени и логарифм корня.
26. Свойства десятичных логарифмов. Свойства характеристики и мантиссы. Преобразование логарифмов отрицательных в нормальную форму. Нахождение логарифмов целых чисел, когда они помещаются в таблице и когда не помещаются.
27. Нахождение числа по его логарифму: 1) когда мантисса находится в таблице и 2) когда мантисса данного логарифма не находится в таблице.
28. Действия над логарифмами с отрицательной характеристикой.
29. Сложные проценты. Вывод формулы.
30. Сложные проценты. Определить время и таксу процентов.

Программа по геометрии (24 апреля 1913 года) [21]

1. Определение положения плоскости. Прямая, перпендикулярная к двум линиям, проведенным через ее основание на плоскости, перпендикулярна и ко всякой прямой, проведенной через ее основание на той же плоскости.
2. Через всякую точку вне прямой можно провести только одну плоскость к ней перпендикулярную.
3. Прямая и плоскость.
4. Многогранники. Призма. Параллелепипед. В параллелепипеде противоположные грани равны и параллельны.
5. Призма, ее боковая и полная поверхности.
6. Свойства пирамиды.
7. Боковая и полная поверхность пирамиды. Боковая и полная поверхность усеченной пирамиды.
8. Объем параллелепипеда.
9. Всякий параллелепипед делится диагональной плоскостью на две треугольные равновеликие призмы.
10. Объем треугольной призмы.
11 Треугольная пирамида. Объем треугольной и многоугольной пирамид.
12. Объем усеченной треугольной и многоугольной пирамид.
13. Цилиндр, его боковая и полная поверхности. Объем.
14. Конус, его боковая и полная поверхности и объем.
15. Усеченный конус, его боковая и полная поверхности и объем.
16. Шар. Сечение плоскостью шара есть круг.
17. Поверхность шара и объем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вступительные программы в Тверскую учительскую школу П.П. Максимовича // Справочная книга для окончивших курс начальных школ Тверской губернии. Тверь, 1904. – С. 49-52.

2. Пругавин А.С. Законы и справочные сведения по начальному народному образованию. С.-Пб., 1904. – XLVIII, 1096 с.

3. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1247. Л. 9.

4. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1248. Л. 2.

5. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1248. Л. 14.

6. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1248. Л. 20.

7. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1121. Л. 14.

8. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1121. Л. 1.

9. ГАТО. Ф.861. Оп. 1. Д. 1121. Л. 33.

10. Бирюлева Н.М., Чемарина Ю.В. Математические традиции школы П.П. Максимовича // Столетие физико-математического образования в Верхневолжском регионе. Материалы научной конференции. – Тверь, 2018. – С. 34-39.

11. Могилевский И.Ш. Кого и как учили математике в школе Максимовича // Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь, 2020. – С. 133-138.

12. Ильина Т.А. Школа Максимовича: исследование и материалы. – Тверь, 2010. – 184 с., 16 с. цв. ил.

13. Ф.861. Оп. 1. Д. 1125. Л. 2.

14. Ф.861. Оп. 1. Д. 1185. Л. 1.

15. Ф.861. Оп. 1. Д. 1185. Л. 9.

16. Грифцова М.И. Воспоминания // Мои университеты: сб. воспоминаний выпускников и сотрудников университета. – Тверь, 2006. – 255 с.: ил.

17. Ф.861. Оп. 1. Д. 1121. Л. 30.

18. Ф.861. Оп. 1. Д. 1246. Л. 4 об.

19. Ф.861. Оп. 1. Д. 1122. Л. 8, 9.

20. Ф.861. Оп. 1. Д. 1122. Л. 6.

21. Ф.861. Оп. 1. Д. 1122. Л. 4, 5.

УДК 372.851.4

ИЗУЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

Иванов Виктор Владимирович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *цифровые образовательные ресурсы, интерактивная геометрическая среда GeoGebra, поверхности второго порядка, интерактивные компьютерные модели, визуализация.*

Аннотация. В статье рассматриваются возможности применения в on-line режиме интерактивной геометрической среды GeoGebra для создания изображений поверхностей второго порядка, визуализации их свойств в процессах изучения и исследования. Приведены решения задач с использованием компьютерных моделей, созданных с помощью GeoGebra.

Совершенствование математического образования в настоящее время предполагает его цифровую трансформацию, активное использование в учебном процессе современных информационных технологий.

Использование интерактивных компьютерных моделей открывает новые возможности для визуализации изучаемых понятий. Применение учебных компьютерных систем позволяет показать процесс работы над решением задач в его развитии, на новом уровне передавать информацию и улучшать ее понимание, анализировать рисунки с разных сторон. Визуальные образы математических объектов повышают восприятие информации, наглядно формируют представления об основных понятиях, стимулируют развитие умений и навыков в работе с теоретическим и практическим материалом.

Интерактивная геометрическая среда предоставляет возможность визуализировать математику, проводить эксперименты и исследования в процессе поиска решений задач. Одно из достоинств GeoGebra – легкость в освоении для владеющих только элементарными навыками работы на компьютере.

Обладающая простым интерфейсом пользователя кроссплатформенная программа GeoGebra переведена на многие языки, в том числе и на русский. Она распространяется бесплатно и может быть установлена как на стационарные компьютеры и ноутбуки, так и на планшеты и смартфоны. Кроме того, предусмотрена возможность работы on-line на web-странице https://www.geogebra.org.

Покажем возможности использования on-line программы GeoGebra в качестве средства визуализации при изучении и исследовании поверхностей второго порядка по их каноническим уравнениям.

Заходим на указанную выше web-страницу. В ее центре нажимаем на кнопку START CALCULATOR. Открывается web-страница https://www.geogebra.org/calculator. В верхней строке GeoGebra Calculator Suite в выпадающем меню Graphing выбираем 3D Calculator.

В строку ввода (Input…) в окне слева запишем каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Программа в том же окне создает ползунки для динамического изменения полуосей a, b и c. По умолчанию $a = b = c = 1$. В окне справа появляется изображение сферы единичного радиуса $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Диапазон изменения значений величин полуосей a, b и c первоначально установлен от – 5 до 5. После щелчка мыши по любому значению (– 5 или 5) появляется возможность изменения диапазона. Анимация запускается кнопкой (в виде кружка с треугольником внутри) справа от ползунка. После запуска анимации над кнопкой появляется строка, в которой указан шаг. Шаг анимации уменьшается или увеличивается с помощью значков ≪ и ≫.

На рис. 1 показан эллипсоид, соответствующий каноническому уравнению при $a = 4$, $b = 2$, $c = 3$. Перемещая ползунки для величин a, b и c вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы эллипсоида в зависимости от длин его полуосей.

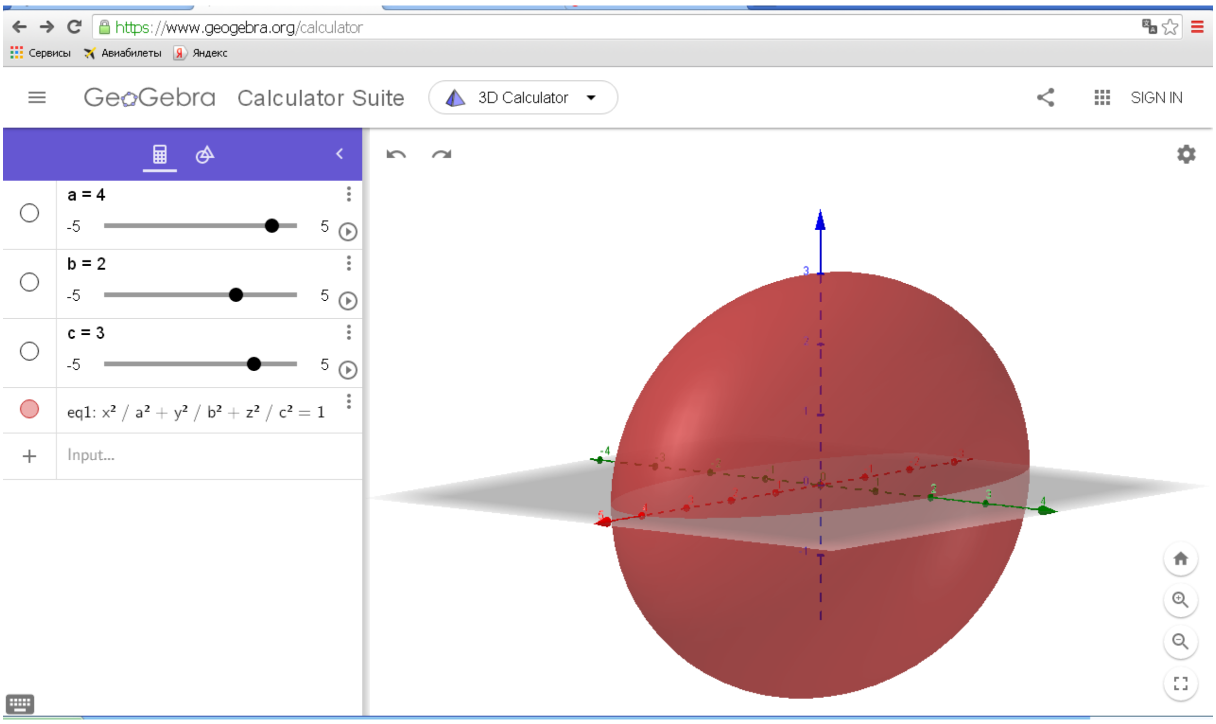


Рис. 1

В строку ввода (Input…) в окне слева запишем каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

На рис. 2 показан однополостный гиперболоид, соответствующий каноническому уравнению при $a = 0{,}8$, $b = 1{,}1$, $c = 1{,}5$. Перемещая положения ползунков для величин a, b и c вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы однополостного гиперболоида в зависимости от длин его полуосей.

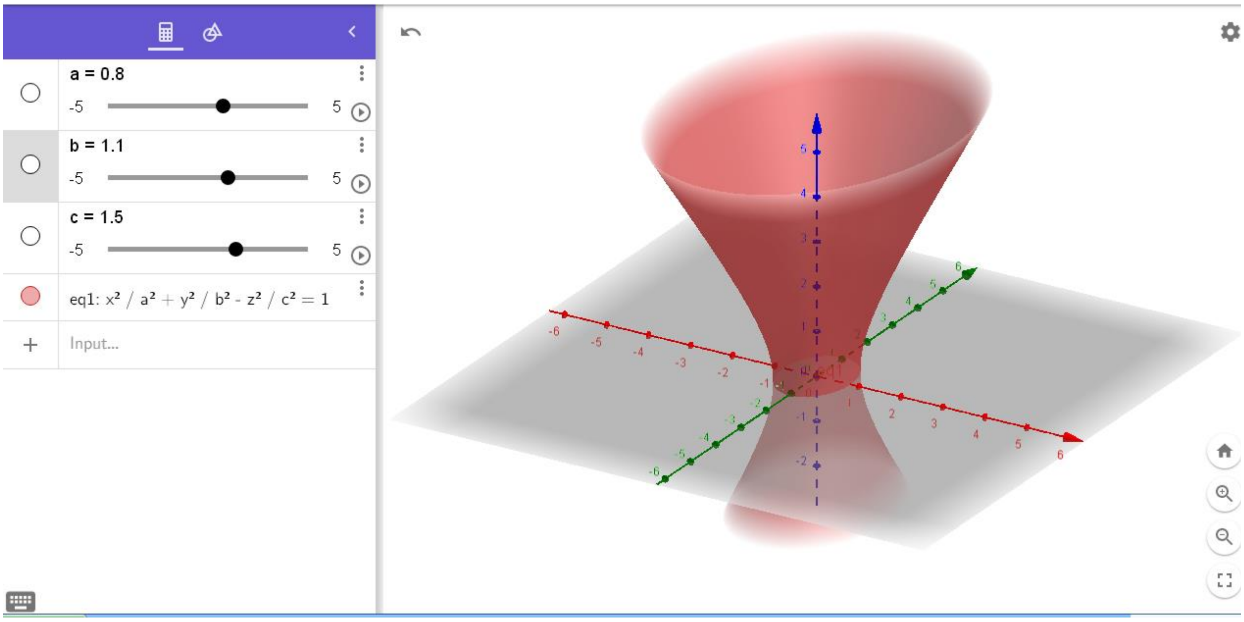


Рис. 2

В строку ввода запишем каноническое уравнение двуполостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

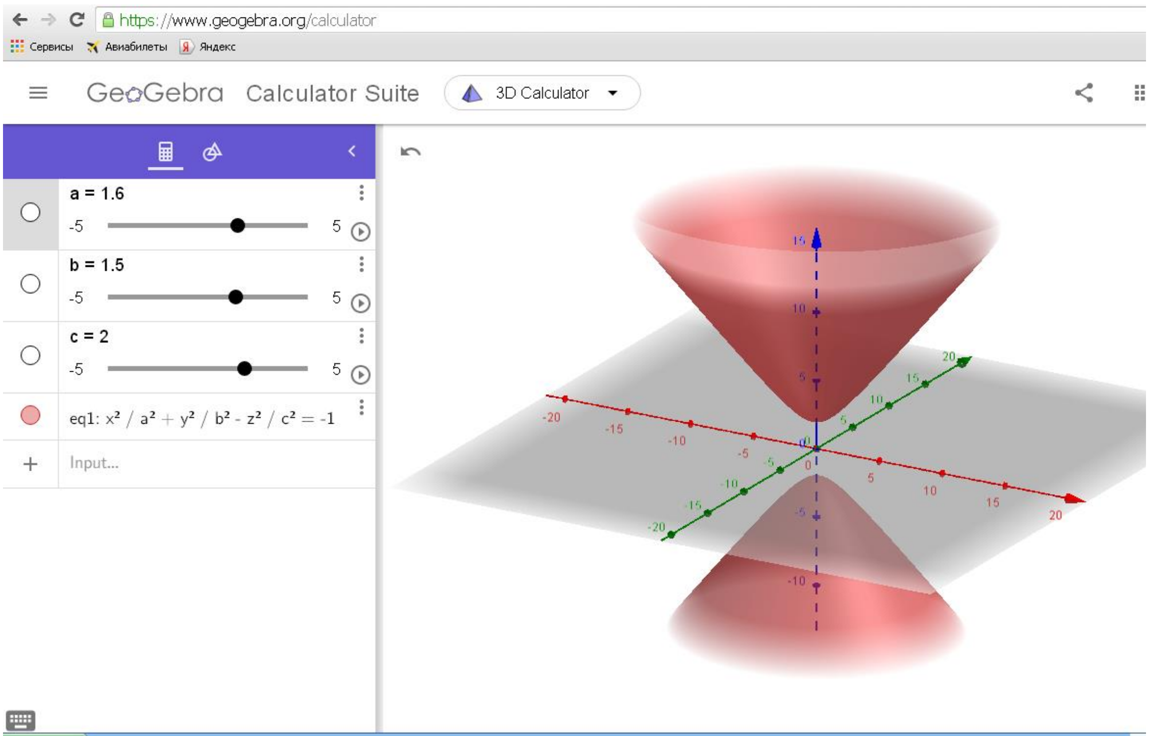


Рис. 3

На рис. 3 показан двуполостный гиперболоид, соответствующий каноническому уравнению при $a = 1{,}6$, $b = 1{,}5$, $c = 2$. Перемещая положения ползунков для величин a, b и c вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы двуполостного гиперболоида в зависимости от длин его полуосей.

В строку ввода запишем каноническое уравнение эллиптического параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

На рис. 4 показан эллиптический параболоид, соответствующий каноническому уравнению при a = 2,7, b = 3. Перемещая положения ползунков для величин a и b вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы эллиптического параболоида в зависимости от его параметров.

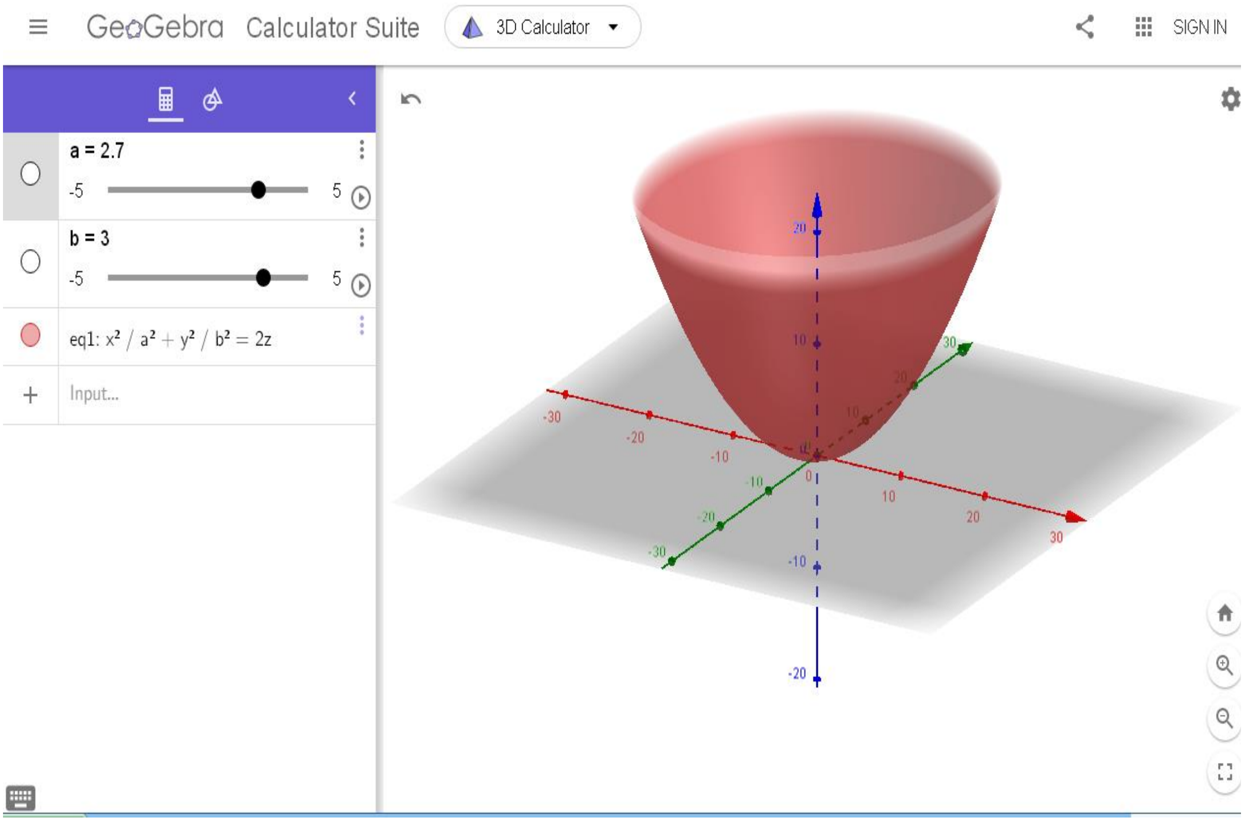


Рис. 4

В строку ввода запишем каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z.$$

На рис. 5 показан гиперболический параболоид, соответствующий каноническому уравнению при a = 2, b = 1,5. Перемещая положения ползунков для величин a и b вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы гиперболического параболоида в зависимости от его параметров.

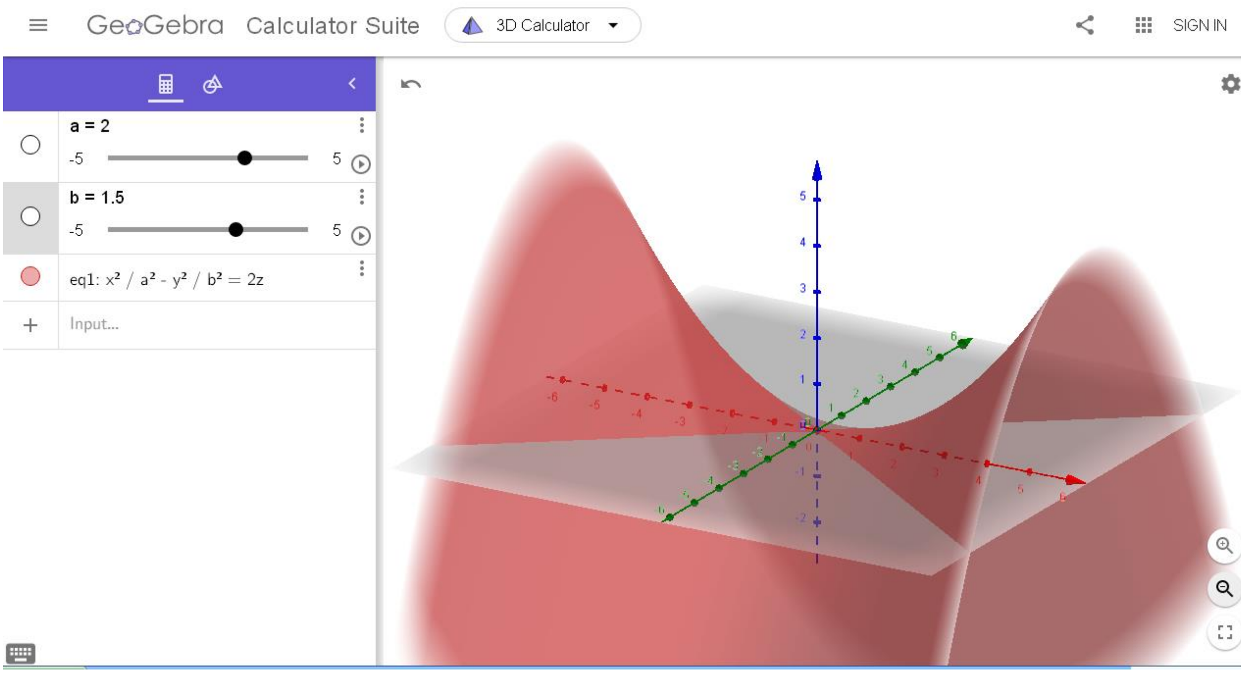


Рис. 5

Построим гиперболический цилиндр:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На рис. 6 показан гиперболический цилиндр, соответствующий каноническому уравнению при $a = 5$, $b = 3$. Перемещая положения ползунков для величин a и b вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы гиперболического цилиндра в зависимости от его параметров.

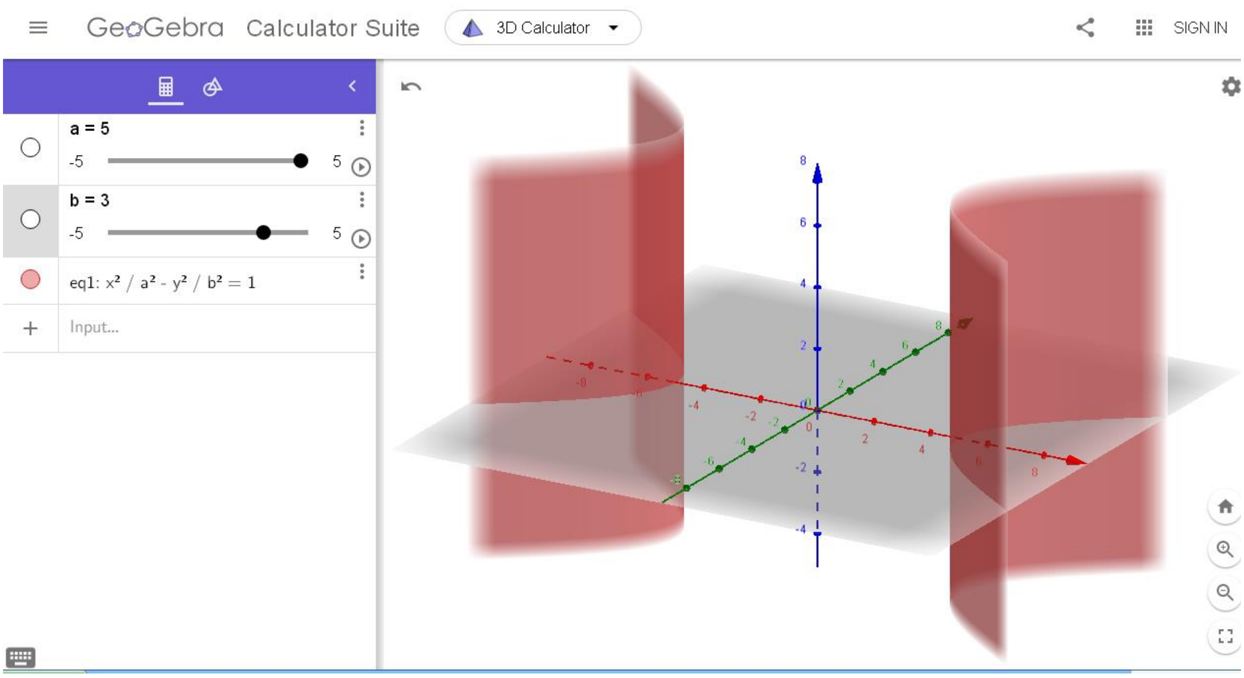


Рис. 6

Аналогично можно построить и исследовать эллиптический и параболический цилиндры.

В строку ввода запишем каноническое уравнение конуса второго порядка:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

На рис. 7 показан конус второго порядка, соответствующий каноническому уравнению при $a = 2{,}5$, $b = 2$, $c = 3$. Перемещая положения ползунков для величин a, b и c вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы конуса второго порядка в зависимости от его параметров.

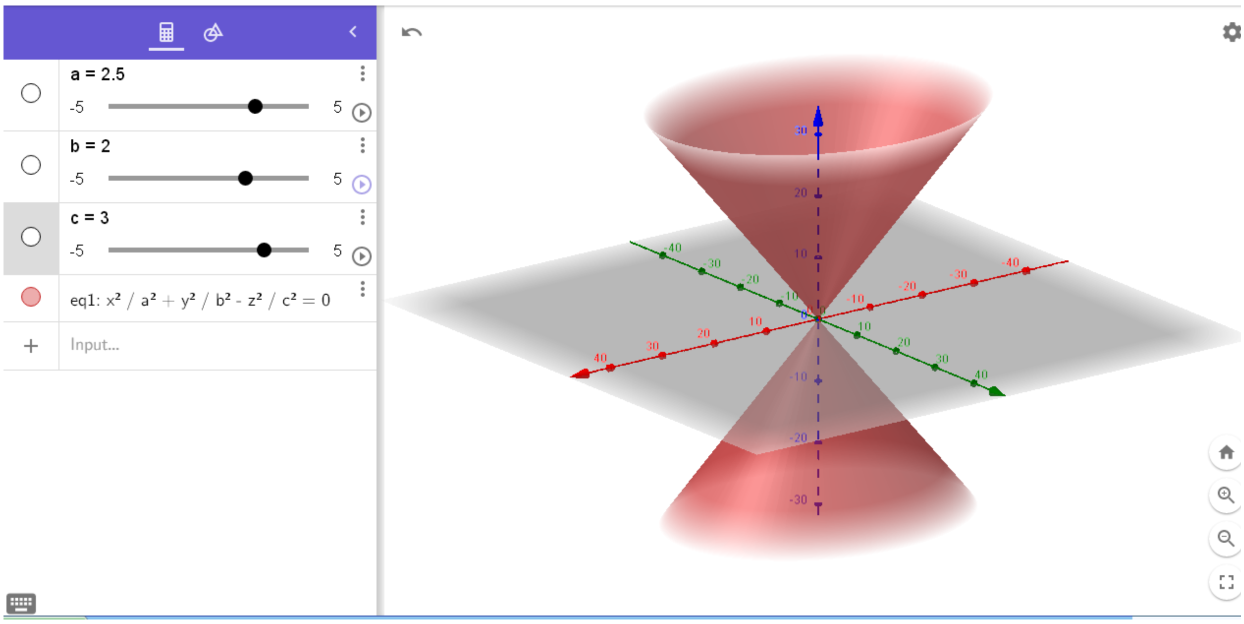


Рис. 7

В GeoGebra можно вращать созданные 3D фигуры. Изменяя знаки с плюса на минус и наоборот в канонических уравнениях поверхностей второго порядка легко проследить за преобразованием расположения фигур относительно системы координат.

Задача 1 [1, с. 155]. Выясните, какая поверхность в пространстве описывается уравнением $x^2 - 8x + y = 0$. Изобразите ее на чертеже.

Решение. В строку ввода запишем уравнение из условия задачи. Получаем параболический цилиндр. Так как уравнение не содержит z, то оно описывает цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Направляющей служит парабола (рис. 8).

Задача 2 [2, № 1180 (3)]. Найдите точки пересечения поверхности $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=z$ и прямой $\frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+3}{-2}$.

Решение. В строку ввода запишем уравнения из условия задачи. Получим изображения эллиптического параболоида и прямой. Поверхность и прямая общих точек не имеют (рис. 9).

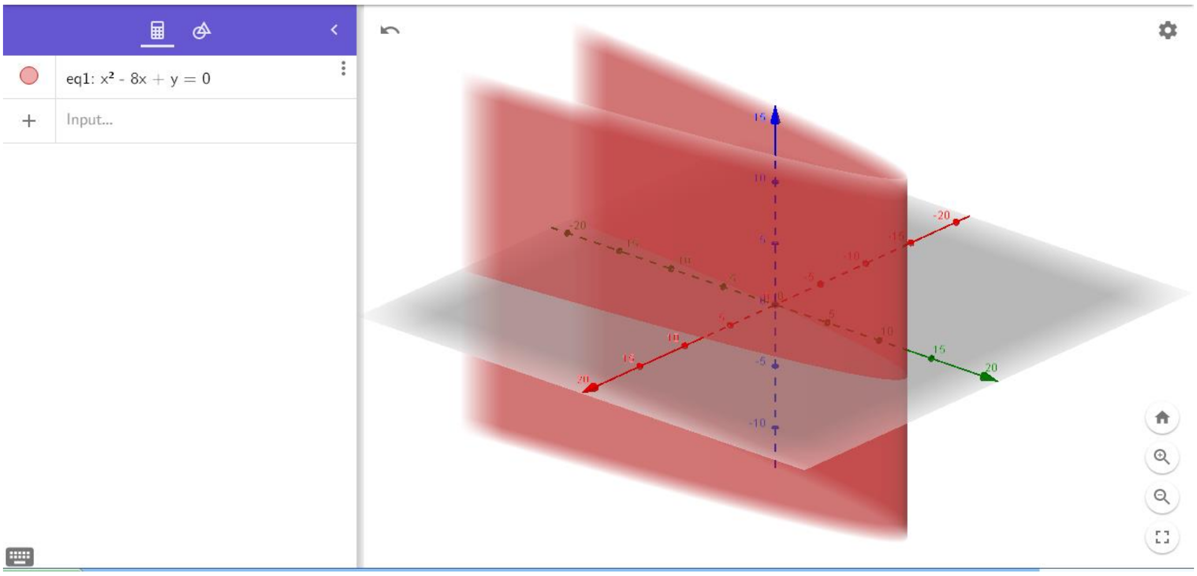


Рис. 8

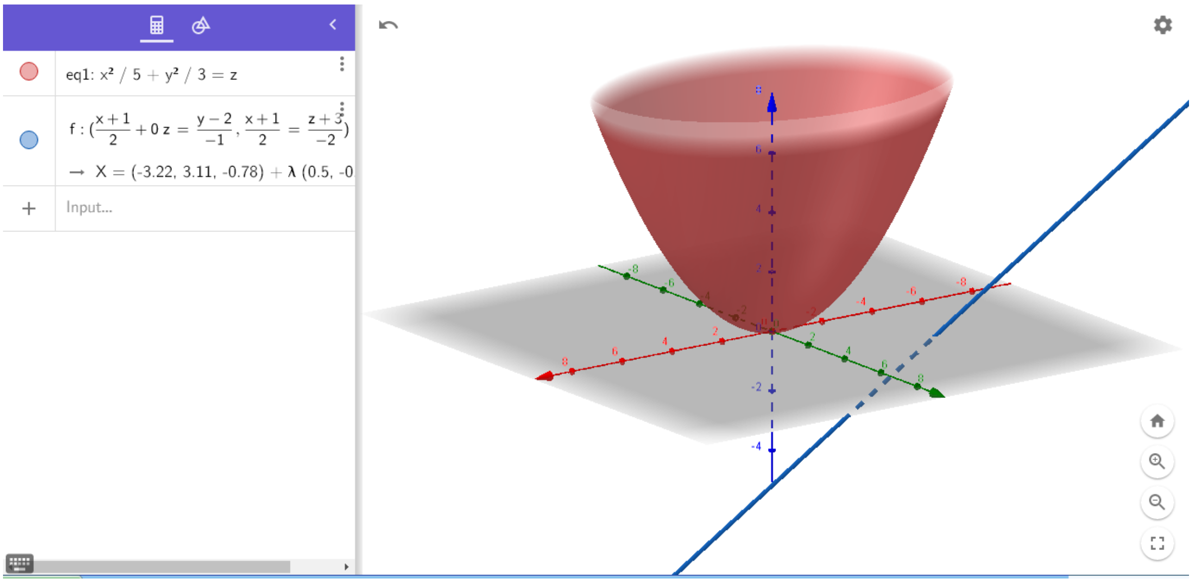


Рис. 9

Интерактивная геометрическая среда GeoGebra позволяет продемонстрировать свойства поверхностей второго порядка и проследить, как изменение параметров влияет на изображения поверхностей, ускоряет процесс решения задач, упрощает вычисления. Создание компьютерных моделей с помощью GeoGebra повышает эффективность освоения изучаемого материала, развивает познавательную активность, навыки самоконтроля.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / В.В. Иванов. – Тверь, 2009. – 160 с.: ил.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник, под ред. Ефимова Н.В. – С-Пб., 2020. – 224 с.: ил.

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЗАДАЧ НА РАСЧЕТ СТРОИТЕЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ В КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОГО ОБЩЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Калинкина Виктория Юрьевна
Приамурский Государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: miss.kalinkina@bk.ru

Эйрих Надежда Владимировна
Приамурский Государственный университет им. Шолом-Алейхема, г. Биробиджан
E-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Ключевые слова: практико-ориентированные задачи, основное общее образование, качество образования, математика.

Аннотация. В работе отмечается важность использования практико-ориентированных задач при обучении математике, приведены примеры задач практического содержания на расчет строительных материалов, необходимых при строительстве зданий.

Усиление прикладной направленности курса математики средней школы является одним из ключевых моментов модернизации математического образования. Современная экономика требует компетентных специалистов, владеющих навыками и умениями применять полученные знания на практике. Узкоспециальные знания перестали быть основой для успеха в жизни, поэтому необходимо интегрировать эти знания, сделать их метапредметными, то есть сформировать у учащихся общую картину мира, а также умение ориентироваться в разных нестандартных ситуациях [4, 5].

В требованиях к уровню подготовки выпускников базового и профильного математического уровней указывается, что в результате изучения математики ученик должен знать и понимать «значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе».

Осуществлению данных требований поможет использование в процессе обучения практико-ориентированных задач, которые способствуют развитию творческих способностей обучающихся и оказывают положительное влияние на качество их знаний. Решение таких задач содействует формированию естественнонаучной картины мира, развивает самостоятельность и творческую активность обучающихся [6].

Практико-ориентированные задачи позволяют изучать предмет на разнообразном фактологическом материале более углубленно, учат использовать математический аппарат для анализа тех проблем, с которыми учащиеся встречаются в повседневной жизни [3, 7]. Отметим также, что практико-ориентированная задача повышает интерес учащихся к самому предмету, поскольку для подавляющего большинства ценность математического образования состоит в ее практических возможностях [8]. Так как если ученик не видит непосредственного применения математических понятий в различных технологических и производственных процессах, то математика предстает перед ним как бесполезное заучивание формул, теорем и алгоритмов вычислений [6]. Поэтому так важно на уроках регулярно решать задания, ориентированные на практическое применение математики, которые демонстрируют связь математических понятий с практикой, с жизнью [2,9,10].

Кроме того, в настоящее время происходит пересмотр подходов к итоговой аттестации в школе: идет обновление базы заданий ЕГЭ и ОГЭ, которые будут предлагаться для решения на экзамене в школах. Планируется, что «многие задания станут более практико-ориентированными и позволят использовать знания в решении реальных бытовых вопросов. Например, по математике будут введены такие вопросы, которые позволят рассчитать расход строительных материалов или затраты на проведение благоустройства приусадебного участка» [1].

Для спешного прохождения итоговой аттестации учащиеся должны уметь решать задачи прикладного характера. К сожалению, в действующих учебниках недостаточно таких заданий. Учащиеся в большинстве случаев отказываются решать такие задачи, их отталкивает и «пугает» нестандартная формулировка заданий. Поэтому нами были разработаны ряд задач, демонстрирующих применение математики в строительстве. Ниже приведен пример двух таких задач.

Задача 1. Найти площадь крыши и рассчитать количество хризотилцементных листов для двускатной крыши (рис. 1) при следующих начальных данных:

- внутренний размер здания – 10,2 × 26,9 м;
- вынос карнизного свеса – 0,6 м;
- скат крыши – 6,4 м;
- коэффициент для расчета количества хризотилцементных листов – 1,35.

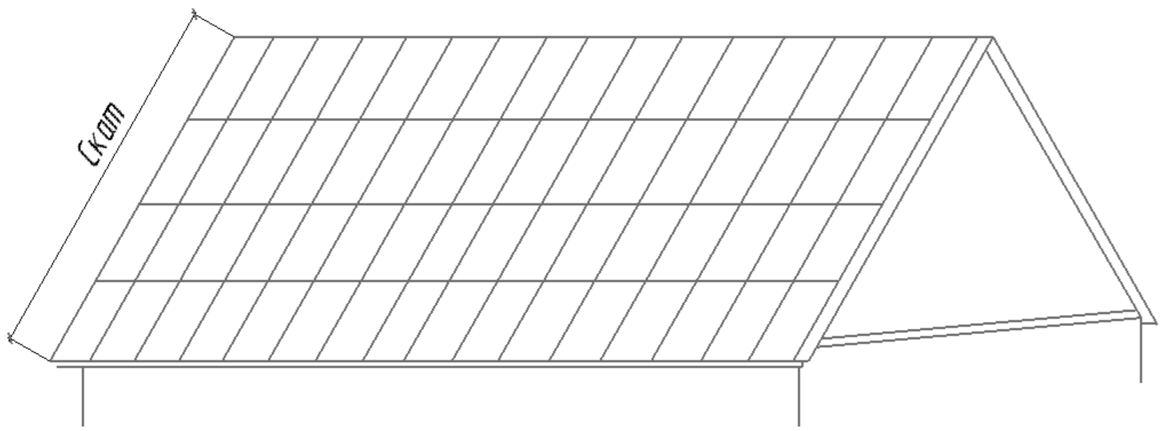


Рис. 1. Двускатная крыша

Решение:

1. Находим площадь крыши (см. рис. 2)

$$S_{крыши} = (10,2 + 1,2) \cdot (26,9 + 1,2) = 320,34\, м^2.$$

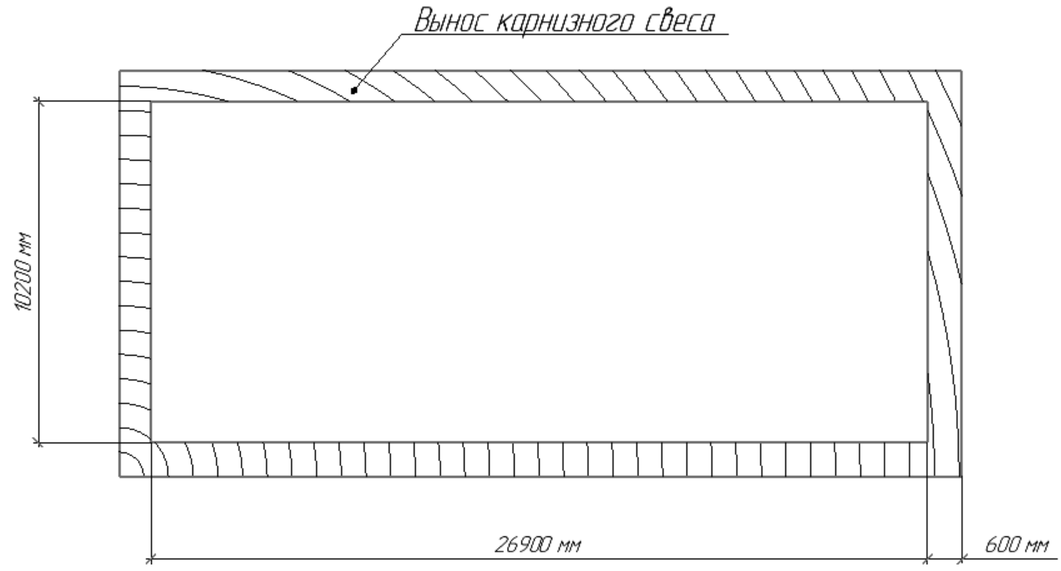


Рис. 2. Размеры здания в плане

2. Находим длину крыши

$$l_{крыши} = 26{,}9 + 1{,}2 = 28{,}1\ м.$$

3. Находим площадь кровли (см. рис. 3)

$$S_{кровли} = (28{,}1 \cdot 6{,}4) \cdot 2 = 359{,}68\ м^2.$$

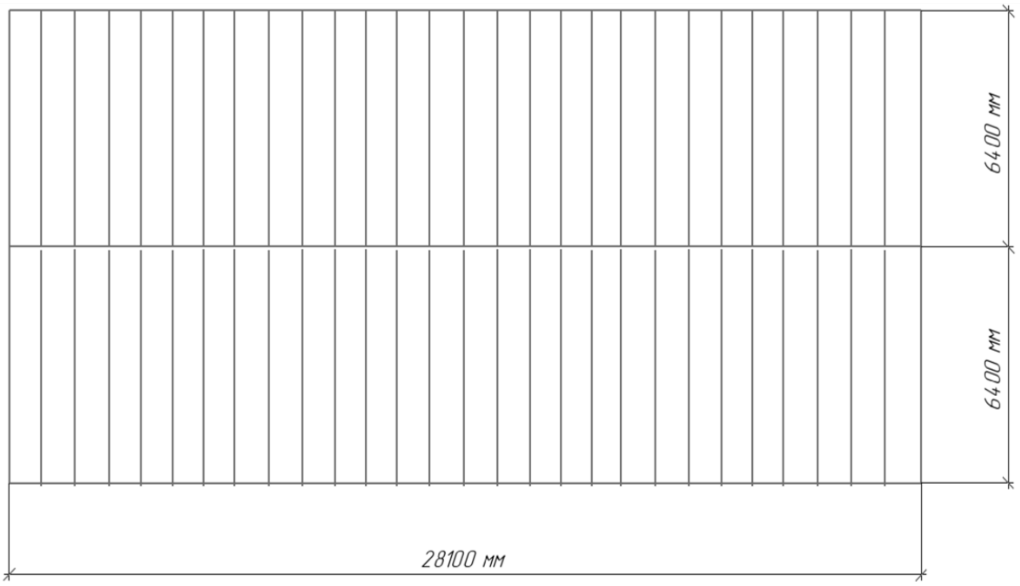


Рис. 3. Основные размеры крыши (длина крыши, скаты)

4. Для нахождения количества хризотилцементных листов умножим $S_{\text{кровли}}$ на заданный коэффициент:

$$359{,}68 \cdot 1{,}35 = 485{,}568.$$

Полученный результат округляем с избытком и принимаем 486 хризотилцементных листов.

Решая данную задачу, учащиеся учатся читать чертежи, знакомятся:

– с понятиями покрытие здания (или крыша) и кровля, в чем их отличия, основные функции и требования, которые предъявляются к этим элементам здания;
– с понятием скат крыши и его функциями;
– с тремя основными формами крыш: односкатная, двускатная (или щипцовая); четырёхскатная (или шатровая);
– со строительным материалом хризотилцементные листы (волновой шифер).

Задача 2. Рассчитать расход краски для труб системы отопления (рис. 4), если расход краски 0,5 кг на 1 м^2, при следующих условиях:

- труба стальная диаметром 15 мм, длиной 19 м;
- труба стальная Т2 диаметром 25 мм, длиной 3,9 м;
- труба стальная Т2 диаметром 32 мм, длиной 5,25 м;
- труба стальная Т1 диаметром 25 мм, длиной 4 м;
- труба стальная Т1 диаметром 32 мм, длиной 4,65 м;
- трубы стальные диаметром 40 мм, длиной 8 м.

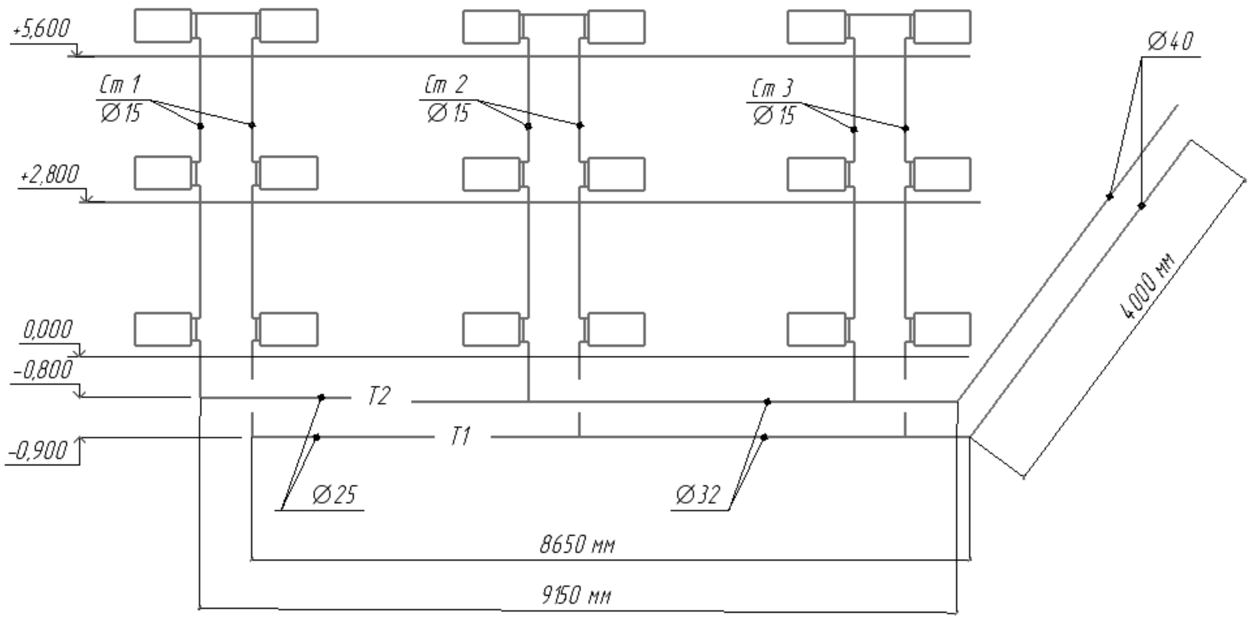


Рис 4. Схема системы отопления

Решение:
Поверхность каждой трубы – это прямоугольник (см. рис. 5) со сторонами $d\pi$ (ширина) и l (высота или длина).
1. Находим площадь поверхности каждой трубы по формуле $S = l \cdot d \cdot \pi$, принимаем значение π = 3,14.

$$S_{Ø15} = 19 \cdot 0{,}015 \cdot \pi = 19 \cdot 0{,}015 \cdot 3{,}14 = 0{,}8949 \text{ м}^2,$$
$$S_{Ø25} = (3{,}9 + 4) \cdot 0{,}025 \cdot \pi = (3{,}9 + 4) \cdot 0{,}025 \cdot 3{,}14 = 0{,}62015 \text{ м}^2,$$
$$S_{Ø32} = (5{,}25 + 4{,}65) \cdot 0{,}032 \cdot \pi = (5{,}25 + 4{,}65) \cdot 0{,}032 \cdot 3{,}14 = 0{,}994752 \text{ м}^2,$$
$$S_{Ø40} = 8 * 0{,}04 * \pi = 8 * 0{,}04 * 3{,}14 = 1{,}005 \text{ м}^2.$$

2. Находим общую площадь покраски:
$$S = 0{,}8949 + 0{,}62015 + 0{,}994752 + 1{,}005 = 3{,}515\text{м}^2.$$

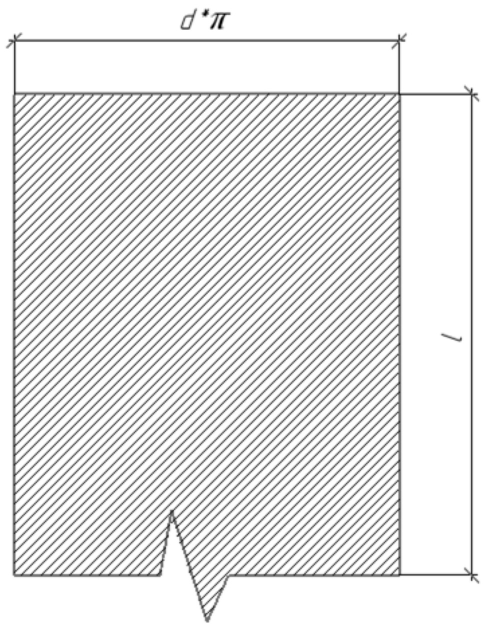


Рис. 5. Поверхность трубы системы отопления

3. Рассчитываем расход краски:

$$0{,}5 * 3{,}515 = 1{,}757 \text{ кг.}$$

Следовательно, расход краски составит 1,757 кг.

Использование при обучении таких практико-ориентированных задач позволяет раскрыть связь математики с окружающим миром, служит развитию интереса к математике как к предмету. Воспитывает у школьников убежденность в том, что математика – это наука полезная, и необходимая в их будущей профессиональной деятельности.

Таким образом, решение задач с практическим содержанием усиливает мотивационную составляющую обучения. На конкретных примерах учащиеся убеждаются, что все математические абстракции возникают из практики, из задач, поставленных реальной действительностью. А нестандартная формулировка практико-ориентированных задач позволяет повышать познавательный интерес учащихся, способствует развитию любознательности, творческой активности, а для кого-то определит и выбор будущей профессиональной деятельности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. «Задачи на расчет строительных материалов для ремонта»: какие изменения жду ЕГЭ и ОГЭ в 2021 году, сайт FB.ru URL: https://fb.ru/news/childhood-education/2020/9/28/247817 (дата обращения 07.03.2021).

2. Eyrikh N.V., Fishman B.E., Bazhenov R.I., Markova N.V., Pitsuk I.L. Hands-On Games For Motivating Students' Math Training // В сборнике: Proceedings of the 2019 IEEE International Conference Quality Management, Transport and Information Security, Information Technologies IT and QM and IS 2019. 2019. С. 477-481.

3. Атанов И.В., Капустин И.В., Никитенко Г.В., Скрипкин В.С. Межпредметные связи в учебном процессе высшего учебного заведения // Современные проблемы науки и образования. 2013. № 6. С. 355.

4. Журавлева Н. С., Кашлач И. Ф. Межпредметные связи как условие развития универсальных учебных действий в средней школе // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2018. Т. 7. № 2 (23). С. 97-99.

5. Калдыбаев С. К., Макеев А.К. О роли практико-ориентированных задач в обучении математике // Инновационная наука. 2015. С. 110-111.

6. Кириллова Д.А., Одоевцева И.Г. «Задача о часах» как средство формирования научного мировоззрения при обучении математике // Мир науки. 2017. Т. 5. № 3. С. 12.

7. Одоевцева И.Г., Кириллова Д.А. Олимпиада по математике как средство оценки метапредметных результатов образования // В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы научно-практической конференции. 2017. С. 52-54.

8. Сарванова Ж.А., Куприянова Т.А. Использование прикладных задач для изучения теорем школьного курса геометрии // В сборнике: Актуальные проблемы математики и методики её преподавания. Материалы Международной научно-практической конференции. 2018. С. 73-77.

9. Фишман Б.Е., Эйрих Н.В. Компьютерная игра в практико-ориентированной части исследовательско-учебной математической деятельности учащихся (диск-приложение к журналу) // Математика в школе. 2020. № 4. С. 9.Фишман Б.Е., Эйрих Н.В. Практико-ориентированная игра как средство стимулирования субъектности студентов, осваивающих математику // В сборнике: Геометрия многообразии и ее приложения. Материалы Пятой научной конференции с международным участием, посвященной 100-летию профессора Р. Н. Щербакова. Отв. ред. В.Б. Цыренова. 2018. С. 291-298.

УДК 004.451.9

КРИТИКА LINUX

Кокорин Даниил Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: xt1zer@yandex.ru

Ключевые слова: *операционная система, ядро операционной системы, дистрибьюция.*

Аннотация. В докладе рассматриваются проблемы при создании и развитии операционной системы Linux и критику, направленную на её технические особенности и применение в потребительской среде.

Linux в нашем мире уже достаточно давно, чтобы люди успели оценить его по достоинству. Его доля на рынке операционных систем для персональных компьютеров не может похвастаться желаемыми динамичными изменениями (за последний год она выросла на прибл. 0.2%, по данным NetMarketShare [1]), но при этом всё больше компаний начинают внедрять Linux в свои устройства (как ноутбуки) перед продажами. На мобильных устройствах доминирует Android – основанная на базе ядра упоминаемой в теме ОС, а в серверах и мейнфреймах приз по-прежнему забирают Unix-подобные системы.

Здесь мы уже можем с уверенностью определить тенденции операционной системы, но почему они такие? Некоторые проблемы, связанные с его созданием, имеют предпосылки ещё в его «шаблоне» – Unix. Рассмотрим проблемы, которые привлекли внимание редакторов и даже самого создателя.

Спор Таненбаум-Торвальдс

Эндрю Таненбаум – профессор Амстердамского свободного университета, известный как создать Minix (Unix-подобной операционной системы для студенческих лабораторий) и автор книг по компьютерным наукам – разместил 29 января 1992 г. пост в дискуссионной группе comp.os.minix сети Usernet, в котором заявил, что микроядра превосходят и вытесняют монолитные ядра, вследствие чего Linux должен был считаться к тому времени устаревшим. Исходя из этого (не вдаваясь в технические подробности), Таненбаум добавил, что это препятствует портируемости ядра на другие архитектуры процессоров. Кроме того, изначально Linux был тесно завязан на архитектуре x86, заявляя, что когда-нибудь она перестанет быть актуальной.

Линус Торвальдс – создатель и по сей день разработчик ядра Linux – ответил, что в разработке Minix были допущены ошибки проектирования (например, отсутствие многозадачности), а микроядерная архитектура лучше лишь с теоретической точки зрения. Также сообщил, что покуда Linux разрабатывался в свободное время и распространялся на бесплатной основе (в противовес Minix, который не был бесплатным в то время, и разрабатывался в коммерческих целях), Таненбаум не должен объективно высказываться о его стараниях. Линус также добавил, что работа на микропроцессоре Intel 80386 была выполнена лишь в целях изучения этой архитектуры.

Помимо Торвальдс, к дискуссии присоединились другие основные разработчики Linux, а спор продолжался некоторое время, всё больше углубляясь в технические вопросы разработки операционных систем и будущее их развития. Спор получил место в некоторых публикациях, в том числе в книге Open Sources: Voices from the Open Source Revolution издательства O'Reilly Media в 1999 г., в которой он описывается как наглядный пример того, «как мир тогда относился к разработке операционных систем» [2]; также спор породил скандал вокруг книги Кеннета Браун Samizdat, в которой пишет, что Linux был нелегальной копией Minix. В интервью Таненбаум высказал резкое опровержение в защиту Торвальдс, заявив, что между ними нет личных конфликтов, а Minix не считается некоторым коммерческим достижением, но, скорее, развлечением.

Ядро

Производительность. На LinuxCon 2009 Линус рассказал, что разработка столкнулась с проблемой «раздутости» ядра (с англ. *bloated*), которая утяжеляется с выходом новой крупной версии ядра и снижает производительность Linux на 2 процентных пункта. «Немного грустно, что мы представляем не модернизированное, компактное, сверхэффективное ядро, как я предвидел 15 лет назад», говорит Торвальдс.

Однако на LinuxCon 2014 он высказал мнение о том, что ситуация с «раздутостью» ядра улучшается за счёт появления более быстрых компьютеров: «Мы пичкали ядро на протяжении 20 прошлых лет, но аппаратные средства стали быстрее» [3].

Качество кода. Во время интервью с немецкой газетой Zeit Online в ноябре 2011 г. Линус сказал, что был обеспокоен «уровнем комплексности» программного обеспечения; разработчики могут оказаться в ситуации, когда навигация по исходному коду станет проблематичной, если не невозможной. По его словам, даже компоненты ядра стали со временем сложнее, и мы должны опасаться того дня, когда очередную ошибку в коде будет невозможно выследить. До сих пор остались старые баги, которые не получают внимание.

Тео де Раадт, создатель OpenBSD, в 2005 г. сравнил процесс разработки своей ОС с Linux: «Linux никогда не отличался качеством. В нём очень много мелких частей, которые, по сути, лишь маленькие дешёвые “хаки”, отчего он, как ни странно, работает». В отношении Линуса Торвальдс Тео сказал: «Я не знаю в чём его цель, но это определённо не качество» [4].

Персональные компьютеры

Распространение. Одно из общих недовольств Linux в потребительской сфере вызвано избыточностью дистрибьюции. В марте 2021 г. база DistroWatch начисляет 277 дистрибутивов Linux. В то время как сторонники объясняют это число как «свободу выбора», другие критики видят в нём причину возникновения путаницы (в том, что из себя представляет Linux) и отсутствие стандартов операционной системы.

Александр Вулф из интернет-журнала InformationWeek вспоминает, что проблема разветвления Unix в 1980-х (что уменьшает шансы на заимствование функций ОС для других проектов) была ничем по сравнению с беспорядком, который мы наблюдаем сегодня с Linux, делящийся на три сотни дистрибутивов, борющихся между собой за внимание пользователей, которые ищут альтернативу Windows [5]. Вместо этого, говорит Кейтлин Мартин в LinuxDevCenter: приложение, написанное для Linux, должно относительно просто устанавливаться на любом его образе, однако мы получаем сотни ответвлений, каждый из которых поставляется со своим набором инструментов, файловых систем, вариаций трёх главных схем управления пакетами (software package management) и т.д.

Аппаратная поддержка. На протяжении нескольких десятилетий (с поры установления несомненного доминирования Microsoft Windows на рынке операционных систем для персональных компьютеров) разработчики аппаратных средств вынуждены предоставлять полную техническую документацию для своих продуктов, чтобы значительно упростить задачу написания «драйверов». Поначалу Linux поддерживал плачевно узкий список аппаратных средств, и пользователь был вынужден осторожно выбирать компоненты ПК, чтобы получить полностью функционирующую систему.

Сегодня же, благодаря большому кругу волонтёров и энтузиастов, даже при быстром выпуске нового оборудования удаётся обеспечить Linux их поддержкой в краткие сроки. Однако некоторые компании заявляют о проблеме совместимости портативных устройств, поскольку лишь некоторые модифицированные версии дистрибутивов имеют поддержку выбранных компонентов. Чаще всего это связано с устройствами аудио, видео и беспроводной сети, или менее распространёнными, как сканер отпечатка пальца.

Структура каталогов. Традиционная структура каталогов, корни которой лежат в Unix, была раскритикована из-за её неуместности для конечного пользователя. Некоторые дистрибутивы, как GoboLinux и moonOS, придерживаются альтернативных иерархий каталогов, которые (хоть и спорно) выглядят проще для потребителя, но при этом не получили нужного одобрения.

Отдельный вопрос стоит за доступностью программного обеспечения, которое не торопятся переносить на операционную систему, которая не занимает достаточно важную позицию, чтобы акцентировать на неё внимание. Такой политики чаще всего и придерживаются разработчики ПО; действительно, нужен компетентный персонал, который будет готов взяться за перенос продукта на совершенно другую систему. В большинстве случаев эта проблема решается за счёт свободных альтернативных приложений, но порой для узкого специалиста такое тоже может не найтись.

В 2010 г. редакторы Роберт Стромейер (PC World) и Ник Фаррелл (TechEye) раскритиковали Linux из-за упущенных возможностей стать одним из важных операционных систем для персонального компьютера. Несмотря на исключительную безопасность и стабильность, а также высокую производительность и простоту пользования, сообщество Linux было одержимо идеологией свободного ПО, что, вероятно, и помешало распространению системы в потребительской сфере.

Хотя Linux не удалось завоевать достойное место на рынке ОС для персональных компьютеров, его развитие продолжается и в эту сторону. Помимо этого, он остаётся важным элементом выпуска и разработки серверов, суперкомпьютеров и мобильных устройств, а также получает всё больше внимания для использования в государственных, муниципальных и вооружённых образованиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Operating system market share // NetMarketShare. URL: https://cutt.ly/-izjJehQ (дата обращения: 08.03.2021).
2. Open Sources: Voices from the Open Source Revolution. O'Reilly Media. ISBN 978-1-56592-582-3.
3. Interview with Con Kolivas part 2: his effort to improve Linux performance on the desktop // APC. URL: https://cutt.ly/3zjZpk5 (дата обращения: 08.03.2021).
4. Is Linux For Losers? // Forbes. URL: https://www.forbes.com/2005/06/16/-linux-bsd-unix-cz_dl_0616theo.html (дата обращения: 08.03.2021).
5. Too Many Linux Distros Make For Open Source Mess // InformationWeek. URL: https://cutt.ly/3zjZNtN (дата обращения: 08.03.2021).
6. Desktop Linux: The Dream Is Dead // PC World. URL: https://www.pcworld.com/article/207999/desktop_linux_dream_is_dead.html (дата обращения: 08.03.2021).
7. Linux's chance has gone // TechEye. URL: https://cutt.ly/fzjXzVh (дата обращения: 08.03.2021).

УДК 004.032.26, 519.2, 004. 056.5

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНОГО И ВРЕДОНОСНОГО ПОВЕДЕНИЯ ПОЛЬЗОВАТЕЛЕЙ В СЕТИ

Лебедева Виктория Игоревна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: victoriya.vika.lebedeva.98@mail.ru

Цирулева Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *кибератака, аномальное и вредоносное поведение, наивный байесовский классификатор, нейронная сеть.*

Аннотация. В работе анализируется и реализуется два математических метода – наивный байесовский классификатор и нейронная сеть Кохонена – для выявления аномального и вредоносного поведения пользователей в сети.

С развитием компьютерных технологий развивались и методы электронных атак: атака «грубой силой», «Heartbleed», DoS атаки, DDoS и множество других. Согласно статистике Internet Crime Complaint Center (IC3) размер ущерба от кибератак с каждым годом растёт, и в 2019 году составил 3500 миллионов долларов, что почти на 30% больше, чем в 2018 году, и почти в 2.5 раза больше, чем в 2017 году. Так как кибератаки могут привести к потере, повреждению или порче важных данных, и, как следствие, к значительному материальному ущербу, то возрастает необходимость защиты от различного вида угроз. Для обнаружения сетевых вторжений используются специальные системы обнаружения вторжений (СОВ или intrusion detection system – IDS). Такая система собирает и анализирует данные, связанные с компьютерными сетями, на основе чего делает вывод, была ли активность вредоносной, аномальной или безвредной. Разработка методов выявления такого поведения является актуальной задачей.

Статья посвящена использованию математических методов для выявления аномального и вредоносного поведения в сети [1]. Под аномальным поведением понимается выполнение пользователем действий, не характерных для его нормального, стандартного поведения. Например, сканирование портов, проверка качества соединений (ping), определение маршрутов следования (traceroute) и др. Вредоносным поведением считается выполнение пользователем действий, направленных на получение несанкционированного доступа для изменения, удаления, копирования данных. Например, brute force (подбор паролей), использование вредоносного ПО и т.д.

Характеристики известных атак и характеристики нормального поведения будут храниться в базе данных. Все, что не относится ни к первому, ни ко второму типу, будет считать аномальным поведением. Если кто-то осуществляет новую атаку, она попадет в аномальное поведение.

Рассмотрим два математических метода классификации активности пользователей в сети: наивный байесовский классификатор (НБК) и нейронную сеть. НБК позволяет определить вероятность принадлежности объекта заранее известному классу, используя формулу Байеса [2], [3]:

$$PP(X|Y) = \frac{P(Y|X) * P(X)}{P(Y)}. \quad (1)$$

Рассмотрим классификацию действий пользователя по классам «аномальный» (A – от англ. anomalous), «вредоносный» (M – от англ. Malicious) и «безопасный» (B – от англ. Benign). Запишем функцию правдоподобия (2), которая позволит сделать вывод о том какое событие наиболее вероятно:

$$P(Q|T)\Big/P(B|T) = P(Q)\Big/P(B)\prod_{i=1}^{n} P(s_i|Q)\Big/P(s_i|B), \quad (2)$$

здесь Q – это A или M (сокращение используется, чтобы не записывать две почти одинаковые формулы); T – сетевой трафик, имеющий набор признаков $\{s_i\}_{i=1}^{n}$, включающий «аномальную» (A – от англ. anomalous), «вредоносную» (M – от англ. Malicious) и «безопасную» (B – от англ. Benign) активность. Чтобы на практике не получалось значений близких к нулю, в формуле (2) используют логарифмирование. Таким образом получаем логарифмическую функция правдоподобия (3):

$$ln\left(P(Q|T)\Big/P(B|T)\right) = \ln\frac{P(\text{Q})}{P(\text{B})} + \sum_{i=1}^{n}\ln\frac{P(s_i|Q)}{P(s_i|B)}. \quad (3)$$

Так как выборка, используемая на этапе обучения, взята с числовыми характеристиками, то алгоритм построения частотной таблицы и алгоритм распознавания методом НБК будут отличаться.

На первом этапе требуется заполнить частотную таблицу. Ниже представлен ее фрагмент.

Таблица 1

Фрагмент частотной таблицы

Частотная таблица		**Входные данные**	**Среднее значение**	**Стандартное отклонение**
Класс	Характеристика			
Anomaly	Destination Port	389.0, 389.0, 0.0, 443.0, ….	575.9	4085
	Flow Duration	1.13095465E8, 1.13473706E8, 1.19945515E8, 6.0261928E7, …	4976936.955	2.210053609087351E7
	Total Fwd Packets	48.0, 68.0, 150.0, 9.0,…	7.005	25.805709605457647
	…	…	…	…

Столбец «входные данные» заполняется из обучающей выборки. Значения выборки разделяются по классам и по характеристикам и записываются в определенную ячейку. Далее по формулам (4) и (5) для каждого набора входных данных (для каждой ячейки) вычисляются среднее и стандартное отклонение соответственно. Эти значения заносятся также в соответствующие столбцы частотной таблицы.

$$\mu = {}^{1}/_{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad (4)$$

$$\sigma = \left[{}^{1}/_{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 \right]^{0,5} \quad (5)$$

После того как вся таблица заполнена можно приступать к этапу распознавания. На стадии распознавания вероятности считаются по формуле (6), соответствующей нормальному распределению [3]:

$$P(T|A),\ P(T|M),\ P(T|B) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i), \text{ где } f(x) = {}^{1}/_{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \ (6)\ .$$

Далее полученные значения подставляются в формулу правдоподобия и выводится результат распознавания.

Второй метод основан на использовании нейронных сетей. Для решения задачи была выбрана сеть Кохонена – нейронная сеть, в основе которой лежит принцип конкуренции [4]. Эта сеть обучается без учителя, а обучение без учителя – наиболее правдоподобная модель обучения со стороны биологической правдоподобности. Сеть Кохонена – нейронная сеть, в основе которой лежит принцип конкуренции или WTA (Winner Takes All – «Победитель получает всё»). На вход нейронной сети Кохонена подаются наборы данных. По ним алгоритм меняет веса так, чтобы достаточно похожие наборы данных давали одинаковые результирующие выходы. На рисунке 1 изображена структура нейронной сети Кохонена.

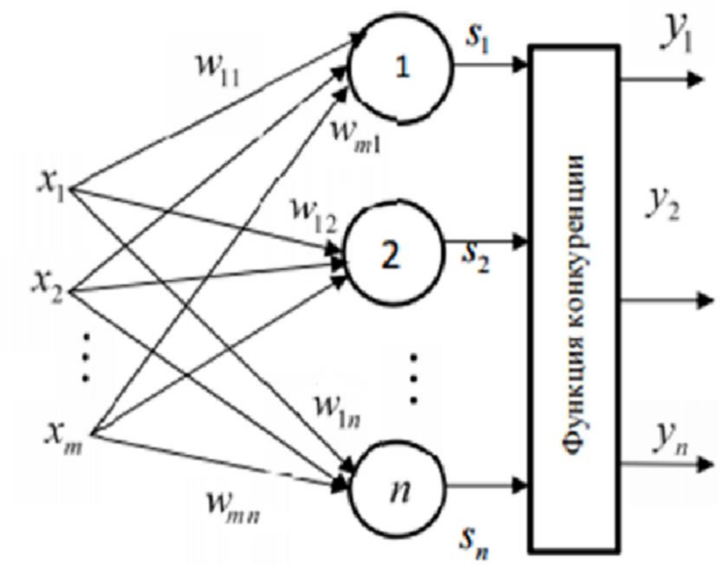


Рис 1. Схема сети Хоконена

На вход подается вектор $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, характеризующий образец. Нейроны входного слоя связаны с нейронами скрытого слоя ребрами весовыми коэффициентами w_{ij}. Количество нейронов – n должно равняться количеству классов, между которыми будут распределяться обучающая выборка и тестовая выборка. Размер входного вектора m должен быть равен количеству характеристик или признаков.

Алгоритм обучения сети Хоконена

1. Нормировка входящих данных осуществляется по формуле:
$$x_{ji} = \frac{x_{ji} - \min\limits_{i} x_{ij}}{\max\limits_{i} x_{ij} - \min\limits_{i} x_{ij}} \,. \tag{7}$$
2. Выбор значений параметров сети: скорости обучения, уменьшение скорости обучения с каждой эпохой, количества эпох обучения и количество нейронов.
3. Случайная инициализация весовых коэффициентов значениями из [0;1]:
$$0{,}5 - \frac{1}{\sqrt{M}} \le \omega_{ij} \le 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{M}} \,. \tag{8}$$
4. Подача на входы сети случайно обучающего примера текущей эпохи обучения и расчет евклидовых расстояний от входного вектора до центров всех классов:
$$R_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\tilde{x}_i - w_{ij}\right)^2} \,. \tag{9}$$
5. По наименьшему из значений Rj выбирается нейрон-победитель j, наиболее близкий по значениям к входному вектору. Для выбранного нейрона выполняется коррекция весовых коэффициентов по формуле (10)
$$w_{ij}^{(q+1)} = w_{ij}^{(q)} + \nu \left(\tilde{x}_i - w_{ij}^{(q)}\right). \tag{10}$$
6. Цикл повторяется, начиная с шага 3, до выполнения условия окончания: исчерпано заданное предельное количество эпох обучения.

Описанные методы программно реализованы на языке Kotlin. Все данные для обучения были программно преобразованы к нужному формату для каждого из методов. Также был проведен сравнительный анализ методов, который продемонстрировал плюсы и минусы каждого из методов.

Для обучения и теста использовался набор данных CIC-IDS2017 [5] (Canadian Institute for Cybersecurity Intrusion detection system или Система обнаружения вторжений Канадского Института кибербезопасности) – это набор из реалистичного фонового трафика, который представляет собой сетевые события, вызванные абстрактными пользователями, в общей сложности количество которых составляет 25 человек. Чтобы преобразовать сетевые события в набор некоторых характеристик разработчики использовали статистические метрики: минимальное, максимальное, среднее и стандартное отклонение. Характеристики включают в себя, например, такие понятия как: порт отправителя, порт получателя, продолжительность потока, кол-во переданных/пересланных пакетов, размер этих пакетов и так далее. В конце вектора указано, какому классу он принадлежит. На этапе обучения нейронной сети этот параметр отбрасывается. В НБК при заполнении частотной таблицы последний параметр используется. Приведем примеры двух векторов.

Смысловые значения параметров:
Порт отправителя, порт получателя, продолжительность потока, кол-во переданных/пересланных пакетов, размер этих пакетов и так далее:

Первый вектор:
80,5576453,3,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0.71730184,1858817.667,3218856.515,5575633,100,5576453,2788226.5,3941988.076,5575633,820,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,104,40,0.53797638,0.17932546,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,104,0,0,0,0,0,0,3,0,1,0,29200,28960,0,32,0,0,0,0,0,0,0,0,malicious

Второй вектор:
137,3378994,205,0,13760,0,68,50,67.12195122,3.886850141,0,0,0,0,4072.217944,60.66894466,16563.69608,166333.5221,1780399,1,3378994,16563.69608,166333.5221,1780399,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,3572,0,60.66894466,0,50,68,67.12621359,3.877841018,15.03765096,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,67.45365854,67.12195122,0,3572,0,0,0,0,0,0,205,13760,0,0,-1,-1,204,14,0,0,0,0,0,0,0,0,benign

Тестирование проводилось на выборках размерами 100 и 50, 600 и 300, 900 и 600 векторов обучающей и тестовой выборок соответственно. Для сети Кохонена результаты получены с одними и теми же коэффициентами, а именно: скорость обучения – 0,15, уменьшающаяся в 5 раз с каждой эпохой; количество эр обучения – 50; начальные значения весовых коэффициентов – от 0 до 0.001. Нормализация была выбрана также исходя из экспериментов. Именно эти коэффициенты показали наилучший результат в ходе многочисленных экспериментов.

В таблицах 2, 3, 4 приведены результаты работы каждого из методов на выборках различного размера.

Как видно из таблиц, с увеличением размера выборки сеть Кохонена улучшает свои результаты, чего не скажешь про метод НБК. Если и дальше увеличивать выборку, НБК очевидно будет показывать все худшие результаты. Однако видно, что для данных наборов НБК в общем проценте правильных ответов дает результаты лучше, чем сеть Кохонена.

Таблица 2

Результат работы методов на выборках: обучающая – 100 строк, тестовая – 50 строк

Метод	Процент правильных ответов	Процент ошибок	Процент ошибок 1-го рода	Процент ошибок 2-го рода
НБК	100%	0%	0%	0%
Сеть Кохонена	84%	16%	0%	16%

Немаловажным фактором является и количество ошибок первого и второго рода. Из таблиц видно, что с увеличением размера выборки результаты, полученные сетью Кохонена, улучшаются.

Таблица 3

Результат работы методов на выборках: обучающая – 600 строк, тестовая – 300 строк

Метод	Процент правильных ответов	Процент ошибок	Процент ошибок 1-го рода	Процент ошибок 2-го рода
НБК	96%	4%	4%	0%
Сеть Кохонена	88%	12%	3%	9%

Таблица 4

Результат работы методов на выборках: обучающая – 900 строк, тестовая – 600 строк

Метод	Процент правильных ответов	Процент ошибок	Процент ошибок 1-ого рода	Процент ошибок 2-ого рода
НБК	94%	6%	6%	0%
Сеть Кохонена	93%	7%	3%	4%

Для удобного тестирования методов и возможного дальнейшего использования проекта, программа была дополнена web-интерфейсом (с использованием html, jsp).

Существенной характеристикой алгоритма является скорость его выполнения. Самая сложная часть в обоих реализованных алгоритмах – этап обучения. Поэтому определялось время выполнения именно этого этапа. Измерения проводились на самой большой обучающей выборке – 900 примеров. Для НБК время выполнения алгоритма составило 30 миллисекунд, а для нейронной сети – 801 миллисекунду. Результат демонстрирует преимущество метода НБК в скорости по сравнению с сетью Кохонена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Браницкий, И. В. Котенко. Анализ и классификация методов обнаружения сетевых атак. [Электронный ресурс] Режим доступа: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/323382/1/2-s2.0-85010755781.pdf (дата обращения: 18.10.2020).

2. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей: учебник. М.: Наука 1982.

3. Use Naive Bayes Algorithm for Categorical and Numerical data classification [Электронный ресурс]. Режим обращения: https://medium.com/analytics-vidhya/use-naive-bayes-algorithm-for-categorical-and-numerical-data-classification-935d90ab273f (дата обращения: 29.10.2020).

4. Нейронные сети Кохонена [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://morphs.ru/posts/2016/11/09/nn-kokhonena (дата обращения: 27.10.2020.

5. CIC-IDS2017 [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://www.unb.ca/cic/datasets/ids-2017.html (дата обращения: 29.10.2020).

УДК 004.921

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА СРЕДСТВАМИ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ (MS EXCEL) И РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ PYTHON

Лобанов Александр Валентинович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Тишина Елена Валерьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Голубев Александр Анатольевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *электронные таблицы, MS Excel, Python, комплексные числа.*

Аннотация. В статье говорится о возможностях использования электронных таблиц (MS Excel) и языка программирования *Python* при изучении курса «Комплексный анализ».

Комплексные числа редко рассматриваются в современных школьных учебниках. При этом изучение комплексных чисел и работа с ними способствуют развитию у учащихся абстрактного мышления, позволяют более полно представить структуру всех изученных ранее числовых множеств и операций с ними.

Множество комплексных чисел принципиально отличается от всех числовых систем, являющихся подсистемами действительных чисел: комплексные числа нельзя изобразить на одной координатной прямой с другими числами, их нельзя упорядочить. Кроме того, «Комплексный анализ» – это тот раздел математики, который объединяет в себе алгебру, геометрию и тригонометрию, показывает возможность привлечения смежных областей науки для решения конкретной задачи, реализуя тем самым интеграционные связи математики – как ближние, так и дальние [1, 5 – 7].

В данной статье рассмотрим технику практических вычислений и визуализации их результатов. Такой подход позволяет продемонстрировать возможности изучаемого материала и при этом закрепить методы решения задач классического математического курса [2 – 4].

Пример 1. Найти вещественную и мнимые части, модуль и главное значение аргумента комплексного числа, заданного в алгебраической форме: $z = 1 + i\sqrt{3}$. Изобразить на комплексной плоскости **C**.

Решение.

1) Вещественная часть числа равна $a = \operatorname{Re} z = 1$.
   Мнимая часть числа равна $b = \operatorname{Im} z = \sqrt{3}$.
2) Модуль числа равен $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

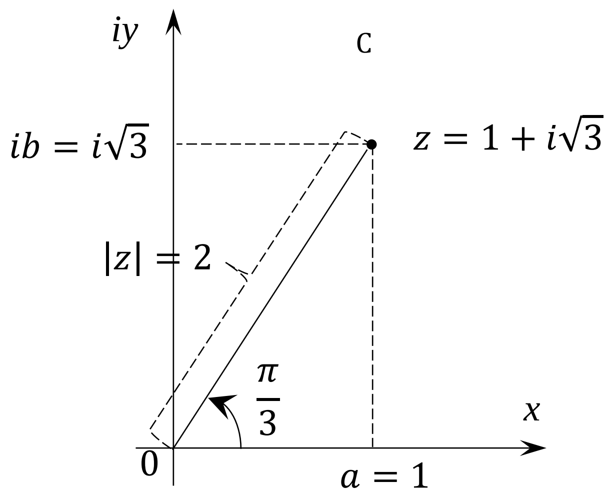
3) Для нахождения главного значения аргумента числа воспользуемся формулой

$$arg\,z = \arg(a+bi) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a>0, \quad b \geq 0, \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a<0, \quad b \in \mathrm{R}, \\ 2\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}, & a>0, \quad b<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & a = 0, \quad b > 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a = 0, \quad b < 0, \end{cases}$$

не определён, если $z = 0$. Так как $a = 1 > 0$ и $b = \sqrt{3} \geq 0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

4) Изобразим число $z = 1 + i\sqrt{3}$ на комплексной плоскости $\mathbf{C}$.



В качестве самостоятельного исследования студентам можно предложить реализовать данные вычисления и построения с привлечением возможностей электронных таблиц MS Excel.

Комплексное число в алгебраической форме $z = a + i\,b$ задаётся упорядоченной парой действительных чисел a и b в ячейках C7 и E7 (рис.1). На рисунке в выделенных цветом ячейках вводятся действительные и мнимые части a и b. Затем происходит подсчёт модуля по формуле =КОРЕНЬ(B9^2+B10^2) и главного значения аргумента заданного комплексного числа с использованием условного оператора по формуле =ЕСЛИ(И(C7>0; E7>=0); ATAN(E7/C7); ЕСЛИ(C7<0; ПИ()+ATAN(E7/C7); ЕСЛИ(И(C7>0; E7<0); 2*ПИ()+ATAN(E7/C7); ЕСЛИ(И(C7=0; E7>0); ПИ()/2; ЕСЛИ(И(C7=0; E7<0); 3*ПИ()/2; ЕСЛИ(И(C7=0; E7=0); "не определен, т.к. a=0 и b=0")))))). Здесь же приведены формулы модуля и главного значения аргумента комплексного числа.

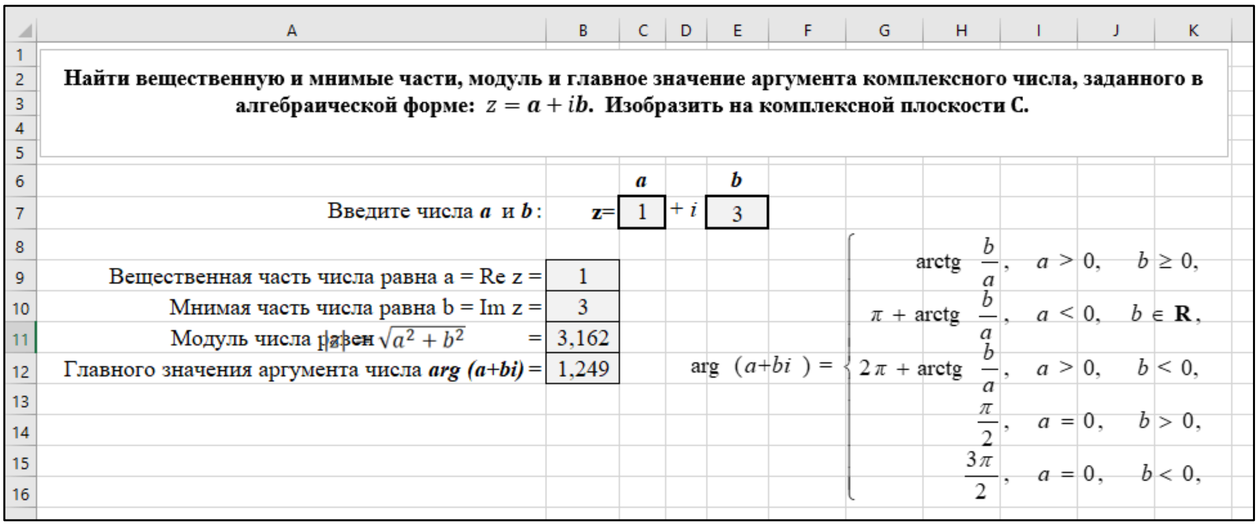


Рис. 1

Заметим, что вместо a и b могут вводиться как непосредственно вещественные числа, так и результат вычисления встроенных функций Excel через знак равно. Например аргумент $a = \sin(0.1 + \sqrt{3})$ можно задать функцией =SIN(0,1+КОРЕНЬ(3)), а аргумент $b = -\frac{\cos\sqrt{2}}{\sqrt[3]{8}}$ функцией = – COS(КОРЕНЬ(2))/(8^(1/3)).

Геометрическое представление

Если на плоскости по оси абсцисс расположить действительную часть, а по оси ординат – мнимую, то комплексному числу будет соответствовать точка с декартовыми координатами a и b (или её радиус-вектор, что тоже самое), а модуль и аргумент будут полярными координатами этой точки. Такое геометрическое представление можно проиллюстрировать в Excel (рис. 2).

.

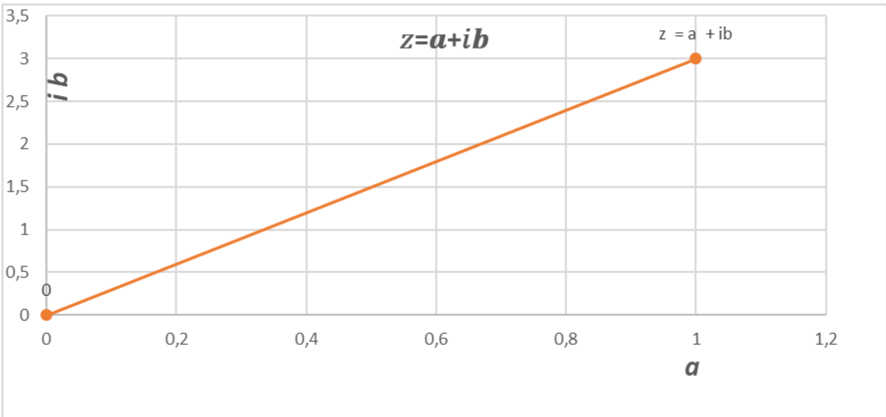


Рис. 2

В качестве альтернативного исследования студентам можно предложить реализовать данные вычисления написанием кода на языке программирования *Python*. Богатый набор библиотек и модулей является одной из привлекательных сторон *Python*. *Matplotlib* - самая популярная библиотека *Python* для построения графиков и диаграмм, используется для визуализации научных расчётов.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import cmath

# -------------------- Задать комплексное число ------------------
zReal = 1                  #float(input("Re")) #
zImag = math.sqrt(3)       #float(input("Im")) #
# ------------------------------------------------------------

z = complex(zReal, zImag)

print("Комплексное число, заданное в алгебраической форме: z =", z)
print("\tВещественная часть числа равна: ", z.real)
print("\tМнимая часть числа равна: ", z.imag)
print("\tМодуль числа равен: ", abs(z))
print("\tГлавное значение аргумента комплексного числа: ", cmath.phase(z))

zr = []
zi = []
zr.append(0); zr.append(z.real)
zr.append(z.real); zr.append(z.real)
zr.append(0); zr.append(z.real)
zi.append(0); zi.append(z.imag)
zi.append(0); zi.append(z.imag)
zi.append(z.imag); zi.append(z.imag)

fig, ax = plt.subplots()
ax.spines['left'].set_position('zero')
ax.spines['bottom'].set_position('zero')
ax.set_xlabel("Re", labelpad=0, fontsize=18, fontname='serif', color="blue")
ax.set_ylabel("Im", labelpad=0, fontsize=18, fontname='serif', color="blue")
plt.axis('equal')

# Определить внешний вид линий основной и вспомогательной сетки:
ax.minorticks_on()
ax.grid(which='major', color = 'k', linewidth = 0.5)
ax.grid(which='minor', color = 'k', linestyle = ':',linewidth = 0.3)

fig.set_figwidth(5)
fig.set_figheight(5)

ax.plot(zr[0:2], zi[0:2], color = "blue", linewidth = 2, label = str(z))
ax.plot(zr[2:], zi[2:], color = "magenta", linewidth = 1, linestyle = ':')
ax.legend(fontsize=12)

plt.scatter(zr, zi, color = "blue")

t = np.arange(min(0, cmath.phase(z)), max(0, cmath.phase(z)), 0.01)   # угол t
r = max(abs(z.real), abs(z.imag)) / 4
```

plt.plot(r*np.cos(t), r*np.sin(t), linewidth = 3) # *главное знач арг комплексного числа* plt.show()

На рисунке 3 и 4 приведены результаты работы программы с визуализацией в виде графика.

Рис. 3

Рис. 4

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жмурова И. Ю., Полякова Т. С., Лялина Е. В. Интеграционные связи и их оценка учителями математики и бакалаврами педагогико-математического образования // Методический поиск: проблемы и решения. – 2015. – № 1 (18). – С. 66–72.

2. Лобанов А.В., Тишина Е.В., СОВРЕМЕННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПАКЕТЫ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ В сборнике: Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2020. С. 124-129.

3. Тишина Е.В., Лобанов А.В., ЦИФРОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ В ОБРАЗОВАНИИ, В сборнике: Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2020. С. 205-211.

4. Голубев А.А., Лобанов А.В., Тишина Е.В., ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ (MS EXCEL) РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ PASCALABC.NET ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В сборнике: Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации. Материалы Всероссийской научно-практической конференции. 2020. С. 61-66.

5. Голубев А.А. Практический курс комплексного анализа / А.А. Голубев, С.Ю. Граф, В.Г. Шеретов. – Тверь, 2003. – 94 с.

6. Голубев А.А. Конформные отображения / А.А. Голубев, А.С. Неугодников. – Тверь, 2010. – 72 с.

7. Голубев А.А. Основные принципы конформных отображений / А.А. Голубев, А.С. Неугодников. – Тверь, 2011. – 128 с.

УДК 37.013

К ВОПРОСУ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ НА НЕМАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТЕТАХ

Медянова Галина Алексеевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: g.a.medyanova@gmail.com

Столярова Галина Николаевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: stolyarova.gn@tversu.net

Ключевые слова: *коника, точка, прямая, метод, компетентностный подход.*

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые возможности повышения эффективности обучения математике.

В последнее время появилось немало публикаций, посвященных вопросам реализации компетентстного подхода в обучении. К сожалению, большинство из них содержит только общие рассуждения на данную тему с утверждениями безусловной эффективности такого подхода, и очень редко описывается, тем более анализируется, практический опыт, хотя здесь профессиональные секреты особенно не желательны.

Отличительной чертой российской системы образования всегда было приоритетное внимание к математике. У российской системы образования математические корни. Будучи универсальным языком описания мира, математика являлась и является мощным средством побуждения к самостоятельной познавательной активности, способствуя формированию личности, готовой к использованию математических знаний, умений и навыков, опыта деятельности для решения и профессиональных задач. Имея неисчерпаемо богатое содержание, математика располагает к подвижной мыслительной деятельности. Однако традиционный подход к обучению не реализует значительно потенциал математики, предъявляя ее обучаемым как абстрактную теорию, созданную еще в 16-19 вв. и никак не связанную с их будущей профессией.

Компетентностный подход требует значительных изменений в характере деятельности преподавателя, в организации учебного процесса и управлении им. Во-первых, нужна более сильная мотивация обучаемых к предмету. Где именно могут понадобиться знания математики в будущей профессиональной деятельности? В частности, студентам биологического факультета следует рассказывать, что без математических знаний невозможно прогнозировать и регулировать рост популяций, оценивать скорости поглощения питательных веществ из почв, изучать такие индивидуальные характеристики человека, как геном и транскриптом, осуществлять исследования, связанные с ранней диагностикой заболеваний.

Во-вторых, нужна переориентация на активные методы обучения. При пассивном восприятии материала, эффективность усвоения невелика. Для присвоения знаний необходима самостоятельная учебная деятельность, необходим переход от изучения предметных знаний к освоению способов деятельности. В этом видится путь к формированию универсальных компетенций.

Использование активных методов обучения позволит раскрыть творческие способности обучающихся. Конечно, в любом случае обучение и профессиональная подготовка должны строиться на прочной основе знаний. Только тогда можно учебно-познавательной деятельности придать творческий характер.

Безусловно, выбор метода должен быть соотнесен и с уровнем знаний, и с интеллектуальными возможностями обучающихся.

Некоторые активные методы обучения.

1. Экспериментальная работа, в ходе которой выполняются задания:
   a) опровергнуть ложное утверждение;
   b) построить объект с заданными свойствами;
   c) установить существование объекта, удовлетворяющего данным требованиям;
   d) сравнить эффективность методов;
   e) осуществить вычислительный эксперимент;
2. Проектный метод, заключающийся в индивидуальной или групповой разработке проекта, связанного
   a) с применением изученного материала к решению задач практического характера;
   b) с самостоятельным изучением объемного и сложного для студента теоретического материала с рассмотрением готовых примеров его использования;
   c) с интересующими студента разделами математики;
3. Проблемный метод.

Проблемное обучение в высшей школе имеет свою специфику, связанную с целями и задачами профессионального обучения. К традиционным функциям задач – овладению системой математических умений и навыков, формированию математической культуры, научного мышления, активизации самостоятельной познавательной деятельности – добавляются функции носителей информации, т.е. теоретические положения сообщаются и усваиваются через задачи.

Приведем набор задач, которые можно использовать для реализации каждого из методов, а также для создания и разрешения проблемных ситуаций.

1. Является ли условие $\begin{vmatrix} x1 & y1 & 1 \\ x2 & y2 & 1 \\ x3 & y3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$ достаточным для того, чтобы точки A1(x1;y1), A2(x2;y2) и A3(x3;y3) не лежали на одной прямой?
2. Как выяснить, существует ли окружность, проходящая через три данные точки?
3. Найти уравнение окружности, на которой лежат три данные точки. (Задача сводится к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными с помощью правила Крамера).

4. Какие возможны ситуации при дополнении трех точек, не лежащих на одной прямой, четвертой точкой?

5. При каких условиях она попадет на окружность, проходящую через них?

6. Исследовать возможность пяти точек лежать на одной и той же конике.

1) Выбрать 5 точек, любые четыре из которых не лежат на одной прямой.

2) Найти условия, при которых они лежат на одной и той же кривой второго порядка.

Возьмем 5 точек (2;0), (1;1), (0;1), (-1;0), (-1;-1), причем, никакие три из них не лежат на одной прямой.

Исследуем возможность их принадлежности одной и той же конике. Общий вид уравнения второй степени относительно текущих координат.

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

A, B, C, D, E, F – действительные числа, причем A, B, C одновременно не равны нулю. Если F не 0, то можно делением на F свести уравнение к виду: $ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey = -1$.

Подставляя координаты точек в уравнение, получаем систему пяти линейных уравнений с пятью неизвестными

$$\text{a, b, c, d, e: } \begin{cases} 4a + 4d = -1 \\ a + 2b + c + 2d + 2d = -1 \\ c + 2e = -1 \\ a - 2d = -1 \\ a + 2b + c - 2d - 2e = -1 \end{cases}$$

Решая эту систему методом Гаусса, получаем a=-0.5, b=0, c=-0.5, d=0.25, e=-0.25.

Тогда получится уравнение $-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + 1 = 0$ или $(x - \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{2}$, т.е. окружность с центром O1$\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ и $R = \sqrt{\frac{5}{2}}$.

7. Сформулировать гипотезу на основании проведенных исследований: через 5 точек плоскости, любые четыре из которых не лежат на одной прямой, можно провести единственную конику.

8. Продолжить исследование для шести точек. Выяснить, что они не всегда располагаются на конике, и тем более, не всегда на одном эллипсе.

9. Есть интересные случаи расположения шести точек на одном эллипсе.

Гипотезы Л.А. Штейнгарца:

☑ Гипотеза 1. Три медианы произвольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры этих окружностей лежат на некотором эллипсе.

☑ Гипотеза 2. Три высоты произвольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры этих окружностей лежат на некотором эллипсе.

☑ Гипотеза 3. Три биссектрисы произвольного треугольника разбивают его на шесть треугольников. В эти треугольники вписаны окружности. Тогда центры этих окружностей лежат на некотором эллипсе.

Все гипотезы получены путем компьютерного моделирования.

Гипотезы 1 и 2 не подтвердились. Для опровержения использовались чертежи, выполненные на основе динамических геометрических программ The Geometer's Sketchpad (Живая геометрия) и Geogebra.

Гипотеза 3 доказана с помощью обратной теоремы Паскаля и барицентрических координат. Есть и второй способ доказательства – геометрический (более простой).

Приведенный цикл заданий содержит возможность развития идей и формулирования новых гипотез. Это позволяет обучающимся взглянуть на математику, как на живую науку, требующую изобретательности, воображения, умения проводить аналогии и обобщать, переносить опыт из одной области в другую, умения находить связи и порядок в окружающем мире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Акопян А.В., Заславский А.А., Геометрические свойства кривых II порядка. М.: МЦНМО. – 2007.

2. Д.С. Григорьев, А.Г. Мякишев, «Математическое образование» № 67. – 2019.

3. Л.А. Штейнгарц «Математическое образование» № 62 2012.

4. О.Р. Каюмов, К.Е. Каширина, «Математическое образование» № 75. – 2015.

УДК 378.147.88

ОБ ОПЫТЕ ИНТЕРНЕТ–ОЛИМПИАД В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Миловидов Алексей Евгеньевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Шестакова Маргарита Аркадьевна
Тверской государственный технический университет, г. Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова: *интернет-олимпиада, линейная алгебра, умения, знания, владения.*

Аннотация. В работе представлены результаты анализа подготовки студентов к интернет-олимпиаде, выявлены типовые ошибки и трудности, возникающие при решении задач, указаны точки роста для креативного мышления.

Студенты направления «строительство» Тверского государственного технического университета ежегодно принимают участие в Международной интернет-олимпиаде по различным предметам. Роль интернет-олимпиад в процессе формирования современных специалистов трудно переоценить. Конкурсные мероприятия, в частности предметные интернет-олимпиады один из стимулов, способствующих, самосовершенствованию студентов. Они стимулируют углубленное изучение предмета, развитие межпредметных связей [1], формируют активную жизненную позицию, позволяют выявить наиболее способных студентов [2].

Низкий начальный уровень студентов, которых необходимо дотянуть хотя бы до среднего уровня, приводит к тому, что мы вкладываем в них зачастую большую часть времени. Если учесть огромное сокращение числа аудиторных часов, то для стимулирования углубленного изучения предмета, подготовка к участию в олимпиадах является одним из способов работы с сильными студентами. Решение олимпиадных задач формирует навык применять полученные на лекциях и практических занятиях знания и умения для решения нестандартных задач; умения использовать знания, полученные при изучении одного модуля для решения задач не только другого модуля, но и использовать их при решении задач по другим предметам.

Задачи интернет-олимпиады по математике охватывают все модули, поэтому, как правило, в ней принимают участие студенты второго года обучения, но подготовка к ней начинается с первых дней обучения. В дополнительных занятиях принимают участие студенты разных курсов, и при решении ряда задач виден разный подход к анализу условия, а значит и к построению математических моделей, что благоприятно влияет на процесс обучения. Прочитав задачу, студенту необходимо понять, из какого модуля данная задача, какие знания, умения и навыки можно использовать для построения математической модели. Если студент, не сможет это сделать, значит, он не сможет решить задачу. Следовательно, студентам старших курсов постоянно приходится повторять пройденные темы, что способствует более устойчивому их усвоению. Первокурсники видят необходимость прочного усвоения материала, необходимость систематической работы, это, несомненно, приводит к глубокому знанию предмета. При подготовке к олимпиаде студенты приобретают навыки коллективного поиска математических моделей, их оценку с целью выработки оптимального решения.

На строительном факультете изучение математики начинается с модуля «Линейная алгебра». В первом туре Открытой международной студенческой интернет-олимпиады по дисциплине «Математика» участникам предлагается две задачи данного раздела. Олимпиадные задачи составлены в рамках компетентностного подхода. Задания данного модуля соответствуют повышенному уровню компетентности и предполагают знание свойств определителей, методов решения линейных уравнений, умение вычислять определители, решать линейные уравнения, владеть анализом математических методов, использованных при решении конкретной задачи.

Проведем анализ задач различного уровня модуля «Линейная алгебра», рассматриваемых при подготовке к олимпиаде.

1. Сумма корней уравнения $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2013-x \end{vmatrix} = 0$ равна … [3].

Данная задача интересна тем, что необходимо работать с определителем n-го порядка. На занятиях, в силу очень ограниченного числа часов, студенты работают с определителями не более 5-го порядка, поэтому более высокая размерность определителя вызывает у них обоснованное затруднение, что неоднократно было замечено при проведении консультаций.

При решении данной задачи студенту необходимо выбрать рациональный метод решения – приведение матрицы к треугольному виду. В противном случае он или не решит задачу, либо потратит много времени, а в силу его ограниченности не сможет успешно решить другие задачи. Для достижения цели необходимо проявить умение вычислять определитель, используя сопутствующие знания свойств определителя, навыки работы со строчками и столбцами определителя. Только проявив должные знания и умения, сумев получить уравнение, в левой части которого 2013 линейных множителей, а в правой 0, можно перейти к следующему этапу решения – нахождению корней уравнения. Если студент не знает условие, при котором произведение равно нулю, то вряд ли сможет решить данное уравнение, знает – найдёт корни, и перейдёт к следующему этапу решения – вычислению суммы корней. На данном этапе необходимо проявить навык анализа полученных результатов. Проявит навык – увидит, что сумма корней уравнения – это сумма арифметической прогрессии и перейдет к заключительному этапу решения, на котором необходимо проявить знание формулы суммы арифметической прогрессии и умение, ее использовать. Если студент выполнил всё без ошибок, он получит ответ на поставленный вопрос.

2. Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 9 & x & x \end{vmatrix}$, где $\Delta > 0$.

Если выполняется равенство

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 9 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 0 & 9 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 9 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 9 & x & x \end{vmatrix} \cdot \left(\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 1 & 9 & 0 & 0 & 9 & x \\ 1 & 2 & 9 & 9 & 5 & x \end{vmatrix} + 1 \right) + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 0 & 9 & 0 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 5 & 9 \\ 2 & 0 & 0 & 9 & x & x \end{vmatrix} = 81,$$

то Δ равно … [3].

Эта задача позволяет оценить сформированность индикатора «умения» – умение анализировать условия задачи, выбирать метод решения, составлять математическую модель, анализировать полученный результат, а значит и формирование компетенции ОПК-1, содержание которой определяется как способность: использовать основные законы естественнонаучных дисциплин, методы математического анализа и математического (компьютерного) моделирования, теоретического и экспериментального исследования в профессиональной деятельности.

Построение математической модели предполагает введение переменной и составление уравнения по условию задачи. В данной задаче это вызывает у студентов наибольшее затруднение, так как они обычно сразу не видят связи между матрицами из условия задачи. Это означает, что студенты не проявили сопутствующее знание определения транспонированной матрицы или связи её определителя с определителем исходной матрицы, или свойств определителя. Последнее означает, что на занятиях необходимо акцентировать на это внимание.

3. Пусть параметр a такой, что система уравнений

$$\begin{cases} a \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Тогда значение выражения $6 - 4a$ не может быть равно … [3].

Как показала практика, затруднение вызывает присутствие параметра a, что влияет на первоначальный выбор метода решения. Имеет место два основных метода решения: 1 – решить систему, а затем проанализировать решение, 2 – применить теорему о единственности решения. Это способствует формированию умения выбирать, к какому учебному модулю относится задача и поиску оптимального алгоритма решения.

Правильный выбор учебного модуля при условии проявления знаний теоремы о единственности решения системы неоднородных линейных уравнений при совпадении числа уравнений с числом неизвестных и умение вычислять определитель третьего порядка позволяет решить задачу с наименьшими затратами времени. Это на олимпиаде играет огромную роль.

4. Известно, что система линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = -3 \\ 7x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - 3x_5 = 9 \\ -x_1 + 12x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 3 \\ 8x_1 - 7x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 2x_5 = -6 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + x_4 - 4x_5 = 12 \end{cases}$$

имеет единственное решение. Значение x_5 равно … [3].

Предложенная задача имеет целью проверить умение анализировать исходные данные, позволяющие выбрать оптимальный метод решения. Число неизвестных наталкивает на применение нерационального в данном случае решения системы методом Гаусса, и только владение методом анализа приводит к использованию метода Крамера. Последнее возможно, если студенты заметят равенство числа уравнений с числом неизвестных, а, главное, пропорциональность коэффициентов при неизвестной x_5 свободным членам. В этом состоит «подводный камень» данной задачи. На последнем шаге необходимо проявить знания и умения решать систему линейных уравнений методом Крамера.

5. Пусть квадратная матрица A такая, что $A + A^T = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$. Тогда сумма всех элементов матрицы A равна … [3].

Простая задача. Затруднение при разборе вызвало составление математической модели, основанное на знании определения равенства матриц.

На дополнительных занятиях разбираются и более сложные задачи, вызывающие у студентов наибольшие затруднения. К таким заданиям можно отнести задачи с элементами доказательства; задачи, где необходимо активизировать и сопоставить систему опорных понятий различных разделов математики, контекстные задачи. Такие задания требуют глубокого понимания предмета, нестандартного подхода к решению, формируют способности к инновационной деятельности.

Подготовку к олимпиаде по математике можно рассматривать и как элемент подготовки к научно-исследовательской работе, следовательно, с целью повышения качества такой работы ее необходимо включать в штатную нагрузку и вводить такую работу на младших курсах.

Многолетний опыт работы показывает, что у ряда студентов есть огромное желание участвовать в олимпиаде, и они много занимаются дополнительно, но в последние годы всё больше задач в силу объективных причин становятся для них реально непосильными. Студенты строительного факультета участвуют в олимпиаде по математике по «Специализированному (с углубленным изучением дисциплины)» профилю. На самом деле число часов по математике у студентов данного направления недостаточно, а качество математической подготовки абитуриентов снизилось. На первом курсе 2 часа лекций и 2 часа практических занятий, на втором курсе лекционных часов ещё меньше – 1 час. Учебных недель в семестре 15, а не как в других вузах по 17 или 18 недель в семестре. Это, несомненно, накладывает отпечаток на уровень подготовки студентов, поэтому при пересмотре учебных планов желательно перераспределить академическую нагрузку с целью увеличения числа аудиторных занятий по математике и вернуть в штатную нагрузку проверку расчетно-графических и контрольных работ. Это позволит своевременно устранять пробелы в знаниях и умениях, больше рассматривать задач, использующих элементы доказательства.

В заключении еще раз хочется отметить важность систематической работы, которая в прошлом году была нарушена в связи с вынужденным переходом весной на дистанционное обучение. Как показал сравнительный анализ результатов этого года с результатами прошлых лет, это обосновано привело к снижению качества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белова Г.П., Шестакова М.А. Интернет-олимпиада – элемент развития межпредметных связей //Актуальные проблемы качества образования в высшей школе, ч1 Сб.: материалы докладов заочной научно-практ. конф. Тверь: ТвГТУ, 2017. – С. 111 – 115.

2. Алексеева Е.Г., Алексеев А.А. Олимпиады по сопротивлению материалов как инструмент формирования способностей к инновационной инженерной деятельности// Актуальные проблемы качества образования в высшей школе, ч1 Сб.: материалы докладов заочной научно-практ. конф. Тверь: ТвГТУ, 2017. – С. 3 – 7.

3. Колчев А.А., Наводнов В.Г. и др. Открытая Международная студенческая Интернет-олимпиада по математике: учебное пособие// Йошкар-Ола: ООО ИПФ «Стринг», 2020. 220 с.

УДК 57.087

3D-ВИЗУАЛИЗАЦИЯ КВАНТОВОГО ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА МГНОВЕННОГО СЕРДЕЧНОГО РИТМА ПО ДАННЫМ СУТОЧНОГО ХОЛТЕРОВСКОГО МОНИТОРИРОВАНИЯ

Михеев Сергей Александрович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Mikheev.SA@tversu.ru

Цветков Виктор Павлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.VP@tversu.ru

Цветков Илья Викторович,
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.iv@tversu.ru

Ключевые слова: *квантовое фазовое пространство, визуализация, 3D-гистограмма, данные холтеровского мониторирования. сердечный ритм.*

Аннотация. В данной работе показана эффективность 3D-визуализации квантового фазового пространства мгновенного сердечного ритма для анализа больших данных RR-интервалов.

Введение

Наиболее полную информацию о состоянии сердечно-сосудистой системы человека дает анализ массива кардиоинтервалов (*RR*-интервалов) на основе данных суточного холтеровского мониторирования (ХМ). По этим данным с помощью комплекса программ, разработанного авторами, мы построили квантовое фазовое пространство S_q мгновенного сердечного ритма (МСР), определяемого набором квантовых чисел k_i, m_i, n_i (i=1,2,…,N) и постоянной квантования h. Дискретные значения частот МСР y_i и скорости изменения частот v_i определяются формулами $y_i=k_ih$, $v_i=m_ih$, а числа заполнения n_i являются количеством повторения пар квантовых чисел (k_i, m_i).

3D-визуализация S_q представляет собой 3D-гистограмму в виде цветных прямоугольных параллелепипедов с квадратными основаниями размера h, координатами их центров y_i, v_i и высотой n_i. Выбор цвета параллелепипедов определяется числами заполнения n_i. В нашем случае используется количество цветов J=7.

Проекции трехмерной гистограммы на декартовы координатные плоскости yv, yn и vn дают двумерную визуализацию S_q, частотного спектра и спектра скоростей изменения частот МСР, соответственно.

В докладе построены 3D-визуализации S_q для нескольких пациентов отделения функциональной диагностики Тверской областной клинической больницы (ТвОКБ), полученные с помощью системы суточного мониторирования ЭКГ «Миокард-Холтер 2», г. Саров. Они представлены на рисунках и напоминают фантастические горные пейзажи, возвышающиеся над поверхностью светло-серо-голубой воды и покрытые зонами разноцветной растительности в зависимости от значений численности населения. Их внешний вид адекватно описывает структуру сердечных ритмов обследованных пациентов.

3D-визуализация квантового фазового пространства мгновенного сердечного ритма

3D-визуализация данных ХМ позволяет представить цифровую информацию о большом количестве *RR*-интервалов в трехмерном пространстве и, следовательно, в информативной форме для анализа.

Построим 3D-гистограмму S_q как наглядное представление ее распределения по состояниям n_i, y_i, v_i. Проекция на плоскость yv 3D-гистограммы S_q дает 2D-визуализацию S_q, а ее проекции на плоскости yn и vn представляют частотный спектр и спектр скоростей изменения частоты МСР, соответственно. Это важная информация о характере динамики состояния МСР.

3D-гистограмму S_q можно представить в виде множества цветных прямоугольных параллелепипедов в R^3 с высотами n_i, квадратными основа-ниями стороны h и координатами их центров y_i, v_i. Соответствующие цвета прямоугольным параллелепипедам присваиваются согласно формуле (1):

$$((j-1)/J)^{\gamma} < n_i/n_m \leq (j/J)^{\gamma},\ j = 1,2,\dots,J, \quad (1)$$

где n_m максимальное значение чисел заполнения n_i, J количество используемых цветов. Положим γ=1.6, J=7.

На рис. 1, 2 представлены 3D-гистограммы S_q для двух пациентов (p = 1, 2 – номер пациента) ТвОКБ, построенные с использованием системы Maple на основе данных суточного ХМ. Плоскости v = ±15 делят S_q на три области $|v|$<15, v<−15, v>15 [3]. Первая соответствует регулярному МСР, а вторая и третья соответствуют областям скачков (катастроф) МСР.

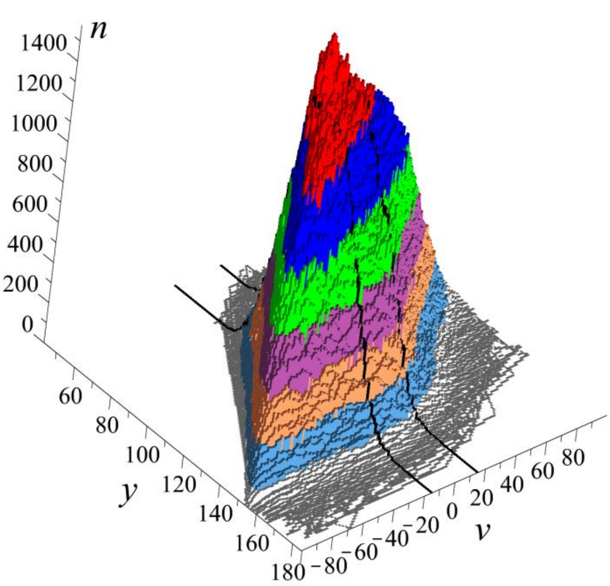


Рис. 1. 3D-гистограмма S_q пациента p=1; диагноз: дилатационная кардиомиопатия

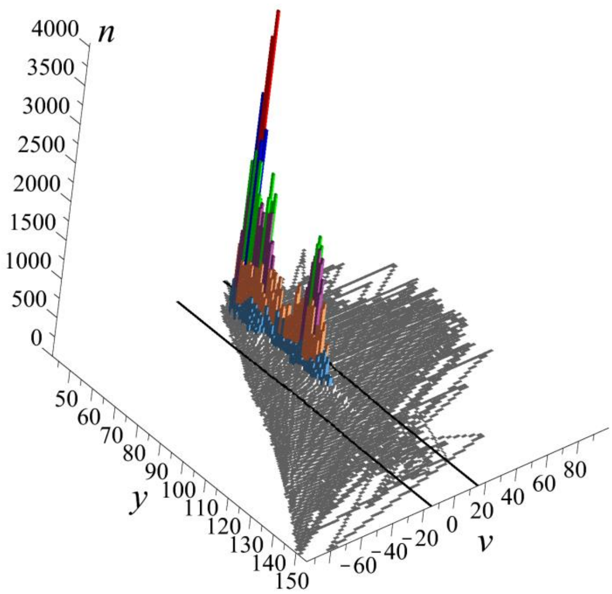


Рис. 2. 3D-гистограмма S_q пациента p=1; диагноз: в пределах нормы

Во всех случаях цветные 3D-гистограммы S_q напоминают фантастические горные пейзажи, возвышающиеся над светло-сине-серой водной поверхностью и покрытые разноцветными участками с растительностью в зависимости от значений чисел заполнения. Светло-сине-серые ячейки с низкими значениями чисел заполнения занимают максимальную площадь, на порядок превышающую остальные площади. Ячейки красного цвета с максимальными значениями чисел заполнения образуют вершины пиков S_q. На вершинах и вблизи их состояния МСР находятся в течение продолжительных периодов времени по сравнению с остальными состояниями и образуют дискретный набор выделенных состояний. В большинстве случаев для этих состояний значение параметра v или равно нулю, или близко к нему, то есть в них частота сердечного ритма наиболее стабильна. Природа таких состояний в рамках физиологии в настоящее время не ясна.

Наши результаты вполне согласуются с утверждением в [4], что с помощью 3D-методов возможно осуществлять не только диагностику заболеваний, но и прогнозировать неблагоприятные события.

На рис. 3, 4 представлены 2D-визуализации S_q двух рассмотренных пациентов ТвОКБ, построенные по данным суточного ХМ.

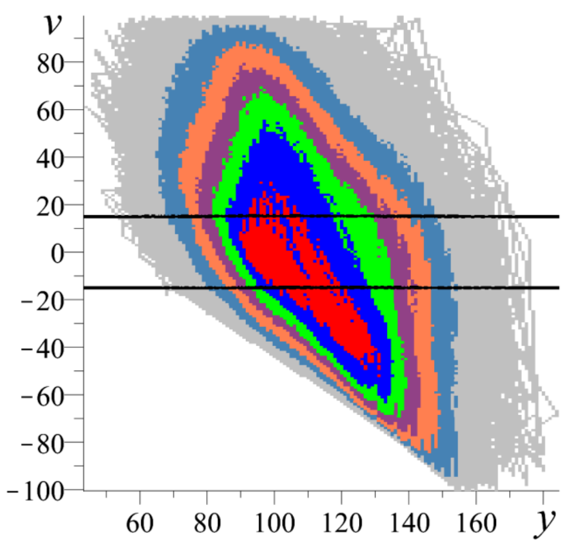


Рис. 3. 2D-визуализация S_q
для пациента p=1

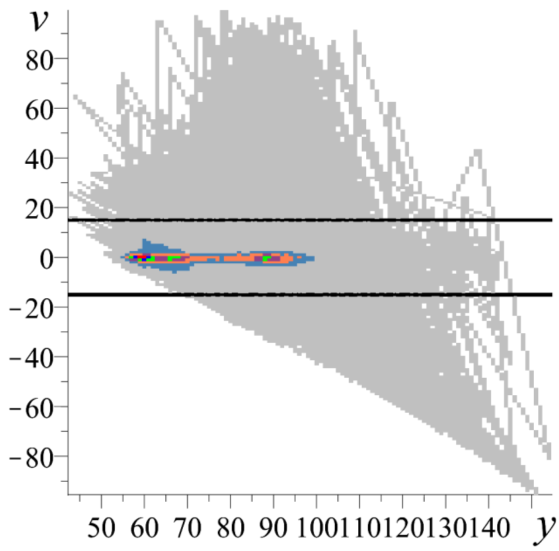


Рис. 4. 2D-визуализация S_q
для пациента p=2

Проекции S_q на плоскость yn, представленные на рис. 5, 6, дают подробную информацию о ненормированном частотном спектре МСР.

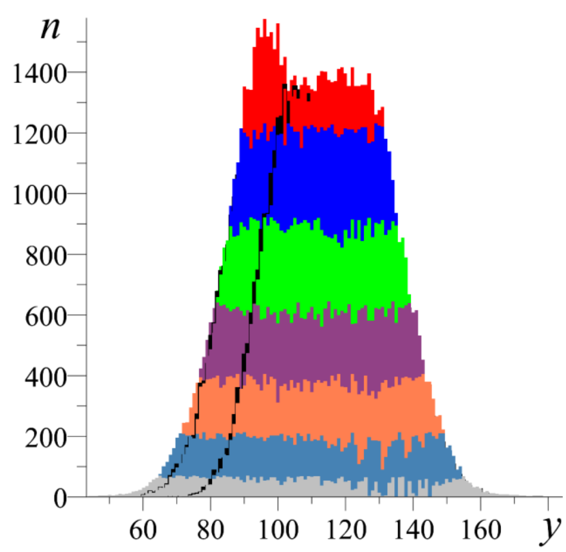


Рис. 5. Проекция S_q
на плоскость yn
для пациента p=1

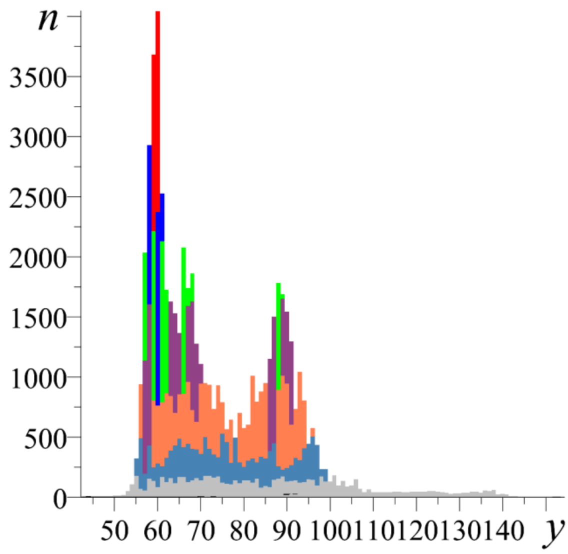


Рис. 6. Проекция S_q
на плоскость yn
для пациента p=2

Проекции S_q на плоскость vn, представленные на рис. 7, 8, дают подробную информацию о ненормализованном спектре скоростей изменения частот МСР.

Наш подход к анализу сердечного ритма существенно отличается от других, поскольку он рассматривает совместно частотный спектр и спектр скоростей изменения частот МСР, отражающий важную информацию об *RR*-интервалах (рис. 5-8).

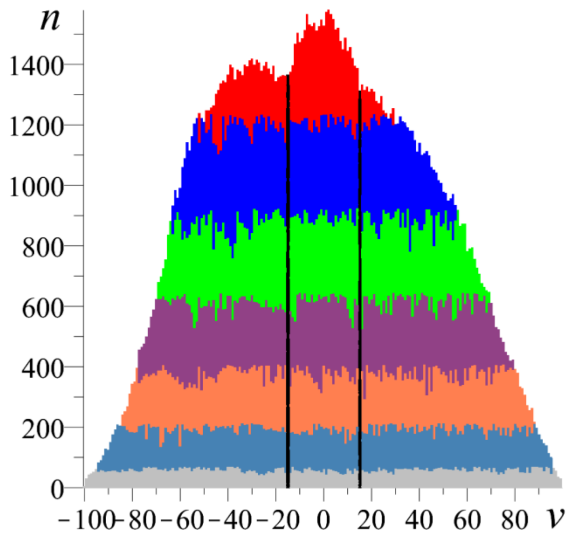


Рис. 7. Проекция S_q
на плоскость vn
для пациента p=1

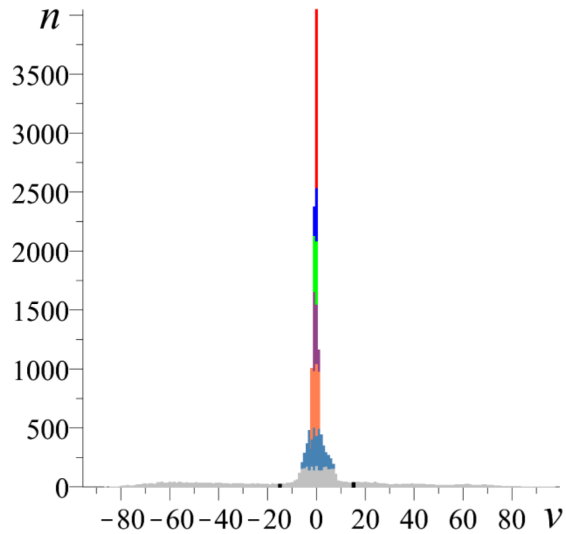


Рис. 8. Проекция S_q
на плоскость vn
для пациента p=2

В этом докладе показано, что 2D и 3D-визуализации S_q позволяют представить цифровую информацию по данным ХМ в удобном для наблюдения и анализа виде.

3D-гистограммы S_q представлены в виде множества цветных прямоугольных параллелепипедов в R^3 с высотами n_i, квадратными основаниями стороны h и координатами их центров y_i, v_i. Соответствующие цвета прямоугольным параллелепипедам присваиваются согласно формуле (1).

Проекция на плоскость yv 3D-гистограммы S_q дает 2D-визуализацию S_q, а ее проекции на плоскости yn и vn представляют частотный спектр и спектр скоростей изменения частот МСР.

3D-визуализации S_q открывают новые перспективные возможности для их использования в кардиодиагностике и телемедицине.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Баевский Р.М. *Прогнозирование состояний на грани нормы и патологии*. М.: Медицина, 1979, 205 с.

2. Mikheev S.A., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Visualisation of the quantum phase space of instantaneous heart rhythm. *CEUR Workshop Proceedings*. 2018. V. 2267. pp. 359-363. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2267/359-363-paper-68.pdf.

3. Tsvetkov V.P., Mikheyev S.A., Tsvetkov I.V. Fractal phase space and fractal entropy of instantaneous cardiac rhythm. *Chaos, Solitons and Fractals*. 2018. V. 108. pp. 71-76. DOI: 10.1016/j.chaos.2018.01.030.

4. Kisohara M., Stein P., Yoshida Y., et al. Multi-scale heart rate dynamics detected by phase-rectified signal averaging predicts mortality after acute myocardial infarction. Europace 2013; 15:437–443.

УДК 372.851

ПРОГРАММНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Могилевский Илья Шулимович
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: ilia.mogilevski@gmail.com

Целикова Юлия Александровна
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: czelikova.yulya00@mail.ru

Ключевые слова: *программные средства, построение графиков.*

Аннотация. В работе описан опыт применения двух свободно распространяемых программ для построения графиков.

Умение представлять и воспринимать информацию в графической форме стало в течение последних полутора столетий элементом общей культуры. Как и другим культурным навыкам строить графики учат в школе, в основном, в курсе математики. Опыт общения со школьными учителями математики и студентами математического факультета позволяет заключить, что умение строить графики элементарных функций оставляет желать лучшего. Видимо отсутствие навыков по этой части вызывает боязнь использования графиков даже при решении тех задач, где без них трудно обойтись.

Тема «Функции и графики» входит в программу обучения математике в средней школе и достаточно подробно изложена как в учебниках [1], [2], так и в пособиях по элементарной математике [3], [4]. В учебнике [1] рассказывается, в частности, как строить график дробно-линейной функции; в учебнике [2] детально описано построение графиков тригонометрических функций.

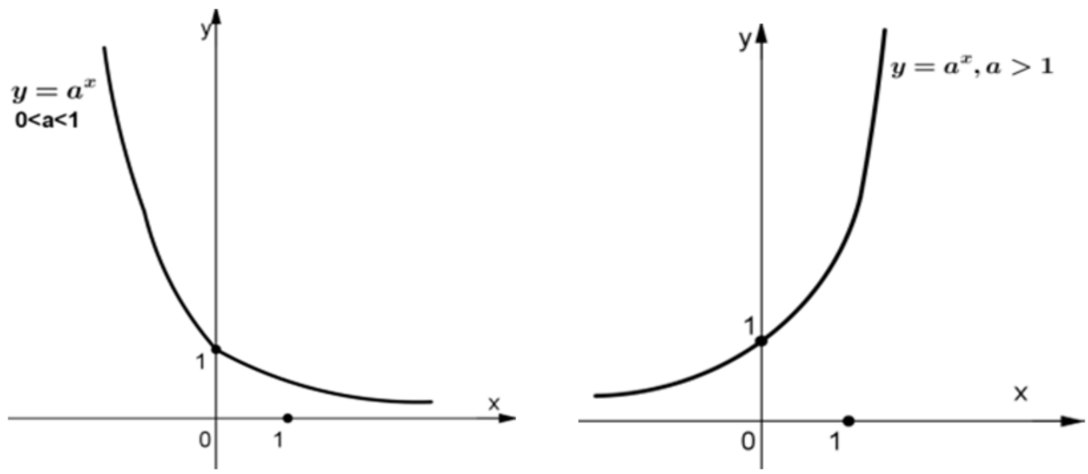
В предисловии пособия [4] говорится, что «научиться строить графики по книге нелегко: читателю не хватает доски, на которой во время урока или лекции преподаватель постепенно строит график». В наше время эффективными помощниками преподавателю и ученику могут выступать разнообразные программные средства построения графиков.

Имеется немало программных сред, позволяющих строить самые разнообразные графики. Прежде всего укажем на мощные системы Matlab и Maple. Эти средства требуют больших ресурсов компьютера и лицензии на них стоят достаточно дорого. Поэтому использовать их в школе затруднительно, да и работе с ними надо специально учиться.

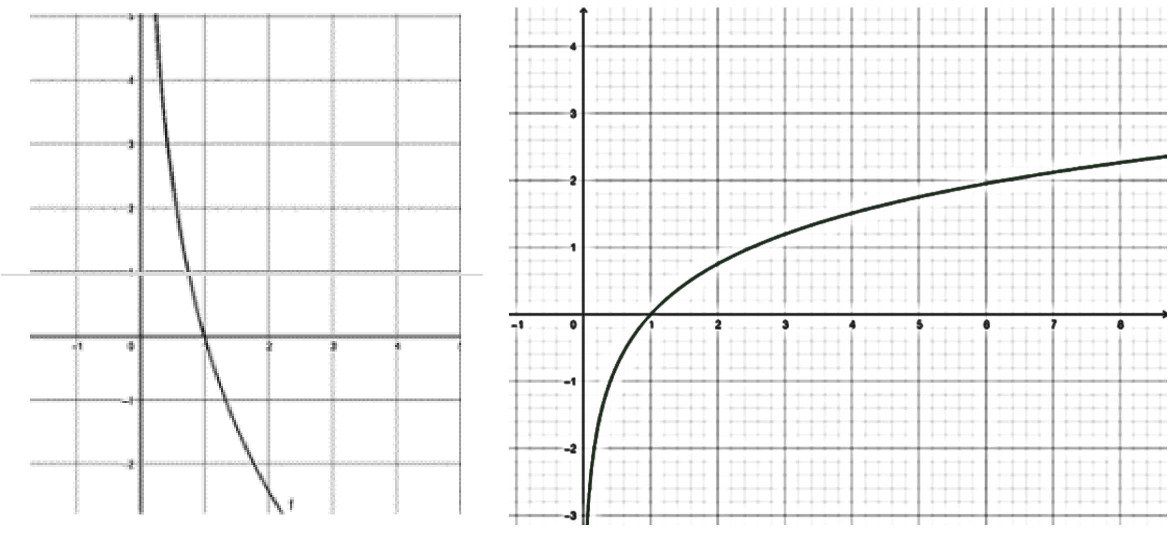
В настоящее время имеется несколько программных систем, находящихся в свободном доступе и пригодных для использования в школах. Мы расскажем о двух таких системах, протестированных на математическом факультете ТвГУ.

Первая из этих систем – GeoGebra была первоначально создана австрийским профессором Маркусом Хогениартером (Marcus Hohenwarter) в 2002 году. Система была быстро развита усилиями международной команды программистов и теперь имеет интерфейс на нескольких десятков языков, в том числе и на русском. Опыт применения GeoGebra в школе описан в [5]. Интерактивное учебное пособие по этому программному продукту на английском языке доступно в [6]. GeoGebra позволяет строить графики в декартовых и полярных координатах, находить корни функций, их максимумы и минимумы. Система может функционировать на компьютерах и на планшетах и требует несколько десятков мегабайт памяти.

Ниже приводятся несколько примеров графиков, построенных в GeoGebra. На рисунке изображены графики показательных функций с основаниями меньше и больше единицы.

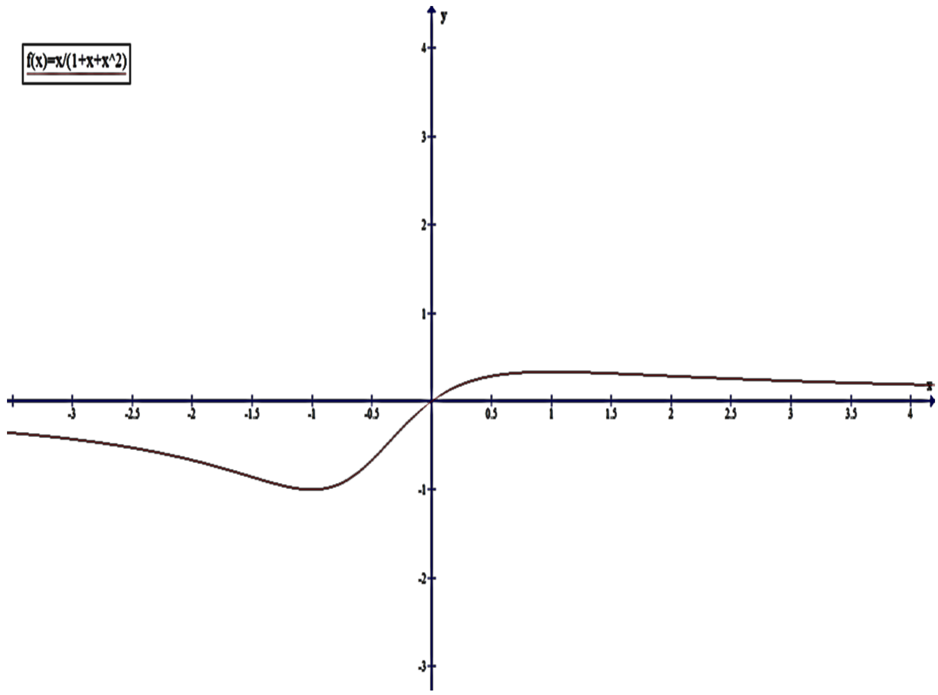


С помощью построенных в GeoGebra графиков можно просто и наглядно решить следующую задачу. Выясните какое из чисел больше $a = \log_{\frac{3}{4}} \frac{2}{5}$ или $b = \log_{\frac{5}{2}} \frac{3}{4}$. Построим графики функций $y = \log_{\frac{3}{4}} x$, $y = \log_{\frac{5}{2}} x$. На графиках видно, что $a > 0, b < 0$. Поэтому $a > b$.

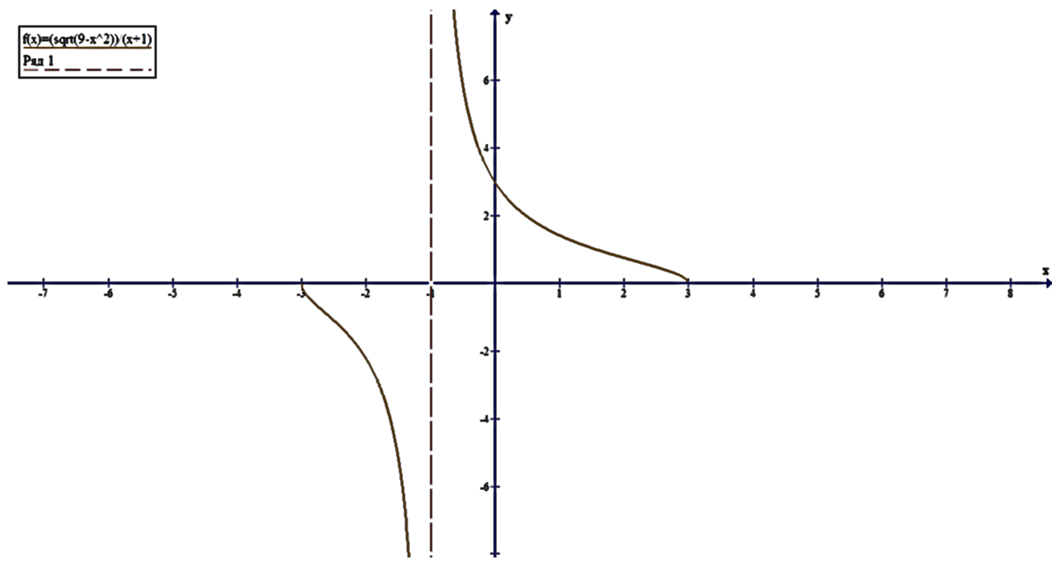


Другая свободно распространяемая программа для построения графиков функций – Graph. Эта программа создана в Дании в 2001 году. С тех пор она существенно усовершенствована и продолжает совершенствоваться. Официальное подробное описание программы на английском языке содержится в [7]. Программа работает под управлением операционной системы Windows.

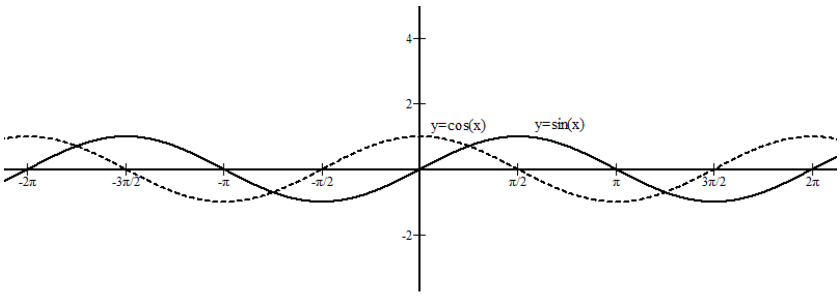
Программа Graph позволяет рисовать графики с асимптотами. На рисунке представлен график функции $y = \frac{x}{x^2+x+1}$.



Программа позволяет изображать и вертикальные асимптоты. На следующем рисунке приведен график функции $y = \frac{\sqrt{9-x^2}}{1+x}$.



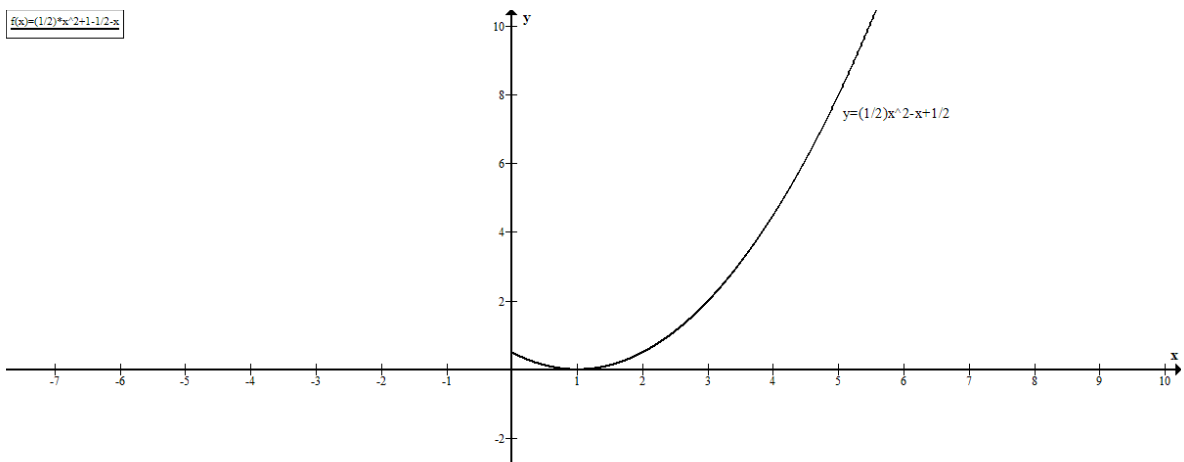
Возможно построение кривых линиями разных типов – сплошными, пунктирными и т.д. Это обстоятельство позволяет продемонстрировать связь формул приведения для тригонометрических функций и правила сдвига по аргументу. На следующем рисунке изображены графики функций $y = \sin x$ (сплошная линия) и $y = \sin\left(x + {}^{\pi}/_{2}\right) = \cos x$ (пунктирная линия). Вторая линия получается из первой сдвигом на ${}^{\pi}/_{2}$ влево.



Программа Graph полезна и в высшей школе. При доказательстве неравенства Юнга

$$|ab| \le \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q} \ \forall\, a, b \in R,\ p, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

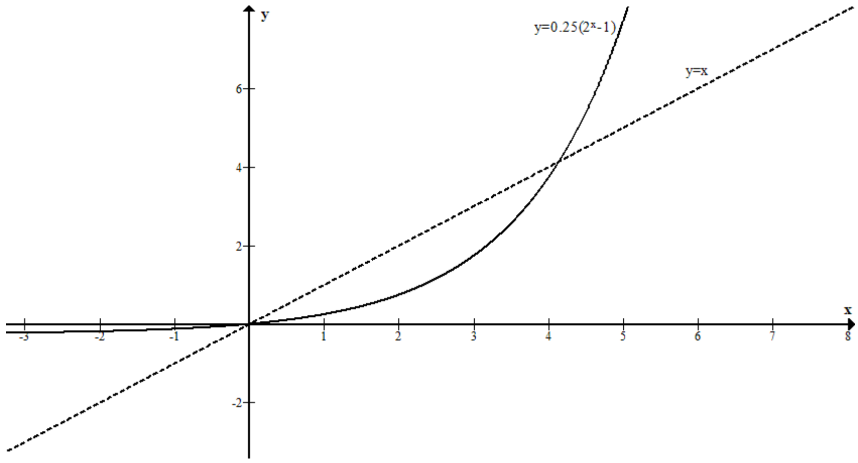
используется тот факт, что функция $f(x) = \frac{1}{p}x^p + \frac{1}{q} - x$ принимает неотрицательные значения при $x \ge 0$. Это хорошо видно на графике, построенном для $p = q = 2$.



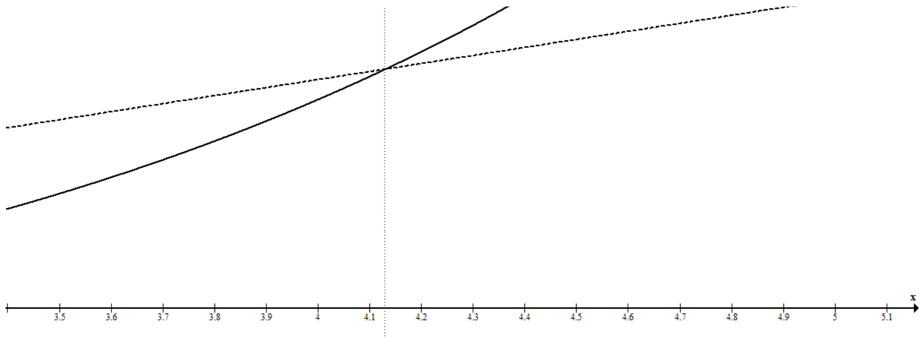
Программа Graph полезна и при решении показательных уравнений. Пусть, например, требуется найти решения уравнения

$$x = 0.25 \cdot (2^x - 1).$$

Нетрудно заметить, что имеется два решения $x_1 = 0$ и $2 < x_2 < 5$. График позволяет найти хорошее приближение к x_2 и затем уточнять его тем или иным способом. На рисунке пунктирной линией изображен график функции $y = x$, а сплошной линией график функции $y = 0.25 \cdot (2^x - 1)$.



Программа позволяет увеличить изображение в окрестности точки x_2 и тем самым получить более точное приближение к решению уравнения.



Приведенные в статье примеры показывают, что программы GeoGebra и Graph могут применяться в школе при изучении свойств элементарных функций, а также для решения разного рода задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И., Суворова Б.А. Алгебра, 9 класс. – 21 изд. – М.: Просвещение, 2014. – 271 с.

2. Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. Алгебра и начала математического анализа, 10 класс. – 8 изд. – М.: Просвещение, 2009. – 430 с.

3. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. – М.: Наука, 1968. – 96 с.

4. Болтянский В.Г., Сидоров Ю.В., Шабунин М.И. Лекции и задачи по элементарной математике. – М.: Наука, 1974. – 576 с.

5. Ларин С.В. Компьютерная анимация в среде GeoGebra на уроках математики. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. – 79 с.

6. GeoGebra Math Apps. [Электронный ресурс]. https://www.geogebra.org/ (последнее обращение 04.03.21 г.).

7. Graph. Version 4.4. [Электронный ресурс]. https://www.padowan.dk/bin/-Graph-English.pdf (последнее обращение 04.03.21 г.).

УДК 004.9

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММ НА ЯЗЫКЕ PYTHON В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Наумова Алиса Ивановна
МОУ "Тверской лицей", г. Тверь
E-mail: a_naumova_46@mail.ru

Ключевые слова: *интерес, программирование, язык PYTHON.*

Аннотация. Язык Python (Пайтон) – это *профессиональный язык программирования*, который активно используется в таких компаниях, как Яндекс и Google. На нём разрабатываются сайты и веб-сервисы, он применяется для составления небольших программ, расширяющих возможности других программ [1].

Изучение языка программирования PYTHON начинается в 10 классе физико-математического профиля. Для наиболее заинтересованных учащихся старшей школы дополнительно проводятся занятия по программе *элективного курса*.

В рамках проведения внеурочной проектной деятельности под руководством педагога ученик 11 физико-математического класса Ватьков Антон написал научную работу на тему: "Решение задач на языке программирования PYTHON (ПАЙТОН)", в которой представлены *различные* методы работы со списками с использованием основных управляющих конструкций языка.

Работа состоит из двух частей: *описательной* и *проектной*. В первой части даны история языка, описание типов и структур данных, возможности, стандартная библиотека. Во второй - приведён пример быстрой сортировки массивов Джона Фон Неймана, основанной на процедуре слияния двух заранее отсортированных массивов (разработка алгоритма *(рис. 1.)* и двух вариантов программы (скрипта) с последующей обработкой данных на компьютере).

A					**B**			**C**							
6	34	67	82	98	44	55	78	6							
34	67	82	98		44	55	78	6	34						
67	82	98			44	55	78	6	34	44					
67	82	98			55	78		6	34	44	55				
67	82	98			78			6	34	44	55	67			
82	98				78			6	34	44	55	67	78		
82	98							6	34	44	55	67	78	82	98

Рис. 1. Сортировка слиянием

Для понимания внутренней логики *программы* основные операторы в исходных файлах содержат соответствующие *комментарии* на русском языке.

При проектировании рассмотрены варианты: *ввод данных с клавиатуры* и заполнение списков *случайными числами* с использованием функции randint, которая импортируется из модуля random.

Задание № 1

Количество элементов двух исходных массивов (N = 5, M = 3): ввод данных с клавиатуры.

Фрагмент программы по заполнению массивов (A и B)

```
#Сортировка Джона фон Неймана (процедура слияния)
#Количество элементов исходных массивов N и M
#Заполнение массивов с клавиатуры
print("Заполнить и отсортировать два массива,")
print("сформировать и отсортировать третий массив C")
print()
print("Введите количество элементов для массива A:")
N = int(input())
print("Введите количество элементов для массива B:")
M = int(input())
print("Заполнение массива(списка) A целыми числами")
A = [int(input()) for i in range(N)]
print("Заполнение массива(списка) B целыми числами")
B = [int(input()) for i in range(M)]
```

Фрагмент программы по формированию массива C

```
C = []                  #объявить массив C
i = j = 0       #инициализация параметров цикла
print()                     #пустая строка
#формирование и сортировка массива C слиянием
while ((i < N) and (j < M)):
   if A[i] <= B[j]:         #условие отбора
      C.append(A[i])        #запись в конец массива C
      i += 1
   else:
      C.append(B[j])        #запись в конец массива C
      j += 1
C = C + A[i:]   #добавить в массив C оставшуюся часть A
```

Задание № 2

Количество элементов двух исходных массивов (N = 8): заполнить массивы *случайными* числами с использованием функции randint, которая импортируется из модуля random.

Фрагмент программы по заполнению массивов А и В

```
#Сортировка Джона фон Неймана
#(Процедура слияния двух отсортированных массивов)
from random import randint      #подключить функцию random
print("Заполнить и отсортировать два массива,")
print("сформировать и отсортировать третий массив")
print()
print("Введите кол-во элементов для каждого массива:")
N = int(input())
print("Заполнение массива(списка) A целыми числами")
A = [randint(100, 150) for x in range(N)]
print(A)   #вывод на экран выбранных элементов массива А
print("Заполнение массива(списка) B целыми числами")
B = [randint(100, 150) for x in range(N)]
print(B)   #вывод на экран выбранных элементов массива В
```

КОМПЬЮТЕРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ (ВЫПОЛНЕНИЕ ПРОГРАММЫ)

Тест для решения задания № 1

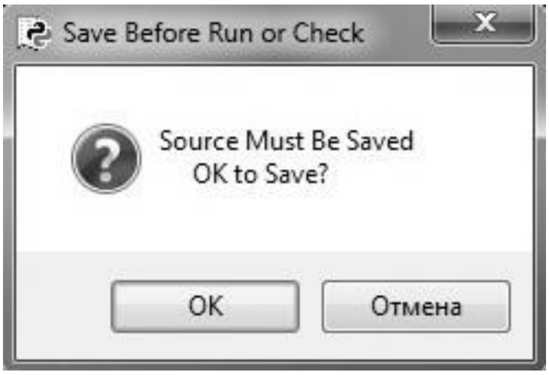
Количество элементов для массива А	5
Количество элементов для массива В	3
Числовые значения элементов массива А	6 34 67 82 98
Числовые значения элементов массива В	78 44 55
Отсортированный массив А	
6 34 67 82 98	
Отсортированный массив В	
44 55 78	
Сформированный и отсортированный массив С	
6 34 44 55 67 78 82 98	

Тест для решения задания № 2

Количество элементов каждого из двух массивов равно 8.

Компьютерный эксперимент

1. Войти в программную среду Python, выполнив команды File – New File.
2. В текстовом редакторе набрать исходный модуль программы.
3. Запустить программу на выполнение, выполнив команды: Run – Run Module (F5).
4. В появившемся окне сохранить модуль, указав *имя* программы и *место* сохранения:



5. Ввести исходные данные и получить результат [2].

Выполнение программы по тесту № 1

```
  Заполнить два целочисленных массива, отсортировать их по возрастанию,
сформировать третий массив с последующей его сортировкой по возрастанию

Введите количество элементов для массива A:
5
Введите количество элементов для массива B:
3
Заполнение массива(списка) A целыми числами
82
34
98
6
67
Заполнение массива(списка) B целыми числами
78
44
55
Отсортированный массив A:
6 34 67 82 98
Отсортированный массив B:
44 55 78
Отсортированный массив C:
6 34 44 55 67 78 82 98
Программа завершена
```

Выполнение EXE файла по тесту № 2

```
C:\Windows\py.exe

 Заполнить два целочисленных массива, отсортировать их по возрастанию,
сформироваить третий массив с последующей его сортировкой по возрастанию

Введите количество элементов для каждого массива:
6
Заполнение массива(списка) A целыми числами
[148, 129, 142, 149, 143, 146]
Заполнение массива(списка) B целыми числами
[148, 117, 106, 119, 101, 132]
Отсортированный массив A:
129 142 143 146 148 149
Отсортированный массив B:
101 106 117 119 132 148
Отсортированный массив C:
101 106 117 119 129 132 142 143 146 148 148 149
Программа завершена
Для выхода из программы нажмите <ENTER>_
```

Выводы

Python (Пайтон) – *современный развивающийся язык*, изучение которого начинается в *профильных классах* общеобразовательных учреждений на примере *использования его основных конструкций*, что достаточно *наглядно* показано в данной работе.

В основе проекта положен один из способов *практической* подготовки учащихся старших классов составлять и отлаживать программы, написанные на *современном профессиональном* языке программирования, что полностью соответствует современным стандартам образования ФГОС.

По итогам I этапа XI Международного конкурса научно-исследовательских и творческих работ учащихся (Москва, 20.12.20) научная работа награждена Дипломом Победителя II степени.

По итогам II этапа XI Международного конкурса (видеоконференции) Ватьков А. награждён Дипломом лауреата (Москва, 05.02.21).

Конкурсная работа и видеовыступление опубликованы на сайте https://school-science.ru/11/4/46160.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Python - Википедия - https://ru.wikipedia.org/wiki/Python
2. Информатика. Базовый и углублённый уровни: учебник для 10 класса, часть 2 / К.Ю. Поляков, Е.А. Еремин. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2019.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Операционная система Windows
2. Текстовый процессор MS Word
3. Среда программирования Python – 3.8.0

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЭКСПОНЕНТОЙ ЦЕНТРА БОЛЬШЕ ДВУХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПРЕДСТАВИТЬ КАК ОБЪЕДИНЕНИЕ ДВУХ СИММЕТРИЧНЫХ ПОДМНОЖЕСТВ

Некрасов Константин Геннадьевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: constantin.nekrassov@yandex.ru

***Ключевые слова**: конечная группа, симметричная пара, симметричное подмножество.*

Аннотация. Пару (a, b) элементов конечной группы G будем называть симметричной, если выполняется хотя бы одно из соотношений: ab = ba или $a^2 = b^2$. Подмножество M группы G будем называть симметричным, если для любых a ∈ M, b ∈ M пара (a, b) симметрична. Неабелевы группы, являющиеся одним симметричным множеством, классифицированы в [1]. В этой статье дается полное описание некоммутативных групп, показатель центра которых строго больше двух, представимых как объединение двух симметричных подмножеств.

Введение

Рассмотрение 2-элементных подмножеств $M = \{a,b\}$ конечной группы, в которых число различных элементов множества M^2 меньше 4, восходит к Григорию Абелевичу Фрейману, в течение многих лет работавшему профессором Тверского (Калининского) государственного университета. В работе [1] Г. А. Фрейман классифицировал, в частности, конечные группы, в которых любое 2-элементное подмножество $M = \{a,b\}$ удовлетворяет условию $|M^2| > 4$. Для краткости мы называем такие 2-элементные подмножества симметричными парами. Этот термин уже использовался ранее автором в статьях [2] и [3], в которых изучались группы с ограничениями на отношение числа несимметричных пар к числу всех пар. В данной заметке рассматривается следующее ослабление условия Г. А. Фреймана: предположим, что группу можно представить в виде объединения двух подмножеств, для каждого из которых имеется симметричность любого 2-элементного подмножества. Оказывается, что и в этом случае возможно классифицировать группы с точностью до изоморфизма, что и будет сделано ниже для тех групп, показатель центра которых строго больше двух.

1. Система обозначений. Предварительные факты

Для группы G порядка $|G|$ через G' мы обозначаем ее коммутант, $Z(G)$ – центр, $\Phi(G)$ – подгруппу Фраттини, $exp(G)$ – показатель G. Для элемента $a \in G$ порядка $|a|$ через $C_H(a)$ будем обозначать его централизатор в подгруппе H группы G.

Для групп G_1 и G_2 через $G_1 \times G_2$ обозначаем их прямое произведение, а через $G_1 * G_2$ – центральное произведение. Далее, через C_n мы будем обозначать циклическую группу порядка n, D_n – группу диэдра порядка $2n$, Q – группу кватернионов порядка 8. Кроме того, мы используем следующие специальные обозначения: $\sqrt{a} = \sqrt{a}(G) = \{y \in G \mid y^2 = a\}$, $|M|$ – число элементов множества M, $p(G)$ – число элементов a группы G, для которых $\sqrt{a} \neq \varnothing$, $N(G)$ – наименьшее число симметричных подмножеств в разбиении группы G.

Предложение 1. *Если H – подгруппа группы G, то $N(H) \leqslant N(G)$.*

Доказательство очевидно, ибо разбиение на симметричные подмножества группы G индуцирует разбиение на ее подмножестве H.

Предложение 2. *Если $p(Z(G)) > 2$ и $N(G) \leqslant 2$, то G коммутативна.*

Доказательство. Предположим, от противного, что G неабелева. Так как $p(Q \times C_2 \times \ldots \times C_2) = 2$, то $N(G) \neq 1$, и из условия имеем $N(G) = 2$. По условию, в $Z(G)$ имеются по крайней мере три различных элемента, являющихся квадратами. Поэтому существуют по меньшей мере два неинволютивных элемента $\alpha \in Z(G)$ и $\beta \in Z(G)$ такие, что $\alpha^2 \neq \beta^2$. Пусть $G = M_1 \cup M_2$ – разбиение группы G на симметричные подмножества. Считаем, что $|M_1| > |M_2|$. Если все элементы из M_1 попарно перестановочны, то $\langle M_1 \rangle$ коммутативна, т.е. G коммутативна, а это противоречит предположению. Следовательно, существуют такие $x \in M_1$, $y \in M_1$, что $xy \neq yx$. В силу симметричности пары (x,y) имеем $x^2 = y^2$. Тогда ясно, что обе пары $(x,\alpha y)$ и $(x,\beta y)$ несимметричны, так что $\alpha y \in M_2$ и $\beta y \in M_2$. Кроме того, пара $(\alpha x,y)$ также несимметрична, и поэтому $\alpha x \in M_2$. Теперь ясно, что пара $(\alpha x,\beta y)$ элементов из M_2 несимметрична. Пришли к противоречию.

Замечание 3. Очевидно, что для конечной группы G с условием $p(G) = 2$ выполняется неравенство $N(G) \leqslant 2$. С другой стороны, легко видеть, что $p(G) = 2$ тогда и только тогда, когда $|\Phi(G)| = 2$, причем последние группы известны [4]. Именно, G является одним из следующих центральных произведений:

(1) $D_4 * \ldots * D_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$;

(2) $Q * D_4 * \ldots * D_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$;

(3) $C_4 * D_4 * \ldots * D_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$,

в которых все центральные множители имеют пересечение порядка 2.

2. Группы, показатель центра которых больше 2

Предложение 4. *Пусть G – конечная группа, для которой $N(G) = 2$. Если $exp(Z(G)) > 2$, то G изоморфна одной из групп $Q \times C_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$.*

Доказательство. Из условия $exp(Z(G)) > 2$ следует, что $p(Z(G)) \geqslant 2$, а из предложения 2 имеем $p(Z(G)) \leqslant 2$. Следовательно, $p(Z(G)) = 2$. Последнее равносильно тому, что $Z(G)$ изоморфен одной из групп $C_4 \times C_2 \times \ldots \times C_2$. Зафиксируем элемент $x_0 \in Z(G)$ порядка 4.

Разобьем группу G на два симметричных подмножества: $G = M_1 \cup M_2$ и положим $L_i = M_i \setminus Z(G)$. Тогда $G = (Z(G) \cup L_1) \cup L_2$ – тоже разбиение группы G на симметричные подмножества. Для определенности будем считать, что

$|L_1| \geqslant |L_2|$. Тогда $|Z(G) \cup L_1| > |G| / 2$, и поэтому $\langle Z(G) \cup L_1 \rangle = G$. В силу того, что $L_1 \cap Z(G) = \varnothing$, заключаем, что для любого $x \in L_1$ найдется такой $t \in L_1$, что $xt \neq tx$.

Покажем, что $L_2 = x_0L_1$. В силу $|L_1| \geqslant |L_2|$ достаточно доказать вложение $x_0L_1 \subseteq L_2$. От противного, пусть $x_0L_1 \nsubseteq L_2$ и x – такой элемент из L_1, что $x_0x \notin L_2$. Так как $x_0x \notin Z(G)$, то $x_0x \in L_1$. Как уже отмечалось, $L_1 \nsubseteq C_G(x)$. Пусть $t \in L_1$ такой, что $xt \neq tx$. Тогда $t^2 = x^2$, откуда имеем $(x_0x)^2 = t^2$. В то же время, очевидно, $(x_0x)t \neq t(x_0x)$. Другими словами, пара $(x_0x,t) \in L_1 \times L_1$ несимметрична. Противоречие. Итак, $L_2 = x_0L_1$. В частности, $|L_2| = |L_1|$.

Покажем, что $L_1 \nsubseteq \sqrt{e} \cup \sqrt{x_0^2}$. В противном случае в силу $L_2 = x_0L_1$ имели бы вложение $L_1 \cup L_2 \subseteq \sqrt{e} \cup \sqrt{x_0^2}$. Тогда гомоморфные образы L_1 и L_2 в факторгруппе $G / \langle x_0^2 \rangle$ состоят только из инволюций. Так как G неабелева, то $[G : Z(G)] \geqslant 4$, и поэтому $|L_i| \geqslant 3|G| / 8$. Теперь очевидно, что число решений уравнения $x^2 = e\langle x_0^2 \rangle$ в факторгруппе $G / \langle x_0^2 \rangle$ больше, чем 3⁄4 порядка этой группы: $3|G / \langle x_0^2 \rangle| / 4$ составляют образы элементов из $L_1 \cup L_2$ и еще есть образ единичного элемента. Однако, последняя ситуация возможна только тогда, когда $exp(G / \langle x_0^2 \rangle) = 2$, а это противоречит условию $p(G) > 2$.

Итак, в L_1 существует такой элемент x, что $x^2 \notin \sqrt{e} \cup \sqrt{x_0^2}$. Тогда имеем $L_1 \setminus C_G(x) \subseteq \sqrt{x_0^2}$. Далее, $L_2 \setminus C_G(x) = x_0(L_1 \setminus C_G(x))$, и поэтому получаем $L_2 \setminus C_G(x) \subseteq \sqrt{x^2x_0^2}$. Таким образом, имеем: $G = C_G(x) \cup \sqrt{x_0^2} \cup \sqrt{x^2x_0^2}$. В силу предложения 2, подгруппа $C_G(x)$ коммутативна. Кроме того, так как $x \notin Z(G)$, то $|C_G(x)| \leqslant |G| / 2$, и поэтому $|\sqrt{x_0^2}| = |\sqrt{x^2x_0^2}| \geqslant |G| / 4$.

Покажем, что $L_1 \subseteq \sqrt{x^2}$. В самом деле, если существует $y \in L_1$, для которого $y^2 \neq x^2$, то, в силу симметричности L_1, имеем $\sqrt{x^2} \subseteq C_G(y)$, а в силу $L_2 = x_0L_1$ получаем $\sqrt{x_0^2x^2} \subseteq C_G(y)$. Эти два вложения с учетом неравенств $|\sqrt{x_0^2}| = |\sqrt{x^2x_0^2}| \geqslant |G| / 4$ влекут принадлежность центру группы элемента y, что противоречит его выбору. Таким образом, $L_1 \subseteq \sqrt{x^2}$, а следовательно, $L_2 \subseteq \sqrt{x^2x_0^2}$.

Итак, разбиение группы G на симметричные подмножества приобретает следующий вид: $G = (Z(G) \cup L_1) \cup L_2 = (Z(G) \cup \sqrt{x^2}) \cup \sqrt{x_0^2x^2}$. Из последнего, в частности, следует, что $\sqrt{e} \subseteq Z(G)$ и $\sqrt{x^2} \subseteq Z(G)$.

Кроме того, очевидно, что в факторгруппе $G / \langle x_0^2 \rangle$ все образы нецентральных в G элементов имеют одинаковые квадраты, отличные от единицы. Это означает, во-первых, что $G / \langle x_0^2 \rangle$ неабелева, а во-вторых, что в $G / \langle x_0^2 \rangle$ все пары симметричны. Такие группы описаны в [1]: это $Q \times C_2 \times ... \times C_2$. Следовательно, G – это 2-группа, $|\Phi(G)| = 4$ и $p(G) = 4$, причем $|\sqrt{e}| = |\sqrt{x_0^2}| = |G| / 8$ и $|\sqrt{x^2}| = |\sqrt{x^2x_0^2}| = 3|G| / 8$.

Так как $\sqrt{e} \cup \sqrt{x_0^2} \subseteq Z(G)$, то $[G : Z(G)] = 4$. Поэтому порядок G' равен двум, т.е. $G' = \langle c^2 \rangle$, $c^2 = e$. Так как $G' \subseteq \Phi(G)$ и $c \neq x_0^2$, то $c \in \{x^2, x^2x_0^2\}$. С другой стороны, в обоих множествах $\sqrt{x^2}$ и $\sqrt{x^2x_0^2}$ имеются некоммутирующие между собой элементы. Поэтому существуют такие $a \in G$ и $b \in G$, что $a^2 = b = [a,b]$, $|[a,b]| = 2$. Другими словами, $\langle a,b \rangle \cong Q$.

Далее, $G = \langle a,b,x_0,\alpha_1,...,\alpha_k \rangle$, где $\alpha_i \in Z(G)$. Заменяя при необходимости α_i на $\alpha_i x_0$, можно считать, что $\alpha_1,...,\alpha_k$ – инволюции, очевидно, не входящие в $\Phi(G)$. Это означает, что $G = \langle a,b,x_0 \rangle \times \langle \alpha_1 \rangle \times ... \times \langle \alpha_k \rangle$. Кроме того, так как $x_0^2 \notin \langle a,b \rangle$, то $\langle a,b,x_0 \rangle \cong \langle a,b \rangle \times \langle x_0 \rangle \cong Q \times C_4$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Freiman G. A. On two- and three-element subsets of groups. Aequationes math., 22, №2, 1981, 140–152.
2. Некрасов К. Г. О связи строения конечной группы с долей её несимметричных двухэлементных подмножеств. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Яровлавль. 1982. С. 130–135.
3. Некрасов К. Г. О связи строения конечной группы с долей её несимметричных двухэлементных подмножеств II. Вопросы теории групп и гомологической алгебры. Яровлавль. 1983. С. 59–70.
4. Gorenstain D. Finite groups. New York – London. 1968.

УДК 378.147

РЕАЛИЗАЦИЯ НАГЛЯДНЫХ МЕТОДОВ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ В ВУЗЕ С ПРИМЕНЕНИЕМ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

Носальская Татьяна Эдуардовна
Забайкальский институт железнодорожного транспорта, г. Чита
e-mail: tenosalskaya@gmail.com

Светова Нина Юрьевна
Петрозаводский государственный университет, г. Петрозаводск
e-mail: nsvetova@petrsu.ru

Гудкова Татьяна Александровна
Забайкальский государственный университет, г. Чита
e-mail: gudkovatanya2015@gmail.com

Ключевые слова: *математический анализ, онлайн-курс, визуализация, интерактивный чертёж, мультимедиа.*

Аннотация: Работа представляет собой обобщение педагогического опыта преподавателей вузов в направлении визуализации математических понятий и объектов с целью поддержки студентов, испытывающих трудности в освоении материала. Нами разрабатывается онлайн-курс, изучение которого является добровольным и подразумевается как дополнение к основному курсу дисциплины. Кроме того, предложенные визуальные образы могут быть использованы фрагментарно в ходе классического изложения курса математического анализа.

В последнее время преподаватели вузов всё чаще сталкиваются с проблемой низкой школьной математической подготовки части студентов, которая подтверждается результатами входного тестирования. Кроме того, существуют исследования, подтверждающие положительную корреляционную зависимость между результатами итоговой аттестации школьников и последующей их успеваемостью в вузе [0]. Вследствие этого, курс высшей математики для неподготовленного студента также вызывает большие трудности при сохраняющейся низкой мотивации к обучению. Обнаруживается ожидание неудачи в освоении материала и слабая вовлечённость в учебный процесс в целом.

Основной целью разрабатываемого курса является побуждение познавательного интереса и формирование компетенций начального уровня по усвоению дисциплины «Математический анализ» посредством визуализации математических объектов.

Учитывая такие факторы, как естественное нежелание студента демонстрировать среди сверстников наличие существенных математических пробелов и общее слабое владение математическим языком, предлагаемый факультативный курс реализуется в онлайн-формате в среде Google Classsroom. Эта платформа была выбрана с учётом следующих существенных функциональных преимуществ: бесплатная регистрация и использование сервиса, возможность создания отдельных классов для различных разделов дисциплины или студенческих групп, регулирование сроков выполнения заданий, возможность прикрепления к заданиям различных типов файлов, ссылок, встраивания мультимедийного контента, удобство последующего сбора цифрового следа для контроля динамики прохождения курса [0].

Отмечая различный входной уровень обучающихся, мы не хотели бы ограничиться только слабыми студентами, расширяя возможности применения иллюстративного подхода на любые другие категории студентов, для которых визуализация была бы хорошим вспомогательным инструментом. С этой целью предусматривается три качественных уровня заданий: базовый, стандартный и высокий. Выбор уровня осуществляется самим студентом в соответствии с успешностью выполнения входного теста и заданий в процессе прохождения курса: если задание оказывается слишком сложным, можно перейти на уровень ниже, если слишком простым – на уровень выше. Переходы осуществляются по ссылкам в конце каждого задания. Схематически путь обучающегося представлен на рисунке 1.

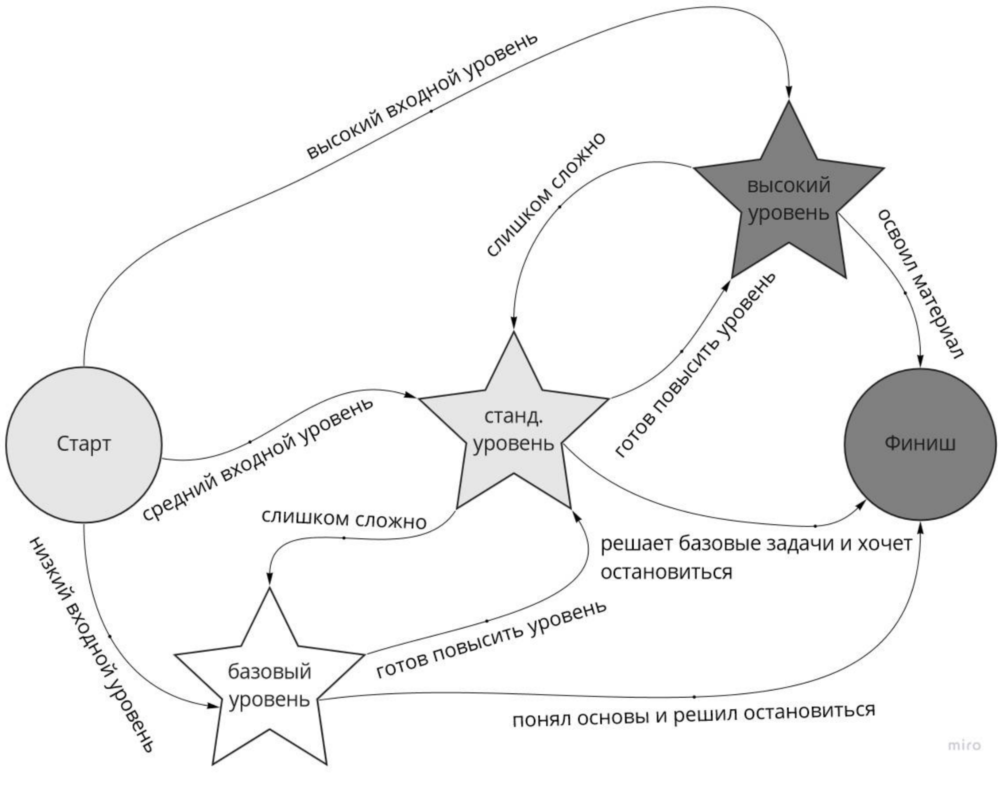


Рис. 1. Путь обучающегося на курсе

Логика курса выстроена так, что каждая тема представляет собой отдельный раздел, в который могут быть включены: историческая справка о происхождении понятий или методов, теоретический материал, задания в тестовой форме, тренировочные письменные задания, рисунки и динамические чертежи, интерактивные визуальные образы, юмор в форме мемов или картинок по теме, полезные ссылки, дополнительные материалы в формате мультимедиа и многое другое. В комментариях к каждому заданию обучающиеся могут задавать вопросы преподавателю, обмениваться мнениями, обсуждать возникающие трудности, высказывать свои предложения и дополнения по теме, прикреплять файлы и ссылки.

Рассмотрим подробнее реализацию вспомогательного курса в Google Classroom на примере раздела «Определённый интеграл». Титульная страница курса содержит краткое описание его содержания. Здесь же можно публиковать важные объявления для обучающихся.

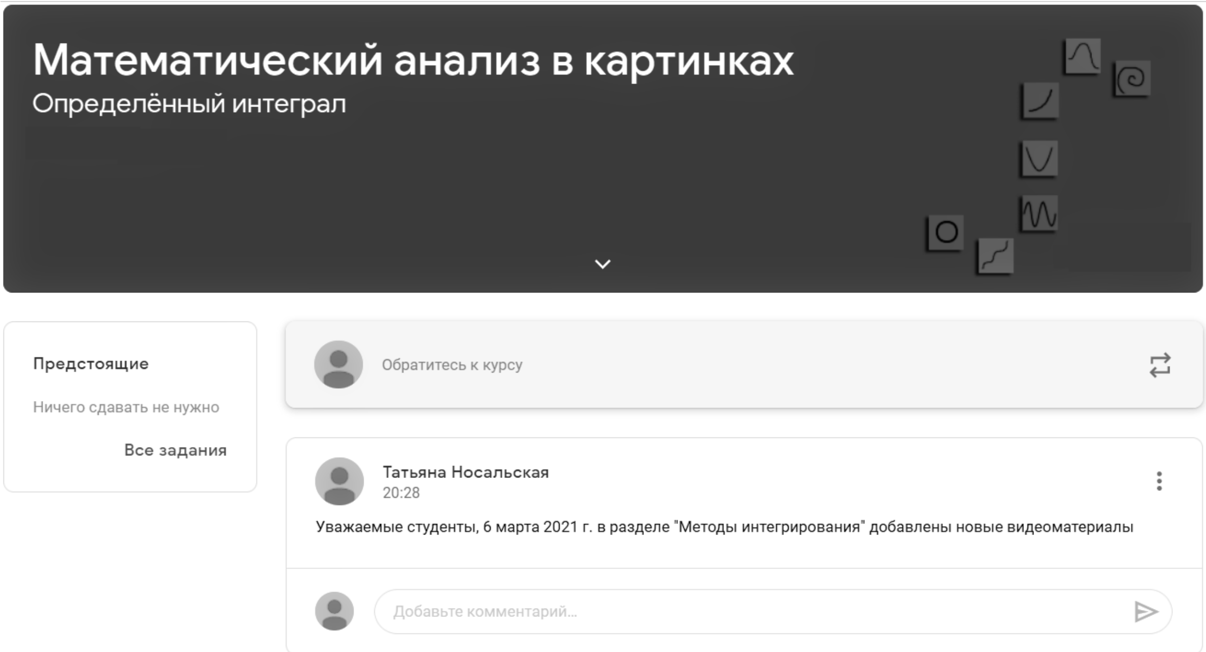


Рис. 2. Обложка курса

Входное тестирование по школьному курсу математики, реализованное на платформе Google Forms (рис. 3), является безоценочным и служит для самоопределения студента с целью дальнейшего выбора уровня заданий.

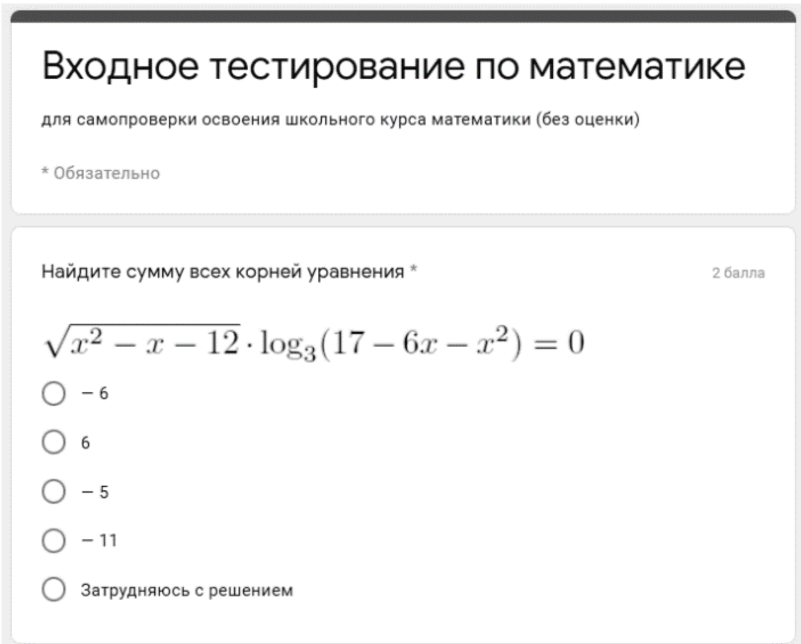


Рис. 3. Пример вопроса для входного тестирования

Для визуализации математических объектов широко используется бесплатная математическая программа GeoGebra. Примеры построенных нами динамических чертежей представлены ниже. Так, на рисунке 4 изображены интегральные суммы Дарбу при различных значениях числа интервалов разбиения и вариациях границ интегрирования. Вычисления производятся автоматически. Обучающийся может изменять эти параметры онлайн, перемещая точки и бегунки, наблюдать за изменениями на чертеже и делать выводы.

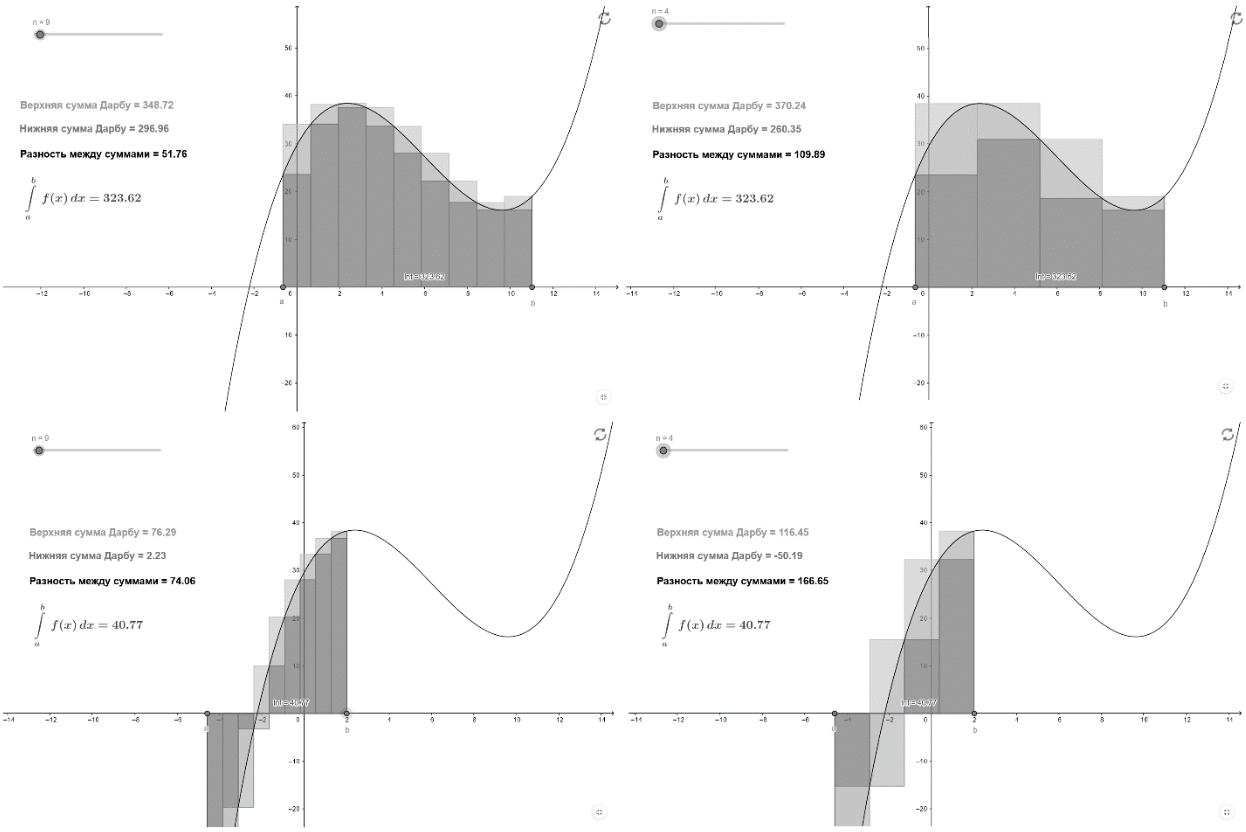


Рис. 4. Визуализация сумм Дарбу

На рисунке 5 представлен динамический чертёж определённого интеграла с переменным верхним пределом, который аналогичным образом может быть изменён и исследован обучающимися.

Курс содержит и другие примеры применения наглядных методов. Например, для изложения метода замены переменной вместо буквенной переменной удобно использовать графический объект с целью иллюстрации того факта, что на его месте может оказаться произвольное математическое выражение, однако связи между объектами при этом остаются прежними.

Кроме того, мы подобрали ряд видеоматериалов, размещённых в открытом доступе на платформе YouTube и в открытом лектории teach-in, включающих в себя записи классических лекций разных лет, семинаров, прикладных исследований.

В качестве дополнительных визуальных образов, выполняющих функции мотивации и разъяснения, используются приёмы, которые обобщённо можно назвать «Мир глазами математика»: здесь любые хорошо знакомые объекты реального мира могут быть смоделированы в виде объектов математических.

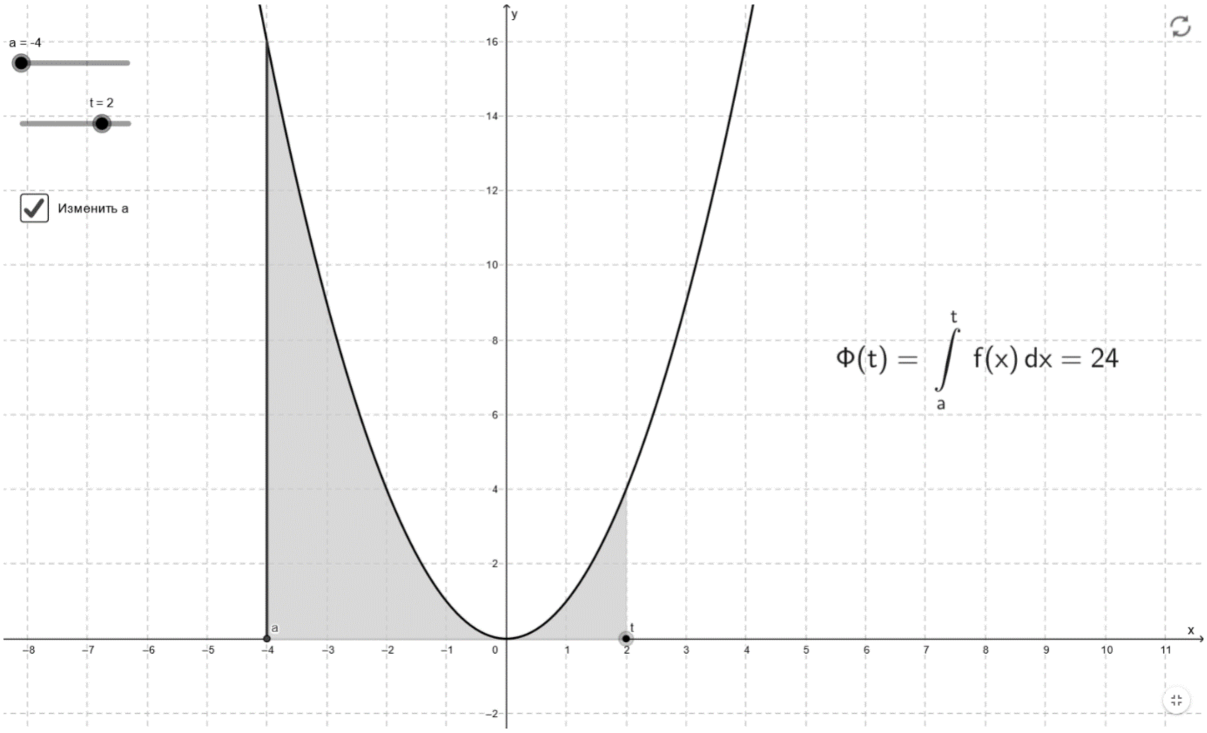


Рис. 5. Интеграл с переменным верхним пределом

В ходе использования курса в учебном процессе планируется собирать цифровой след в форме статистики о посещаемости страниц, процента правильно выполненных заданий, времени использования курса, коммуникативной активности обучающихся с целью отслеживания динамики прохождения индивидуальных образовательных траекторий участников, а также получения обратной связи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Щеголева, Л.В. Влияние результатов итоговой аттестации выпускников школ на успешность обучения в вузе на примере республики Карелия // Л.В. Щеголева, Н.Ю. Светова, Т.Г. Суровцева. – Непрерывное образование: XXI век. – Вып. 3(23). – 2018 г.

2. Варенко Т. К. Гибридная система организации учебно-педагогического процесса с использованием веб-сервиса Google «Класс» / Т. К. Варенко // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. – Харьков: Изд-во ХНУ им. В. Н. Каразина. – No 1125. – Вып. 79. – С. 86–93. – 2014 г.

УДК 004.658.2, 004.056.5, 519.2

ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ SQL-ЗАПРОСОВ

Покаместова Анастасия Максимовна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: nastualock@mail.ru

Цирулева Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *аномальный запрос, синтаксические и семантические методы.*

Аннотация. В работе анализируются и реализуются способы выявления аномальных SQL-запросов с помощью синтаксических и семантических методов.

Информация является важной составляющей частью нашей жизни, и огромное ее количество хранится в различных базах данных, поэтому защита баз данных становится все более актуальной задачей. В работе анализируются и реализуются математические методы выявления аномальных SQL-запросов [1]. Под аномальным запросом понимается запрос пользователя на выполнение действий, не характерных для его нормального, стандартного поведения. Обнаружение аномалий – это идентификация элементов, событий или наблюдений, которые не соответствуют ожидаемому шаблону. Обычно аномалии приводят к какой-либо проблеме, например, к банковскому мошенничеству.

Системы обнаружения вторжений (СОВ) используют два типа методов:

- синтаксические – базирующиеся на идее обнаружения вторжений путём сравнения SQL-запросов с шаблонами допустимых синтаксических конструкций,
- семантические – в которых акцент лежит на смысловой составляющей запроса, то есть на том, какие данные и каким образом изменяются в результате выполнения запроса.

В статье будут рассмотрены синтаксический метод Валера, Мутц, Вигна [2] и семантический метод Григорова [3].

Алгоритм метода Валера, Мутц, Вигна состоит из двух фаз.

Первая фаза – тренировки или обучения, состоит из 2-х этапов.

На 1-м этапе запросы, подаваемые в модели, используются для построения профилей, связанных с параметрами моделей. Предполагается, что используются только неаномальные запросы.

На 2-м этапе определяется допустимый процент аномалии. Оценка аномалии рассчитывается на основе того, насколько хорошо обработанные элементы соответствуют обученным моделям.

Вторая фаза – обнаружения. Баллы аномалий рассчитываются для каждого запроса. Если балл аномалии превышает определенный показатель, наблюдаемый во время обучения, на определенный настраиваемый процент, запрос считается аномальным и генерируется предупреждение.

Оценка аномалии вычисляется по формуле: AS=Σ_m(-log(p_m)), где p_m – вероятности, возвращаемые каждой моделью m.

В зависимости от моделируемых данных используются разные статистические модели. Будем использовать 2 типа данных: целые числа и строки. Типу данных «строки» соответствуют 5 моделей [4]: длина строки, распределение символов строки, префикс строки и суффикс соответствия, вывод структуры строки, поиск токенов (независимая модель). Целые же числа определяются лишь независимой от типа данных моделью.

В работе реализованы модели: длина строки, распределение символов строки, поиск токенов. Рассмотрим их несколько подробнее.

Длина строки. Обучение. Аппроксимируем среднее значение $\dot{\mu}$ и дисперсию $\dot{\sigma}^2$ распределения реальной длины строки, вычисляя выборочное среднее μ и выборочную дисперсию σ^2 для длин $l_1, l_2, \dots, l_n$ строк аргументов, обрабатываемых на этапе обучения.

Например, обучим данную модель на таком SQL-запросе:

INSERT INTO owner VALUES (100006, "Рубеко", "Андрей", "Сергеевич", "г.Москва, ул.Костикова, д.13", "89304627544");

Сначала выделяются все значения запроса и помещаются в массив:

[«100006», «Рубеко», «Андрей», «Сергеевич», «г.Москва, ул.Костикова, д.13», «89304627544»].

Далее, в отдельный массив записываются длины всех аргументов:

[6, 6, 6, 9, 28, 11].

Затем, вычисляются среднее значение и дисперсия: $\dot{\mu} = 11$, $\dot{\sigma}^2 = 61{,}33$.

Длина строки. Обнаружение. Учитывая μ и σ^2, определенные на предыдущем этапе, оцениваем регулярность строки аргументов длины l.

Вероятность p вычисляется с помощью неравенства Чебышева:

$$p(|x-\mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{t^2}. \quad (1)$$

Неравенство Чебышева устанавливает верхнюю границу вероятности того, что разница между значением случайной величины x и μ превышает определенный порог t для произвольного распределения с дисперсией σ^2 и средним значением μ. Чтобы получить верхнюю границу вероятности того, что длина строки отклоняется от среднего значения больше, чем текущий экземпляр, порог t заменяется расстоянием между длиной строки l текущего экземпляра и средним значением μ распределения длины строки.

Тогда соотношение (1) преобразуется в (2):

$$p(|x-\mu| \geq l-\mu) \leq p(l) = \frac{\sigma^2}{(l-\mu)^2}. \quad (2)$$

Распределение символов строки. Обучение. В фазе обучения вычисляется вероятность появления каждого символа. Распределение символов аргумента, которое является нормальным (т. е. неаномальным), называется идеализированным распределением символов аргумента (idealized character distribution (ICD)). Идеализированное распределение символов – это дискретное распределение: $ICD: D \to B, \quad$ где $D = \{n \in N | 0 \leq n \leq K\}$,

$B = \{p \in R | 0 \leq p \leq 1\}$, $\sum_{i=0}^{K} ICD(i) = 1.0$, K – последний символ в множестве всех символов.

Для обучения рассмотрим два запроса:

SELECT * FROM appointment;

SELECT date_app FROM appointment;

Подсчитаем среднее распределение всех символов, встречающихся в данных запросах, вычисляя средние значения вероятности для каждого:

{S – 0,035; E – 0,07; L – 0,035; C – 0,035; T – 0,035; F – 0,035; R – 0,035; O – 0,035; M – 0,035; a – 0,07; p – 0,105; o – 0,035; i – 0,035; n – 0,07; t – 0,088; m – 0,035; e – 0,053; d – 0,018; _ – 0,018; “ ” – 0,105}

Распределение символов строки. Обнаружение. В фазе обнаружения сравниваем распределение символов проверяемой строки с ожидаемым распределением символов по критерию хи-квадрат Пирсона. (obs – наблюдаемое распределение, exp- ожидаемое). Для определения соответствия между идеализированным распределением символов (ожидаемым распределением) и фактической выборкой (наблюдаемым распределением) можно использовать χ^2-критерия Пирсона как критерий согласия:

$$\boldsymbol{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(obs - exp * l)^2}{exp * l}.$$

Поиск токенов, независимая модель. Обучение. Цель модели токен-поиска состоит в том, чтобы определить, взяты ли значения определенного элемента из ограниченного набора возможных альтернатив (т. е. являются ли они токенами перечисления).

На этапе обучения данной модели происходит классификация аргумента как перечисления или случайного идентификатора. Аргумент помечается как перечисление, если количество его различных вхождений параметра ограничено некоторым порогом t, и как случайный идентификатор, если неограничено. Для классификации между перечислением и уникальными идентификаторами используется статистический тест Колмогорова-Смирнова, предложенный в [5]: $D_i = sup_i |F_i(x) - F(x)|$.

Например, обучим данную модель на таких SQL-запросах:

INSERT INTO owner VALUES (100006, "Рубеко", "Андрей", "Сергеевич", "г.Москва, ул.Костикова, д.13", "89304627544");

UPDATE owner SET tel = "89304627544" WHERE id_owner = 100001;

SELECT id_owner WHERE tel = "89304627544";

Для начала в HashMap записываем все атрибуты и их уникальные значения: {

id_owner - 100006, 100001;
lname - "Рубеко";
name - "Андрей";
patron - "Сергеевич";
address - "г.Москва, ул.Костикова, д.13";
tel - "89304627544"
}

Считаем вероятности с помощью статистического теста Колмогорова-Смирнова: {

id_owner – 0; - перечисление
lname – 0; - перечисление
name – 0; - перечисление
patron – 0; - перечисление
address – 0; - перечисление
tel – 0,67 - уникальные значения
}

Поиск токенов, независимая модель. Обнаружение. Для данного этапа находятся все значения аргумента запроса. Если какой-либо аргумент принадлежит множеству уникальных идентификаторов, то его значение сравнивается со всеми сохраненными значениями для этого аргумента на этапе обучения. Если значения аргументов, являющихся уникальными идентификаторами, принадлежат сохраненному множеству, то запрос признается нормальным, иначе – аномальным. Если же все аргументы запроса являются случайными идентификаторами, то запрос признается нормальным.

Метод Григорова. Обнаружение аномалий в sql-запросах к базам данных осуществляется на основе оценки внутренней структуры результатов выполнения запросов. Приведем алгоритм метода.

1) База данных получает запрос q на получение данных из таблицы T_i, выполняет его и возвращает список выбранных записей.
2) На основе выбранных записей строится граф G'_{T_i}, который является подграфом графа G_{T_i} для таблицы T_i, к которой выполнялся запрос.
3) Далее для построенного графа G'_{T_i} необходимо определить, насколько взаимосвязанным является множество записей, соответствующих его вершинам. Если граф является слабосвязанным, то запрос является аномальным. Если граф является сильносвязанным, то запрос является допустимым.

Общая функция оценки аномальности запроса $Z: Q \to \{0,1\}$ выглядит следующим образом: $Z(q) = Y(D(H(DB(q))))$, где

DB: Q→A – функция, переводящая SQL-запрос в отношение базы данных по правилам реляционной алгебры, где A – множество отношений, которые могут быть получены в результате выполнения запросов;

$H: A \to G'_{T_i}(V'_{T_i}, E'_{T_i}) \subseteq G_{T_i}(V_{T_i}, E_{T_i})$, где $\mathrm{E}'_{\mathrm{T_i}} = \{\mathrm{e_{jk}} = (\mathrm{v_j}, \mathrm{v_k}) \in \mathrm{E_{T_i}} \wedge \mathrm{v_j}, \mathrm{v_k} \in \mathrm{V}'_{\mathrm{T_i}}\}$ – функция, которая результату выполнения запроса ставит в соответствие подграф графа $G_{T_i}(V_{T_i}, E_{T_i})$;

$D\left(G'_{T_i}\right) = \frac{\sum_{j=1,k=1}^{|V'_{T_i}|} w_{T_i}(e_{jk})}{|V'_{T_i}|^2} \in [0,1]$ – формула плотности графа, которая нужна для оценки его структуры;

$Y(x) = \begin{cases} 0, & x < \alpha \\ 1, & x \geq \alpha \end{cases}$, где $\alpha \in [0,1]$ – решающее правило об аномальности запроса, где альфа – значение установленного порога плотности.

Если функция Z возвращает значение 1, то запрос считается допустимым, а если 0, то аномальным.

Итак, требуется определить, что имеется связь между записями. Для каждой записи формируем множество F_{r_i} – это множество записей, с которыми текущая запись может появляться в результате выполнения каких-либо запросов. Множество F_{r_i} для каждой записи определяется двумя векторами: min_j и max_j, где min_j – вектор, задающий нижнюю границу, а max_j – верхнюю. Вектора min_j и max_j для записи r_j задают n-мерный многогранник. Все записи, попадающие внутрь данного многогранника, принадлежат множеству F_{r_i}. Условие существования связи между двумя записями r_k и r_j можно задать следующим образом, $min_{jl} \le r_{kl} \le max_{jl},\ \ min_{kl} \le r_{jl} \le max_{kl}$, где $l = \overline{1,\ n}$.

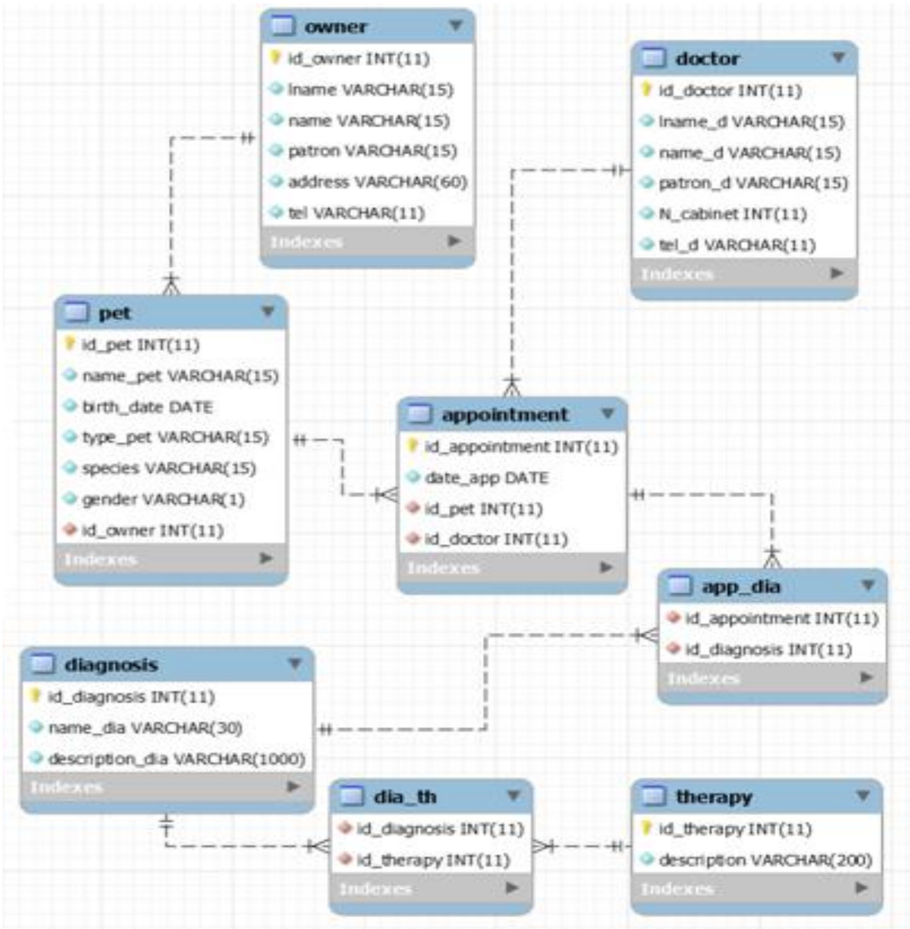


Рис. 1. ER-диаграмма базы данных «Ветеринарная клиника»

Для реализации методов была спроектирована тестовая база данных «Ветеринарная клиника». ER-диаграмма БД представлена на рисунке 1.

Программная реализация осуществлена в среде разработки IntelliJ Idea с использованием языка Java и технологии JDBC для связи приложения с БД MySQL 8.0. Эксперименты проведились в 3 этапа. На первом этапе обучение осуществлялось на 50 запросах (из которых 25 нормальных и 25 аномальных), на втором этапе – на 75 (40 нормальных, 35 аномальных), на третьем – на 100 запросах (65 нормальных, 35 аномальных). Результаты проведенных экспериментов представлены в таблице:

% \ метод	50 запросов		75 запросов		100 запросов	
	М.В.В	Григорова	М.В.В.	Григорова	М.В.В.	Григорова
Распознанных нормальных запросов	94%	85%	94%	79%	95%	79%
Распознанных аномальных запросов	87%	75%	82%	78%	83%	73%
Ложных срабатываний	6%	15%	6%	21%	5%	21%
Ложных отрицаний	13%	25%	18%	22%	17%	27%

По полученным результатам можно сделать вывод о том, что метод Валера, Мутца, Вигна работает эффективнее. Метод же Григорова имеет высокий уровень ложных срабатываний. Лучшим решением будет объединить эти два метода для более полной идентификации аномальных запросов, так как метод Валера Мутца Вигна производит анализ до выполнения запроса, а метод Григорова – после. Следует отметить, что несмотря на то, что с точки зрения синтаксического анализа структуры запросов могут совпадать, результаты выполнения этих запросов могут существенно различаться. Метод Григорова, например, лучше различает атаки типа «сбор данных», а метод Валера, Мутца, Вигна лучше различает синтаксические аномалии SQL-запроса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Григоров А. С. Обзор методов обнаружения аномалий в SQL-запросах к базам данных //Современные тенденции технических наук: материалы I междунар. науч. конф. Уфа: Лето, 2011. – С.13-17.

2. Fredrik Valeur, Darren Mutz, and Giovanni Vigna. A Learning-Based Approach to the Detection of SQL Attacks // Conference on Detection of Intrusions and Malware and Vulnerability Assessment (DIMVA). 2005. Pp 123-140.

3. Григоров А. Обнаружение аномалий в SQL-запросах к базам данных на основе оценки внутренней структуры результатов выполнения запросов // Научно-технический вестник поволжья. №6. Казань: 2011. С.146-151.

4. Christopher Kruegel, Giovanni Vigna. Anomaly Detection of Webbased Attacks [Электронный ресурс] (URL: https://dl.acm.org/doi/10.1145/948109.94-8144).

5. Григоров А. С. О способе интеграции системы обнаружения аномалий в SQL-запросах к базе данных на основе результатов выполнения запроса с приложениями, использующими СУБД в качестве хранилища данных // Молодой учёный. 2011. Т.1. №12. – С. 21-24.

УДК 378.14

НОВЫЙ ФОРМАТ ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ В 2021 ГОДУ

Потапенко Мирослава Степановна
МОУ гимназия №12, г. Тверь
E-mail: miroslava_tver@mail.ru

***Ключевые слова**: ОГЭ, КИМ, задания, ошибки.*

Аннотация. В работе рассматриваются изменения в ОГЭ по математике в этом году. Также рассматриваются основные ошибки, которые допускают выпусники 9 класса при написании ОГЭ.

ОГЭ – основной государственный экзамен, который сдают школьники в 9 классе. Экзамен предназначен для контроля полученных знаний учащихся за все годы и необходим для поступления в техникумы и колледжи. Для учеников, которые решили продолжить обучение в школе, это генеральная репетиция сдачи ЕГЭ. По итогам можно будет сделать выводы о том, на каких предметах нужно сосредоточиться, чтобы оценки в аттестате были максимально высокими. Но в этом году нас ждут изменения.

Специфика математики как школьного предмета состоит в том, что ее изучение в значительной степени строится на системе опорных знаний, без овладения которыми невозможно дальнейшее продвижение по курсу. В ходе ОГЭ учащийся должен продемонстрировать наличие у него опорных знаний, позволяющих изучать математику в старшей школе.

ОГЭ проверяет не только знания по предмету, но и умение читать и понимать прочитанное, внимательность и аккуратность в оформлении решений (запись ответов в бланк), умение проверять свои решения.

Можно утверждать, что полученные учащимися баллы в большинстве случаев могли бы быть значительно выше, если бы школьники более критично отнеслись как к приводимым ими ответам, так и к заполнению бланков и записи решения задач с развернутым ответом.

В 2019-2020 учебном году 9 класс закончили ученики, программа обучения которых с 1-го класса была построена с учетом требований ФГОС, и ФИПИ анонсировал ряд изменений в КИМах ОГЭ 2020 года по математике, на которые мы ориентировались в ходе подготовки к экзаменам. В 2020г выпускники 9 классов не сдавали ОГЭ.

Нововведения, которые неизменно коснулись ОГЭ-9, связаны в первую очередь с рядом отличий между старыми программами обучения и принципами ФГОС, на которых базируются все программы, начиная с 2010-2011 учебного года.

Так, сегодня в обучении приоритетными направлениями являются:

- системно-деятельностный подход;
- переход от сухого изучения теоретических терминов к практическому применению знаний на практике;
- развитие метапредметных связей;

- умение пользоваться справочной информацией;
- эффективная работа с информацией.

Каким будет ОГЭ 2021года по математике? Что нового появится, что сохранилось с прошлых лет? И в чём отличие с КИМ 2020 года?

Главный вывод: изменения есть, и они довольно существенные. Количество заданий в 2020 году не изменилось. В первой части было 20 заданий. Появился блок практико-ориентированных заданий в первой части – это 1-5 задания.

Появились изменения в КИМ 2021 года по сравнению с 2020 годом.

В рамках усиления акцента на проверку применения математических знаний в различных ситуациях количество заданий уменьшилось на одно за счет объединения заданий на преобразование алгебраических (задание 13 в КИМ 2020 г.) и числовых выражений (задание 8 в КИМ 2020 г.) в одно задание на преобразование выражений на позиции 8 в КИМ 2021г.

Задание на работу с последовательностями и прогрессиями (задание 12 в КИМ 2020 г.) заменено на задание с практическим содержанием, направленное на проверку умения применять знания о последовательностях и прогрессиях в прикладных ситуациях (задание 14 в КИМ 2021 г.).

Скорректирован порядок заданий в соответствии с тематикой и сложностью.

Всего заданий – 25; из них по типу заданий: заданий с кратким ответом – 19; заданий с развёрнутым ответом – 6; по уровню сложности: базовые–19; повышенного уровня–4; высокого уровня сложности–2. Максимальный первичный балл за работу – 31. Общее время выполнения работы – 235

Оценивание первой части осталось прежним - по 1 баллу за задание и задания второй части оцениваются по 2 балла. Вторая часть осталась такой же.

Первые 5 заданий в обновлённом КИМе - это совсем новый вид заданий для ОГЭ. Перед первым заданием дан рисунок (план участка на клетчатой бумаге, таблица, рисунок колеса и т п) и текст к нему. Все 5 заданий связаны и с рисунком, и с текстом. Интересно, что все они так или иначе завязаны на вполне привычные бытовые ситуации. Подобные задачи близки к тому, что раньше называлось "реальной математикой". Все задания нельзя назвать сложными, но тут, определённо, понадобится внимание и довольно большое количество времени.

Для выполнения первых 5-ти вопросов необходимо ознакомиться с приведенной схемой домохозяйства, планом квартиры, чертежом шины, схемой печи, таблицей для оплаты сотовой связи, рисунком и планом террасы, таблицей для начисления страховки, рисунком теплицы…Эти и другие типы заданий встречаются в КИМах. Задания вроде не очень сложные, но некоторые из них требуют много вычислений. При выполнении таких заданий очень важно внимательно прочитать условие, не упустив важные факты и суть поставленного вопроса. Важно разобрать с учениками все типы практико-ориентированных заданий.

Встретятся в первом блоке и задачи прошлых лет, с которыми мы знакомы: подстановка данных в формулы; работа с числовой прямой; графики функций; уравнения; неравенства; математические действия со степенями; задачи по вероятности; геометрические задачи и др.

Еще хочу уделить внимание ошибкам, которые допускают обучающиеся в 1 части экзаменационной работы. Это ошибки *технические, содержательные, связанные с невнимательным чтением условия задачи.*

Технические ошибки – это неграмотное заполнение бланка с кратким ответом, неправильное написание цифр в бланк ответов.

Иногда ребята получают ответы, которые по логике никак не могут быть решением. Приведу несколько примеров.

В задаче требуется найти высоту равностороннего треугольника со стороной $54\sqrt{3}$. Приводимые иногда ответы «9» или «162» значительно меньше или больше верного – для исключения таких ответов достаточно попробовать привести геометрическую конструкцию с данными, которые известны в условии и получены в ответе.

Дано задание: «27 выпускников школы собираются учиться в технических вузах. Они составляют 30% от числа выпускников. Сколько в школе выпускников?». Встречаются работы, в которых ответом к данной задаче указывалось число 8,1, что явно противоречит здравому смыслу.

В заданиях на нахождение корней уравнения часто записываются числа, которые даже при устной подстановке показывают, что число не является корнем уравнения.

Следующая группа ошибок в заданиях с кратким ответом связана с *невнимательным чтением условия задачи.*

Требовалось полученный ответ округлить до целого числа, чего не сделали некоторые учащиеся, записывая верный точный ответ с дробной его частью.

В задании требовалось указать номер первого отрицательного члена заданной последовательности. Видится, что приводимый иногда ответ «–3» явно не есть номер члена прогрессии, а сам этот член заданной прогрессии.

Основные проблемы, возникающие при написании выпускниками экзаменационной работы:

- неумение понять суть вопроса, содержание задания, приводящее к построению неверного хода решения;
- недостаточно развитые умения смыслового чтения, не позволяющие построить адекватную математическую модель по условию задания;
- несформированность вычислительных навыков;
- небрежное оформлении письменного решения задачи;
- недостаточные геометрические знания, слабая графическая культура;
- неумение проводить анализ условия задания при решении практических и ситуационных задач;
- неспособность грамотно сформулировать решение в письменном виде, неумение применять известный алгоритм в нестандартной ситуации;
- недостаточно развитые аналитические навыки.

Что касается оценивания, то максимальное количесиво баллов, которое может получить участник ОГЭ - 31 балл. Минимально количество первичных баллов по математике, подтверждающее освоение обучающимися образовательных программ основного общего образования - 8 первичных баллов, набранных в сумме за выполнение заданий по алгебре и геометрии, при условии, что из них не менее 2 баллов получено по геометрии (задания 15-19, 23-25).

Шкала перевода суммарного первичного балла за выполнение экзаменационной работы в отметку по пятибальной системе оценивания.

Отметка по пятибалльной системе	**"2"**	**"3"**	**"4"**	**"5"**
Суммарный первичный балл за работу	0-7	8-14, не менее 2 баллов получено по геометрии	15-21, не менее 2 баллов получено по геометрии	22-31, не менее 2 баллов получено по геометрии

Девятиклассникам, желающим продолжить обучение в профильных классах, необходимо ориентироваться на такие рекомендованные ФИПИ пороги: физико-математический профиль – 19 первичных баллов;
экономика – 18 первичных баллов;
естественные науки – 18 первичных баллов.

И в заключении я хочу выделить следующие направления работы предметной подготовки учащихся к ОГЭ:
- развитие мотивации и целеполагания;
- формирование умения решать задания разного уровня;
- развитие самоконтроля;
- формирование уверенности и положительной самооценки.

УДК 004.92

ПАКЕТ ВЕКТОРНОЙ ГРАФИКИ PSTRICKS

Поташов Иван Михайлович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *векторная графика, TeX/LaTeX, пакет PSTrciks.*

Аннотация: в статье описаны базовые приёмы работы с пакетом векторной графики PSTricks в системе компьютерной вёрстки TeX/LaTeX.

PSTricks – это набор макросов, позволяющих осуществлять вставку графики в формате PostScript в документы TeX и LaTeX. За время существования было создано множество расширений данного пакета и ниже перечислены основные из них [1]:

1) **pst-plot** – расширение для создания графиков функций;
2) **pstricks-add** – дополнение к pst-plot, позволяющее использовать полярные координаты и алгебраическую запись функций;
3) **pst-math** – предоставляет тригонометрические функции в радианах (PostScript по умолчанию использует градусы), а также гиперболические функции;
4) **pst-plot3d** – используется для создания трёхмерных графиков;
5) **multido –** добавляет возможность использования циклов для создания повторяющихся элементов;
6) **pst-eucl –** расширение для создания геометрических чертежей различной сложности.

Также существует ряд других расширений, предназначенных для решения специализированных задач: построения электрических схем, деревьев, оптических чертежей, описания лабораторных химических опытов и др.

PSTricks, в отличие от TikZ/PGF, не является самостоятельным языком программирования. Поскольку PSTricks непосредственно связан с PostScript, то данное обстоятельство делает невозможным прямую компиляцию pdf-файла на основе TeX-документа. Для получения pdf-документа необходимо выполнить ряд последовательных компиляций по схеме dvi – ps – pdf. Далее мы рассмотрим базовые приёмы работы с макросами, позволяющими включать простейшие изображения.

1. Подключение и использование кода. Пакет PSTricks подключается стандартным образом, как и все пакеты в LaTex, а именно при помощи команды в преамбуле TeX-документа: *\usepackage{pstricks}* Другие макросы из набора, перечисленные выше, подключаются аналогичным образом.

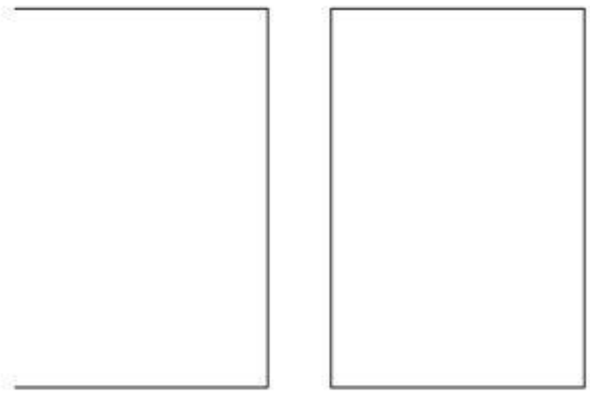
Для вставки кода используется окружение *pspicture*. Это окружение может быть использовано как вложенное окружение в окружении *figure*, так и как самостоятельное окружение. В первом случае вставка изображения будет осуществляться следующим образом

```
\begin{figure}
  \centering
  \begin{ pspicture }](x1,y1)(x2,y2)
    код
   \end{ pspicture}
  \caption{название рисунка}
\end{figure}
```

Здесь координаты *(x1,y1)* и *(x2,y2)* определяют область видимости фигуры.

2. Линии и многоугольники. В PSTricks по умолчанию используется декартова система координат. Для построения ломаных используется команда *\psline[параметры](x1,y1)(x2,y2)(x3,y3)..(xn,yn).* В круглых скобках указываются координаты вершин ломаной, в квадратных скобках здесь и далее перечисляются необязательные параметры, устанавливающие стиль и цвет линий, заливки, толщину линий и ряд других свойств. Эти параметры будут рассмотрены в дальнейших пунктах.

Для рисования многоугольников и замкнутых ломаных используется команда *\pspolygon [параметры](x1,y1)(x2,y2)(x3,y3)..(xn,yn)*. Отличие *\pspolygon* от *\psline* заключается в том, что для *\pspolygon* мы в результате всегда будем получать замкнутую линию.



```
\begin{pspicture}
\psline(1,1)(5,1)(5,7)(1,7)
\pspolygon(6,1)(10,1)(10,7)(6,7)
\end{pspicture}
```

Рис. 1. Простейший рисунок, созданный в PSTricks.
Первая команда позволяет нарисовать ломаную, вторая команда «рисует» прямоугольник. Обращаем внимание, что в конце команд не ставится никаких разделителей

3. Прямоугольники, **окружности, эллипсы и дуги**. Для построения прямоугольников в пакете PSTricks используется\ команда *\psframe[параметры] (x0,y0)(x1,y1).* В качестве параметров в круглых скобках выступают координаты концов одной из диагоналей прямоугольника.

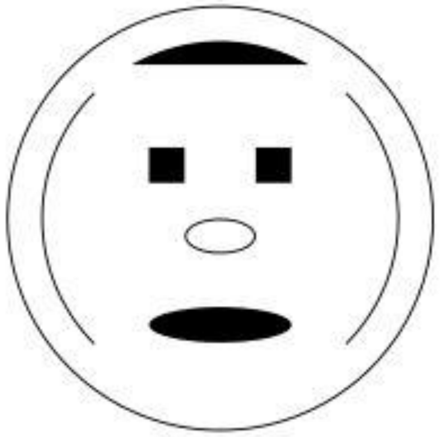
Чтобы запрограммировать построение окружности и эллипса, необходимо использовать следующие команды [2, 3]: *\pscircle[параметры] (x,y){r}* и *\psellipse[параметры] (x,y)(horizontal_axis,vertical_axis)*. Здесь точка *(x, y)* – это центр фигуры, *r* – радиус окружности, *horizontal_axis* и *vertical_axis* – горизонтальная и вертикальная полуоси эллипса.

Построение дуг окружности осуществляется при помощи команды

\psarc[параметры](x,y){r}{угол_A}{угол_B}

Как и в предыдущих двух командах, точка *(x,y)* обозначает центр дуги, *r* – радиус дуги, а *угол_A* и *угол_B* – начальный и конечный угол соответственно (в градусах).

Отметим, что у вышеперечисленных команд существует версия со звёздочкой, позволяющая изобразить на рисунке фигуры, внутренняя область которых закрашена тем же цветом, что и граница. Например *\psellipse** позволяет получить закрашенный эллипс, а *\psarc** – круговой сегмент с заливкой. Действие данных команд продемонстрировано на Рис. 2.



```
\begin{pspicture}(-3,-3)(3,3)
  \pscircle(0,0){3}
  \psarc(0,0){2.5}{135}{225}
  \psarc(0,0){2.5}{315}{45}
  \psarc*(0,0){2.5}{60}{120}
  \psframe*(.5,.5)(1,1)
  \psframe*(-.5,.5)(-1,1)
  \psellipse(0,-0.25)(0.5,0.25)
  \psellipse*(0,-1.5)(1,0.25)
\end{pspicture}
```

Рис. 2. Демонстрация работы команд для рисования прямоугольников, окружностей эллипсов и дуг

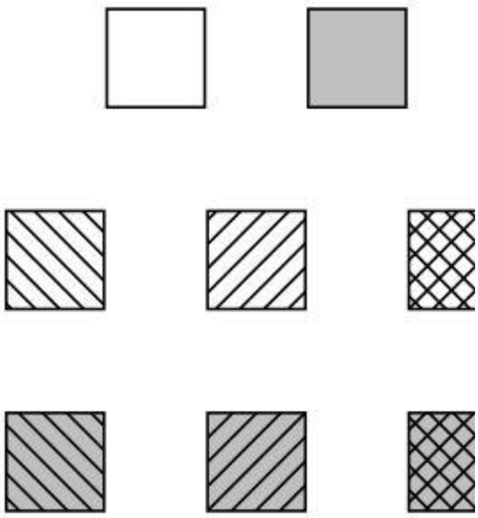
Далее рассмотрим параметры, которые позволяют задать некоторые характеристики линий и заливки.

4. Цвета линий и заливки. В рассмотренных выше двух примерах линии и заливка фигур имели чёрный цвет, определённый для фигур по умолчанию. Для изменения цвета линий, используется параметр *linecolor*. Данный параметр указывается в квадратных скобках. Например, изменив код в пункте 1 на

```
\begin{pspicture}
  \psline[linecolor=red](1,1)(5,1)(5,7)(1,7)
  \pspolygon[linecolor=blue](6,1)(10,1)(10,7)(6,7)
\end{pspicture} ,
```

мы получим красную незамкнутую линию и синий прямоугольник. Таким же образом можно изменить цвет у границы окружности, эллипса, прямоугольника или дуги.

Для изменения цвета заливки фигур в квадратных скобках также нужно указать значение параметра *fillcolor*. Отметим, что параметр *fillcolor* применим только к версиям коменд без звёздочки. Например, чтобы разместить на рисунке зелёный эллипс с красным контуром, полуосями 2 и 1, потребуется ввести команду *\psellipse[linecolor=red, fillcolor=green, fillstyle=solid] (0,0)(2,1)*. Здесь параметр *fillstyle* определяет способ заливки фигуры, и значение *solid* указывает на сплошную заливку. Если заливку требуется «отключить», то в качестве значения данного нужно указать *none*. Также в качестве значения *fillstyle* можно выбрать *vlines, vlines*, hlines, hlines*, crosshatch* и *crosshatch*,* использующие штриховку. Каждый из стилей заливки продемонстрирован на Рис. 3.



```
\begin{pspicture}(0,-4)(5,1)
\psframe[fillcolor=gray,fill-
style=none](1,0)(2,1)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=solid](3,0)(4,1)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=vlines](0,-2)(1,-1)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=hlines](2,-2)(3,-1)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=crosshatch](4,-2)(5,-1)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=vlines*](0,-4)(1,-3)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=hlines*](2,-4)(3,-3)
\psframe[fillcolor=lightgray,fill-
style=crosshatch*](4,-4)(5,-3)
\end{pspicture}
```

Рис. 3. Демонстрация различных стилей заливки. Верхний ряд: *none* и *solid.* Средний ряд: *vlines, hlines, crosshatch.* Нижний ряд: *vlines*, hlines*, crosshatch*.* Цвет штрихов пожно задать при помощи параметра *hatchcolor*

В PSTricks определены следующие цвета из чёрно-белой палитры: *black, darkgray, gray, lightgray*, и *white*, а также цвета из цветной палитры: red, green, blue, cyan, magenta, и yellow. Если пользователю недостаточно стандартных цветов, то он может определить цвет сам, например, при помощи команды *\newrgbcolor{color}{num1 num2 num3}* [2, 4]. Эта команда позволяет определить цвет в системе RGB. В качестве параметров здесь выступают имя цвета (*color*), определяемое пользователем, и три вещественных числа от 0 до 1, указывающие интенсивность базовых цветов – красного, зелёного и синего. После этого данный цвет можно использовать в качестве параметра для рисования фигур. Аналогичные команды определены и для чёрно-белой палитры, а также для систем HSB и CYMK (см. инструкцию [2]).

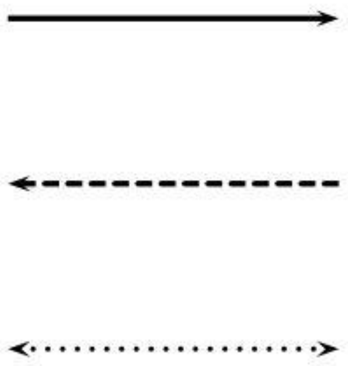
5. Толщина и стиль линий. Окончания линий. По умолчанию толщина линий на рисунках составляет 0,8 пунктов. Параметр *linewidth* позволяет явным образом задать ширину линии. Формат для данного параметра имеет вид:

linewidth=ширина линии, где ширина линии – это число вместе единицей измерения. Например, если необходимо установить ширину линии 2 мм, то для соответствующей фигуры необходимо указать в квадратных скобках *linewidth=2mm.*

Для определения стиля линий используется параметр *linestyle.* Данный параметр может принимать следующие значения: *none* (линия отсутствует), *solid* (сплошная линия), *dashed* (пунктир), *dotted* (точки). По умолчанию данный параметр принимает значение *solid*.

Иногда при рисовании линий возникает необходимость изменить их окончания, например, при изображении векторов добавить стрелку на один из концов. Окончания любой незамкнутой линии можно изменить при помощи параметра *arrows*. Этот параметр можно задать, как и все рассмотренные выше параметры в квадратных скобках: Например, если есть необходимость изобразить вектор на чертеже, то мы можем использовать следующий код: *\psline[arrows=->](0,0)(1,2).* Существует альтернативный способ записи данной команды, где значение параметра *arrows* передаётся в фигурных скобках: *\psline{->}(0,0)(1,2).*

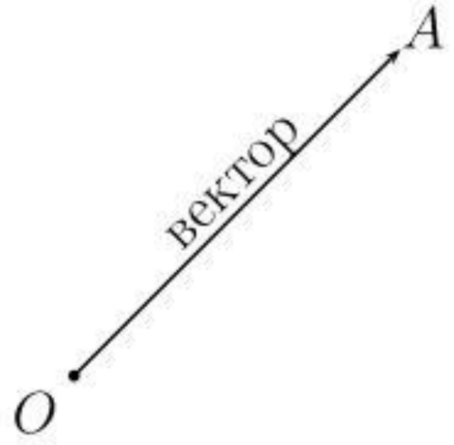
Если стрелку нужно добавить только в начальную точку, то необходимо определить параметр *arrows* следующим образом: *arrows=<-*, а если необходимо поставить стрелки в оба конца, то параметр определяется так: *arrows=<->*. Более подробная информация о стрелках и всех значениях данного параметра описана в инструкции [2]. Линии различных стилей и разными окончаниями изображены на Рис. 4.



\begin{pspicture}(-2,-2)(2,2)
\psline[linewidth=2pt,linestyle=solid,arrows=->](-2,2)(2,2)
\psline[linewidth=2pt,linestyle=dashed,arrows=<-](-2,0)(2,0)
\psline[linewidth=2pt,linestyle=dotted,arrows=<->](-2,-2)(2,-2)
\end{pspicture}

Рис. 4. Линии различных стилей и с различными окончаниями

6. Вставка текста. Для добавления текста на рисунок удобнее всего пользоваться командой *\uput* [2, 4]. Она имеет следующий формат: *\uput{расстояние}[угол](x,y){текст}.* Здесь *(x,y)* – это координаты очки, относительно которой определяется расположение текста, параметр «*расстояние»* определяет удалённость от выбранной точки, а *«угол»* задаёт направление, в котором текст удаляется от выбранной точки. Также вставляемый текст можно повернуть на заданный угол. В этом случае команда для вставки текста записывается в форме *\uput{расстояние}[угол]{угол поворота}(x,y){текст}*. Пример использования этих команд показан на Рис. 5.




```
\begin{pspicture}(-2,-2)(2,2)
  \pscircle*(0,0){0.05}
  \psline{->}(0,0)(2.82,2.82)
  \uput{4}[45](0,0){$A$}
  \uput{0}[90]{45}(1,1){вектор}
  \uput{0.2}[225](0,0){$O$}
\end{pspicture}
```

Рис. 5. Использование команд для вставки текста. В третьей и пятой команде в качестве текста использованы формулы, записанные на языке TeX

7. Изменение параметров, определённых по умолчанию. Когда требуется изменить какой-либо параметр у всех элементов рисунка или у большей их части, то удобнее воспользоваться командой *\psset*. Например, если пользователя нужно задать толщину всех линий, равную 1 мм, то лучше в окружении рисунка записать *\psset{linewidth=1mm}*. После этого не нужно указывать каждый раз указывать толщину линий в квадратных скобках. Аналогично изменить значение других параметров. В статье рассмотрены не все возможности пакета, но рассмотренные приёмы позволят пользователю создавать простейшие рисунки высокого качества

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. PSTricks [Электронный ресурс] // Википедия: Свободная энциклопедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/PSTricks (дата обращения: 10.03.21).

2. Van Zandt T. PSTricks: PostScript macros for Generic TeX. [Электронный ресурс]: User’s Guide. 2007. 131 с. URL: https://www.maths.usyd.edu.au/u/SMS/-texdoc/pst-user.pdf (дата обращения: 10.03.21).

3. LaTeX/PSTricks [Электронный ресурс] // Wikibooks. URL: https://en.-wikibooks.org/wiki/LaTeX/PSTricks (дата обращения: 10.03.21).

4. Benson D. Визуализация научной графики: введение в PSTricks [Электронный ресурс]: Виртуальная энциклопедия «Linux по-русски» / перевод Кривошей А. 2019. URL: http://rus-linux.net/MyLDP/soft/Scientific_Graphics_Visualisation_PSTricks.html (дата обращения: 10.03.21).

УДК 378

АУТЕНТИФИКАЦИЯ СТУДЕНТОВ С ПОМОЩЬЮ КОМПЬЮТЕРНОГО ЗРЕНИЯ

Румянцев Андрей Геннадьевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: agrumyancev@edu.tversu.ru

Кашина Олеся Юрьевна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: ojkashina@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *аутентификация, компьютерное зрение, программирование.*

Аннотация. Данная статья посвящена способу аутентификации студентов на их рабочих местах во время практических занятиях в университете. А также представлено решение задачи с помощью программы.

Информационные технологии прочно вошли во все сферы человеческой жизни, это и работа, и досуг, и, конечно же, учеба. Компьютеры используются в медицине, экономике, сельском хозяйстве, научных исследованиях, промышленности, прогнозировании и обучении. Дистанционное образование и удаленная работа в сети Интернет позволили многим продолжить обучение и работу в период пандемии коронавируса, дают шанс людям с ограниченными возможностями социализироваться и реализоваться.

Основным элементом информационных систем является, безусловно, информация, которую нужно собирать, хранить обрабатывать и распространять. Но не менее важно и защищать информацию и информационные системы от несанкционированного доступа. На уровне государств разработаны методики и способы защиты информации. Ни для кого не секрет, что идет постоянное *соперничество* между попытками добыть информацию и защитить ее.

При совершенствовании средств защиты информации немаловажным звеном являются системы разграничения и управления доступом, в которых для аутентификации пользователей все чаще и чаще используют биометрические характеристики.

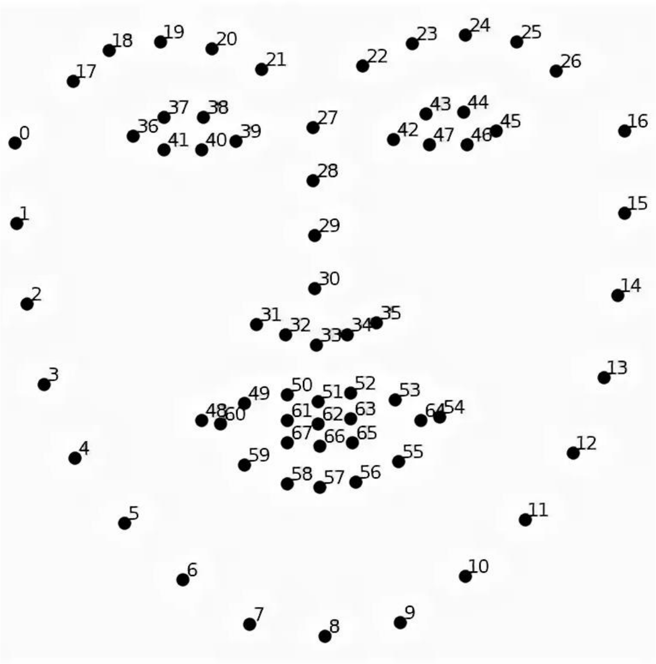
Ученые из университета Беркли в статье, опубликованной в журнале Nature Communications, утверждают, что лицо человека превратилось в своеобразный социальный паспорт. Действительно, найти похожие лица возможно, но идентичные нет, даже у близнецов. Можно ли построить на этом систему аутенфикации? Да!

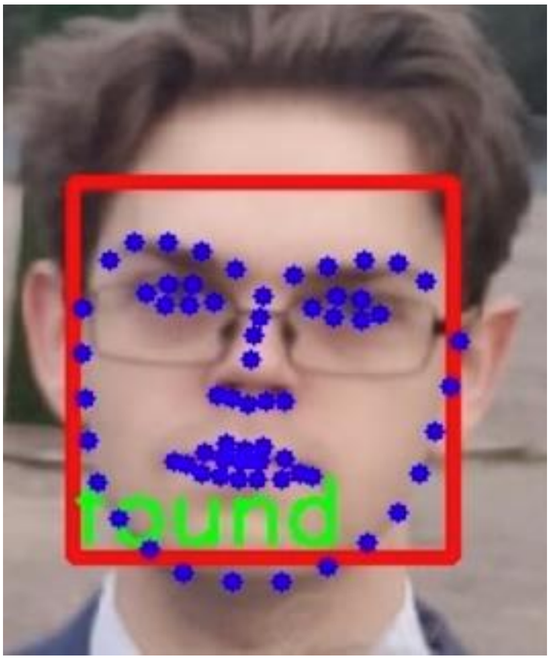
Идея. На лице можно выделить группы точек, характерные для каждого человека – контур головы, бровей, губ, носа и глаз. Расставив в этих местах точки и получив из них характеристики, например – расстояния от каждой точки до каждой другой, поделенные на минимальное расстояние между точками на лице, можно получить характерные данные о человеке для идентификации по лицу. В отличии от ключей или пароля свое лицо нельзя забыть или потерять и даже шрамы или предметы одежды на подобии очков или медицинской маски закроют лишь часть точек, по остальным же человека все еще можно будет аутентифицировать в системе.

Цель. Разработать бюджетное программное приложение, позволяющее проводить аутентификацию пользователей локальной сети, например, корпоративной сети ТвГУ. Для возможности производить аутентификацию компьютер должен обладать веб-камерой с съемки с разрешением минимум 640x480. Приложение должно быть встроено в операционную систему.

Реализация. Для разработки приложения был выбран язык Python и библиотека dlib, представляющая из себя набор инструментов для машинного обучения. Для аутентификации пользователя делается снимок с вебкамеры и происходит распознавание образа. В случае если лицо обнаружено, приложение определяет его форму и находит необходимые характеристики лица, получаемые из 68 точек, расположенных на лице человека.

Характеристические точки расположены группами и начинаются по контуру лица от левого виска, огибая щеки и подбородок, заканчивая внешний круг правым виском, затем оцифровываются нос, левый и правый глаз и заканчиваются контурами губ.





На основе расположения этих точек последующие функции и будут аутентифицировать пользователей.

Функция find_face() предназначена для создания характеристик на основе лица пользователя

```
def find_face():
    face_found=False #условие выхода из цикла
    vs = VideoStream(src=0).start() #начало видеопотока
    while not face_found: #пока не будет обнаружено лицо
```

print('Глядите в камеру неподвижно, фото произойдет через') #пояснение для пользователя о начале работы
for i in range (1,4):
print(i)
time.sleep(0.35)
frame = vs.read() #создание снимка
grayFrame = cv2.cvtColor(frame, cv2.COLOR_BGR2RGB) #перекодировка из BGR в RGB
dets = detector(grayFrame,1) #попытка обнаружить лицо на снимке
for a, b in enumerate(dets):
shape=predictor(frame,b) #попытка определить форму лица
try:
print(shape) #вывод формы лица, если лицо не было найдено даст исключение
face_found=True
except BaseException:
print('Лицо не найдено, попробуйте снова')
vs.stop() #остановка видеопотока
return facerecognizer.compute_face_descriptor(frame,shape) #получение характеристик пользователя

Функция add_face_id_to_database(id,name) предназначена для добавления в базу данных новой записи по ID и имени пользователя.

```
def add_face_id_to_database(id,name):
    face_descriptor=find_face() #получение характеристик с веб-камеры
    df = pd.DataFrame(index=index[1:]) #создание датафрейма с пронумерованными с единицы индексами
    df[str(id)]=face_descriptor #заполнение датафрейма значениями характеристик
    df_base = pd.read_csv("database.csv") #считывание базы с характеристиками
    df_base=df_base.append(df.transpose()) #редактирование базы данных
    del df_base['Unnamed: 0']
    df_base['ID'][df_base.shape[0]-1]=str(id)
    df_base.index=pd.Index(np.arange(0,int(df_base.shape[0])))
    df_base.to_csv("database.csv") #сохранение в базу данных характеристик
    df_id_and_names=pd.read_csv("names_database.csv") # аналогичные действия с базой данных с именами пользователей
    df_id=df_id_and_names.values[:,0]
    df_names=df_id_and_names.values[:,1]
    df_id_and_names = pd.Series(df_names,index=df_id)
    df_id_and_names[str(id)]=str(name)
    df_id_and_names.to_csv("names_database.csv")
```

Функция autentification(person_name) предназначена для аутентификации пользователя, представившегося именем person_name.

```
def autentification(person_name):
    df_names=pd.read_csv("names_database.csv") #открытие базы данных с именами
    data=df_names.values
    ID=(data[data[:,1] == person_name])[:,0] #получение списка ID , у которых схожее имя равное person_name
    try: #узнаем, пуст ли список
        if not ID:
            print('Нет записи в базе данных')
            return False
    except BaseException:
        print()
    face_descriptor=find_face() #получение характеристик лица пользователя
    for id in ID: #для всех ID в списке
        persons_data=get_face_characteristics(id) #получение характеристик из базы данных
        if distance.euclidean(face_descriptor,persons_data) > 0.6: #если евклидово расстояние между характеристиками пользователя и характеристиками из базы данных более 0.6
            return False #аутентификация прошла неудачно
    return True #аутентификация прошла успешно
```

При проверке была создана база данных на 20 человек. При проверке характеристик пользователей ошибок в результате распознавания не обнаружено. Процесс аутентификации занимает в среднем 3.1723167 секунды. Программа делает паузу на 1.05 секунды, чтобы пользователь зафиксировал свое лицо перед веб-камерой, делает снимок лица, вычислит характеристики лица пользователей и сверяет их с характеристиками в базе данных. Объем приложения занимает 8 кб, база данных в csv формате занимает по 3,36 кб на 1 пользователя. При базе данных на 100000 человек объем будет достигать 328 Мб. Веб-камеру стоит устанавливать с разрешением минимум 640х480.

Таким образом, с помощью компьютерного зрения аутентификация пользователей будет всегда успешной и быстрой.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Создание модели распознавания лиц с использованием глубокого обучения на языке Python. URL: https://habr.com (дата обращения 28.02.2021).

2. Инструментарий для создания реальных приложений машинного обучения и анализа данных на языке C++ URL: https://github.com (дата обращения 28.02.2021).

УДК 373.5

ГЕОМЕТРИЯ, НАГЛЯДНОСТЬ И СОВРЕМЕННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Рыбаков Михаил Николаевич
ИППИ РАН, г. Москва,
ВШЭ, г. Москва,
ТвГУ, г. Тверь
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Ключевые слова: *геометрия, образование, трёхмерный объект.*

Аннотация. Обсуждается практический подход, позволяющий помочь научиться понимать и строить чертежи, где изображаются трёхмерные геометрические объекты.

Контекст вопроса. Слово «образование» образовано, видимо, от слова «образ», и если в образовании утрачивается образность, то оно становится безо́бразным, или, если поставить ударение более привычно, – безобра́зным. Это не моя мысль, она где-то прочитана. Сказанное имеет отношение и к математическому образованию, более того, математики и мыслят-то прежде всего образами, а тексты в книгах и статьях нужны больше для того, чтобы помочь «увидеть» эти образы другим. Но вернёмся к образованию.

Мой опыт общения со школьниками и студентами младших курсов показывает, что сейчас многие из них при изучении математики больше готовы к тому, чтобы разбираться в довольно сложной алгебре, нежели в относительно несложной геометрии, причём по причине непонятности последней. Это показалось мне удивительным и странным, т.к. в свои школьные годы, насколько помню, геометрия не воспринималась как сложная наука, даже наоборот: она представлялась ясной и интересной.

Тем не менее, поговорив со школьниками, я узнал, что у многих из них в их школьном образовательном опыте нет (или почти нет) вот каких вещей: наглядных материалов по математике, предмета «Черчение», наглядных материалов и опытов по биологии, химии, физике, наглядных материалов, связанных с историей… Слова, буквы, книжки остались, а наглядность и образность, дух эксперимента оказались утрачены (не полностью, конечно, но весьма заметно).

Получается, что многие школьники относительно неплохо осваивают «игру в символы», и как следствие, ту часть математики, один из возможных способов освоения которой вписывается в указанный подход. А это довольно большая часть алгебры и анализа: для решения многих задач достаточно знать лишь правила преобразования выражений и иметь некоторую настойчивость, и тогда в результате «игры» по этим правилам можно в очень многих случаях добиваться успеха. Если при этом ещё и овладеть определёнными стратегиями (методами решения задач определённых типов), то успех почти гарантирован. Стоит отметить, что при этом смыслы и понимание обоснованности многих из используемых правил бывают утрачены. Так, не только школьники, но даже студенты-математики зачастую не могут объяснить, почему справедлива формула нахождения корней квадратного трёхчлена, или, скажем, довольно типичной является ситуация, когда школьник в старших классах неправильно вспоминает какую-то формулу сокращённого умножения и не знает при этом ни того, как проверить правильность предложенной им формулы, ни того, как при необходимости эту правильную формулу получить. Хочу обратить внимание на то, что при верном знании формул «игра в символы» удаётся, и стандартные школьные задачки могут быть решены правильно, причём без видимых существенных затруднений.

Отмечу также, что даже весьма продвинутые в математике школьники могут осознанно (и весьма успешно) эксплуатировать описанный выше подход. Так, мне доводилось сталкиваться с ситуациями, когда школьники пользовались определителями матриц для составления уравнений плоскости в трёхмерном пространстве (верно и результативно), а также готовыми формулами для решения «экономической задачи» из ЕГЭ (тоже верно и результативно), но при этом они чётко понимали, что, во-первых, обосновать применяемые ими методы они не могут, а во-вторых, что им это и не требуется, т.к. достаточно того, что метод работает и признаётся на ЕГЭ допустимым.

Вообще, метод «игры в символы» настолько эффективен, что он, по сути, заложен в качестве подхода к школьному математическому образованию в некоторых странах; я не буду углубляться в это, а тем, кто желает побольше узнать, к чему это приводит, могу предложить познакомиться, скажем, с наблюдениями В.И. Арнольда об особенностях математического образования в России, Франции, США; см., например, [1]. Добавлю, что в России такой подход довольно успешно применяется в технических вузах; но там всё-таки дают техническое, а не математическое образование. Кроме того, работу компьютерных программ тоже можно понимать как «игру в символы».

Так получилось, что мне несколько раз довелось столкнуться с людьми, которые, имея западное математическое образование, оказались в ситуации плотного взаимодействия с теми, кто математическое образование получил в России. В той или иной степени, они были под некоторым впечатлением от уровня математиков, с которым общались, и – на что хочу обратить здесь внимание – не понимали, как это возможно. После некоторого общения на эту тему мы выясняли, что причина, предположительно, связана с тем, что та математика, которую они знают, ближе как раз к «игре в символы», за которой стоит мало фундаментальных знаний и образности.

Ни в коем случае не настаиваю, что описанные ситуации типичны; у меня имеется и иной опыт – когда школьники (и первокурсники) просто поражают глубиной своих математических знаний. Общаться с такими людьми на предмет математики безумно приятно и интересно. Просто разговор здесь не о них, а о тех, чьи представления о математике и чьи математические знания по каким-то причинам «не дотягивают» до уровня, когда знание представляется цельным, а не мозаично-фрагментированным (см. [2]).

Немного психологии. В психологии восприятия выделяют четыре канала восприятия: визуальный, аудиальный, кинестетический и дигитальный[1], которые связывают с соответствующими т.н. сенсорными системами. Говоря проще, новую информацию мы можем увидеть, услышать, потрогать или понять логически. Так вот, изучение математики тоже допускает реализацию каждой из указанных возможностей восприятия. И наглядные материалы нужны, чтобы было что увидеть и потрогать, а иногда и послушать, а не только записать с помощью математических знаков. Человек, знакомый с математикой, может математику и рассказать, и спеть, и станцевать, и вылепить, он может показать её в цвете, в движении, он может восхищаться её внутренней красотой, ибо математика – это не только и не столько значки в книжках, тетрадках или на доске. И хотелось бы передать это понимание тем, кто в математику приходит, кто с ней знакомится.

Все мы индивидуальны, у каждого – своё восприятие, и иногда на занятии приходится объяснять одно и то же повторно (или одновременно) по-разному: чтобы могли увидели те, кто видит, чтобы могли услышать те, кто слышит, чтобы могли ощутить те, кто ощущает, чтобы могли сложить логическое понимание те, кто выстраивает своё знание логически.

К чему это всё? Поделиться же хочу не только сказанным выше – скорее всего, эти соображения читателю не новы. Вопрос в том, как передать знания, которые не написаны на бумаге, но которые, тем не менее, можно увидеть, услышать, потрогать?

Конечно, ответов много, методик много, и не буду я о них здесь говорить, т.к. такая цель и не ставится. А скажу лишь об одном инструменте, который, как оказалось, может быть весьма полезен на практике в освоении разделов геометрии, связанных с трёхмерными объектами; это и будет та лепта, которую хочу внести. Я имею в виду 3D-ручку.

Школьная геометрия – эта та часть изучаемой в школе математики, где довольно сложно остаться на позициях «игры в символы». Она помогает развивать образное мышление. В то же время именно в геометрии школьники впервые знакомятся с понятием доказательства (хотя формально-математически это понятие изучается потом в вузах в рамках математической логики – вот уж где «игра в символы» выходит на волю). Более того, современная геометрия – это очень мощный инструмент в математике, выходящий, казалось бы, далеко за пределы просто геометрии: достаточно сказать, что очень многие важные результаты такого «алгебраического» раздела математики как теория чисел были получены именно геометрическими методами.

Таким образом, геометрия очень важна для будущего математика, и то, что в школе она оказалась для многих сложной и непонятной, хотелось бы исправить.

---

[1] Образовано, видимо, как «калька» слова «digital».

В случае изучения геометрии трёхмерного пространства имеется определённая сложность, состоящая в том, что не все школьники (да и не только школьники) могут «видеть» трёхмерные объекты, предполагающиеся за теми двухмерными картинками, которыми эти объекты подменяются (изображаются). И можно очень долго пытаться донести до такого человека, что вот эти две пересекающиеся на рисунке прямые в действительности-то не пересекаются, но он может вас так и не понять… в конце концов, просто согласившись с вами от усталости или из вежливости. Чтобы понять такого человека, попробуйте посмотреть в интернете видеоролики, где показано, например, как четырёхмерный объект (скажем, куб), «проходит» через трёхмерное пространство. Сможете ли представить устройство этого объекта? Что там пересекается, что нет? Но люди, работающие в соответствующих областях, настолько хорошо всё это понимают, что даже могут создавать подобные визуализации. Или попробуйте, например, доказать математически, что изображённые М. Эшером миры (скажем, на его картинах «Восхождение и нисхождение», «Бельведер», «Водопад») невозможны (невозможны ли?). И тогда вопрос: как же оказалось возможным изобразить то, что «невозможно»? Возможно, это даст «ключик» к пониманию тех, кто не понимает чертежи, изображающие трёхмерные объекты, изучаемые в школьной геометрии.

В случае со школьной геометрией задача, конечно же, выглядит проще, чем с многомерными объектами или картинами М. Эшера: надо научиться видеть на чертеже то, что можно представить и даже предоставить в виде объёмного, а не плоского объекта.

Так вот, сказать хочу о том, что сейчас нам доступен простой инструмент, который воспринимается больше как игрушка, – это уже упомянутая выше 3D-ручка. И он вполне позволяет преодолеть указанное затруднение.

Здесь всё как с цветными карандашами: берём нужные цвета, «рисуем» отдельные «плоские» и «линейные» фрагменты объёмной фигуры, а затем соединяем их нужным образом. Процесс увлекательный, и в то же время приходится многое продумать, чтобы всё получилось, т.к. если этого не сделать, то «рисунок» может и не сложиться. Можно относительно легко строить сечения, и становится ясно, как эти сечения проходят, как их возможно провести, а как нет. Можно увидеть углы между прямыми, плоскостями, можно построить перпендикуляры, проекции, и т.д. Полученный 3D-объект можно взять в руки, рассмотреть его со всех сторон и даже заглянуть внутрь. Потом можно выбрать удачный ракурс и изобразить всё на листе бумаги.

Если что-то не получается, то это хороший повод для того, чтобы разобраться, в чём же дело, преодолеть возникшее затруднение, и двигаться дальше. Попутно приходится применять знания из геометрии плоскости, что тоже неплохо: всё начинает работать вместе и складываться в единую картину, фрагменты знаний «соединяются», и в представлении обучающегося складываются более цельные образы. И пусть иногда он не может их до конца объяснить; важно, что они теперь есть.

По своему опыту могу сказать следующее. Школьники, у которых были трудности с тем, чтобы «видеть» чертежи для трёхмерных геометрических объектов, после построения всего лишь двух-трёх объёмных «чертежей» с помощью 3D-ручки, избавлялись от этих трудностей, и далее 3D-ручка уже становилась попросту ненужной. Попутно уходил страх перед геометрическими задачами и даже появлялся интерес к ним. Мы могли обсуждать и решать задачи, которые изначально были непонятны уже на уровне их формулировок по причине невозможности построения чертежа.

Конечно, построение «чертежей» с помощью 3D-ручки занимает относительно много времени – больше, чем построение чертежа на бумаге, если знать, как его строить. Но это время не является потраченным зря.

Назад к контексту. Вот, собственно, и всё, чем мне хотелось поделиться. Буду рад, если кто-то воспользуется этой идеей, и в результате сделает, быть может, всего лишь один шаг на пути изучения математики, постижения стоящих за математическими объектами образов, получения образования. Из таких небольших шагов и складывается путь.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В.И. О преподавании математики. Успехи математических наук, том 53, выпуск 1(319), 1998. С. 229–234.

2. Рыбаков М.Н. Математическое образование: рекурсивная мозаика. Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы III Всероссийской научно-практической конференции, 2019. С. 174–176.

УДК 378:004.056

СОСТОЯНИЕ И ПЕРСПЕКТИВЫ ПОДГОТОВКИ СПЕЦИАЛИСТОВ ПО ИНФОРМАЦИОННОЙ БЕЗОПАСНОСТИ

Семыкина Наталья Александровна
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: Semykina.NA@tversumail.ru

Ключевые слова: *информационная безопасность, специфика обучения, профессиональное образование.*

Аннотация. В условиях цифровой трансформации общества возрастает потребность в обеспечении защиты информационных технологий. В связи с этим в работе рассматриваются проблемы и перспективы развития системы подготовки квалифицированных кадров в области информационной безопасности.

С каждым годом увеличивается темп цифрового развития, интенсивно внедряются новые технологии, преобразуются рабочие места, появляются новые профессии и т. д. Это помогает повысить эффективности работы всех отраслей, при этом увеличивается возможность качественно и количественно совершать через компьютер и другие устройства многие операции. Одновременно растут риски, связанные с нарушением информационной безопасности. Информация становиться критически важным ресурсом, требующим надёжных методов защиты [1]. Поэтому большое значение приобретает кадровое обеспечение развития информационных технологий и кибербезопасности.

В настоящий момент ощущается дефицит квалифицированных кадров, как для коммерческих предприятий, так и для государственных организаций. Эта проблема наблюдается не только у нас в стране, но и по всему миру. Более 45% российских компаний испытывают нехватку экспертов по компьютерной безопасности. В настоящий момент в России в области IT-безопасности насчитывается около 1 миллиона незакрытых вакансий, и этот показатель стремительно растёт. По оценкам экспертов к 2024 году общий дефицит ИТ-специалистов на российском рынке труда достигнет 2 млн. человек [2].

В Российской Федерации функционирует достаточно развитая система подготовки кадров в области защиты информации, занимающая по ряду позиций ведущее положение среди европейских стран, о чем свидетельствуют материалы регулярно проводимой международной конференции по образованию в области информационной безопасности [3]. Около 450 вузов и 95 колледжей осуществляют подготовку профессионалов в области защиты информации [2]. Однако востребованность в кадрах превышает в несколько раз их наличие. Это обусловлено сложностью обучения студентов, которые должны освоить большое количество теоретических знаний и практических технологий.

Подготовка специалистов по информационной безопасности имеет свои отличительные особенности.

1) Высокий уровень материально – технического обеспечение учебного процесса. Для обеспечения занятий по циклу дисциплин специализации лабо-

ратории ВУЗа должны быть оснащены современными стендами и оборудованием, для приобретения которого у большинства учебных заведений не всегда есть возможность из-за ограниченности бюджета.

2) Обеспечение учебного процесса педагогическими кадрами высшей квалификации. Не всегда преподаватели, осуществляющие профессиональный цикл обучения, имеют базовое образование по профилю преподаваемой дисциплины. Это обусловлено тем, что современная научная область IT-технологий очень молода и большого числа преподавателей, имеющих ученую степень в соответствующей профессиональной сфере еще нет. Ранее научная деятельность в сфере безопасности концентрировалась в трех областях - предотвращение утечки по акустическим каналам связи, ПЭМИН (противодействие электромагнитным излучениям и наводкам) и криптография [4].

3) Активное внедрение научно-исследовательской деятельности в учебный процесс. Эта особенность обучения связана с динамично развивающейся отраслью информационной безопасности в программно-аппаратном и техническом плане. Качество обучения зависит от соответствующих научных исследований. Что в свою очередь требует привлечения большого числа специалистов и мощного технического обеспечения [5].

В Тверском Государственном Университете задача обеспечения высокого качества подготовки кадров в области защиты информации решается в следующих направлениях:

- активная интеграция с работодателями и организациями, которые могут взять на себя проведение практики и лабораторных занятий на современном оборудовании;
- для профессорско-преподавательского состава организация курсов повышения квалификации, дополнительного образования, участие в семинарах и конференциях по обмену опытом.
- привлечение ведущих и практикующих специалистов отрасли к процессу преподавания;
- мотивация участия преподавателей и студентов в научно-исследовательских и инновационных проектах в области информационной безопасности;
- ориентация образовательного процесса на динамичные изменения профессиональной среды (быстрая реакция на новые технологии защиты информации).

Постоянное развитие новых информационных технологий на стыке естественно-научных, технических и гуманитарных направлений ориентирует на появление новых профессий: разработчик моделей Big Data, архитектор информационных систем, проектировщик нейроинтерфейсов, специалист по расследованию киберпреступлений и другие. Все новые профессии ориентированы на работу с IT-технологиями и компьютером, поэтому проблема защиты информации и компьютерной безопасности будет только возрастать. Следовательно, и потребность в специалистах в области информационной безопасности (ИБ) увеличится.

У математического факультета Тверского государственного университета открываются безграничные перспективы дальнейшего развития специальности «Компьютерная безопасность». Условия, позволяющие реализовать эти перспективы, разработать новые технологии и повысить качество образования специалистов ИБ, – образовательный, научный и инновационный потенциал университета. При этом материально-техническое обеспечение учебного процесса является важнейшим условием реализации подготовки специалистов в области информационной безопасности. Так как низкая степень оснащенности современными программно-аппаратными средствами защиты информации является препятствием для реализации качественного учебного процесса, и тормозит научно-исследовательскую и инновационную работу [6].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловьёва Т. В. Проблемы информационной безопасности в условиях цифровой трансформации общества // Вестник ХГУ им. Н.Ф. Катанова. 2019. №27. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/problemy-informatsionnoy-bezopasnosti-v-usloviyah-tsifrovoy-transformatsii-obschestva (дата обращения: 18.03.2021).
2. Дефицит кадров в сфере ИБ и подготовка молодых специалистов // Информационная безопасность. 2019. №6. URL: https://lib.itsec.ru/articles2/bypub/insec-6-2019 (дата обращения: 20.03.2021).
3. Малюк А. А. Кадровое обеспечение информационной безопасности // Государственная служба. 2011. №5. URL: https://cyberleninka.ru/article/n/kadrovoe-obespechenie-informatsionnoy-bezopasnosti (дата обращения: 17.03.2021).
4. Кивиристи А. Почему ВУЗ не способен подготовить специалиста по безопасности? [Электронный ресурс] URL: https://www.securitylab.ru/opinion/-272388.php.
5. Шеремет И. А. направление подготовки специалистов по противодействию киберугрозам в кредитно-финансовой сфере // Вопросы кибербезопасности №5(18) – 2016. С. 3 – 7.
6. Бурькова Е. В. Профессиональная подготовка специалистов в области информационной безопасности // Вестник ОГУ. 2016. №2 (190). URL: https://-cyberleninka.ru/article/n/professionalnaya-podgotovka-spetsialistov-v-oblasti-informatsionnoy-bezopasnosti (дата обращения: 20.03.2021).

УДК 004.42

ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Серова Дарья Александровна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: daserova@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *цифровые образовательные ресурсы, интерактивная геометрическая среда GeoGebra, поверхности второго порядка, интерактивные компьютерные модели, визуализация.*

Аннотация. В статье рассматривается параллельное программирование на OpenMP.

Параллельное программирование. Параллельное программирование применяется тогда, когда для последовательной программы требуется уменьшить время ее выполнения, или, когда последовательна программа, ввиду большого объема данных, перестает помещаться в память одного компьютера. Направление развития в области высокопроизводительных вычислений как раз направлено на решение этих двух задач: создание мощных вычислительных комплексов с большим объемом оперативной памяти с одной стороны и разработка соответствующего ПО с другой.

По сути весь вопрос заключается в минимизации соотношения цена/производительность. Ведь всегда можно построить (собрать) вычислительную систему, которая будет эффективно решать поставленную задачу, но адекватна ли будет при этом цена такого решения. Можно выделить два направления развития компьютерной техники: векторные машины (Cray) и кластеры (обычные компьютеры, стандартное ПО). [1]

Написание параллельных программ. Разработка параллельных программ (ПП) состоит из трех основных этапов:

Декомпозиция задачи на подзадачи. Идеально, чтобы эти подзадачи работали независимо друг от друга (принцип локальности данных). Обмен данными между подзадачами является дорогой операцией, особенно если это обмен по сети.

Распределение задачи по процессорам (виртуальным процессорам). В некоторых случаях решение этого вопроса можно оставить на усмотрение среды выполнения ПП.

Написание программы с использованием какой-либо параллельной библиотеки. Выбор библиотеки может зависеть от платформы, на которой программа будет выполняться, от требуемого уровня производительности и от природы самой задачи.

Параллельные архитектуры. В массе своей все вычислительные комплексы и компьютеры делятся на три группы:

Системы с распределенной памятью. Каждый процессор имеет свою память и не может напрямую доступа к памяти другого процессора.

Разрабатывая программы подобные системы, программист в явном виде должен задать всю систему коммуникации (Передача сообщений – Message Passing). Библиотеки: MPI, PVM, Shmem (Cray only).

Системы с общей (разделяемой) памятью. Процессор может напрямую обращаться в память другого процессора. Процессоры могут сидеть на одной шине (SMP). Разделяемая память может быть физически распределенной, но тогда стоимость доступа к удаленной памяти может быть очень высока и это должен учитывать разработчик ПП.

Подходы к разработке ПО: Threads, директивы компилятора (OpenMP), механизм передачи сообщения.

Комбинированные системы. В кластерах могут объединяться компьютеры различной конфигурации

OpenMP. Введение в OpenMP.

OpenMP – механизм написания параллельных программ для систем с общей памятью. Состоит из набора директив компилятора и библиотечных функций.

Позволяет достаточно легко создавать многопоточные приложения на C/C++, Fortran. Поддерживается производителями аппаратуры (Intel, HP, SGI, Sun, IBM), разработчиками компиляторов (Intel, Microsoft, KAI, PGI, PSR, APR, Absoft)

Программная модель OpenMP

Основной поток порождает дочерние потоки по мере необходимости.

Модель fork-join.

Программирование путем вставки директив компилятора в ключевые места исходного кода программы.

Компилятор интерпретирует эти директивы и вставляет в соответствующие места программы библиотечные вызовы для распараллеливания участков кода (рис. 1).

Последовательный код

```
void main(){
  double x[1000];
  for(i=0; i<1000; i++){
    calc_smth(&x[i]);
  }
}
```

Параллельный код

```
void main(){
  double x[1000];
#pragma omp parallel for ...
  for(i=0; i<1000; i++){
    calc_smth(&x[i]);
  }
}
```

Рис. 1

Директива #pragma omp parallel for указывает на то, что данный цикл следует разделить по итерациям между потоками.

Количество потоков можно контролировать из программы, или через среду выполнения программы- переменную окружения OMP_NUM_THREADS.

Следует отметить, что разработчик ответственен за синхронизацию потоков и зависимость между данными.

Для того, чтобы скомпилировать программу с поддержкой OpenMP компилятору следует указать дополнительный ключ (рис. 2).

```
icc -openmp prog.c
ifc -openmp prog.f
```

Рис. 2

В модели с разделяемой памятью взаимодействие потоков происходит через разделяемые переменные. При неаккуратном обращении с такими переменными в программе могут возникнуть ошибки соревнования (race condition). Такое происходит из-за того, что потоки выполняются параллельно и соответственно последовательность доступа к разделяемым переменным может быть различна от одного запуска программы к другому.

Для контроля ошибок соревнования работу потоков необходимо синхронизировать. Для этого используются такие примитивы синхронизации как критические секции, барьеры, атомарные операции и блокировки1. Стоит отметить, что синхронизация может потребовать от программы дополнительных накладных расходов и лучше подумать, и распределить данные таким образом, чтобы количество точек синхронизации было минимизировано.

Основы OpenMP

Синтаксис

В основном конструкции OpenMP – это директивы компилятора

Для C/C++ директивы имеют следующий вид (рис. 3):

```
#pragma omp конструкция [условие [условие]...]
```

Рис. 3

Для Fortran-а директивы принимают одну из следующих форм (рис. 4):

```
c$omp конструкция [условие [условие]...]
!$omp конструкция [условие [условие]...]
*$omp конструкция [условие [условие]...]
```

Рис. 4

Поскольку конструкции OpenMP являются директивами, то тот компилятор, который их не понимает, пропустит их и все же соберет OpenMP программу, правда последовательную.

В большинстве своем директивы OpenMP применимы только к структурным блокам, которые имеют единственную точку входа и единственную точку выхода. Единственным исключением является оператор STOP в языке Fortran и функция exit() в C/C++.

Параллельные регионы. Параллельные регионы являются основным понятием в OpenMP. Именно там, где задан этот регион программа исполняется параллельно. Как только компилятор встречает программу omp parallel, он вставляет инструкции для создания параллельных потоков.

Выше уже упоминалось, что количество порождаемых потоков для параллельных областей контролируется через переменную окружения OMP_NUM_THREADS, а также может задаваться через вызов функции внутри программы.

Каждый порожденный поток исполняет блок код в структурном блоке. По умолчанию синхронизация между потоками отсутствует и поэтому последовательность выполнения конкретного оператора различными потоками не определена. После выполнения параллельного участка кода все потоки, кроме основного завершаются, и только основной поток продолжает исполняться, но уже один.

Каждый поток имеет свой уникальный номер, который изменяется от 0 (для основного потока) до количества потоков – 1. Идентификатор потока может быть определен с помощью функции omp_get_thread_num().

Зная идентификатор потока, можно внутри области параллельного исполнения направит потоки по разным ветвям (рис. 5).

```
#pragma omp  parallel
{
   myid = omp_get_thread_num();
   if(myid == 0)
     do_something();
   else
     do_something_else(myid);
}
```

Рис. 5

Приведенный пример обладает одним недостатком. (мы не знаем является ли переменна myid разделяемой или приватной).

Модель исполнения. Существует две модели исполнения: динамическая, когда количество используемых потоков в программе может варьироваться от одной области параллельного выполнения к другой, и статическая, когда количество потоков фиксировано.

Модель исполнения контролируется или через переменную окружения OPM_DYNAMIC или с помощью вызова функции omp_set_dynamic().

Конструкции OpenMP

Условия выполнения

Условия выполнения определяют то, как будет выполняться параллельный участок кода и область видимости переменных внутри этого участка кода. Опишем следующие условия:

shared(var1, var2, ...)

Условие shared указывает на то, что все перечисленные переменные будут разделяться между потоками. Все потоки будут иметь доступ к одной и той же области памяти.

private(var1, var2, ...)

Условие private указывает на то, что каждый поток должен иметь свою копию переменной на всем протяжении своего исполнения.

firstprivate(var1, var2, ...)

Это условие аналогично условию private за тем исключением, что указанные переменные инициализируются при входе в параллельный участок кода значением, которое имела переменна до входа в параллельную секцию.

lastprivate(var1, var2, ...)

Приватные переменные сохраняют свое значение, которое они получили при достижении конца параллельного участка кода.

reduction(оператор:var1, var2, ...)

Это условие гарантирует безопасное выполнение операций редукции, например, вычисление глобальной суммы.

if(выражение)

Это условие говорит о том, что параллельное выполнение необходимо только если выражение истино.

default(shared|private|none)

Это условие определяет область видимости переменных внутри параллельного участка кода по умолчанию.

schedule(type[,chank])

Этим условием контролируется то, как итерации цикла распределяются между потоками. [1, 2]

Библиотечные функции OpenMP

Для эффективного использования процессорного времени компьютера и написания гибких OpenMP программ пользователю предоставляется возможность управлять ходом выполнения программы посредством библиотечных функций. Библиотека OpenMP предоставляет пользователю следующий набор функций:

void omp_set_num_threads(int num_threads)

Устанавливает количество потоков, которое может быть запрошено для параллельного блока.

int omp_get_num_threads()

Возвращает количество потоков в текущей команде параллельных потоков.

int omp_get_max_threads()

Возвращает максимальное количество потоков, которое может быть установлено omp_set_num_threads.

int omp_get_thread_num()

Возвращает номер потока в команде (целое число от 0 до количества потоков – 1).

int omp_get_num_procs()

Возвращает количество физических процессоров доступных программе.

int omp_in_parallel()

Возвращает не нулевое значение, если вызвана внутри параллельного блока. В противном случае возвращается 0.

void omp_set_dyamic(expr)

Разрешает/запрещает динамическое выделение потоков.

int omp_get_dynamic()

Возвращает разрешено или запрещено динамическое выделение потоков.

void omp_set_nested(expr)

Разрешает/запрещает вложенный параллелизм.

int omp_get_nested()

Возвращает разрешен или запрещен вложенный параллелизм [3].

Перед использованием функций в фортране следует из объявить, как соответствующий тип данных, в C/C++ - подключить файл заголовков omp.h (рис. 6).

```
#include <omp.h>
```

Рис. 6

Изменения, сделанные функциями, являются приоритетнее, чем соответствующие переменные окружения. Так, функция omp_set_num_threads() переписывает значение переменной окружения OMP_NUM_THREADS, которое может быть установлено перед запуском программы [3].

Зависимость по данным.

Для того, чтобы цикл мог быть распараллелен, работа, которая выполняется на одной итерации цикла не должна зависеть от работы на другой итерации. Другими словами, титрации цикла должны быть независимыми. Порой от зависимости по данным можно избавиться, слегка переписав код. (Рис. 7) [3, 4].

`for(i=1; i<8; i++)` `    a[i] = c*a[i-1];`	Зависимость есть
`for(i=1; i<9; i+=2)` `    a[i] = c*a[i-1];`	Зависимости нет

Рис. 7

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов А. С. Технологии параллельного программирования MPI и OpenMP: Учеб. пособие. Предисл.: В.А.Садовничий. – М.: Издательство Московского университета, 2012.-344 с.-(Серия “Суперкомпьютерное образование”). ISBN 978-5-211-06343-3.

2. Гергель В.П. Высокопроизводительные вычисления для многоядерных многопроцессорных систем. Учебное пособие – Нижний Новгород; Изд-во ННГУ им. Н.И.Лобачевского, 2010.

3. Библиотека OpenMP. Параллельный цикл: https://pro-prof.com/archives/-1150.

4. Параллельные задачи (tasks) OpenMP: Параллельные задачи (tasks) OpenMP и статический анализ кода: https://www.viva64.com/ru/a/0055/.

УДК 371.263

ФОРМИРУЮЩАЯ ОЦЕНКА НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

Харинова Галина Вячеславовна
МОУ многопрофильная гимназия №12 г.Твери, г. Тверь
E-mail: HGW.72@mail.ru

Ключевые слова: *формирующее оценивание, инструменты оценивания, самооценка, урок, задания урока, коррекция, обратная связь.*

Аннотация. В работе рассматривается рекомендации, которые помогут учителю при подготовке учащихся к самостоятельным, контрольным, диагностическим и итоговым работам, зачетам и итоговой аттестации. Использование примеров формирующего оценивания даст возможность преподавателю выявить пробелы в усвоении учебного материала и повысить мотивацию учащихся, результативность уровня обученности и качества знаний школьников.

Давайте рассмотрим обычный урок в обычном классе. Учитель объясняет материал у доски, школьники внимательно слушают педагога. Детям передаются знания, способы решения, модели поведения и т.п. Через какое-то время учитель должен оценить степень усвоения материала. Как это сделать? Традиционный способ – это выставление оценки: пятерки, четверки, тройки или двойки. Что такое привычная оценка? Она показывает насколько хорошо усвоили учащиеся тот или иной материал. Т.е. насколько хорошо они воспроизвели информацию, которую им передал учитель. Работая таким образом наш ученик остается все время в пассивной роли. В такой ситуации активная роль - это роль учителя, а не школьника. Получается, что в центре внимания находиться преподавание, а не учение. Такое обучение является пассивным. Если мы захотим сделать обучение активным, т.е. пойти по модели перевернутого класса, то позиция ученика становиться центральной, действенной. В этом случае фокус сместиться с преподавания на учение. Школьники становятся главной самостоятельной действующей силой образовательного процесса, не просто воспринимают информацию, а работают с ней индивидуально, добывая ее из учебника, рабочей тетради, интернета или обсуждая в паре, споря с товарищем, выполняя исследование или компьютерный эксперимент. Учитель становиться наблюдателем классной деятельности, координатором обучения, консультантом и помощником в приобретении знаний и умений. В такой ситуации учителю будет остро не хватать инструментов оценивания. Появятся вопросы:

- Как хорошо учащиеся понимают тот материал, с которым они работают в данный момент?
- Как я узнаю с какими трудностями они сталкиваются во время выполнения учебных заданий?
- Верные ли выводы получаются в предложенных экспериментах и исследованиях?
- Как я могу помочь учащимся, если у них возникают пробелы в знаниях?
- Справятся ли с работой слабые ученики и не нужна ли им помощь.

Вот тут на помощь должны приди инструменты формирующего оценивания. Если с самого начала учебная деятельность была организована другим образом, а не традиционно, то инструменты формирующего оценивания впишутся в образовательный процесс гармонично. Нужно лишь понимать, что формирующее оценивание – это не традиционная, привычная школьная отметка за контрольную, самостоятельную работу или тест. Это механизм сбора информации, для того чтобы качественно менять и настраивать инструменты своей работы. Изменять, дополнять, корректировать учебный материал, формы и методы работы. Это обратная связь о том, что:

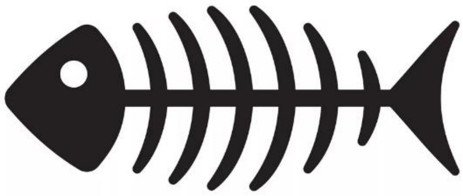
- насколько хорошо продвигаются его ученики в получении знаний,
- с какими проблемами они сталкиваются,
- каким образом можно им помочь,
- как скорректировать возникшие трудности,
- как поддержать развитие каждого ученика в классе.

Обратная связь о том, как каждый ученик: понимает свое продвижение в обучении:

- насколько хорошо я разобрался в материале;
- мне понятна эта тема или нет;
- научился ли я этому алгоритму.

Я приведу несколько примеров, которыми пользуюсь в своей педагогической деятельности.

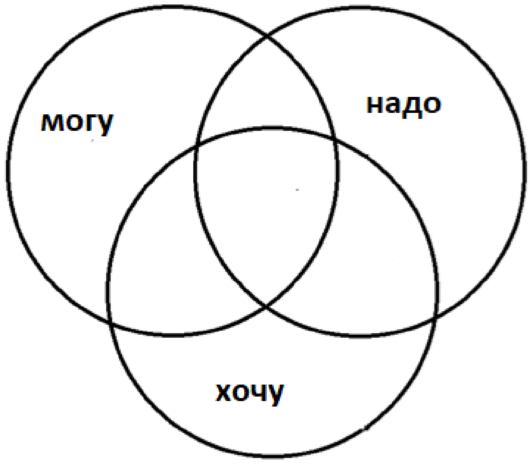
Пример 1: Фишбоун - «Плохое/хорошее, достоинства/недостатки, за/против, необходимо/необязательно, пригодиться/не нужно совсем и т.п.»



Метод позволяет развивать навыки работы с информацией и умение ставить и решать проблемы. Можно использовать в групповой работе, направлен на развитие критического мышления учащихся в наглядно-содержательной форме. В основе – схематическая диаграмма в форме рыбьего скелета. Суть данного методического приема – установление причинно-следственных взаимосвязей и анализа. Можно использовать любой удобный редактор.

На уроке информатики в 7 классе сравниваем компьютерную и бумажную технологии, выписывая достоинства и недостатки.

Пример 2: Диаграммы Венна- как инструмент самооценивания.
В заранее созданной заготовке распределяем, например, на три группы: «Что получилось очень хорошо/чему научились», «Что получилось, но могло быть лучше /остались вопросы/вызвало затруднения», «Что не получилось совсем/чего не умеем/ не помним».



Такой метод дает возможность корректировать не только усвоение темы в целом, но и провести коррекцию любого ученика или группы в момент выполнения этого задания.

Пример 3: Инструмент рефлексии – Мишень.

Используется для рефлексии самых разных сторон состоявшегося урока. Преимущество этого приёма в том, что он очень гибок, его легко подстроить под свои цели. Также он позволяет оперативно получить отклик учеников сразу по нескольким аспектам занятия.

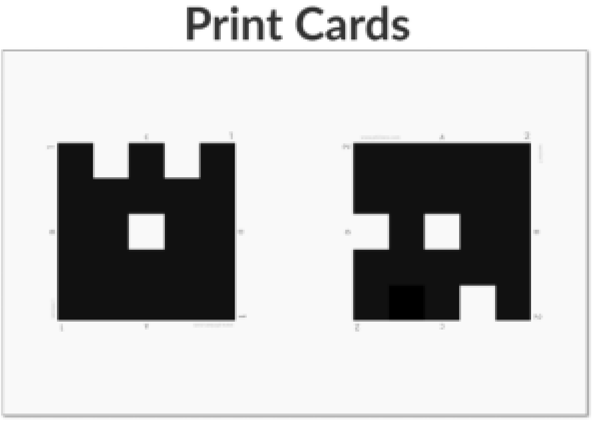
Преподаватель может предложить учащимся:

- оценить свое настроение перед занятием;
- оценить настроение после занятия;
- оценить желание взаимодействовать (в начале занятия);
- оценить готовность к занятию;
- оценить результативность собственной деятельности (в конце занятия);
- оценить результаты деятельности группы (в конце занятия).

Предложенная технология является коллективной.

Пример 4: Фронтальный опрос – Plickers.

Программа работает по очень простой технологии. Основу составляют мобильное приложение, сайт и распечатанные карточки с QR-кодами. Каждому ребёнку выдаётся по одной карточке.



Сама карточка квадратная и имеет четыре стороны. Каждой стороне соответствует свой вариант ответа (A, B, C, D), который указан на самой карточке. Учитель задаёт вопрос, ребёнок выбирает правильный вариант ответа и поднимает карточку соответствующей стороной кверху. Учитель с помощью мобильного приложения сканирует ответы детей в режиме реального времени (для считывания используется технология дополненной реальности). Результаты сохраняются в базу данных и доступны как напрямую в мобильном приложении, так и на сайте для мгновенного или отложенного анализа. Учитель мгновенно получает обратную связь и может провести коррекцию учебного процесса во время урока.

Пример 5: Критериальное оценивание - карточки самооценки.

Метод, основанный на сравнении учебных достижений, учащихся с четко определенными, коллективно выработанными, заранее известными всем участникам процесса критериями, соответствующими целям и содержанию образования, способствующими формированию учебно-познавательной компетентности учащихся.

В курсе изучения информатики с 5 по 11 класс для большинства уроков мной разработаны такие карточки. В них прописаны виды деятельности или этапы урока и даны критерии. Ученики самостоятельно выставляет баллы либо оценивают работу друг друга. В конце урока формируется оценка.

Удобно использовать инструмент критериального оценивания в период дистанционного обучения. В чате после выполнения того или иного задания выставляютя баллы – проходит самооценка. Это и числовые баллы, и плюсы/минусы и текстовые комментарии.

Пример 6: Умение работать с обратной связью – работа с готовыми компьютерными продуктами, онлайн - задание на сайте.

- умение работать с обратной связью:
- насколько хорошо усвоен материал,
- насколько ты можешь справиться с этим задание,

- сколько у тебя возникло ошибок,
- полностью ли ты понял материал,
- с каким вопросом ты теперь обратишься к учителю.

Это практически вызов для ребенка. Это возможность заинтересовать, удивить, а соответственно сделать процесс учения увлекательным, интересным и эффективным. В интернете представлены подборки образовательных сервисов для любого предмета.

Пример 7: Совместная домашняя работа - документы и формы Гугл.

Возможность собрать информацию, провести опрос, поделить на группы, провести викторину. Хороший инструмент обратной связи. Очень важный момент - не только умение совместной работы, но и умение общаться друг с другом.

Я рассмотрела несколько примеров, которые использую в своей работе. Это удобные помощники в работе любого учителя, который хочет не только давать знания, но и развивать самостоятельность к учению школьников. Если учитель длительное время и непрерывно применяет инструменты формирующего оценивания, то у школьников развивается способность брать ответственность за собственное обучение на себя. Дети учатся общаться между собой, создают работы более высокого качества, понимать обратную связь, которую они получают и работать с этой обратной связью. В подтверждении этого может служить не только данная статья, но и мой собственный опыт работы в школе. В этом году заканчивают школу ученики 11а класса, которые работают со мной по методике формирующего оценивания с 1 класса. Ребята прошли свое обучение информатики и все время были активными участниками образовательного процесса. Выросли умными, успешными, любознательными и открытыми в новым жизненным вызовам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойко О. Pedsovet.su. [Электронный ресурс] // Метод "Фишбоун" (Рыбий скелет): что это такое, формы работы на уроке и примеры. 2007-2021. "Педагогическое сообщество Екатерины Пашковой – PEDSOVET.SU". URL: https://pedsovet.su/metodika/priemy/5714 (дата обращения: 08.03.2021).

2. Plickers.com: Формирующая оценка никогда не была такой быстрой. [Электронный ресурс] // Get Plickers Cards.URL: https://get.plickers.com/ (дата обращения: 08.03.2021).

3. Kurvitshttps M. YouTube. [Электронный ресурс] // Формирующее оценивание. Когда? Зачем? URL: https://www.youtube.com/watch?v=RhzWwcZjWNg (дата обращения: 08.03.2021).

4. Изображение рыбы. [Электронный ресурс]//Fish bone icon vector image URL: https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/fish-bone-icon-vector-213-02964 (дата обращения: 08.03.2021)

5. Изображение Рефлексивная мишень. [Электронный ресурс]// https://disk.yandex.ru/d/Dgt-c7-CtLcPIQ (дата обращения: 08.03.2021).

УДК 004.032.26, 519.2, 004.056.5

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ ДЛЯ ОБНАРУЖЕНИЯ SQL-ИНЪЕКЦИЙ

Цветков Андрей Алексеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: cvetcoandrejj@gmail.com

Цирулева Валентина Михайловна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *SQL-инъекция, наивный байесовский классификатор, нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью.*

Аннотация. В работе для обнаружения SQL-инъекций используются наивный байесовский классификатор и рекуррентная нейронная сеть с долгой кратковременной памятью, приведены результаты вычислительных экспериментов.

Для полноценного функционирования сайтам и многим приложениям необходимо хранить и обрабатывать большое количество данных. Для этих целей разработчики используют базы данных. Одной из наиболее распространенных угроз БД является SQL-инъекция. Анализ статистики, собранной компанией Positive Technologies по самым распространенным уязвимостям в веб-приложениях в 2019 году, показал, что больше, чем в четверти приложений встречались уязвимости к внедрению sql-инъекций [1]. Хотя угроза внедрения вредоносного кода и находится лишь на пятой строчке в данном рейтинге, ей присвоен статус «высокий риск», что говорит о большой опасности данной угрозы. Исследование и последующее использование различных методов, в частности, математических, для обнаружения SQL-инъекций, является важным и актуальным направлением в обеспечении безопасности программ, работающих с БД, и в информационной безопасности в целом.

В данной работе для обнаружения SQL-инъекций рассмотрены алгоритмы, основанные на машинном обучении: наивный байесовский классификатор и разновидность рекуррентных нейронных сетей – нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью (LSTM).

SQL-инъекции (англ. SQL-injection) – один из распространённых способов взлома сайтов и программ, работающих с базами данных, основанный на внедрении в запрос произвольного SQL-кода [2]. SQL-инъекции позволяют злоумышленникам получить несанкционированный доступ к данным. При успешной эксплуатации данной уязвимости нарушаются основополагающие принципы информационной безопасности: конфиденциальность, целостность и доступность.

Для понимания механизма работы рассмотрим пример SQL-инъекции. Пусть имеется SQL запрос: SELECT * FROM Table WHERE ID = id.

Если в качестве параметра данного запроса передать корректный id (например, 5), то будет выведена информация по id равному 5; но если передать в качестве параметра строку «-1 OR 1=1», то будут выведены все имеющиеся в таблице записи, так как условие 1=1 верно всегда.

Метод НБК. Рассмотрим первый из выбранных для обнаружения SQL-инъекций методов – наивный байесовский классификатор (НБК) [3]. Данный метод основывается на теореме Байеса. Формула Байеса имеет вид:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}. \quad (1)$$

Задача может быть сформулирована следующим образом: на основании признаков (токенов) полученного SQL-запроса отнести его к одному из классов: M (класс SQL-инъекций) или NM (класс запросов, не содержащих SQL-инъекцию). Для классификации была получена формула (2):

$$\frac{P(M|D)}{P(NM|D)} = \frac{P(M)}{P(NM)} \prod_{i=1}^{n} \frac{P(f_i|M)}{P(f_i|NM)}. \quad (2)$$

По данной формуле вычисляется отношение вероятностей принадлежности к одному из классов и на основании полученного значения делается вывод о том, какому классу принадлежит SQL-запрос. На практике используется модификация формулы (2) – формула (3), позволяющая избежать вычислений с близкими к нулю значениями.

$$\ln \frac{P(M|D)}{P(NM|D)} = \ln \frac{P(M)}{P(NM)} + \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{P(f_i|M)}{P(f_i|NM)}. \quad (3)$$

Метод LSTM. В качестве второго метода для распознавания SQL-инъекций была выбрана нейронная сеть с долгой краткосрочной памятью (LSTM) [4]. Данная архитектура является разновидностью рекуррентных нейронных сетей и хорошо подходит для задач классификации, поскольку позволяет сохранить зависимость между элементами входной последовательности.

Основным элементом LSTM сети является LSTM ячейка, схема которой приведена на рисунке 1. В данной ячейке имеется три основных вида узлов (гейтов): входной, забывающий и выходной. Ниже представлены формулы для вычисления значений данных гейтов.

Кандидат на новое значение памяти:

$$a_t = \tanh(W_a x_t + U_a out_{t-1} + b_a) \quad (4)$$

Входной гейт:

$$i_t = \sigma(W_i x_t + U_i out_{t-1} + b_i) \quad (5)$$

Забывающий гейт:

$$f_t = \sigma(W_f x_t + U_f out_{t-1} + b_f) \quad (6)$$

Выходной гейт:

$$o_t = \sigma(W_o x_t + U_o out_{t-1} + b_o) \quad (7)$$

Новое значение памяти:

$$state_t = a_t \odot i_t + f_t \odot state_{t-1} \quad (8)$$

Выход:

$$out_t = o_t \odot \tanh(state_t) \quad (9)$$

Обучение нейронной сети осуществляется методом градиентного спуска. На рисунке 1 приведена схема, согласно которой рассчитываются градиенты в LSTM ячейке.

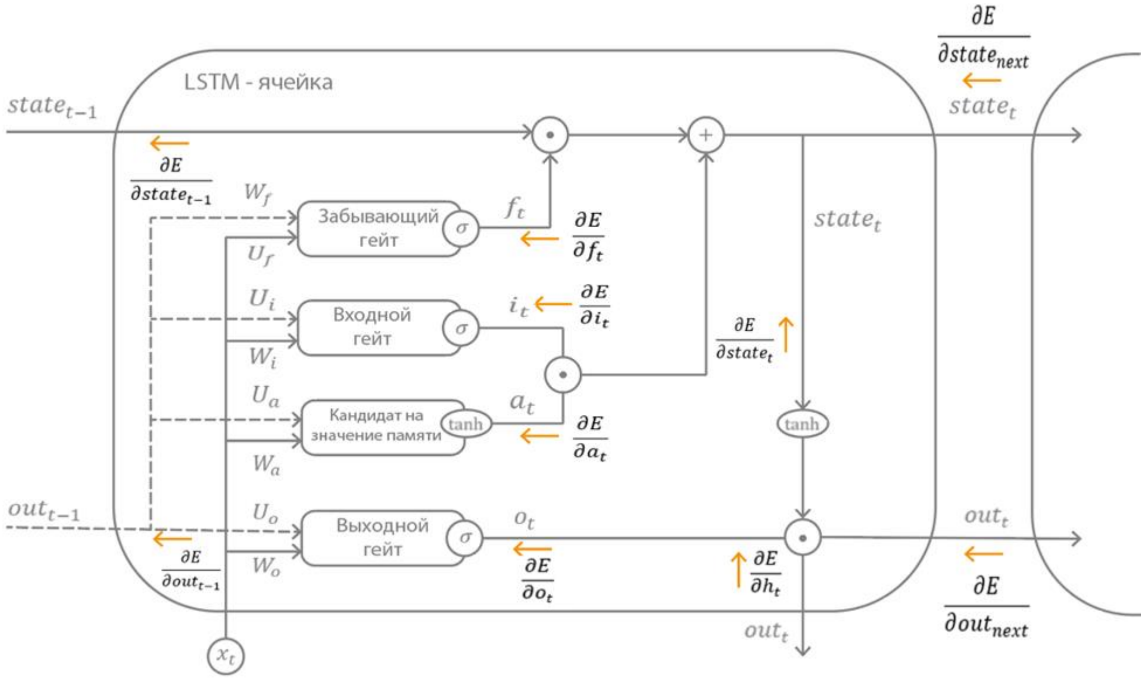


Рис. 1 Схема расчета градиентов в LSTM ячейке

Для расчета ошибки во время обучения используется среднеквадратичная ошибка, которая вычисляется по формуле (10):

$$E = \frac{1}{2}(out_t - y_t)^2 \ . \qquad 10)$$

В данной формуле out_t – значение, полученное на выходе нейронной сети, y_t – эталонное значение, передаваемое в процессе обучения. LSTM сеть имеет довольно сложную архитектуру, для расчета градиентов будем использовать схему, приведенную на рисунке 1. Ниже представлены формулы (11) – (17), по которым рассчитываются ошибки. С помощью полученных ошибок производится коррекция весов.

Формулы для расчета ошибок:

$$\delta out_t = \Delta_t + \Delta out_t \ , \qquad (11)$$

$$\delta state_t = \delta out_t * o_t * (1 - tanh^2(state_t)) + \delta state_{t+1} * f_{t+1} \ , \qquad (12)$$

$$\delta a_t = \delta state_t * i_t * (1 - {a_t}^2) \ , \qquad (13)$$

$$\delta i_t = \delta state_t * a_t * i_t * (1 - i_t) \ , \qquad (14)$$

$$\delta f_t = \delta state_t * state_{t-1} * f_t * (1 - f_t) \ , \qquad (15)$$

$$\delta o_t = \delta out_t * \tanh(state_t) * o_t * (1 - o_t) \ , \qquad (16)$$

$$\Delta out_{t-1} == \delta a_t * U_a + \delta i_t * U_i + \delta f_t * U_f + \delta o_t * U_o \ . \qquad (17)$$

Для обучения и тестирования описанных методов был использован набор данных, содержащий SQL-инъекции и примеры обычного пользовательского ввода. Данный набор взят с сайта kaggle.com [5]. Фрагмент набора данных представлен ниже:

- ' and 1 = 0) union all,1
- ? or 1 = 1 --,1
- x' and userid is NULL; --,1
- x' and email is NULL; --,1
- anything' or 'x' = ‘x,1
- I read day verses written eminent painter original conventional,0
- " The soul always hears admonition lines, let subject may",0
- The sentiment instil value thought may contain,0
- " To believe thought, believe true private heart true men, – genius",0

Каждая запись в тестовом наборе данных содержит маркер, который определяет, является ли строка SQL-инъекцией или не является. Если в конце записи стоит 1, то это SQL-инъекция, если 0, то обычный пользовательский ввод.

Токенизация запроса. Для реализации выбранных методов необходимо выполнить предварительную обработку данных. Вначале с помощью регулярных выражений [6] каждый запрос токенизируется (разбивается на токены). Регулярные выражения используют два типа символов [6]:

- специальные символы: как следует из названия, у этих символов есть специальные значения. Аналогично символу *, который, как правило, означает «любой символ» (но в регулярных выражениях применяется несколько иначе);
- литералы (например, a, b, 1, 2 и т. д.).

В работе используется следующее регулярное выражение:

pattern = re.compile(r'(\w+|[\'"=;\'\-*%)(,@])').

Оно разделено на две части символом «|» и ищет строки, удовлетворяющие либо первому шаблону, либо второму. При помощи первого шаблона ищутся отдельные слова (1 или больше повторений любой цифры или буквы), при помощи второго шаблона – отдельные символы.

Пример разбиения на токены приведен ниже:

исходный запрос: ' and 1 = 0) union all

результат токенизации: [', and, 1, =, 0,), union , all].

Далее для каждого метода преобразования различаются.

Преобразование данных для НБК. Для НБК составляется частотный словарь, содержащий частоту вхождения каждого токена в SQL-инъекции и в обычный пользовательский ввод. Фрагмент словаря приведен на рисунке 2.

Токен	Частота вхождения в обычный запрос	Частота вхождения в SQL-инъекцию
a	0.0	0.167
and	0.0	0.634
1	0.1	0.367
=	0.0	0.6
0	0.234	0.3

Рис. 2. Фрагмент частотного словаря для НБК

Значения в частотном словаре зависят от размера обучающей выборки.

Преобразование данных для LSTM. Для LSTM сети составляется таблица, в которой токены упорядочены по частоте встречаемости: самому частому токену соответствует 1, второму по частоте встречаемости – 2 и т.д. Фрагмент данной таблицы приведен на рисунке 3.

Токен	Значение
1	1
'	2
0	3
)	4
=	5
and	6
union	7

Рис. 3. Фрагмент таблицы токенов для LSTM

Далее для каждого запроса составляется вектор, содержащий значения из частотной таблицы. Ниже приведен пример токенизации запроса:
исходный запрос: ' and 1 = 0) union
вектор, подаваемый на вход LSTM сети: (2,6,1,5,3,4,7).

Рис. 4 Процент правильных ответов НБК

Программная реализация. Программа для реализации рассмотренных методов разрабатывалась на языке программирования Python в среде разработки PyCharm. Для более удобного тестирования выбранных методов был разработан графический интерфейс с использованием библиотеки Tkinter.

Оба метода показали приемлемый результат. Точность распознавания SQL-инъекций расчет с увеличением выборки для каждого из методов. Однако метод НБК даже при маленькой обучающей выборке показывает высокую точность распознавания и более высокую, чем LSTM. На рисунках 4 и 5 представлен процент правильных ответов для НБК и LSTM соответственно.

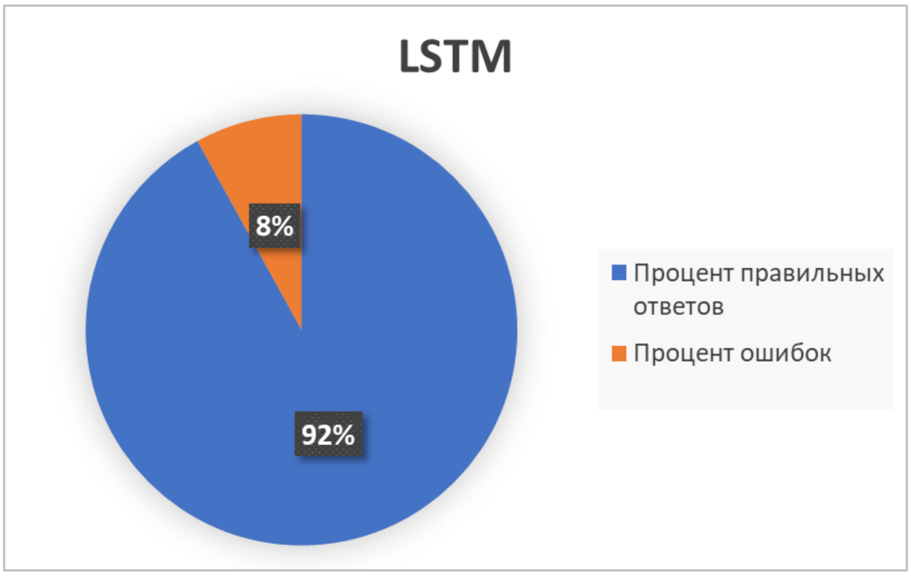


Рис. 5 Процент правильных ответов LSTM

Как видно из диаграмм, лучшие результаты показал метод НБК. Однако следует отметить, что поскольку архитектура LSTM сети является более сложной, чем архитектура НБК, она требует большего количества настроек и проверок. Так для улучшения работы сети, дополнительно можно применять такие методы, как регуляризация и обрезка градиента [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уязвимости и угрозы веб-приложений в 2019 году. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.ptsecurity.com/ru-ru/research/analytics/web-vulnerabilities-2020/ (дата обращения: 29.06.2020).

2. Sonali Mishra. SQL Injection Detection Using Machine Learning. San Jose State University. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://scholarworks.sjsu.edu/etd_projects/727/ (дата обращения: 5.03.2021).

3. Чистяков В. П. Курс теории вероятностей: учебник. М.: Наука 1982.

4. Николенко С., Кадурин А., Архангельская Е. Глубокое обучение. Погружение в мир нейронных сетей. СПб: Питер, 2018. – 480 с.

5. Syed Saqlain Hussain Shah. Sql-injection dataset. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://www.kaggle.com/syedsaqlainhussain/sql-injection-dataset (дата обращения: 5.12.2020).

6. Регулярные выражения в Python: теория и практика. [Электронный ресурс]. Режим доступа: https://tproger.ru/translations/regular-expression-python/ (дата обращения: 5.12.2020).

7. Wanshun Wong. What is Gradient Clipping? [Электронный ресурс] Режим доступа: https://towardsdatascience.com/what-is-gradient-clipping-b8e815cdfb48 (дата обращения: 5.12.2020).

УДК 504.062

РАЗРАБОТКА МЕТОДИКИ ОЦЕНКИ ДЕГРАДАЦИИ ТЕРРИТОРИЙ КОМПЛЕКСНЫМ МЕТОДОМ

Цветков Илья Викторович
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Tsvetkov.IV@tversu.ru

Цветков Антон Ильич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: czvetkov.1990@bk.ru

Стрельцова Оксана Ивановна
Объединенный институт ядерных исследований, г.Дубна
E-mail: strel@jinr.ru

Ключевые слова: *фрактальная размерность, текстура природного объекта, деградация территорий, нейронная сеть, идентификация.*

Аннотация. В работе рассматривается методика идентификации текстур природных объектов на основе двухступенчатой идентификации. Первая ступень обеспечивается за счет использования предварительно обученной нейронной сети, а на второй ступени распознавания используется фрактальная размерность текстуры природного объекта. Обучение системы производилось на основе аэрокосмических снимков природных объектов. Точность распознавания достигает 80 – 90%.

Распознавание изображений природных объектов, как правило, сводится к распознаванию текстур. Известны подходы к нахождению признаков текстур, основанные на структурном, спектральном и статистическом анализе, а также на моделях. Подход, основанный на моделях, использует фрактальные, скрытые марковские и параметрические порождающие модели. Именно два последних подхода наиболее целесообразны для анализа изображений природных текстур [1]. Предлагаемый нами метод основан на комплексном расчёте статистических и фрактальных показателей и двухуровневой сегментации аэрофотоснимка с последующей классификацией с помощью ИНС изображений природных объектов не только по категориям (лес, поле), но и по типам в категориях, что особенно актуально для распознавания типов деградации ранее мелиорированных земель (закустаренность, закочкаренность, залесенность, заброшенные открытые дрены) в целях мониторинга состояния земель, оценки степени деградации и определения площадей, требующих восстановительных работ.

Так как идентификация на основе фрактальной размерности текстуры анализируемой территории в некоторых случаях не дает однозначного результата, в рамках данной методики производится двухфакторная идентификация. На первом этапе обученная нейронная сеть выделяет характерные участки и определяет площади однородных участков с привязкой к местности, на втором этапе идет окончательная идентификация типа текстуры на основе фрактальных характеристик изображения.

Обучение нейронной сети производится на наборе типичных изображений в количестве не менее 50. Обучение продолжается по мере анализа изображений. В силу того, что предусмотрен режим подтверждения, точность распознавания повышается с количеством распознанных объектов. Максимальная точность обеспечивается при условии параллельных наблюдений на местности и подтверждении или опровержении машинного распознавания.

Фрактальная размерность является оценкой степени сложность объекта и для двумерных изображений изменяется в пределах от 1 до 2 для полностью двумерных объектов. То есть, чем сложнее объект, тем ближе его фрактальная размерность к 2. При анализе текстур природных объектов для повышения точности распознавания применяется процедура шейдирования. За счет разности яркостных характеристик прилегающих объектов, при помощи специальной процедуры строится трехмерная модель ландшафта. В этом случае фрактальная размерность определяется не при помощи квадратных сеток, как при фрактальном двумерном анализе, а при помощи трехмерной кубической сети. Алгоритм при этом остается стандартным. Фрактальная размерность, измеренная для трехмерного шейдированного изображения, колеблется от 2 до 3.

Рис. 1. Исходное изображение

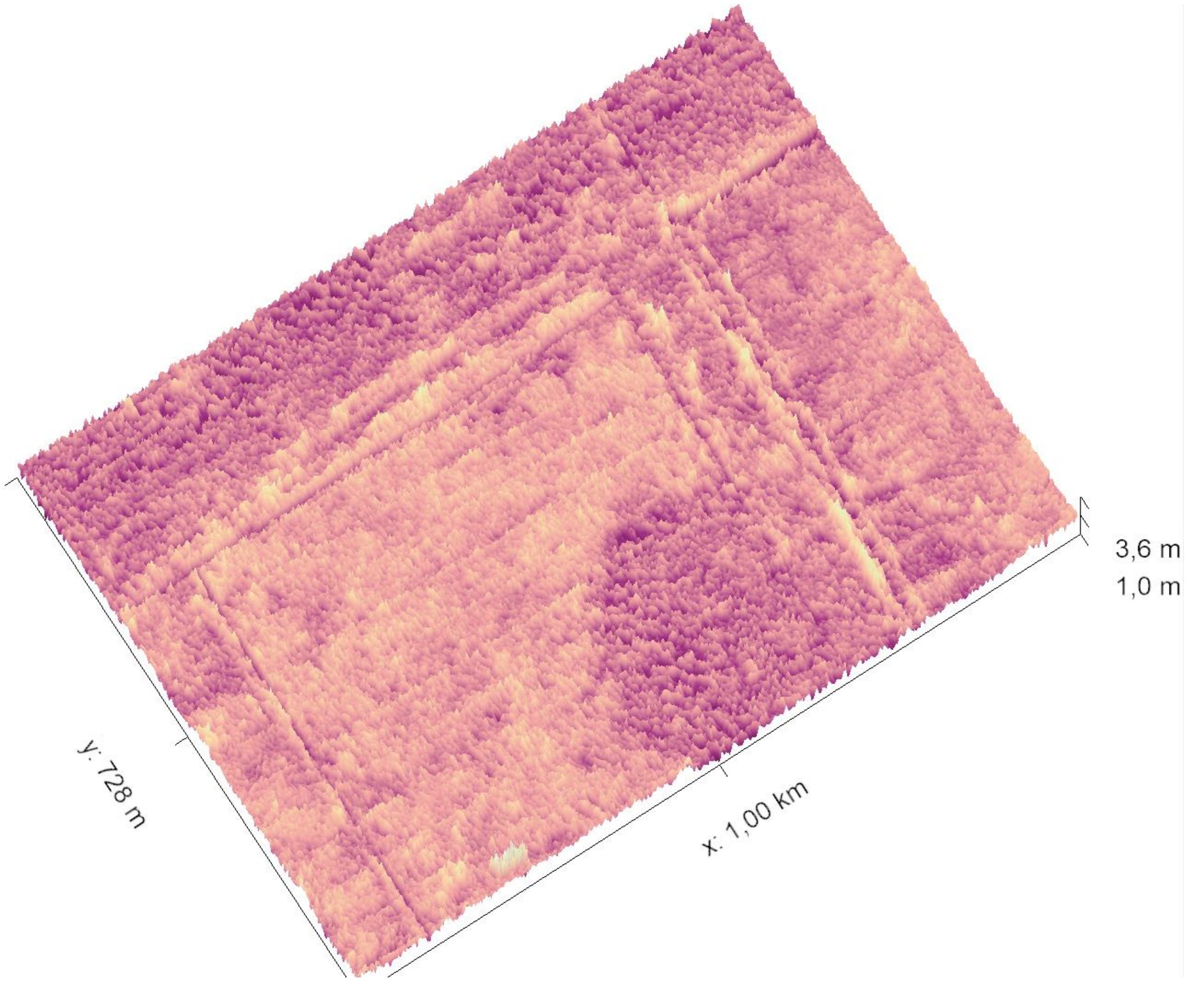


Рис. 2. Изображение, обработанное по шейдинговой технологии.
Поворот и окраска для лучшей наглядности

Для измерения фрактальной размерности трехмерного шейдированного изображения применяется трехмерный вариант стандартного box-метода. Различие состоит в том, что при применении box-метода объект покрывается серией прямоугольных сеток, а при анализе трехмерного изображения – серией трехмерных конструкций из кубиков, также переменного масштаба. Для каждого масштаба рассчитывается количество кубиков, в которые попали элементы изображения. После чего из зависимости масштаб – количество элементов изображения и рассчитывается фрактальная размерность.

Распознавание типов объектов (на примере участков закочкаренность, закустаренность, залесенность, лес, сельскохозяйственные поля) проводилось по аналогичной процедуре. Результаты расчёта фрактальной размерности и статистических характеристик четырёх видов деревьев приведены в табл. 1. Значения средней яркости отличаются столь незначительно, что не могут считаться важным признаком, как и G-компонента (в пространстве RGB), претерпевающая сезонные изменения. ИНС также имеет два скрытых слоя, в которых используется по восемь нейронов. В режиме обучения на входы нейронной сети подавалось по 350 изображений каждой породы дерева, количество эпох обучения составило 50000.

Таблица 1

Текстура	Фрактальная размерность	Среднее значение	Дисперсия	Гладкость	Третий момент	Однородность	Энтропия
Закочкаренность	2,627100	113,708	46,833	0,03714	-0,08852	0,00845	5,02285
Закустаренность	2,603681	103,986	37,623	0,02342	0,41271	0,01024	4,82232
Слабая залесенность	2,721743	105,639	46,613	0,03326	0,12975	0,00653	5,17055
Лес	2,697814	128,925	30,332	0,01704	-0,20005	0,01407	4,58152
Сельскохозяйственное поле	2,658424	114,430	49,221	0,03736	0,00422	0,00689	5,14878

Таблица 2

Текстура	Фрактальная размерность	Дисперсия	Гладкость	Третий момент	Однородность	Энтропия
Сосна	2,9263	52,30	0,0404	-0,9368	0,1433	3,807
Ель	2,9451	53,98	0,0429	-1,2700	0,1610	3,726
Берёза	2,8704	48,16	0,0372	-1,0364	0,1646	3,656
Осина	2,8642	48,04	0,0371	-0,8479	0,1183	3,908

Методика распознавания создавалась в рамках работ по заказу Всероссийского НИИ гидротехники и мелиорации в рамках госзадания «Оценка потенциала сельскохозяйственных угодий Нечерноземной зоны Российской Федерации». В разработке методики распознавания и написания программы принимали участие студенты направления Математика и компьютерные науки математического факультета ТвГУ.

На основе разработанной методики была создана программа с графическим интерфейсом. Программа работает в двух режимах: режим обучения нейронной сети и режим распознавания.

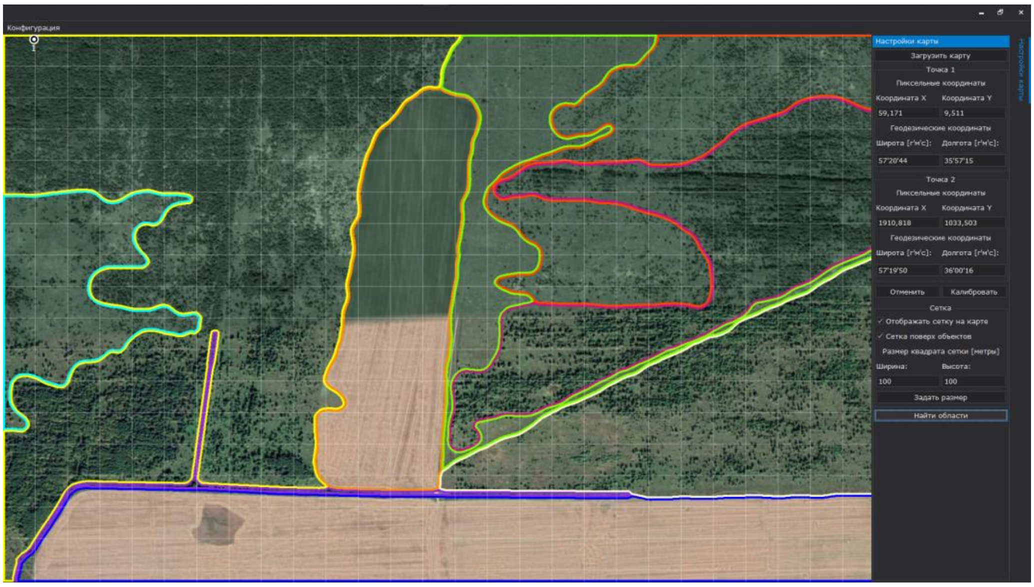


Рис. 3. Интерфейс программы

Объекты выделяются на основе одинаковой фрактальной размерности и собираются в блоки с линейными границами. Блоки идентифицируются нейронной сетью. По маркерам географической привязки определяется масштаб снимка и суммарные площади однотипных объектов. Площади идентифицированных объектов определяются на основе сетки с измеренными фрактальными размерностями как набора квадратов.

Программа позволяет проводить привязку снимков к глобальной карте. На основе этого делается оценка площади конкретных деградаций территории и оценка протяженности гидротехнических сооружений (дрен) в том числе заброшенных. Отдельной задачей является точная идентификация мелиоративных дрен, в особенности заброшенных и деградированных.

Может быть установлен режим суммирования, когда для серии снимков площади идентифицируемых однородных текстур суммируются.

Оценочно было проведено распознавание площадей деградированных территорий Тверской области. Они составили 520 тыс. гектар или 5,2 тыс. квадратных километров. Нераспознанные участки составили 210 тыс. га. При этом точность оценки составила около 40%

Более подробно оценка была проведена для Рамешковского района Тверской области. Размеры деградированной территории составили в сумме15,5 тыс. га из которых 2200 га закочкаренность, 6700 га закустаренность и слабая залесенность, 7100 га залесенность. 1100 га составили нераспознанные территории. Длина заброшенных дрен составила около 8,5 км. При этом точность распознавания оценочно составила 12%.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Потапов А. А., Пахомов А. А., Никитин С. А., Гуляев Ю. В. Новейшие методы обработки изображений. М.: Физматлит, 2008. 496 с.

2. Favorskaya M. N., Petukhov N. Y., Danilin I. M., Danilin A. I. Recognition of forest textures on airphotos // Proc, of the IASTED Intern. Conf, on Automation, Control, and Information Technology (ACIT’2010). Anaheim – Calgary – Zurich: ACTA Press, 2010. Vol. 691. P. 9-14.

3. Haykin S. Neural networks – A comprehensive foundation. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2005. 823 p.

4. Favorskaya M., Zotin A., Danilin I., Smolentseva S. Realistic 3D-modeling of forest growth with natural effect // Proc, of the Second KES International Symposium IDT 2010. Berlin – Heidelberg: Springer-Verlag, 2010. P. 191-199.Zhang T. Y., Suen C. Y. A fast parallel algorithm for thinning digital patterns // Commun. ACM. 1984. 27, N 5. P. 236-239.

5. Фаворская М. Н., Петухов Н. Ю. Комплексный расчёт характеристик ландшафтных изображений // Оптический журнал. 2010. 77, № 8. С. 54-60.

6. Mandelbrot B. B. The fractal geometry of nature. N. Y.: Freeman, 1982. 480 p.

УДК 372.851 + 378.4

СТРАТЕГИЧЕСКАЯ ПРОГРАММА РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА ТВЕРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

Чемарина Юлия Владимировна
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *стратегия, программа развития, математический факультет.*

Аннотация. В работе представлена программа развития математического факультета Тверского государственного университета на период с 2021 по 2026 годы.

Настоящая стратегическая программа развития математического факультета на 2021-2026 годы составлена в соответствии с программой развития ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» на 2020-2025 годы [1]. Программа разработана исходя из потребностей регионального рынка труда и направлена на содействие реализации региональных проектов в сфере цифровой экономики и федеральных проектов национальной программы «Цифровая экономика»: информационная безопасность; информационная инфраструктура; цифровые технологии; нормативное регулирование цифровой среды; кадры для цифровой экономики; цифровое государственное управление.

Миссия факультета

Основной целью деятельности математического факультета является повышение уровня математической науки, математического образования, а также подготовка квалифицированных кадров в области математики, компьютерных наук и информационной безопасности для реализации долгосрочных целей и задач социально-экономического развития Тверского региона.

Стратегические задачи факультета

1) Повышение качества математического образования в Тверском регионе.

2) Сохранение и укрепление кадрового потенциала общеобразовательных организаций и образовательных организаций высшего образования Тверского региона.

3) Обеспечение регионального рынка труда высококвалифицированными специалистами в области информационных технологий и компьютерной безопасности.

4) Актуализация образовательных программ в соответствии с содержанием профессиональных стандартов и требованиями организаций-работодателей.

5) Налаживание связей с внешними организациями в области образовательной и научно-исследовательской деятельности, внедрение сетевой формы реализации образовательных программ.

Современное состояние факультета

В настоящее время математический факультет Тверского государственного университета является основным центром математического образования в Твери и Тверской области, главным источником кадров высшей квалификации с высочайшим педагогическим и научным потенциалом.

Сегодня на математическом факультете обучается порядка 450 студентов, работают 6 профессоров и 25 доцентов. Обучение студентов осуществляется по направлениям бакалавриата «Математика» и «Математика и компьютерные науки», специалитета «Компьютерная безопасность» и магистратуры «Математика и компьютерные науки».

Каждое направление подготовки и специальность закреплены за одной из четырёх кафедр математического факультета: кафедрой математического анализа, кафедрой общей математики и математической физики, кафедрой функционального анализа и геометрии и кафедрой компьютерной безопасности и математических методов управления.

На математическом факультете ведутся научные исследования по широкому спектру направлений: от теории приближения функций до методов оптимального управления, от моделирования экономических процессов до теоретической физики. Ряд научных проектов на факультете имеют финансовую поддержку через систему грантов Российского фонда фундаментальных исследований.

Высокий уровень математических исследований поддерживается за счёт совместных научных проектов с ведущими вузами и лабораториями, в том числе лабораторией математического моделирования сложных ядерных систем и процессов, созданной в Тверском государственном университете совместно с Объединенным институтом ядерных исследований г. Дубна.

За свою историю математический факультет сохранил и закрепил за собой статус основного звена математического образования в Тверской области. Математический факультет тесно сотрудничает с Тверской региональной общественной организацией «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». Взаимодействие со школами, лицеями, гимназиями, колледжами обеспечивает качественный набор и является одним из основных факторов развития факультета и вуза в целом.

Ещё одно важное направление деятельности математического факультета – это работа с одарёнными детьми, их выявление и дальнейшее развитие математических способностей. Мы предлагает школьникам Тверского региона целый ряд бесплатных образовательных программ: «Школа по подготовке к ЕГЭ по математике, информатике и ИКТ», «Воскресные лектории», математическая олимпиада для школьников «МАТ-ОЛИМП». Вовлекая детей в мир математики, мы пытаемся создать основу для нашего будущего, для будущего математики.

Направления развития факультета

Кадровая политика

1) На сегодняшний день математический факультет не испытывает дефицита бюджетных ставок. Стабильный набор, увеличение контрольных цифр приема и сохранение контингента студентов позволяют не только заботиться о сохранении структурной целостности кафедр, но и планировать их развитие, расширение.

Главной задачей на 2021-2026 гг. является омоложение и укрепление кадрового состава кафедр факультета за счёт привлечения молодых специалистов, увеличения числа преподавателей-работодателей из профильных организаций, использования кадровых ресурсов вузов-партнеров.

2) Ужесточение требований образовательных и профессиональных стандартов ставит перед факультетом задачи по привлечению остепененных специалистов в области информационной безопасности и организации плановой работы по подготовке кадров высшей квалификации по специальности 05.13.19 Методы и системы защиты информации, информационная безопасность.

3) В 2021 году на математическом факультете открывается кафедра информационных систем и методов искусственного интеллекта в федеральном казенном учреждении «Научно-исследовательский институт информационных технологий федеральной службы исполнения наказаний». Создание кафедры должно способствовать эффективному использованию кадрового потенциала федерального казенного учреждения «Научно-исследовательский институт информационных технологий Федеральной службы исполнения наказаний» в образовательном процессе.

4) Также одним из направлений развития кадрового потенциала математического факультета является создание системы стимулирования непрерывного профессионального развития сотрудников за счёт организации прохождения сотрудниками программ повышения квалификации и программ профессиональной переподготовки.

Учебно-методическая работа

1) Среди основных задач факультета в области учебно-методической деятельности стоит выделить разработку эффективной модели взаимодействия региональных властей, вуза и бизнеса для актуализации образовательных программ факультета. Требования профессиональных стандартов и стремительно меняющийся рынок труда в сфере IT требуют улучшения механизма совершенствования компетентностной модели выпускника с учётом мнения работодателей, обучающихся, профессионального сообщества региона, внешних заинтересованных сторон, представителей национального и международного рынков труда, лучших практик.

2) В области фундаментальных направлений подготовки планируется к открытию новый профиль «Фундаментальная и прикладная математика» по направлению бакалавриата 01.03.01 Математика.

3) С целью привлечения в образовательный процесс специалистов в области информационной безопасности, отвечающих требованиям образовательного стандарта ФГОС ВО 3++, планируется реализация сетевой формы специалитета 10.05.01 Компьютерная безопасность в рамках отдельных дисциплин и практик.

4) Планируется создание в корпусе №3 ТвГУ библиотеки литературы ограниченного доступа, предназначенной для хранения и обеспечения использования в образовательном процессе нормативных и методических документов ограниченного доступа.

5) На данный момент на факультете активно ведется работа по реализации факультативных дисциплин. Большая часть этих дисциплин введена по инициативе ведущих IT-компаний региона. Планируется расширение спектра факультативных дисциплин и образовательных интенсивов, включение тематик из смежных областей знаний.

6) Одним из направлений развития образовательной деятельности факультета является внедрение проектной деятельности студентов в образовательный процесс. На данный момент в учебные планы направлений 02.03.01 Математика и компьютерные науки и 10.05.01 Компьютерная безопасность введен курс «Инновационная экономика и технологическое предпринимательство». В дальнейшем на этих направлениях подготовки планируется включение «студенческого проекта» в учебный план как самостоятельной дисциплины.

7) Традиционно будет продолжена работа по повышению успеваемости обучающихся путём введения в практику новых методик обучения, направленных на коррекцию низкой математической подготовки у части поступающих на факультет и на повышение мотивации у старшекурсников.

Научно-исследовательская работа

Основные направления работы:

1) Повышение публикационной активности преподавателей факультета. Создание внутрифакультетской системы стимулирования преподавателей, чья публикационная активность вносит ощутимый вклад в показатели эффективности образовательных программ факультета.

2) Всесторонняя поддержка молодых ученых факультета.

3) Создание условий для включения студентов в активную научную деятельность и введение приоритетного принципа обучения «обучение в процессе исследования» на старших курсах и в магистратуре.

4) Планирование и контроль в подготовке кадров высшей квалификации.

5) Расширение научного взаимодействия с участниками Консорциума «IT-образование – XXI век». Организация на базе вузов-участников совместных научных мероприятий, в том числе школы молодых учёных «Искусственный интеллект и анализ больших данных» и хакатона по информационным технологиям и компьютерной безопасности.

6) Проведение анализа возможностей научного сотрудничества факультета с предприятиями Тверской области и центрального региона, разработка и выполнение программы экономически взаимовыгодного сотрудничества.

7) Дальнейшая организация традиционных научных мероприятий факультета, в том числе Всероссийской научно-практической конференции «Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации».

8) Поддержка сборников научных трудов и журналов, выпускаемых факультетом.

Развитие материально-технической базы

Основной задачей по развитию материально-технической базы является закупка оборудования и программного обеспечения для лабораторий факультета: лаборатории сетей и систем передачи информации, лаборатории безопасности компьютерных сетей, лаборатории технической защиты информации, лаборатории программно-аппаратных средств обеспечения информационной безопасности.

Воспитательная работа

Основные задачи:

1) Совершенствование системы студенческого самоуправления.

2) Привлечение студентов факультета для оценки качества образования по образовательным программам факультета на всех этапах их реализации.

3) Организация работы по пропаганде здорового образа жизни среди студентов.

4) Поддержка волонтерского движения.

5) Привлечение студентов к профориентационной работе в школах области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Программа развития ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет» на 2020-2025 годы https://www.tversu.ru/innovations/programms/-strategy-2019-2025.pdf.

2. Чемарина Ю.В. Повышение цифровой грамотности преподавателей математических дисциплин / В сборнике Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27–28 марта 2020 года, г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2020. – С. 229-234.

3. Чемарина Ю.В., Голубев А.А. Об организации проектной деятельности студентов математического факультета Тверского государственного университета / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. (29-30 марта 2019 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2019. – С. 202-205.

4. Семыкина Н.А. Управление проектами в сфере информационной безопасности / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. (29-30 марта 2019 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2019. – С. 179-181.

5. Чемарина Ю.В., Шаповалова И.А. Об особенностях подготовки специалистов по информационной безопасности на математическом факультете Тверского государственного университета / В сборнике докладов XXIII пленума ФУМО ВО ИБ и Всероссийской научной конференции "Фундаментальные проблемы информационной безопасности в условиях цифровой трансформации" (ИНФОБЕЗОПАСНОСТЬ-2019). – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2019. – С. 205-212.

6. Чемарина Ю.В., Голубев А.А., Кратович П.В., Шаповалова И.А. О реализации концепции развития математического образования в российской федерации на математическом факультете Тверского государственного университета // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы научно-практической конференции. 2017. С. 162-165.

УДК 511.12

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ И ПРИЁМЫ РЕШЕНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕМЕ «ДЕЛИМОСТЬ ЧИСЕЛ»

Шаповалова Алёна Анатольевна
МОУ СОШ № 25, г. Тверь
E-mail: fedotova99@rambler.ru

Ключевые слова: *множитель, наибольший общий делитель, наименьшее общее кратное, каноническое разложение.*

Аннотация. В статье представлены некоторые методы и приёмы решения учебных задач, изучение и применение которых предусмотрено в курсе математики 6 класса в соответствии с рабочей программой ФГОС ООО. В конце статьи представлена небольшая подборка задач по теме «Признаки делимости», применение которых возможно как на уроках по данной теме, так и во время проведения внеклассных мероприятий.

Усвоение знаний и умений обучающихся, формирование приёмов мышления происходит в процессе решения различных заданий. Чтобы этот процесс был управляемым, учитель помогает обучающимся в овладении общими, специальными, частными методами и приёмами решения учебных задач. При этом важным моментом является выявление всех действий, входящих в состав конкретного метода или приёма, а также определение его структуры.

1. Методы нахождения наибольшего общего делителя (НОД)

1.1. <u>По определению.</u>

В основе метода лежит определение НОД: НОД дух чисел называется наибольший из общих делителей данных чисел.

Алгоритм нахождения НОД (a;b):

А) составление списка всех делителей a.

Б) составление списка всех делителей b.

В) находим одинаковые числа в этих списках.

Г) выбираем из найденных чисел наибольшее, оно и является НОД (a;b).

Замечания:

- в случае нахождения НОД для количества, большего двух, пункты А) и Б) дополняются аналогичными пунктами в количестве, равном числу чисел, НОД которых находится;

- составление списков делителей, нахождение одинаковых чисел в этих списках и выбор наибольшего из них задача весьма трудоемкая.

ПРИМЕР. Найти НОД (48; 64).

А) Делители 48: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

Б) Делители 64: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64.

В) Общие делители: 1, 2, 4, 8.

Г) НОД (48; 64) = 8.

1.2. Алгоритм Евклида – 1.

Данный метод основан на следующих утверждениях:

- если a и b – натуральные числа, причем a:b, то НОД (a;b)=b.
- если a и b – натуральные числа, причем b<a, то НОД (a;b)= НОД (a-b;b).

ПРИМЕР. Найти НОД (192; 102).

НОД (192; 102)= НОД (192-102; 102)= НОД (90; 102)= НОД (90; 102-90)= =НОД (90; 12)= НОД (78; 12)= НОД (66; 12)= НОД (54; 12)= НОД (42; 12)= = НОД (30; 12)= НОД (18; 12)= НОД (6; 12)=6.

1.3. Алгоритм Евклида – 2.

Применение темы «Деление с остатком». А именно, если a=bq+r, где $0 \le r < b$, то r = a – dq, поэтому r получается из a с помощью последовательного вычитания числа b.

Алгоритм нахождения НОД (a;b):

А) если $b \le a$ и a:b, то НОД (a;b)=b.

Б) в противном случае надо разделить a на b с остатком r_1, после этого разделить с остатком на r_1 и продолжить этот процесс, пока деление не будет выполнено без остатка. Если r_n – последний отличный от нуля остаток, то НОД (a;b)= r_n.

ПРИМЕР. Найти НОД (252;849).

849=3·252+93, 252=2·93+66, 93=1·66+27, 66=2·27+12, 27=2·12+3, 12=4·3. Следовательно, НОД (252;849)=3.

1.4. Через каноническое разложение.

В основе метода лежит понятие канонического разложения натурального числа на простые сомножители. Каноническим называется разложение вида: $m = a_1^{n_1} \cdot a_2^{n_2} \cdot \ldots \cdot a_k^{n_k}$, где $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – натуральные числа.

Алгоритм нахождения НОД (a;b):

А) нахождение каноническое разложение чисел a и b.

Б) выписать все общие простые множители, входящие в канонические разложения каждого из чисел a и b.

В) возвести каждый из выписанных в пункте Б) простых множителей в наименьшую степень, с которой этот множитель входит в канонические разложения чисел a и b.

Г) произведение полученных степеней простых множителей даёт НОД (a;b).

ПРИМЕР. Найти НОД (360; 8400).

А) $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 8400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$.

Б) 2,3,5

В) $2^3, 3,\ 5$.

Г) НОД (360; 8400)= $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

2. Методы нахождения наименьшего общего кратного (НОК)

2.1. Через НОД.

Суть метода состоит в том, что используется следующая формула, связывающая НОД и НОК чисел a и b: НОД (a;b) · НОК (a;b) = a · b.

Следовательно, НОК $(a;b) = \frac{a \cdot b}{\text{НОД}\,(a;b)}$.

ПРИМЕР. Найти НОК (252; 849).

849 · 252=213 948, НОД (252; 849) = 3, следовательно,

НОК (252; 849)=213 948:3=71 316.

2.2. Через каноническое разложение.

Алгоритм нахождения НОК (a;b):

А) нахождение каноническое разложение чисел a и b.

Б) выписать все общие простые множители, входящие в канонические разложения каждого из чисел a и b.

В) возвести каждый из выписанных в пункте Б) простых множителей в наибольшую степень, с которой этот множитель входит в канонические разложения чисел a и b.

Г) произведение полученных степеней простых множителей даёт НОК (a;b).

ПРИМЕР. Найти НОК (360; 8400).

А) $360=2^3 \cdot 3^2 \cdot 5, 8400 = 5^2 \cdot 2^4 \cdot 7 \cdot 3$.

Б) 2,3,5,7

В) $2^4, 3^2,\ 5^2, 7$.

Г) НОК (360; 8400)= $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 = 25\,200$.

3. Небольшая подборка задач по теме «Признаки делимости»

3.1. Выделение полного квадрата. Произведение четырёх последовательных чисел равно 15 120. Найдите эти числа.

Решение: 15 120 = 2·2·2·2·3·3·3·5·7=**5·6·7·8·9**.

3.2. В египетской пирамиде на гробнице начертано число 2 520. Почему именно этому числу выпала «такая честь»?

Решение: **данное число делится на все без исключений натуральные числа от 1 до 10**: 2520 = 2·2·2·3·3·5·7, таким образом, это число делится на 2,3,4,5,6,7,8,9,10.

3.3. В легенде рассказывается, что когда один из помощников Магомета – мудрец Хозрат Али садился на коня, к нему подошел человек и спросил:

- Какое число делится на 2,3,4,5,6,7,8,9 без остатка?

Мудрец ответил:

- Умножь число дней в неделе на число дней в нужном месяце и на число месяцев в году (считая, что в месяце 30 дней).

Прав ли Хозрат Али?

Решение: НОК (2,3,4,5,6,7,8,9) = 2 520, 2 520=7·30·12. Следовательно, **мудрец прав**.

3.4. Найдите наименьшее число, которое при делении на 2 даёт остаток 1, на 3 – остаток 2, на 4 – остаток 3, на 5 – остаток 4, на 6 – остаток 5, на 7 – остаток 6, на 8 – остаток 7, на 9 – остаток 8, на 10 – остаток 9.

Решение: если к искомому числу прибавить 1, то оно будет делиться на 2,3,4,5,6,7,8,9,10 без остатка. Таким числом является 2 520. А искомое число на 1 меньше, то есть **2 519**.

3.5. *Число Шахерезады 1001 равно произведению трех последовательных простых чисел: 7, 11, 13. Таким образом числа вида* $\overline{abcabc} = \overline{abc}$*·1001 делятся на 7, на 11, на 13, на 1001.*

Записав шесть различных чисел, среди которых нет 1, в порядке из возрастания и перемножив, получили в результате 135 135. Запишите числа, которые перемножили.

Решение: 135 135=1001·135, 135=3·5·9, 1001=7·11·13, следовательно, 135135 = **3·5·7·9·11·13**.

3.6. Делится ли число $10^{2021} + 8$ на 9?

Решение: Первая цифра этого числа – 1, последняя цифра – 8, а между ними 2020 раз повторяется цифра 0. Сумма цифр равна 9, значит, **число делится на 9.**

3.7. Делится ли число 11·21·31·41·51·61·71·81·91 – 1 на 10?

Решение: Последняя цифра произведения 1. При вычитании 1, получим на конце числа 0, следовательно, **число делится на 10**.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Виленкин Н.Я., Жохов В.И., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И. Математика. 6 класс. Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений. – М.: Мнемозина, 2013.

2. Попов М. А. Контрольные и самостоятельные работы по математике. 6 класс. К учебнику Н. Я. Виленкина и др. «Математика 6 класс». ФГОС – «Экзамен», 2011.

3. Вильдман И. Методы и приёмы решения задач /И. Вильдман // МАТЕМАТИКА. – 1999. - № 4. – С.25-27.

4. Интернет-проект «Задачи». [Электронный ресурс]. https://www.problems.ru (последнее обращение 02.03.2021 г.).

УДК 372.851.4

ОБ ОПЫТЕ ДИСТАНЦИОННОГО ПРЕПОДАВАНИЯ В ТВЕРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

Шаров Герман Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru

Ключевые слова: *дистанционное обучение, контроль качества.*

Аннотация. В заметке обобщается опыт автора и коллег в дистанционном преподавании математических дисциплин на математическом факультете ТвГУ в период с марта 2020 по февраль 2021 года.

В связи с пандемией коронавируса COVID-19 в марте 2020 года и позднее в ноябре того же года в Тверском государственном университете был осуществлен переход на дистанционное обучение. Соответствующие приказы ректора следовали рекомендациям Министерства науки и высшего образования РФ. На математическом факультете ТвГУ дистанционный формат обучения в указанные периоды был введен для всех дисциплин и всех видов занятий.

В Тверском государственном университете в течение ряда лет функционирует электронно-образовательная среда (ЭОС). С ЭОС и технологиями дистанционного обучения преподаватели факультета начали ознакомление задолго до пандемии, поэтому переход на удаленный режим практически у всех прошел успешно. В рамках ЭОС ТвГУ для проведения занятий, контрольных работ, выдачи и проверки заданий, выполнения курсовых и выпускных работ использовались следующие средства удаленного контакта:

- LMS-платформа (Learning management system),
- Microsoft Teams (платформа для удаленной видеосвязи в командах),
- электронная почта.

В LMS-платформу ЭОС ТвГУ внесены сведения о всех дисциплинах данного преподавателя и всех студентах, она дает широкие возможности для доведения до студентов текстов лекций, заданий, объявлений, проведения контрольных работ, приближенных к тестам, а также для проведения онлайн занятий в формате видеоконференций. Платформа MS Teams приспособлена для проведения занятий в группах онлайн. После создания группы она оказывается более удобной, чем LMS-конференция.

Эти средства предоставляют возможность вести дистанционно практически любую педагогическую деятельность. При этом экстренные потребности в таком режиме работы, вызванные пандемией, накладываются на многолетнюю рекламную кампанию дистанционного обучения, ведущуюся в профессиональном сообществе и в средствах массовой информации.

Действительно, удаленный формат образования обладает рядом привлекательных сторон и преимуществ. Оставим за скобками такие из них, как экономия различных ресурсов, в частности, экономия на транспортных расходах и возможность снижения количества преподавателей за счет объединения лекционных потоков. Надо оценивать всесторонне совокупный эффект от любых новаций и помнить, что в последние десятилетия сторонники бездумного бухгалтерского подхода, экономя копейки, нанесли огромный ущерб стране во многих отраслях.

Сосредоточимся на тех привлекательных и проблемных сторонах дистанционного формата образования, которые преподаватели могли наблюдать непосредственно на практике во время пандемии. Их своего личного опыта я делаю вывод, что успех в ходе удаленного обучения может быть достигнут при наличии по данному курсу подробного учебного пособия с детальным разбором примеров и многовариантного набора индивидуальных заданий для студентов. В идеале – задания для всех студентов должны быть различны, но приблизительно одной сложности. У меня такая ситуация сложилась с дисциплиной «Дифференциальная геометрия и топология» для 3-го курса направления «Математика», где в результате удаленной работы мне удалось продвинуться по объему материала и выполненных студентами заданий заметно больше, чем я рассчитывал изначально, планируя работу в очном формате. При этом лучшие студенты приятно удивили, продемонстрировав трудолюбие и работу мысли.

Однако внимательный анализ показывает, что упомянутый успех в объеме пройденного материала был достигнут за счет существенного уменьшения глубины теоретического обоснования изученных фактов и резкого сокращения числа и уровня сложных доказательств. Это было естественно – нельзя давать студентам больше материала, чем можно с них спросить на экзамене. А дистанционный экзамен сильно ограничивает возможности выявления истинного уровня подготовки студента в плане самостоятельного проведения доказательств. Кроме того, лучшие студенты, как правило, делали большой объем работы с индивидуальными заданиями.

Таким образом, указанное преимущество дистанционного обучения легко может быть достигнуто и в традиционном формате, если уменьшить глубину теории и объем доказательств. Но это – уже сложившаяся тенденция последних лет, которая, очевидно, является не достоинством, а бедой нашего математического образования.

Кроме этого, опыт показывает, что относительный успех в дистанционном обучении может быть достигнут только в студенческих группах с доминированием сильных и мотивированных студентов. Для слабых студентов, привыкших списывать и «вымаливать» незаслуженные тройки на экзаменах эта методика не помогает, а усугубляет проблемы. Эти студенты в удаленном режиме оттачивают навыки списывания, во время занятий они, обозначая присутствие, занимаются посторонними делами (они это делают и в очном режиме, дистанционный формат значительно расширяет возможности для обмана). По наблюдению моим и моих коллег месяцы дистанционного обучения снизили общий уровень и существенно увеличили разрыв между сильными и слабыми студентами, превратив последних в сверхслабых, признающихся, что успешная дистанционная сдача заданий и экзаменов была обеспечена «помощью друзей» и обманом.

Нельзя не отметить, что добросовестная работа в дистанционном формате увеличивает нагрузку на преподавателя в несколько раз. Дополнительная работа включает: а) подготовку к занятиям, что требует практически написания подробного учебного пособия к каждой лекции и письменному заданию; б) разработку множества вариантов индивидуальных заданий, эквивалентных, но различных: в) ответы на письма и вопросы студентов в постоянном режиме; г) проверку присылаемых выполненных заданий от десятков студентов с выявлением списывания, ошибок и указания на ошибки в ответных письмах; д) работу с дипломниками и выполнение других обязанностей преподавателя. При планировании и пропаганде дистанционного образования эта дополнительная нагрузка, как правило, не учитывается: создание текстов и изображений на компьютере полагаются столь же легкими видами деятельности, как речь и рисование на доске.

В дополнение к перечисленным недостаткам дистанционного обучения, отметим затрудненность использования такой формы обучения, как работа студента у доски. Вследствие этого возникает недостаток живого общения студентов с преподавателем, включающего оперативную реакцию на ошибки студентов. Накопление неразъясненных ошибок и заблуждений отягощает успешное освоение математических дисциплин.

Подводя итог, укажем, что переход на дистанционное обучение на математических направлениях и специальностях вузов следует рассматривать как экстренную меру для случаев, подобных текущей пандемии. Вне таких чрезвычайных ситуаций переход на эту форму образования способен вызвать множество отрицательных последствий, часть из которых была описана выше.

УДК 517.95, 532.5

О МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ ДВУМЕРНОЙ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Шеретов Юрий Владимирович
Тверской государственный университет, г.Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *система Навье–Стокса, квазигидродинамическая система, точные решения.*

Аннотация. Предложен метод построения точных решений двумерной квазигидродинамической системы. Показано, что с любым гладким решением некоторой переопределенной системы дифференциальных уравнений в частных производных можно связать общее решение квазигидродинамической системы и системы Навье-Стокса. Любая собственная функция двумерного оператора Лапласа также порождает общее решение указанных систем. Приведены примеры точных решений.

Двумерная квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости [1, 2] без учета внешних сил имеет вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial w_x}{\partial x}+\frac{\partial w_y}{\partial y}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+(u_x-w_x)\frac{\partial u_x}{\partial x}+(u_y-w_y)\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}=$$
$$=\nu\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial(u_x w_x)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y w_x)}{\partial y}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}+(u_x-w_x)\frac{\partial u_y}{\partial x}+(u_y-w_y)\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}=$$
$$=\nu\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right)+\nu\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)+\frac{\partial(u_x w_y)}{\partial x}+\frac{\partial(u_y w_y)}{\partial y}. \tag{3}$$

Здесь

$$w_x=\tau\left(u_x\frac{\partial u_x}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_x}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial x}\right),$$
$$w_y=\tau\left(u_x\frac{\partial u_y}{\partial x}+u_y\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial p}{\partial y}\right).$$

Символом ν обозначен коэффициент кинематической вязкости. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1) – (3) замкнута относительно неизвестных функций – компонент вектора скорости $u_x=u_x(x,y,t)$, $u_y=u_y(x,y,t)$ и давления $p=p(x,y,t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – постоянная скорость звука в жидкости. При $\tau \to +0$ система (1) − (3) переходит в классическую двумерную систему Навье−Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости.

Рассмотрим переопределенную систему уравнений в частных производных

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi + C(t), \tag{4}$$

$$\Delta \psi = -\omega, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}\frac{\partial \omega}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \omega}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Здесь $C(t)$ − заданная бесконечно дифференцируемая функция на промежутке $[0, +\infty)$,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

− двумерный оператор Лапласа. Система (4) − (6) включает две неизвестные функции $\psi = \psi(x, y, t)$ и $\omega = \omega(x, y, t)$.

Определение. *Решение* (ψ, ω) *системы (4) − (6) назовем гладким, если* $\psi \in C^\infty(V)$ *и* $\omega \in C^\infty(V)$, *где* $V = R^2_{x,y} \times [0, +\infty)$.

Теорема 1. *Пусть* (ψ, ω) *– гладкое решение системы (4) – (6). Тогда тройка функций* (u_x, u_y, p) *образует бесконечно дифференцируемое на множестве* V *общее точное решение системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы. Здесь*

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \tag{7}$$

$$p = p_0(t) + \int_{(0,0)}^{(x,y)} \left(Q(x_*, y_*, t)dx_* + R(x_*, y_*, t)dy_* \right). \tag{8}$$

Символом $p_0(t)$ *обозначена произвольная бесконечно дифференцируемая функция времени на промежутке* $[0, +\infty)$,

$$Q = -u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} - u_y \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

$$R = -u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} - u_y \frac{\partial u_y}{\partial y}.$$

Пример 1. Если функция $C(t)$ равна нулю на промежутке $[0, +\infty)$, то уравнение (4) принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \nu \Delta \psi. \tag{9}$$

Уравнение теплопроводности (9) имеет на V решение

$$\psi = \frac{A}{t_0 + t} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu(t_0 + t)} \right). \tag{10}$$

Здесь t_0 − заданная положительная константа, постоянная A имеет размерность $см^2$. По формуле (5) вычисляем завихренность

$$\omega = \frac{A}{\nu(t_0 + t)^2} \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{4\nu(t_0 + t)} \right) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu(t_0 + t)} \right).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в выполнении условия (6). С помощью (7), (10) находим компоненты вектора скорости

$$u_x = -\frac{Ay}{2\nu(t_0 + t)^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu(t_0 + t)} \right), \tag{11}$$

$$u_y = \frac{Ax}{2\nu(t_0 + t)^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\nu(t_0 + t)} \right). \tag{12}$$

Формула (8) позволяет найти распределение давления:

$$p = p_\infty - \frac{A^2}{4\nu(t_0 + t)^3} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\nu(t_0 + t)} \right). \tag{13}$$

Здесь p_∞ − давление в бесконечно удаленной точке. Формулы (11) − (13) задают общее точное вихревое решение систем Навье−Стокса и КГД.

Теорема 2. *Пусть* ψ_0 − *отличная от тождественного нуля собственная функция оператора* $(-\Delta)$ *класса гладкости* $C^\infty(R^2_{x,y})$, *соответствующая собственному числу* λ. *Тогда тройка функций* (u_x, u_y, p), *определяемых формулами*

$$u_x = \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \exp(-\lambda \nu t), \tag{14}$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \exp(-\lambda \nu t), \tag{15}$$

$$p = p_1(t) - \frac{1}{2} \left(\lambda \psi_0^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y} \right)^2 \right) \exp(-2\lambda \nu t), \tag{16}$$

задает на множестве V *общее точное бесконечно дифференцируемое решение системы Навье−Стокса и квазигидродинамической системы. Здесь* $p_1(t)$ − *произвольная бесконечно дифференцируемая функция на промежутке времени* $[0,+\infty)$.

Пример 2. Непосредственной проверкой убеждаемся в том,

$$\psi_0 = -\frac{U_0 H}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi y}{H}\right)$$

− собственная функция оператора $(-\Delta)$, отвечающая собственному числу $\lambda = 4\pi^2 / H^2$. Здесь U_0 и H − положительные константы, имеющие размерности $см/с$ и $см$ соответственно. Используя формулы (14) − (16), находим

$$u_x = U_0 \sin\left(\frac{2\pi y}{H}\right)\exp\left(-\frac{4\pi^2 \nu t}{H^2}\right), \tag{17}$$

$$u_y = 0\,, \tag{18}$$

$$p = p_2(t)\,. \tag{19}$$

Здесь $p_2(t)$ − произвольная функция времени. Набор функций (17) − (19) представляет собой общее точное решение систем Навье−Стокса и КГД.

Представленные здесь теоретические результаты подробно изложены в [3]. Метод построения точных решений классической системы Навье−Стокса на основе собственных функций оператора $(-\Delta)$ был известен [4]. Научное направление, связанное с конструированием новых вычислительных алгоритмов на основе регуляризованных уравнений гидродинамики, также интенсивно развивается. Некоторые полученные в последнее время результаты представлены в [5−8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2009. 400 с.

2. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. 222 с.

3. Шеретов Ю.В. О построении точных решений двумерной квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2021. № 1. В печати.

4. Prosviryakov E.Yu. Exact solutions to generalized plane Beltrami–Trkal and Ballabh flows // Вестник СамГТУ. Серия: Физико-математические науки. 2020. Т. 24. № 2. С. 319 − 330. https://doi.org/10.14498/vsgtu1766

5. Стенина Т.В., Елизарова Т.Г., Крапошин М.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики в задаче моделирования дискового насоса и их реализация в рамках программного комплекса OpenFOAM // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 66. 30 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-66

6. Balashov V.A., Zlotnik A.A. An energy dissipative semi-discrete finite-difference method on staggered meshes for the 3D compressible isothermal Navier−Stokes−Cahn−Hilliard equations // Journal of Computational Dynamics. 2020. Vol. 7. № 2. Pp. 291 − 312. https://doi.org/10.3934/jcd.2020012

7. Балашов В.А., Савенков Е.Б. Регуляризованная модель типа фазового поля для описания динамики системы «жидкость-твердое тело» // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 96. 29 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-96

8. Balashov V.A., Zlotnik A.A. On a New Spatial Discretization for a Regularized 3D Compressible Isothermal Navier−Stokes−Cahn−Hilliard System of Equations with Boundary Conditions // Journal of Scientific Computing. 2021. Vol. 86. № 33. Pp. 1− 30. https://doi.org/10.1007/s10915-020-01388-6

УДК 003.26

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ КРИПТОГРАФИИ С ДРЕВНИХ ВРЕМЕН ПО НАШЕ ВРЕМЯ

Щуров Иван Сергеевич
Тверской государственный университет, г. Тверь
E-mail: IwanShch@yandex.ru

Ключевые слова: *криптография, шифрование, дешифрование, история.*

Аннотация. В этой работе я постараюсь коротко рассказать о развитии криптографии, о её современном положении, а также разобрать работу некоторых шифров.

Криптография – это прикладная наука о шифровании информации, об обеспечении её конфиденциальности, целостности и аунтификации.

История криптографии составляет, по крайней мере, 4000 лет, за которые были достигнуты заметные успехи в её развитии.

Возникновение криптографии связывают с необходимостью скрывать передаваемую информацию. Первые обнаруженные сведения о таких методах скрытия восходят к Древнему Египту: в текстах Старого и Древнего царств были обнаружены специальные иероглифы, затрудняющие чтение. Однако, все-таки предполагают, что это было не целью египетских писцов, а результатом их стремления привлечь внимание к своим текстам.

В VI в. до н. э. был изобретен метод шифрования «Атбаш», который использовался в священных иудейских книгах. При этом шифровании символам алфавита ставились в соответствие символы этого же алфавита записанные в обратном порядке. Зашифровка и расшифровка состояла в замене символа на ему соответствующий. Пример использования шифра «Атбаш» (рис. 1).

Алфавит: английский;

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
z	y	x	w	v	u	t	s	r	q	p	o	n	m	l	k	j	i	h	g	f	e	d	c	b	a

Открытый текст: “For a city like New York, city transport is a big problem”.

Зашифрованный текст: Fli z xrgb orpv Nvd Ylip, xrgb gizmhklig rh z yrt kilyovn.

рис. 1

В конце V в. до н. э. в Древней Спарте было изобретено устройство для шифрования «Скитала» (рис. 2), которая представляла собой цилиндр. На неё наматывалась полоса пергамента, на которой писали передаваемое сообщение. После раскрутки полосы текст, написанный на ней, было возможно прочитать только после наматывания этой полосы на такой же стержень. Позже метод взлома этого шифра, как предполагается, придумал Аристотель: для взлома достаточно наматывать полосу пергамента на конусообразную палку, до тех пор, пока не будет составляться внятный текст.

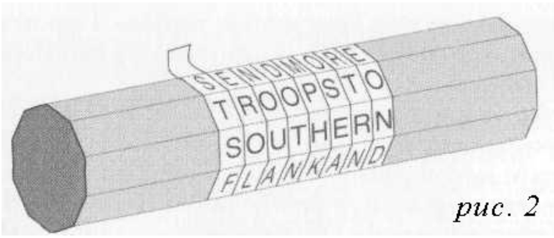


рис. 2

В IV в. до н. э. Эней Тактик изобретает «диск Энея» (рис. 3) и «линейку Энея» (рис. 4). Эти устройства использовались для зашифровки сообщений. Диск был размером 10 – 15 см с числом отверстий, равному числу букв в используемом алфавите.

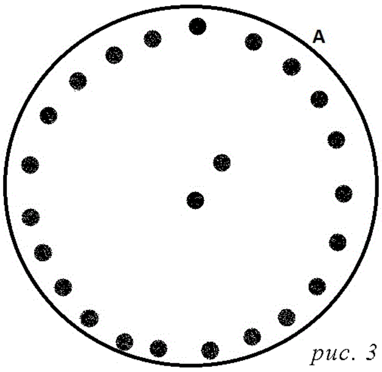


рис. 3

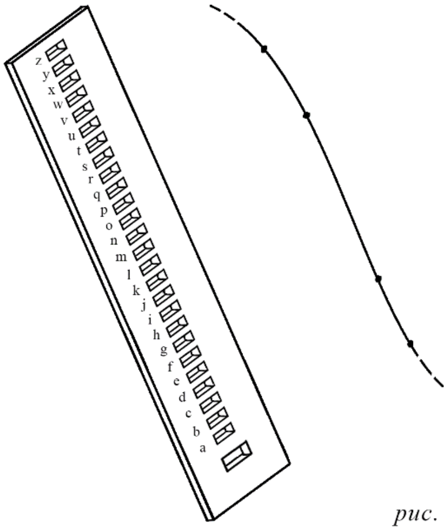


рис. 4

Для зашифровки с помощью диска необходимо было продевать нить через отверстия в нём в порядке букв сообщения, дешифровка с помощью диска происходила обратным образом. Для того чтобы уничтожить сообщение, нужно было лишь выдернуть нить или сломать диск так, чтобы разлом прошел по отверстиям (хотя бы по некоторым). Линейка Энея являлась усовершенствованным аналогом диска: в отличие от него для расшифровки сообщения требовалась ещё одна такая же линейка.

Далее был изобретен шифр, названный в честь Гай Юлия Цезаря, который его активно использовал. Применение шифра состояло в следующем: выбиралось значение, на которое циклически по используемому алфавиту будет сдвигаться каждая его буква, после чего таким образом происходило шифрование сообщения. (Циклический сдвиг состоит в вычислении символа зашифрованного текста по формуле: $n + m$ или $n + m - k$ в случае $n + m \geq k$, где n – номер-позиция в алфавите символа открытого текста, m – номер-позиция в алфавите символа-ключа, k – мощность алфавита.) Расшифровка выполняется обратным образом. Пример использования «шифра Цезаря» (рис. 5).

Со временем эти методы шифрования получили достаточно широкую известность, что требовало изобретения новых методов. Это привело к появлению в Средние века шифров омофонической и полиалфавитной замены.

Алфавит: английский;

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

Ключ: c;

Открытый текст: “For a city like New York, city transport is a big problem”.

Зашифрованный текст: Hqt c ekvA nkmg Pgy aqtm, ekvA vtcpurqtv ku c dki rtqdngo.

рис. 5

С VIII в. н. э. криптография продолжает развиваться в основном в арабских странах. Разрабатываются новые методы для дешифрования сообщений: так, предполагается, что первым обратил внимание на возможность использования частых фраз для расшифровки арабский филолог Халиль аль-Фарахиди. Метод состоял в следующем: предполагалось, что в одном из текстов, например первым, встретится определенное слово: так, принято говорить друг другу при встрече «привет» или «здравствуйте». Имея первое слово, определяли ключ и расшифровывали текст. Затем Халиль аль-Фарахиди пишет книгу, в который описывает этот метод дешифровки.

После пишутся и другие книги: в 855 г. выпускается книга «Книга о большом стремлении человека разгадать загадки древней письменности» арабского ученого Абу Бакр Ахмед ибн Али Ибн Вахшия ан-Набати. В этой книге описывается несколько шифров. Позже книгу «Манускрипт о дешифровке криптографических сообщений» выпускает Ал-Кинди. В этой книге впервые упоминается метод частотного анализа. Позже выпускаются и другие книги.

Первая организация, связанная исключительно с криптографией, была создана в Венеции в 1452 г. В ней работало три секретаря, которые занимались созданием и взломом шифров по заданиям правительства. В XVIII в. подобные организации распространяются по всей Европе в связи с пониманием важности криптографии: её развитие, например, позволяло передавать секретные сообщения или расшифровывать перехваченные.

В книге «Полиграфия», которая была издана в 1518 г., Иоганн Тритемий описывает шифр, при котором каждая из букв открытого текста шифруется своим шифром сдвига. Этот шифр позже назвали шифром Виженера, который занимался им в XVI веке. «Шифр Виженера» при длине ключа равной длине открытого текста является абсолютно стойким шифром.

Работу «шифра Виженера» можно описать следующим образом: из букв используемого алфавита составляется слово-ключ. Далее оно мысленно друг за другом записывается над всеми символами открытого текста. После чего символам открытого текста ставятся в соответствие символы исходного алфавита, которые имею позицию, вычисленную по формуле: $n + m$ или $n + m - k$ в случае $n + m \geq k$, где n – позиция в алфавите символа открытого текста, m – позиция в алфавите символа слова-ключа, k – мощность алфавита. Пример использования «шифра Виженера» (рис. 6).

Алфавит: английский;

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51

Ключ: tram;

Открытый текст: “For a city like New York, city transport is a big problem”.

Зашифрованный текст: YFr m vztK Ezkq gvw kHIk, oBKy FKrnEIFrF BJ a nBx pDHslqF.

рис. 6

В 1550 г. итальянский математик Джероламо Кардано разработал первый транспозиционный шифр «решетка Кардано». Этот шифр сочетал в себе стенографию и криптографию: по тексту было не очевидно, что он содержит зашифрованное сообщение, для расшифровки к тексту прикладывался специальный трафарет, в прорезях которого было записано передаваемое сообщение. Пример использования «решетки Кардано» (рис. 7).

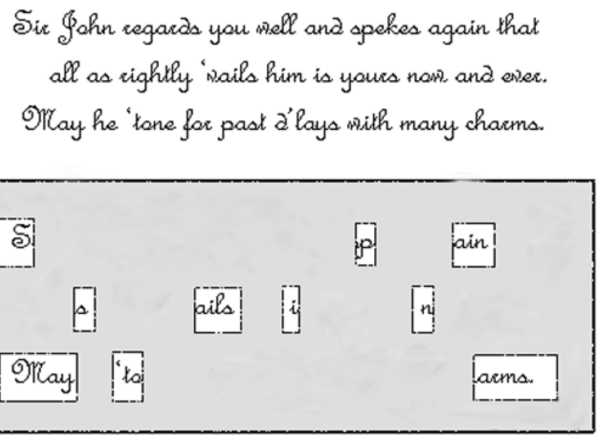


рис. 7

В 1580 г. Фрэнсис Бэкон в своей работе описывает способ кодирования символов английского алфавита. Так, Бэкон предлагает сопоставлять каждому из символов алфавита последовательность определенной длины из двух разных символов, например «А» и «В». Тогда относительно современного английского алфавита таблица перевода последовательностей из этих символов имеет вид:

a	AAAAA	g	AABBA	m	ABBAA	s	BAABA	y	BBAAA
b	AAAAB	h	AABBB	n	ABBAB	t	BAABB	z	BBAAB
c	AAABA	i	ABAAA	o	ABBBA	u	BABAA		
d	AAABB	j	ABAAB	p	ABBBB	v	BABAB		
e	AABAA	k	ABABA	q	BAAAA	w	BABBA		
f	AABAB	l	ABABB	r	BAAAB	x	BABBB		

Способ скрытия сообщения может быть следующий: сопоставлять символам «А» курсивные символы, а символам «В» не курсивные символы. Пример использования «шифра Бэкона» (рис. 8).

Алфавит: английский;

Текст: “For a city like New York, city transport is a big problem”.

Открытый текст: metro;

m e t r o

ABBAA AABAA BAABB BAAAB ABBBA

Текст с сообщением:

*F*or *a* *cit*y *li*k*e* *N*ew Y*ork*, c*i*ty t*r*ansport is a big problem.

рис. 8

В 1790 годах будущий президент США Томас Джефферсон строит одну из первых механических роторных машин, которые упрощают использование полиалфавитных шифров. Распространение подобные устройства получили лишь в начале XX в.

Большой толчок в развитии криптографии дало изобретение телеграфа в 1837 г. Это связано со скоростью передачи сообщений. Но, сама передача переставала быть секретной.

В 1863 г. Чарльз Бэббидж и Фридрих Касиски независимо открывают метод, который был назван «Метод Касиски», криптоанализа полиалфавитных шифров: «шифр Виженера» становится более уязвим, практически все шифры этого времени становятся доступными для вскрытия. Он состоит в определении длины ключевого слова, после чего его вычислении.

В конце XIX – начале XX веков многие страны вновь начинают стимулировать развитие криптографии. В 1920 г. вводятся понятия «криптология», «криптоанализ», во многих странах появляются патенты на машины, использующие принципы криптографического диска и автоматизирующие процесс шифрования.

В 1929 г. Лестер Хилл публикует статью, в которой описывает принцип построения криптографических систем, для которых математически доказана неуязвимость частотных атак.

Вторая Мировая война способствует развитию криптографии и информатики: для расшифровки немецких сообщений, зашифрованных с помощью машины «Энигма», в Англии был изобретен по факту первый компьютер.

Ближе к XXI криптография постепенно перестает быть занятием узкого круга лиц: публикуются книги по ней, вызывающие не малый интерес. Начинает появляться больше специалистов в области криптографии, которые работают как на себя, так и на различные предприятия (не обязательно государственные). Начинают появляться национальные стандарты шифрования, а также активно разрабатываться новые методы шифрования. Сама криптография изменилась: теперь её, в частности, стали составлять «ассиметричные криптосистемы», «системы электронной цифровой подписи», «хеш-функции», и «квантовая криптография». Последняя в значительной степени определяет дальнейшую судьбу криптографии: предполагается, что после изобретения квантовых компьютеров, можно будет взломать почти любой из существующих ныне шифров. Это создает большую проблему для мирового сообщества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Жельников В. Криптография от папируса до компьютера. – М., 1996. 335 с.

2. Коробейников А. Г., Гатчин Ю. А. Основы криптографических алгоритмов. СПб : СПб ИТМО, 2004. 29 с.

3. С. А. Дориченко, В. В. Ященко. 25 этюдов о шифрах. Москва : ТЕИС, 1994. 72 с.

4. Баричев С. Г., Гончаров В. В., Серов Р. Е. Основы современной криптографии. Москва : Горячая линия – Телеком, 2001. 42 с.

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано в печать 12.04.2021. Формат 60x84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 13,02. Тираж 300 экз. Заказ № 89.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.