Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Тверской государственный университет»

Тверская региональная общественная организация
«Ассоциация учителей и преподавателей математики
Тверской области»

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
Всероссийской научно-практической конференции

Тверь, 27–28 марта 2020 года

ТВЕРЬ 2020

УДК 373.5.016:51(082)
ББК Ч426.221я43
П27

П27 Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации: материалы Всероссийской научно-практ. конф. (27–28 марта 2020 года, г. Тверь). Тверь: Тверской государственный университет, 2020. 248 с.

В сборнике трудов представлены материалы Всероссийской научно-практической конференции, состоявшейся 27–28 марта 2020 г. в г. Твери. Организаторами конференции выступили математический факультет Тверского государственного университета и Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области».

Издание предназначено для научных и педагогических работников, преподавателей, аспирантов, магистрантов и студентов педагогических вузов и колледжей с целью использования в научной и учебной деятельности.

Материалы издаются в авторской редакции.

ISBN 978-5-7609-1518-4

СОДЕРЖАНИЕ

УДК 539.3

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ ПО ДВУЗВЕННЫМ ЛОМАНЫМ ТРАЕКТОРИЯМ ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Елена Геннадьевна Алексеева
Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва
E-mail: super_aeg@mail.ru

Андрей Алексеевич Алексеев
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: alexeew@bk.ru

Вадим Иванович Гультяев
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: vig0@mail.ru

Владимир Георгиевич Зубчанинов
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: vlgzub@gmail.com

Ключевые слова: *математическое моделирование, теория упругопластических процессов, задача Коши, численный анализ.*

Аннотация. В работе представлены результаты математического моделирования процессов упругопластического деформирования материала сталь 45 по двузвенным ломаным с различными характерными углами излома в 45, 90 и 135 градусов. Показано хорошее соответствие модельных и экспериментальных данных.

Современная вычислительная механика деформируемого твердого тела, в том числе теория пластичности, немыслима без применения компьютерного и математического моделирования, которое позволяет создавать модели процессов деформационного поведения конструкционных материалов. При этом, удобно использовать векторное представление тензоров напряжений и деформаций по А.А. Ильюшину, когда в линейном совмещенном пространстве E_6 с ортонормированным базисом $\{\hat{i}_k\}$ тензорам напряжений σ_{ij} и деформаций ε_{ij}

$$\sigma_{ij} = \sigma_0\delta_{ij} + S_{ij}, \quad \sigma_0 = \sigma_{ij}\delta_{ij}/3, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_0\delta_{ij} + Э_{ij}, \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}/3 \qquad (1)$$

ставятся в соответствие векторы

$$\bar{S} = S_0\hat{i}_0 + \bar{\sigma}, \quad \bar{\sigma} = S_k\hat{i}_k, \quad \bar{\varepsilon} = Э_0\hat{i}_0 + \bar{Э}, \quad \bar{Э} = Э_k\hat{i}_k, \quad (k = 1,2,...5), \qquad (2)$$

где координаты векторов S_k, $Э_k$ связаны с компонентами тензоров σ_{ij}, ε_{ij} и девиаторов S_{ij}, $Э_{ij}$ известными взаимно однозначными преобразованиями [1, 2]. Объемная деформация в E_6 предполагается упругой согласно закону $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$, где K – модуль упругой объемной деформации. Согласно постулату изотропии А.А. Ильюшина [1], векторы формоизменения $\bar{\sigma}$ и $\bar{Э}$ связаны определяющими соотношениями, которые для плоских прямолинейных траекторий имеют вид [2]

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = M_1 \frac{d\bar{Y}}{ds} + \left(\frac{d\sigma}{ds} - M_1 \cos\vartheta_1\right)\frac{\bar{\sigma}}{\sigma}, \qquad \frac{d\vartheta_1}{ds} = -\frac{M_1}{\sigma}\sin\vartheta_1, \tag{3}$$

где M_1, $\dfrac{d\sigma}{ds}$ – функционалы процесса деформирования, зависящие от следующих параметров сложного нагружения: s – длины дуги траектории деформирования и углов ее излома ϑ_1^0. Угол сближения ϑ_1 характеризует направление вектора $\bar{\sigma}$ по отношению к касательной к траектории деформирования в каждой ее точке. Этот угол отражает влияние на процесс деформирования векторных свойств материала.

В математической модели теории процессов пластического деформирования материалов в дополнение к уравнениям (3) используются универсальные аппроксимации функционалов

$$\sigma(s) = \hat{O}(s) - Af^{p}\left(\vartheta_1^0\right)\Omega(\Delta s), \quad M_1 = 2G_{\eth} + \left(2G - 2G_{\eth}^0\right)f^{q}, \tag{4}$$

где $\hat{O}(s)$ — универсальная функция нагружения Одквиста-Ильюшина для процессов, близких к простым; G, G_p — упругий и секущий модули сдвига; $\Delta s = s - s_{\hat{E}}^{\grave{o}}$; $s_{\hat{E}}^{\grave{o}}$ – длина дуги в точке K излома траектории;

$$f = \frac{1-\cos\vartheta_1}{2}, \qquad \Omega(\Delta s) = \gamma \Delta s\, e^{-\gamma\Delta s} + b\left(1 - e^{-\gamma\Delta s}\right) \tag{5}$$

– функции сложного нагружения; A, b, γ, p, q – экспериментально определяемые параметры материала [2]. Индекс «нолик» относится к величинам в точке K излома траектории. Определяющие соотношения (3) с конкретизированными функционалами (4) и начальными условиями для каждого аналитеского участка траектории деформирования приведены к задаче Коши, численное решение которой реализовано методом Рунге-Кутта четвертого порядка точности с использованием программного комплекса MathWorks Matlab. При этом заданными являются траектории вектора деформаций, а траектории вектора напряжений получаются в результате интегрирования определяющих соотношений.

По изложенной выше математической модели были проведены экспериментальные исследования и численные расчеты процессов деформирования тонкостенных трубчатых образцов из стали 45 на автоматизированном комплексе СН-ЭВМ по двузвенным ломаным траекториям типа смещенного веера в плоскости $\acute{Y}_1 - \acute{Y}_3$. Согласно программам образцы на первом звене закручивались до значения $\acute{Y}_3^0 = 2\,\%$, а затем производился излом на углы 45°, 90° и 135°, где на втором звене образцы подвергались одновременному растяжению и кручению.

Результаты расчетов и экспериментов при испытании по ломаной траектории деформирования с углом излома 45° представлены на рис 1–4. Опытные данные отмечены кружочками. На рис. 1 представлена реализованная траектория деформирования в плоскости $\acute{Y}_1 - \acute{Y}_3$, а на рис. 2 приведен отклик на нее в пространстве напряжений на плоскости $S_1 - S_3$. На рис. 3 приведена диаграмма прослеживания процесса деформирования $\sigma - s$, характеризующая скалярные свойства материала, а на рис. 4 зависимость $\vartheta_1 - \Delta s$, характеризующая векторные свойства материала.

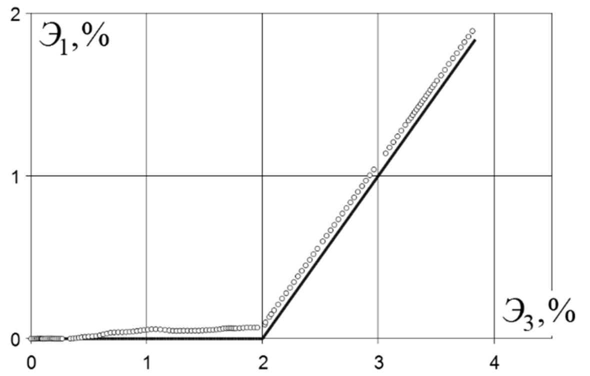


Рис. 1. Траектория с углом излома 45°

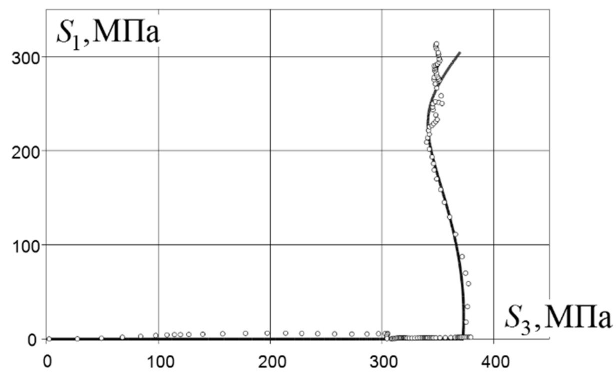


Рис. 2. Отклик $S_1 - S_3$

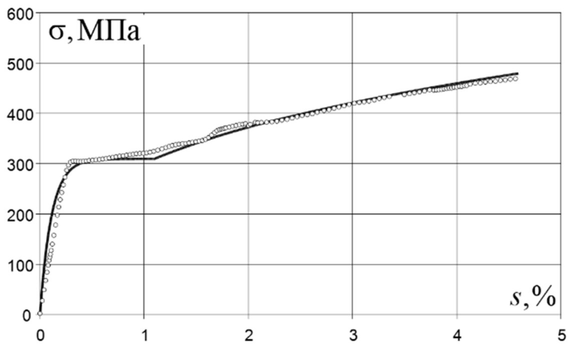


Рис. 3. Диаграмма $\sigma - s$

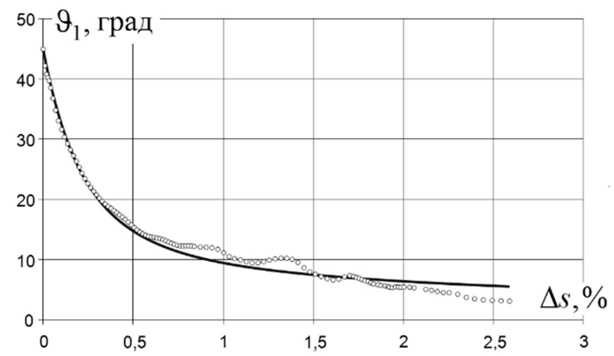


Рис. 4. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

На рис. 5–8 представлены результаты расчетов и экспериментов при испытании по ломаной траектории деформирования в плоскости $\acute{Y}_1 - \acute{Y}_3$ с углом излома 90°, а на рис. 9–12 – по траектории с углом излома 135°.

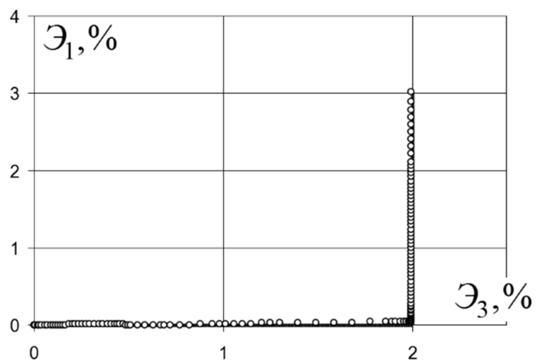


Рис. 5. Траектория с углом излома 90°

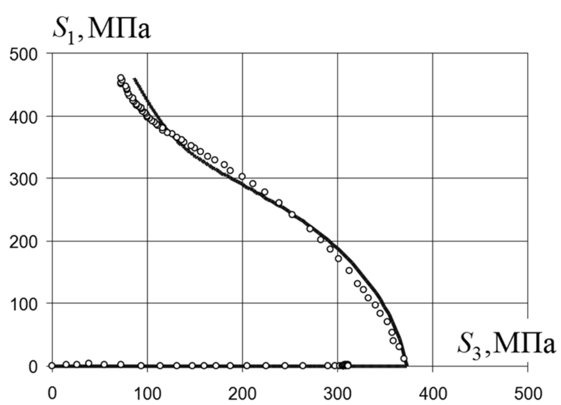


Рис. 6. Отклик $S_1 - S_3$

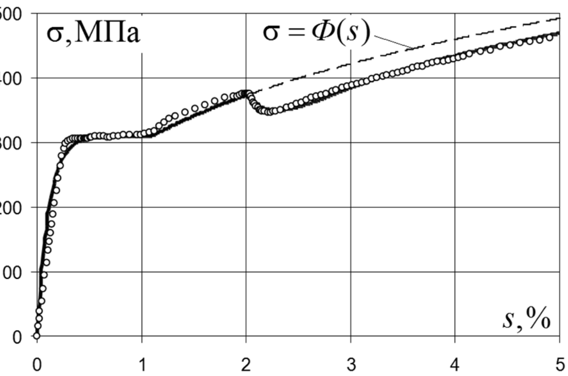


Рис. 7. Диаграмма $\sigma - s$

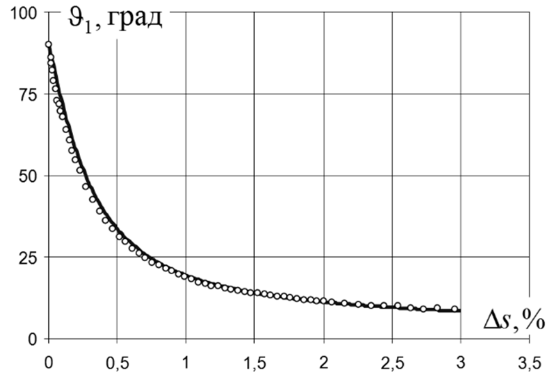


Рис. 8. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

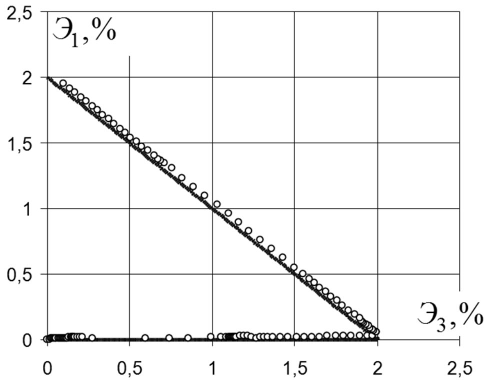


Рис. 9. Траектория с углом излома 135°

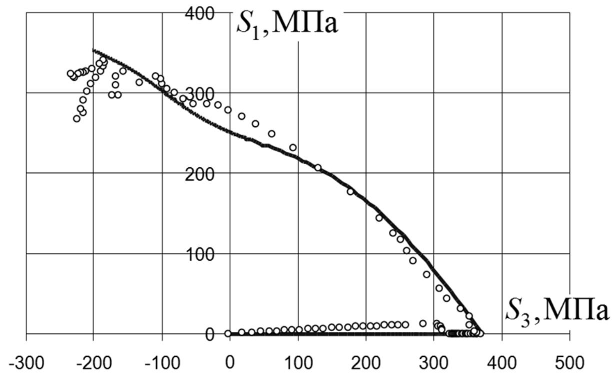


Рис. 10. Отклик $S_1 - S_3$

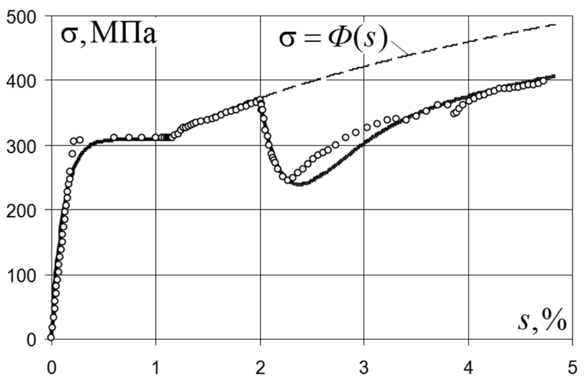


Рис. 11. Диаграмма $\sigma - s$

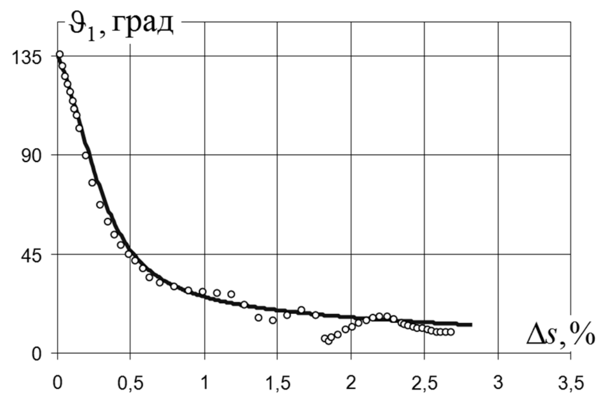


Рис. 12. Диаграмма $\vartheta_1 - \Delta s$

Как видно, численные расчеты по математической модели достаточно хорошо соответствуют экспериментальным результатам по скалярным и векторным свойствам, как качественно, так и количественно. Это показывает достаточную для практических задач достоверность расчетных данных, а также приемлемую для практических расчетов точность построенных аппроксимаций функционалов процессов в используемой математической модели теории процессов применительно к данному классу траекторий.

Модифицированный вариант математической модели успешно зарекомендовал себя на многозвенных кусочно-ломаных прямолинейных траекториях [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильюшин, А.А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность. / А.А. Ильюшин – М.: Физматлит, 2004. – 480 с.

2. Зубчанинов, В.Г. Механика процессов пластических сред / В.Г. Зубчанинов. М.: Физматлит, 2010. – 352 с.

3. Зубчанинов, В.Г. Моделирование процессов упругопластического деформирования материалов по многозвенным кусочно-ломаным прямолинейным траекториям / В.Г. Зубчанинов, А.А Алексеев, В.И. Гультяев // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. 2017. № 3. С. 203–215. DOI: 10.15593/perm.mech/2017.3.12

4. Процессы сложного нагружения конструкционной стали по пятизвенной кусочно-ломаной траектории деформирования / В.Г. Зубчанинов, А.А. Алексеев, В.И. Гультяев, Е.Г.Алексеева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2019. № 61. С. 32-44. DOI: 10.17223/19988621/61/4

УДК 378.1

ПРИЛИВНЫЕ СИЛЫ НА КРУГОВЫХ ОРБИТАХ ВОКРУГ ГРАВИТИРУЮЩИХ КОНФИГУРАЦИЙ СКАЛЯРНОГО ПОЛЯ

Лумонансони Эдуарду Андре
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: leandre@edu.tversu.ru , tsirulev.an@tversu.ru

Александр Николаевич Цирулев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: leandre@edu.tversu.ru , tsirulev.an@tversu.ru

Ключевые слова: *орбит приливные силы, скалярного поля черных дыр.*

Аннотация. Статические гравитирующие конфигурации скалярного поля играют важную роль в математическом моделировании геодезического движения вблизи центральных объектов нормальных галактик. В данной работе получены общие выражения для величины приливной силы, действующей на протяженное тело на круговой орбите, в статическом сферически-симметричном пространстве-времени. Изучаются приливные силы вблизи этих объектов в рамках математической модели, в которой скалярное поле приближенно описывает темную материю, концентрирующуюся вблизи центра галактики.

Введение. Тело конечных размеров, движущееся в гравитационном поле массивного объекта по ограниченной орбите, близкой к геодезической, испытывает внутренние напряжения, вызванные приливными силами. В сильном гравитационном поле эти воздействия не подчиняются законам ньютоновской механики и описываются тензорным полем кривизны. Уравнение, которое определяет относительные ускорения пробных частиц на близких геодезических, а, следовательно, и силы сжатия или растяжения, обусловленные неоднородностью гравитации и действующие внутри тела, в гравитационной физике называется уравнением девиации геодезических, а в дифференциальной геометрии — уравнением Якоби. Практический смысл расчетов приливных сил обусловлен их значением для интерпретации современных астрофизических наблюдений, в частности, наблюдений звезд класса S вблизи гравитирующего объекта Sgr A* в центре нашей Галактики [1, 2].

В общем случае, астрофизические объекты с сильным гравитационным полем и массой $m \sim 10^6 - 10^9 M_{\odot}$, обнаруженные в центрах нормальных галактик, не являются вакуумными. Как известно в настоящее время, они окружены гравитирующей темной материей, поэтому наблюдаемые параметры орбит и приливные силы, действующие на реальные (протяженные) объекты, могут существенно отличаться от тех, что предсказывают вакуумные модели [3]. В данной работе мы предполагаем, что темная материя может моделироваться вещественным скалярным полем, поскольку такая модель содержит достаточное количество свободных параметров для приближенного описания распределения темной материи в пределах, которые определены из современных наблюдений центров галактик. В галактиках масса темной матери по меньшей мере в три раза превосходит массу обычного вещества, причем концентрация ее плотности вблизи центра предсказывается всеми общепринятыми моделями. Отметим, что гравитирующие объекты в центрах галактик обычно отождествляются с черными дырами, однако в настоящее время нельзя уверенно исключить другие возможности (кротовые норы, голые сингулярности и т. д.) [5, 9].

Целью данной работы является сравнение величины приливной силы в окрестности двух сферически-симметричных конфигураций: вакуумной черной дыры, представленной решением Шварцшильда, и самогравитирующей скалярной конфигурации, моделирующей гравитирующий объект в центре галактики. В разделе II описан общий формализм расчета приливных сил в сферическисимметричном пространстве-времени. В разделе III кратко сформулированы результаты, относящиеся к черной дыре Шварцшильда. В разделе IV рассматриваются модели со скалярным полем и проводится сравнение результатов. Всюду используется сигнатура метрики $\{1, -1, -1, -1\}$ и геометрическая система единиц, в которой $G = c = 1$.

Основные уравнения. Пусть ξ^k– 4-вектор, нормальный к геодезической. Уравнение девиации геодезических (уравнение Якоби) имеет вид

$$\frac{d^2\xi^k}{ds^2} = R^k_{ijl} U^i U^j \xi^l \ , \tag{1}$$

где $U = U^i e_i$ – 4-скорость, а $R = R^k_{ijl} e_k \otimes e^i \otimes e^j \otimes e^l$ – кривизна в ортонормированном базисе, ассоциированном с метрикой сферически-симметричного пространства-времени, которую – для данной задачи – удобно записать в сферических координатах (t, r, θ, φ) в виде

$$ds^2 = A^2 dt^2 - B^2 dr^2 - C^2 (d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \, . \tag{2}$$

В статическом случае, когда метрические функции зависят только от радиальной координаты r, алгебраически независимые компоненты кривизны имеют вид

$$R_{0101} = -\frac{A_{(1)(1)}}{A}, \;\; R_{0202} = R_{0303} = -\frac{A_{(1)}C_{(1)}}{AC} \, ,$$

$$R_{2323} = \frac{C^2{}_{(1)} - 1}{C^2}, \;\; R_{1212} = R_{1313} = \frac{C_{(1)(1)}}{C} \, ,$$

где индекс (1) означает производную вдоль базисного поля e_1, например,

$$e_1 f \equiv f_{(1)} = (1/B)\partial_r f \ , \;\; e_1(e_1 f) \equiv f_{(1)(1)} = (1/B)\partial_r\big((1/B)\partial_r f\big).$$

Мы рассматриваем круговые орбиты $\theta = \pi/2$, где отличны от нуля только компоненты 4-скорости $U^0 = A dt/ds$ и $U^3 = C d\phi/ds$. Относительное ускорение и сила, создающая напряжение внутри тела, определяются только начальным пространственноподобным вектором $(0, \xi^1, \xi^2, \xi^3)$,так что нетривиальные уравнения в (1) имеют вид (нет сумм. по k)

$$\frac{d^2\xi^k}{ds^2} = f_k \xi^k \ , \quad f_k = f_k(r), \quad k = 1,2,3. \tag{3}$$

Учитывая, что на круговой орбите

$$(U^0)^2 = \frac{AC_{(1)}}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\ ,\ \ (U^3)^2 = \frac{A_{(1)}C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}$$

для компонент напряжений f_k получим выражения

$$f_1 = \frac{A_{(1)}C_{(1)(1)} - A_{(1)(1)}C_{(1)}}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\ , f_2 = \frac{-A_{(1)}/C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\ , f_3 = \frac{-A_{(1)}C^2{}_{(1)}/C}{AC_{(1)} - A_{(1)}C}\ ; \tag{4}$$

например, f_2 – сила, действующая на единичный элемент площади, расположенный перпендикулярно координатной кривой θ. Заметим, что $f_1 > 0\ , f_2 < 0\ , f_3 < 0$, поскольку $AC_{(1)} - A_{(1)}C \geq 0$ (равенство соответствует фотонной орбите).

Окрестность черной дыры Шварцшильда. Для вакуумной черной дыры Шварцшильда $A^2 - 1 - 2m/r = 1/B^2\ , C = r$. Простой подсчет дает для последней устойчивой орбиты с $r = 6m$ значение $f_1 = 1/(108m^2)$, которое совпадает со значением растягивающей приливной силы для радиального падения, в то время как силы, сжимающие тело в направлениях траектории движения и перпендикулярно плоскости орбиты, $f_2 = -1/(108m^2)$ и $f_3 = -1/(162m^2)$, отличаются коэффициентами 2 и 4/3 соответственно. Таким образом, в окрестности последней устойчивой орбиты приливные силы при радиальном падении и при движении по круговой орбите по порядку величины совпадают.

Скалярные конфигурации. В этом случае метрика имеет вид

$$ds^2 = e^{2F} f dt^2 - \frac{dr^2}{f} - r^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2) \tag{5}$$

т.е. $A^2 = e^{2F} f,\ B^2 = 1/f$. Метрические функции восстанавливаются формулами

$$F(r) = -\int_r^\infty \phi'^2 r dr\ \ ,\ \xi(r) = r + \int_r^\infty (1 - e^F) dr\ , \tag{6}$$

$$A^2 = 2r^2 \int_r^\infty \frac{\xi - 3m}{r^4} e^F dr\ ,\ f(r) = e^{-2F} A^2\ , \tag{7}$$

по произвольно (с учетом требования асимптотически плоской метрики) заданному скалярному полю $\phi(r)$ [6, 7, 8].

Основные отличия в величине приливной силы вблизи скалярной черной дыры и вблизи вакуумной черной дыры обусловлены тем, что в первом случае радиус горизонта событий и радиус последней устойчивой орбиты r_1 могут быть сколь угодно малыми. Пусть r_0 — корень уравнения $xi(r) - 3m = 0$, $r_0 > r_1$. Простые расчеты с использованием тождества

$$(A^2)' = \frac{2}{r} A^2 - 2\frac{\xi - 3m}{r^2} e^F$$

показывают, что приливные силы растут как $1/(r_0 r_1^2)$ при $r \to r_1 + 0$, в то время как знаки компонент соответствуют вакуумной черной дыре: $f_1 > 0$, $f_2 < 0$, $f_3 < 0$.

В случае скалярной голой сингулярности, поведение метрической функции А носит принципиально иной характер. В отличие от вакуумного случая, в котором голые сингулярности возможны только с отрицательной массой, скалярные голые сингулярности "в общем положении" имеют положительную массу, а функция А имеет минимум. Как показывают расчеты, вблизи них величина приливных сил для характерных масс центров галактик оказывается на порядки меньше чем для черных дыр, а в области покоя приливные силы отсутствуют.

Заключение. Наблюдения эффектов (разрыв протяженного тела, если рассматривается черная дыра, и т. п.), связанных с приливными силами могут быть полезными для идентификации объектов в центрах галактик, если скалярно-полевая модель темной материи адекватно описывает ситуацию в центрах галактик. Отметим, что в вакуумном случае приливные силы оказываются слишком слабыми, чтобы такие наблюдения были информативны.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P.S. Joshi, D. Malafarina, R. Narayan, Distinguishing black holes from naked singularities through their accretion disc properties. Class. Quant. Grav. 31, 015002 (2014) arXiv: 1304. 7331.
2. M. Grould, F.H. Vincent, T. Paumard, G. Perrin, General relativistic effects on the orbit of the S2 star with GRAVITY. Astron. Astrophys. 608, A22 (2017) arXiv: 1709.04492.
3. V.H. Robles, T. Matos, Flat central density profile and constant dark matter surface density in galaxies from scalar field dark matter. Mon. Not. R. Astron. Soc. 422, 282–289 (2012) arXiv: 1201.3032.
4. D. Benisty, E. I. Guendelman, Interacting diffusive unified dark energy and dark matter from scalar fields. Eur. Phys. J. C 77, 396 (2017) arXiv: 1701.08667.
5. P.V. Kratovitch, I.M. Potashov, Ju.V. Tchemarina, A.N. Tsirulev, Topological geons with self-gravitating phantom scalar field. Journal of Physics: Conference Series 934, 012047 (2017) arXiv: 1805.04447.
6. I.M. Potashov, Ju.V. Tchemarina and A.N. Tsirulev. Bound orbits near scalar field naked singularities. Europ. Phys. Journ. C, 79:709, 10pp (2019) doi:10.1140/epjc/s10052-019-7192-7.
7. Ju.V. Tchemarina, A.N. Tsirulev, Spherically symmetric gravitating scalar fields. The inverse problem and exact solutions. Gravitation and Cosmology 15, 94–95 (2009).
8. D.A. Solovyev, A.N. Tsirulev, General properties and exact models of static selfgravitating scalar field configurations. Class. Quantum Grav. 29, 055013 (2012).
9. M. Cadoni, E. Franzin, F. Masella, M. Tuveri, A solution-generating method in Einstein-scalar gravity. Acta. Appl. Math. (2018) doi: 10.1007/s10440-018-00232-2.

УДК 004.032.26

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИСКУССТВЕННОЙ НЕЙРОННОЙ СЕТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Елена Аркадьевна Андреева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Людмила Георгиевна Кожеко
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Ключевые слова: *нейронная сеть, дискретная задача оптимального управления, искусственный интеллект, нейросетевые алгоритмы.*

Аннотация. Рассмотрены различные правила и схемы обучения нейронных сетей. Для некоторой модели дискретной нейронной сети с запаздыванием проведен анализ влияния параметров задачи на оптимальное решение.

Нейронаука в современный момент переживает период перехода от юного состояния к зрелости. Развитие в области теории и приложений нейронных сетей идет в самых разных направлениях: идут поиски новых нелинейных элементов, которые могли бы реализовывать сложное коллективное поведение в ансамбле нейронов, предлагаются новые архитектуры нейронных сетей, идет поиск областей приложения нейронных сетей в системах обработки изображений, распознавания образов и речи, робототехники и др.

Исторически первой работой, заложившей теоретический фундамент для создания искусственных моделей нейронов и нейронных сетей, принято считать опубликованную в 1943 г. статью Уоррена С.Маккаллока и Вальтера Питтса "Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности".

Рис. 1. Функциональная схема формального нейрона Маккалока и Питса

Большинство современных моделей опираются в своей основе на различных модификациях формального нейрона. Важным развитием теории формального нейрона является переход к аналоговым (непрерывным) сигналам, а также к различным типам нелинейных переходных функций.

Исторически первой работой, заложившей теоретический фундамент для создания искусственных моделей нейронов и нейронных сетей, принято считать опубликованную в 1943 г. статью Уоррена С.Маккаллока и Вальтера Питтса "Логическое исчисление идей, относящихся к нервной активности".

С точки зрения **классификации нейронных сетей и их свойств** топологии можно выделить три основных типа нейронных сетей:

• полносвязные (рис. 5, а);

• многослойные или слоистые (рис. 5, б);

• слабосвязные (с локальными связями) (рис. 5, в).

Рис. 2. Архитектуры нейронных сетей:
а - полносвязная сеть, б - многослойная сеть с последовательными связями, в - слабосвязные сети

Важным этапом использования ИНС ЯВЛЯЕТСЯ обучение ИНС путем последовательного предъявления входных векторов с одновременной подстройкой весов. Различают СЛЕДУЮЩИЕ алгоритмы обучения: с учителем, без учителя и смешанное.

Обучение с учителем предполагает, что для каждого входного вектора существует целевой вектор, представляющий собой требуемый выход.
Обычно сеть обучается на некотором числе обучающих пар, КОГДА КАЖДОМУ ВХОДНОМУ ВЕКТОРУ СТАВИТСЯ В СООТВЕТСТВИЕ ВЫХОДНОЙ ВЕКТОР. Предъявляется выходной вектор, вычисляется выход сети и сравнивается с соответствующим целевым вектором, разность (ошибка) с помощью обратной связи подается в сеть, и веса изменяются в соответствии с алгоритмом, стремящимся минимизировать ошибку. Векторы обучающего множества предъявляются последовательно, вычисляются ошибки, и веса подстраиваются для каждого вектора до тех пор, пока ошибка по всему обучающему массиву не достигнет приемлемо низкого уровня.

Обучение без учителя не требует сравнения с предопределенными идеальными ответами. Обучающее множество состоит лишь из входных векторов. Обучающий алгоритм подстраивает веса сети так, чтобы получались согласованные выходные векторы. Процесс обучения выделяет статистические свойства обучающего множества и группирует сходные векторы в классы.

При смешанном обучении одна часть весов определяется посредством обучения с учителем, другая - с помощью самообучения.

В работе рассматриваются математические модели искусственных нейронных сетей с учетом запаздывания при передаче сигнала.

Обучение включает в себя определение значений весовых коэффициентов синаптических узлов, специальных правил, по которым весовые коэффициенты могут быть изменены в зависимости от отклика конкретной нейронной сети.

Модель нейронной сети и программа управления искусственной нейронной сетью должны удовлетворять следующим требованиям:

1) работать в реальном времени,
2) обладать способностью к обучению,
3) максимально полно использовать поступающую извне информацию,
4) иметь память о прошлых ситуациях,
5) обладать способностью непрерывного обобщения и классификации поступающей информации.

Обучение ИНС требует обработки больших массивов информации. Совместная реализации этих условий Возможна в применении параллельных вычислений с использованием параллельно работающей ассоциативной памяти – процессора.

В качестве примера рассмотрим дискретную модель нейронной сети с запаздываем, в которой переход из k-го состояния в $k+1$ осуществляется по правилу

$$x^{k+1} = h\left(x^k, x^{k-v}\right) + \left(W^0 + W^k\right) g\left(x^{k-v}\right), \qquad (1)$$

или в покомпонентном виде

$$x_i^{k+1} = h_i\left(x^k, x^{k-v}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left[\omega_{ij}^0 + \omega_{ij}^k\right] g_j\left(x^{k-v}\right), \quad i = \overline{1, n}, \qquad (2)$$

с начальными условиями $x^i = a^i$, $i = -v,...,0$. Здесь $a^i \in R^n$, $i = -v,...,0$, – заданные векторы в R^n, h, g – заданные n-мерные векторные непрерывно дифференцируемые функции, W^0 - заданная постоянная матрица, $W^k = \left\{\omega_{ij}^k\right\}$, $i, j = \overline{1, n}$ – $n \times n$-матрица весовых коэффициентов или управлений на k-ом шаге, принимающих значения в заданном множестве, например:

$$\left|\omega_{ij}^k \le A_{ij}^k\right|, \quad k = 0,...,q-1, \quad i, j = \overline{1, n}. \qquad (3)$$

Весовые коэффициенты ω_{ij}^k выбираются из условия минимума целевой функции:

$$I = \Phi\left(x^q\right) + \sum_{k=0}^{q-1} E_k\left(x^k, x^{k-v}\right) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{i,j=1}^{n} r_{ij}^k\left(\omega_{ij}^k\right)^2. \qquad (4)$$

В выражении (4) коэффициенты $r_{ij}^k > 0$ при каждом $k = \overline{0, q-1}$ образуют положительно определенную матрицу, которую мы обозначим через R_0, $\omega_{ij}^0,...,\omega_{ij}^{q-1}$ – набор $n \times n$ матриц, $E_k\left(x^k, x^{k-v}\right)$ – заданные скалярные функции, $x^{k-v} = \left(x_1^{k-v_1},...,x_n^{k-v_n}\right)$, т.е. каждая компонента вектора x^{k-v} имеет своё запаздывание.

В этой модели оптимальные элементы матрицы весовых коэффициентов $\overline{\omega}_{ij}^k$ определяются по формуле:

$$\overline{\omega_{ij}^{k}} = p_i^{k+1}\left[r_{ij}^{k}\right]^{-1} g_j\left(x^{k-v}\right) \tag{5}$$

при условии, что сопряженные векторы $p^k = \left(p_1^k,...,p_n^k\right)$ выражаются с помощью рекуррентных соотношений:

$$\begin{aligned} p_i^k &= -\lambda_0\left[\frac{\partial E_k\left(\overline{x}^k, \overline{x}^{k-v}\right)}{\partial x_i^k} + \frac{\partial E_{k+v}\left(\overline{x}^{k+v}, \overline{x}^{k}\right)}{\partial x_i^k}\right] + p_i^{k+1}\frac{\partial h_i\left(x^k, x^{k-v}\right)}{\partial x_i^k} + \\ &+ p_i^{k+1+v}\left[\frac{\partial h_{i+v}\left(x^{k+v}, x^k\right)}{\partial x_i^k} + \sum_{j=1}^{n}\left(\omega_{ij}^0 + \omega_{ij}^{k+v}\right)\frac{\partial g_j}{\partial x_i^k}\left(x^k\right)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

с граничными условиями

$$p_i^q = -\lambda_0\frac{\partial\Phi\left(\overline{x}^q\right)}{\partial x_i^q},\ \ i = \overline{1,n};\ \ p_i^s = 0,\ \ s>q. \tag{7}$$

В дискретной модели нейронной сети с запаздыванием переход из k-го состояния в $k+1$ осуществляется по правилу

$$x^{k+1} = h\left(x^k, x^{k-v}\right) + \left(W^{k-v}\right)g\left(x^{k-v}\right),$$

или в покомпонентном виде

$$x_i^{k+1} = h_i\left(x^k, x^{k-v}\right) + \sum_{j=1}^{n}\left[\omega_{ij}^{k-v}\right]g_j\left(x^{k-v}\right),\quad i = \overline{1,n},$$

с начальными условиями $x^i = a^i$, $i = -v,...,0$. Здесь $a^i \in R^n$, $i = -v,...,0$, – заданные векторы в R^n, h, g – заданные n-мерные векторные непрерывно дифференцируемые функции, $W^{k-v} = \left\{\omega_{ij}^{k-v}\right\}$, $i,j = \overline{1,n}$ – $n\times n$-матрица весовых коэффициентов или управлений на $к$ - v-ом шаге.

Пусть $h\left(x^k, x^{k-v}\right) = Ax^k + Dx^{k-v}$, $g\left(x^{k-v}\right) = x^{k-v}$, тогда

$$x^{k+1} = Ax^k + Dx^{k-v} + W^{k-v}x^{k-v},\quad W^{k-v} = \left\{w_{ij}^{k-v}\right\},\quad A = \left\{a_{ij}\right\},\quad D = \left\{d_{ij}\right\},\ i = \overline{1,n}.$$

Необходимо обучить нейронную сеть таким образом, чтобы минимизировать функцию ошибки $I = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^q - A^q\right)^2$.

В работе проведена программная реализация предложенного алгоритма для различных значений параметров и входных данных задачи (см. рис. 3).

Анализ результатов позволяет сделать следующий вывод: величина запаздывания оказывает значительное влияние на точность решения задачи и количество итераций.

Рассмотрены различные правила и схемы обучения нейронных сетей.

Для предложенной модели дискретной нейронной сети с запаздыванием проведен подробный анализ влияния параметров задачи на оптимальное решение.

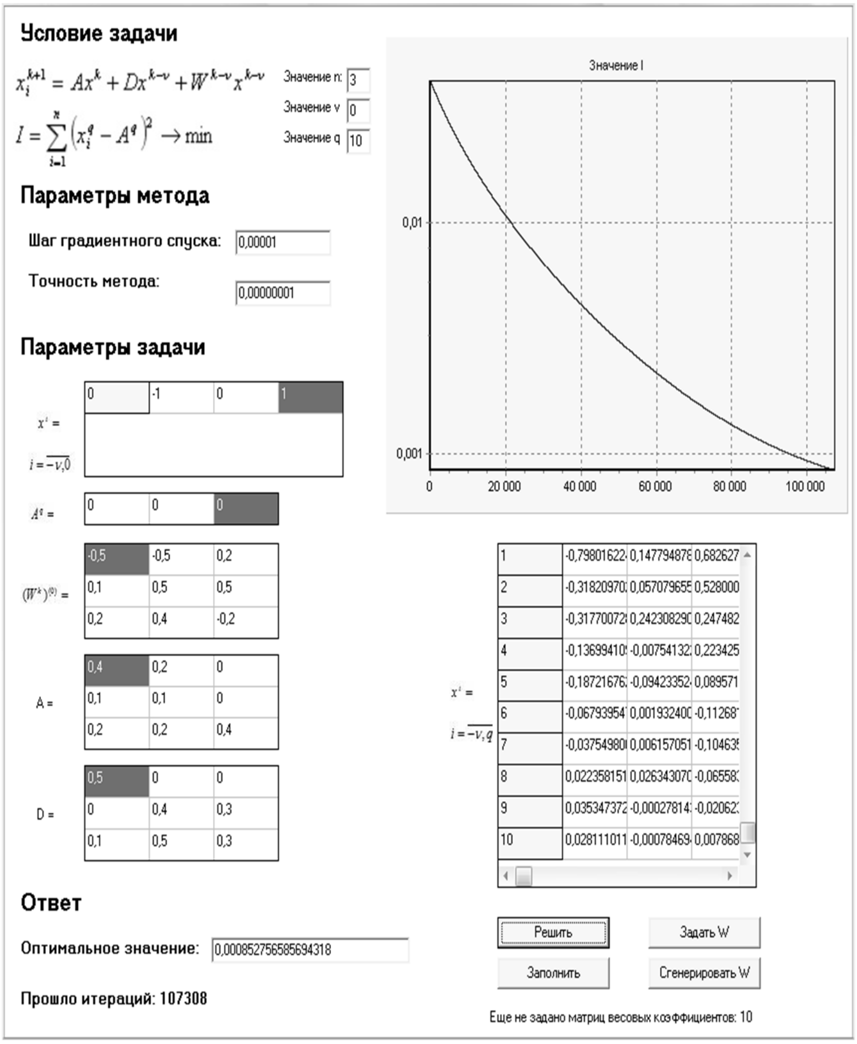


Рис. 3

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреева Е.А., Ждид М.А. *Дискретные задачи оптимального управления* – Тверь: ТвГУ, 2002.
2. Андреева Е.А., Цирулёва В.М. *Дискретная оптимизация* – Тверь: ТвГУ, 2004.
3. Андреева Е.А. *Оптимизация нейронных сетей* – Тверь: ТвГУ, 2008.
4. Андреева Е.А., Пустарнакова Ю.А. Численные методы обучения искусственных нейронных сетей с запаздыванием. Журнал вычислительной математики и математической физики. 2002. Т. 42, С. 1383.
5. Андреева Е.А., Кратович П.В. Оптимизация нейронных сетей: учебное пособие. – Тверь: Твер. Гос. Ун-т, 2015. – 116 с.
6. Андреева Е.А., Цирулёва В.М., Кожеко Л.Г. Модель управления процессом рыбной ловли. Моделирование, оптимизация и информационные технологии. Научный журнал. 2017. № 4 (19). С. 10. http://moit.vivt.ru/ Свидетельство Эл. № ФС77-53577 от 4 апреля 2013 года. ISSN 2310-6018. Воронеж: Воронежский институт высоких технологий, Редакция журнала «МОИТ».

УДК 372.851.4

О КРИТЕРИЯХ ОЦЕНИВАНИЯ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ НА ЕГЭ

Александр Николаевич Балашов
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: tver-math@mail.ru

Ключевые слова: единый государственный экзамен (ЕГЭ), критерии оценивания выполнения заданий.

Аннотация. В работе говорится о недостатках критериев оценивания заданий с развернутым ответом по математике на ЕГЭ.

27 августа 2019 года на IV съезде Ассоциации учителей и преподавателей математики Твери и Тверской области обсуждались критерии оценивания развернутых ответов по математике. Были отмечены основные недостатки критериев оценивания и предоставленных демонстрационных вариантов решений.

Критерии содержат понятия, которые имеют неоднозначное толкование. Это осложняет проверку работ экспертами. Несмотря на большой опыт работы, эксперты часто испытывают затруднения в оценивании каждого задания. Количество третьих проверок составляет 5-8%, а расхождения в один балл – в 2-3 раза больше. В каждой пятой работе сомнения проявляют как эксперты, старшие эксперты, так и ведущие эксперты.

Содержание критерия имеют неоднозначное толкование:

- обоснованно получен верный ответ;
- вычислительная ошибка;
- имеется верная последовательность всех шагов решения.

В демоверсии за 2009 год в критериях указывалась верная последовательность всех шагов решения. Начиная с 2010 года, в критериях отсутствует сама последовательность шагов решения. Понятие верная последовательность всех шагов решения каждый эксперты стали трактовать по-разному. Для обоснованности выставленной оценки эксперту трудно предъявлять аргументы апеллянту, если критерии являются расплывчатыми и неоднозначными.

Понятие «верный ответ» допускает ответ, записанный в виде: arcsin 1, arccos 1/2, $\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sqrt{16+9}$, $\frac{4\pi}{6}$ и т.д. В школах отводится много часов на табличные значения тригонометрических функций и упрощение числовых выражений. Поэтому на максимальный балл необходимо изменить формулировку «верный ответ» на «верный ответ в упрощенной форме» или в комментариях указать, что максимальный балл можно выставлять только за верный ответ, записанный в упрощенной форме. Обязательно это проиллюстрировать примерами.

Задание 14 оценивает полученные знания по геометрии. Однако, при правильном и обоснованном решении с точки зрения геометрии в пункте б) из-за арифметической ошибки ученик не получает положительной оценки.

Поэтому, необходимо сделать 14 задание 3-х балльным аналогично 16 заданию. Это позволит при подготовке к ЕГЭ уделять больше внимания геометрическим заданиям.

Некорректность критерия в 15 задании на один балл «получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения» порождает парадокс. Если ученик получил неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения, то он получает один балл. Если же ученик получил верный ответ при наличии вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения, то он должен получить ноль баллов. Критерий на 0 баллов: «решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше». Наличие ошибки не позволяет ставить максимальный балл.

Рекомендации, которые получают эксперты на консультациях перед проверкой и на вебинарах не позволяют снять неоднозначность критериев. Это подтверждается большим количеством работ с расхождением в один и более баллов, а также изменением оценки на апелляции. Для обоснования выставленных баллов апеллянту необходима аргументация, изложенная на бумажном носителе, а не ссылка на рекомендации, данные на вебинарах или консультациях.

Неоднозначность понятия «вычислительная ошибка»

Неоднозначность вычислительной ошибки очевидна на примерах.

При решении линейного уравнения $2x = 72$ ученик получил:

1) $x = 31$; 2) $x = 5$; 3) $x = 70$.

Во всех случаях ученик допустил ошибку! С этим будет согласен и эксперт, и апеллянт. Поскольку в критерии присутствует формулировка «вычислительная ошибка», то апеллянт будет утверждать, что он получил данный ответ при делении 72 на 2, т.е. допустил вычислительную ошибку.

Наличие вычислительной ошибки в критерии побуждает эксперта каждую ошибку проверять на наличие вычислительной ошибки. В первом случае эксперт согласится с вычислительной ошибкой, во втором случае посчитает это опиской, но как в этом случае поступить? В третьем случае эксперт посчитает, что ученик перепутал действия деление и вычитание, т.е. допустил ошибку, которая не является вычислительной.

В результате на конфликтной комиссии апеллянт и его родители не согласятся с выставленной оценкой во втором и третьем случае. Это приводит к недоверию к ЕГЭ.

Такая же путаница в определении вычислительной ошибки наблюдается и у составителей методических пособий для экспертов. В 2016 году на вебинаре при оценивании решения $\log_2 x = 4$; $x = 8$ считалось, что ученик допустил вычислительную ошибку. В методических пособиях для экспертов за 2018 и 2019 год для этого же примера в комментариях указывается: «При решении простейшего логарифмического уравнения допущена ошибка, которая не является вычислительной».

При решении пропущено промежуточное действие, не позволяющее однозначно говорить о вычислительной ошибке.

Решение $\log_2 x = 4$; $\underline{x = 2^4;}$ $x = 8$ содержит явную вычислительную ошибку. Но решение $\log_2 x = 4$; $\underline{x = 2 \cdot 4;}$ $x = 8$ содержит ошибку, которая не является вычислительной.

Возникшая проблема является следствием того, что в критерии оценивания включен термин «вычислительная ошибка», который не имеет однозначного толкования, не было дано точного и однозначного определения вычислительной ошибки, а из приведенных примеров следует, что это и невозможно.

Необходимо исключить из критерия оценивания неоднозначный термин «вычислительная ошибка».

***Неоднозначность критерия «обоснованно получен верный ответ» в задании* 15**

Составители критериев подробно не раскрывают понятие «обоснованно получен верный ответ». В указаниях для экспертов отмечено, что нельзя выставлять максимальный балл при наличии ошибки, хотя в критериях этого нет. Наличие ошибки очень часто не влияет на меру обоснованности решения. Выданные указания для экспертов, подтверждают факт неоднозначности критерия на два балла «обоснованно получен верный ответ».

Рассмотрим в общем виде решение ученика логарифмического неравенства.

$$\log_6 f(x) \geq \log_6 g(x) + \log_6 h(x);$$

$$\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$$

$$\log_6 f(x) - \log_6 g(x) - \log_6 h(x) \geq 0, \text{ т.к. } 6 > 1, \text{ то } \frac{f(x)}{g(x)h(x)} \geq 1,$$

$$\frac{f(x) - g(x)h(x)}{g(x)h(x)} \geq 0, \ \big(f(x) - g(x)h(x)\big) \cdot g(x) \cdot h(x) \geq 0;$$

$$\begin{cases} \text{ОДЗ (решение первой системы неравенств),} \\ \text{решение логарифмического неравенства.} \end{cases}$$

Необоснованная строгость в оценивании ошибки в ОДЗ побуждает ученика не писать пояснения ОДЗ или ООН.

Ученик верно нашел ОДЗ, верно перешел к дробно-рациональному неравенству. При решении дробно-рационального неравенства умножил обе его части на квадрат знаменателя. В результате преобразования-следствия получил надмножество. Верно решил графически систему неравенств.

Получил правильный ответ, т.е. множество решения исходного логарифмического неравенства.

Неоднозначность критерия обоснованно получен верный ответ привело к тому, что работа была оценена в ноль баллов. Основанием послужило получение надмножества множества решения исходного неравенства. Экспертами не было учтено то, что правильное решение второй системы позволяет выделить из полученного надмножества множество решения исходного неравенства.

Рассмотрим еще один пример:

$$\log_6 f(x) \geq \log_6 g(x) + \log_6 h(x).$$

П.1. $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0; \end{cases}$

П.2. $log_6 f(x) \geq log_6 g(x)h(x)$, т.к. $6 > 1$, то $f(x) \geq g(x)h(x)$;

$\begin{cases} \text{П1}, \\ \text{П2}. \end{cases}$

Ученик допустил вычислительную ошибку/описку при решении неравенства $f(x) > 0$ в п.1, которая не повлияла на равносильность дальнейших преобразований, верно решил п.2 и систему. Получил верный ответ. Работа была оценена в ноль баллов.

На любом из множеств от $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases}$ до $\begin{cases} g(x) > 0, \\ h(x) > 0 \end{cases}$ переход от логарифмического неравенства к рациональному неравенству будет равносильным.

В конкретном примере – это от (–3;2) до (–3;2) ∪ (5;+∞). Добавление к множеству (–3;2) любого подмножества множества (5;+∞) приводит к равносильному переходу от логарифмического неравенства к рациональному. В результате вычислительной ошибки ученик получил множество (–3;2) ∪ (5;12), которое является подмножеством множества (–3;2) ∪ (5;+∞). Его вычислительная ошибка в п.1 (ОДЗ или ООН) не привела к неравносильным преобразованиям. В данном случае нельзя считать это грубой ошибкой.

Мнение эксперта на апелляции: «Допустима вычислительная ошибка в п.2, но не в п.1». Данное мнение эксперта является вольной трактовкой критерия на один балл из-за его неоднозначности, расплывчатости и парадоксальности.

Ниже предлагается следующий проект критерия оценивания задания №15.

Критерий оценивания задания №15 (проект)

Задание 15. Решите неравенство $\log_a A(x) \geq \log_a B(x) + \log_a C(x),\ a > 1.$

Содержание критерия	Баллы
Все шаги решения: 1) использованы логарифмические формулы, осуществлен переход от логарифмического неравенства к рациональному/дробно-рациональному неравенству; 2) решение рационального/дробно-рационального неравенства с учетом обоснований п.1). Найдены верно и обоснованно[1], нет ошибки[2], получен верный ответ.	3
Все шаги решения найдены верно, нет ошибки, получен верный ответ, но решение недостаточно обоснованно.	2
Приведены все шаги решения, допущена ошибка, получен ответ.	1
Допущена грубая ошибка[3] или решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше.	0

1. Использование логарифмических формул $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log_a f(x)g(x)$, $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ считается обоснованным при наличии ограничения $f(x) > 0$ и/или $g(x) > 0$.

При $a > 1$ переход от логарифмического неравенства $\log_a f(x) \geq \log_a g(x)$ $\left(\log_a f(x) \leq \log_a g(x)\right)$ к рациональному неравенству считается обоснованным при наличии ограничения $g(x)>0$ ($f(x)>0$), а от логарифмического неравенства $\log_a f(x) \leq 0$ к рациональному неравенству при наличии ограничения $f(x) > 0$. В обоих случаях должно быть пояснение $a > 1$.

В случае решения дробно-рационального неравенства $\frac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$, необходима аналитическая или графическая ссылка на условие $Q(x) \neq 0$ или $Q(x) > (<) 0$.

2. Все ошибки, которые не являются грубыми.

3. Грубые ошибки:

а) неравносильное умножение/деление неравенства или неверно изменен/ не изменен знак неравенства;

б) неправильно снят знак логарифма;

в) невозможность применения формулы $\log_a xy = \log_a x + \log_a xy = \log_a y$ или $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

г) ошибка, которая существенно упростила решение неравенства.

УДК 372.851

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ В 10 КЛАССЕ

Ольга Евгеньевна Баранова
ФГБОУ ВО «Тверской государственный университет», Тверь
baranova.oe@tversu.ru

Светлана Анатольевна Романова
МОУ СОШ «Тверская гимназия №8», Тверь
svetaromadoma@mail.ru

Ключевые слова: *промежуточная аттестация, курс математики 10 класса.*

Аннотация. В работе представлены материалы для проведения промежуточной аттестации за курс математики 10 класса.

Понятие промежуточной аттестации обучающихся определено Федеральным законом «Об образовании в РФ». Предлагаются материалы для проведения промежуточной аттестации в письменной форме за курс математики 10 класса, соответствующие программам учебников [1,2,3] (варианты 1, 2) и [2, 4] (варианты 3,4). Материалы разработаны в формате ЕГЭ по математике профильного уровня, частично содержат задачи, доступные в открытом банке на fipi.ru.

Вариант 1

Часть 1

1. В треугольнике ABC угол A равен 72°, а углы B и C – острые. Высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла DOE.

2. Найдите корень уравнения $2^{3+x} = 0{,}4 \cdot 5^{3+x}$.

3. Найдите корень уравнения $\log_{x-5} 49 = 2$. Если уравнение имеет более одного корня, в ответе укажите меньший из них.

4. В равнобедренной трапеции диагонали перпендикулярны. Высота трапеции равна 12. Найдите ее среднюю линию.

5. Стороны основания правильной четырёхугольной пирамиды равны 8, а боковое ребро − $4\sqrt{3}$. Найдите высоту пирамиды.

6. В правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$ все ребра равны $\sqrt{5}$. Найдите расстояние между точками B и E_1.

7. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{26}}$ и $\alpha \in \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

8. Найдите значение выражения $\sqrt[7]{0{,}8} \cdot \left(\sqrt[7]{5}\right)^2 \cdot 20^{\frac{6}{7}}$.

9. Найдите значение выражения $\frac{4\cos 148^\circ}{\cos 32^\circ}$.

10. Найдите значение выражения $\sqrt{5}\left(\log_3 36 - \log_3 4 + 5^{\log_5 8}\right)^{0,5\lg 5}$.

11. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана–Больцмана, согласно которому мощность P излучения нагретого тела, измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры: $P=\sigma ST^4$, где $\sigma=5{,}7\cdot 10^{-8}$ – постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, а температура T – в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь $S=\frac{1}{16}\cdot 10^{20}$ м^2, а излучаемая ею мощность P не менее $9{,}12\cdot 10^{25}$ Вт. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

12. Первую треть трассы автомобиль ехал со скоростью 60 км/ч, вторую треть – со скоростью 120 км/ч, а последнюю – со скоростью 110 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

13. Решите уравнение $\frac{1}{3^x+1}+\frac{3^x}{9^x-1}=\frac{1}{3^x-1}$.

14. а) Решите уравнение $2\sin 2x+\cos x+1=4\cos\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2};\frac{7\pi}{2}\right]$.

15. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

16. Решите неравенство $\log_3\left(x^2-x-2\right)\le 2+\log_3\frac{x+1}{x-2}$.

Вариант 2

Часть 1

1. Чему равен больший угол равнобедренной трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 68°. Ответ дайте в градусах.

2. Найдите корень уравнения $4^{9-x}=0{,}5\cdot 64^x$.

3. Найдите корень уравнения $\log_5(7-x)=\log_5(3-x)+1$.

4. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении $4:3$, считая от вершины острого угла. Найдите большую сторону параллелограмма, если его периметр равен 88.

5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O – центр основания, S вершина, $SA=5$, $AC=6$. Найдите длину отрезка SO.

7. Найдите $\sqrt{6}\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$ и $\alpha\in(\pi;1{,}5\pi)$.

8. Найдите значение выражения $\frac{\sqrt{m}}{\sqrt[9]{m}\cdot\sqrt[18]{m}}$ при $m=64$.

9. Найдите значение выражения $\frac{12}{\sin^2 37^\circ+\sin^2 127^\circ}$.

10. Найдите значение выражения $\frac{2}{11}\left(\log_{12}3+\log_{12}4+7^{\log_7 4}\right)^{2\log_5 11}$.

11. Емкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C=2\cdot10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключен резистор с сопротивлением $R=5\cdot10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0=16$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время, определяемое выражением $t=\alpha RC\log_2\frac{U_0}{U}$ (с), где $\alpha=0{,}7$ – постоянная. Определите (в киловольтах) наибольшее возможное напряжение на конденсаторе, если после выключения телевизора прошло не менее 21 с?

12. Товарный поезд каждую минуту проезжает на 750 метров меньше, чем скорый, и на путь в 180 км тратит времени на 2 часа больше, чем скорый. Найдите скорость товарного поезда. Ответ дайте в км/ч.

Часть 2

13. Решите уравнение $2^x+80\cdot2^{4-x}=261$.

14. а) Решите уравнение $2\operatorname{tg}x\cdot\sin x+\operatorname{tg}x=\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sin(\pi+x)$.

б) Найдите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi;3\pi]$.

15. Точка M − середина ребра BC основания ABC правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Боковое ребро призмы равно $\sqrt{39}$, а сторона основания 12. Найдите угол между прямой B_1M и плоскостью боковой грани ABB_1A_1.

16. Решите неравенство $\log_2\left(x^2-4\right)-3\log_2\frac{x+2}{x-2}\geq 2$.

Вариант 3

Часть 1

1. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

2. В чемпионате по гимнастике участвуют 76 спортсменок: 30 из России, 27 из Украины, остальные – из Белоруссии. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Белоруссии.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt[3]{x-4}=3$.

4. В треугольнике ABC угол A равен 56°, углы B и C – острые, высоты BD и CE пересекаются в точке O. Найдите градусную меру угла DOE.

5. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

6. Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=3$. Ответ дайте в градусах.

7. Найдите значение выражения: $\left(\sqrt{7}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)$.

8. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет форму сферы, а значит, действующая на аппарат выталкивающая (архимедова) сила, выражаемая в ньютонах, будет определяться по формуле: $F_A=\alpha\rho g r^3$, где $\alpha=4{,}2$ – постоянная, r – радиус аппарата в метрах, $\rho=1000$ кг/м^3 – плотность воды, а g – ускорение свободного падения (считайте $g=10$ Н/кг). Каков может быть максимальный радиус аппарата, чтобы выталкивающая сила при погружении была не больше, чем 336000 Н? Ответ выразите в метрах.

9. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города A в город B, расстояние между которыми равно 98 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 7 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 7 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из A в B. Найдите скорость велосипедиста на пути из A в B. Ответ дайте в км/ч.

10. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3-6x^2$ на отрезке $[-3;3]$.

Часть 2

11. а) Решите уравнение $\sqrt{2}\cos^2 x=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{3\pi}{2};-\pi\right]$.

12. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC=20$, $AC=32$. Боковое ребро призмы равно 24. Точка P принадлежит ребру BB_1, причём $BP:PB_1=1:3$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP.

13. Фермер получил кредит в банке под определенный процент годовых. Через год фермер в счет погашения кредита вернул в банк 3/4 от всей суммы, которую он должен банку к этому времени, а еще через год в счет полного погашения кредита он внес в банк сумму, на 21% превышающую величину полученного кредита. Каков процент годовых по кредиту в данном банке?

14. Может ли произведение цифр натурального числа быть: а) больше 125 и меньше 131? б) больше 731 и меньше 737? в) больше 887 и меньше 894. В случае, если такие значения существуют, то в пункте «а» необходимо указать хотя бы одно значение, в пунктах «б» и «в» – все значения.

Вариант 4

Часть 1

1. Найдите площадь треугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1см×1см (см. рис.). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

2. В среднем на 150 карманных фонариков приходится три неисправных. Найдите вероятность купить работающий фонарик.

3. Найдите корень уравнения $\sqrt{14+5x}=7$.

4. В прямоугольном треугольнике высота, проведённая к гипотенузе, делит прямой угол на два угла, один из которых равен 56°. Найдите меньший угол данного треугольника. Ответ дайте в градусах.

5. На рисунке изображены график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0.

6. Найдите угол C_1BC прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB=5$, $AD=4$, $AA_1=4$. Ответ дайте в градусах.

7. Найдите значение выражения $(\sqrt{11}+\sqrt{5})(\sqrt{11}-\sqrt{5})$.

8. В розетку электросети подключены приборы, общее сопротивление которых составляет $R_1=90$ Ом. Параллельно с ними в розетку предполагается подключить электрообогреватель. Определите наименьшее возможное сопротивление R_2 этого электрообогревателя, если известно, что при параллельном соединении двух проводников с сопротивлениями R_1 и R_2 их общее сопротивление задается формулой $R_{\text{общ.}}=\dfrac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ (Ом), а для нормального функционирования электросети общее сопротивление в ней должно быть не меньше 9 Ом. Ответ выразите в Омах.

9. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города *A* в город *B*, расстояние между которыми равно 70 км. На следующий день он отправился обратно в *A* со скоростью на 3 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 3 часа. В результате велосипедист затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из *A* в *B*. Найдите скорость велосипедиста на пути из *B* в *A*. Ответ дайте в км/ч.

10. Найдите наибольшее значение функции $y=x^3+2x^2+x+3$ на отрезке $[-4;-1]$.

Часть 2

11. а) Решите уравнение $2\sin(\pi+x)\cdot\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=\sin x$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-5\pi;-4\pi]$.

12. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите тангенс угла между плоскостями BDD_1 и AB_1D_1.

13. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?

14. Может ли произведение цифр натурального числа быть: а) больше 126 и меньше 130? б) больше 731 и меньше 736? в) больше 887 и меньше 894. В случае, если такие значения существуют, то в пункте «а» необходимо указать хотя бы одно значение, в пунктах «б» и «в» – все значения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов, Ш. А. Учебник: Математика: алгебра и начала анализа, геометрия. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубленный уровни / Ш.А., Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва и др. – 3-е изд.– М.: Просвещение, 2016. – 463 с.

2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы: учеб. для общеобразоват. учреждений : базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 22-е изд. – М. : Просвещение, 2013. – 255 с.

3. Колягин, Ю. М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва, Н.Е. Фёдорова, М.И. Шабунин.– 3-е изд. – М. : Просвещение, 2016.– 384 с.

4. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа.10 класс. В 2 ч. Ч.1. Учебник для общеобразоват. учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – 6-е изд. стер. – М.: Мнемозина, 2009. – 426 с.

УДК 538.9, 539.199

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ОПТИМИЗАЦИИ РАВНОВЕСНЫХ СВОЙСТВ ЛИЗИНОВОГО ДЕНДРИМЕРА ВТОРОГО ПОКОЛЕНИЯ

Валерий Валерьевич Безродный
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург
E-mail: v.v.bezrodniy@mail.ru

Олег Валерьевич Шавыкин
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург
E-mail: kupala-89@mail.ru

Игорь Михайлович Неелов
Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики, Санкт-Петербург
E-mail: i.neelov@mail.ru

Ключевые слова: *численные методы, методы оптимизации, компьютерное моделирование, дендример.*

Аннотация. Составлена и апробирована модель объединенных атомов для лизинового дендримера второго поколения. Канонический ансамбль конформаций, соответствующий минимуму свободной энергии, был найден численным методом самосогласованного поля Схойтенса-Флира. Усреднением по ансамблю рассчитаны равновесные характеристики дендримера, такие как радиус инерции и распределение объемной доли. Полученные результаты были сравнены с полноатомным компьютерным моделированием и экспериментальными данными.

Дендримеры – уникальный класс регулярных разветвленных макромолекул [1]. Внешне дендримеры имеют древовидную структуру, за что и получили свое название. Впервые дендримеры были синтезированы в конце 70-х начале - 80-х годов прошлого века [1, 2]. К настоящему времени дендримеры нашли широкое применение в таких областях как изготовление нанокомпозитов и светособирающих антенн, катализисе, медицине [1]. В биомедицине – при адресной доставке лекарств в клетки живых организмов очень важную роль играют дендримеры на основе пептидов, а в частности лизиновые дендримеры [2]. Эти дендримеры обладают меньшей токсичностью по сравнению с другими аналогами, например, ПАМАМ-дендримерами.

Экспериментальное исследование лизиновых дендримеров началось на заре изучения этих молекул [3]. Отдельно стоит отметить исследования отечественных научных групп [4, 5]. На данный момент лизиновые дендримеры хорошо исследованы экспериментально и получены размеры и подвижность.

Лизиновые дендримеры изучаются и с помощью метода компьютерного моделирования [6]. В данной работе для точного воспроизведения поведения биофизических молекулярных систем используют метод молекулярной динамики [7]. Оптимальные параметры для моделирования подбирают предварительными квантово-химическими расчетами [8] и составляют силовые поля (для лизиновых дендримеров хорошо подходит силовое поле –

AMBER [9]). В методе молекулярной динамики изучается эволюция равновесного состояния системы (отвечающее минимуму энергии) и, таким образом, набирается множество (ансамбль) состояний (конформаций) системы, по которому производится оценка математического ожидания всех необходимых равновесных свойств. Такой подход является заманчивым по нескольким причинам: можно не только получить равновесные свойства дендримера не проводя реального эксперимента, но и объяснить, что происходит с системой. За такую точность вычислений приходится платить огромными вычислительными ресурсами.

Хорошей альтернативой методу молекулярной динамики для изучения биофизических систем является численный метод самосогласованного поля [10]. В отличие от метода молекулярной динамики в данном подходе ищется ансамбль всех конформаций, отвечающих минимуму свободной энергии системы. Метод основан на среднеполевых предположениях, при которых рассмотрение множества молекул заменяется рассмотрением одной молекулы, а действие остальных учитывается через эффективное поле [11]. Такой подходит существенно ускоряет расчеты и метод дает заведомо точный результат в рамках заложенных предположений.

В данной работе использован численный метод Схойтенса-Флира, который разработан в конце 70-х годов прошлого века в университете города Вагенингена. В основе метода лежит минимизация функционала свободной энергии F:

$$F[\boldsymbol{u},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\alpha}] = F_{ent}[\boldsymbol{u}] - \sum_{r}\sum_{A} u_A(r)\varphi_A(r)dr + F_{int}[\boldsymbol{\varphi}] + \\ + \textstyle\sum_r \alpha(r)\left(\sum_A \varphi_A(r) - 1\right).$$

Для поиска оптимального решения мы получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{\delta F}{\delta \boldsymbol{u}} = 0; \\ \dfrac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\varphi}} = 0; \\ \dfrac{\delta F}{\delta \boldsymbol{\alpha}} = 0. \end{cases}$$

Первое из них задает правило расчета пропагаторов (функций Грина) и, как следствие, профилей объемной доли $\boldsymbol{\varphi}$, второе – расчет потенциального поля $\boldsymbol{u}$, а третье – гарантирует условие несжимаемости (подробнее см. в [11, 12]. Вклад электростатических взаимодействий находится путем численного решения дифференциального уравнения Пуассона-Больцмана [12]. С помощью первых двух уравнений и самосогласованного поля $\boldsymbol{\alpha}$ устанавливается прямая связь между распределением объемной доли $\boldsymbol{\varphi}$ и потенциальным полем $\boldsymbol{u}$. В качестве неизвестной переменной выбирается потенциальное поле $\boldsymbol{u}$. Тогда для поиска минимума функционала F можно использовать методы оптимизации для неограниченной переменной, которые хорошо освящены в литературе, см., например, [13]).

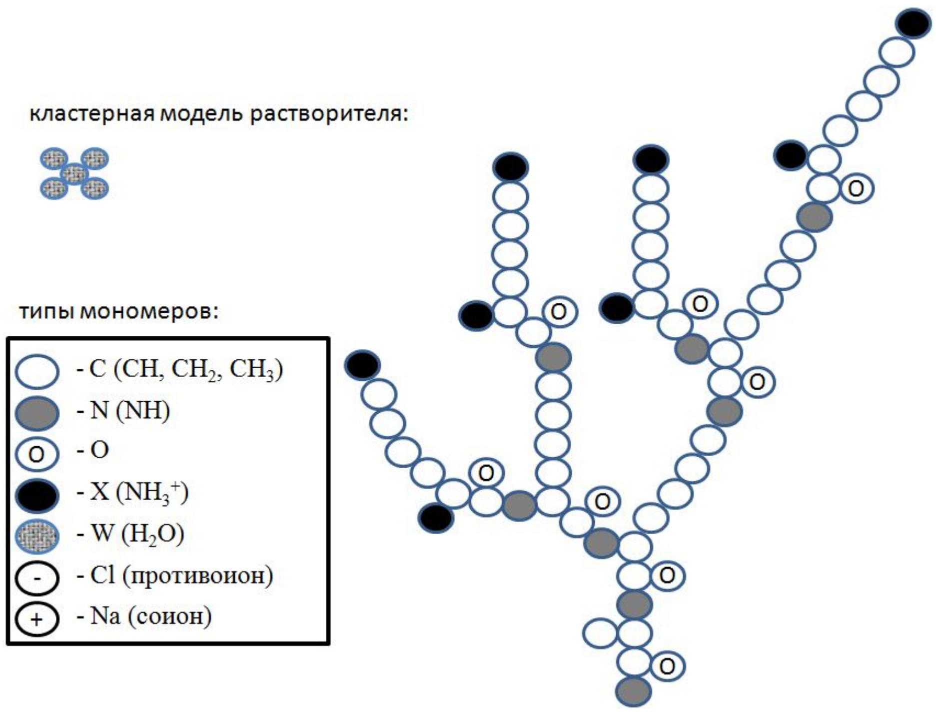


Рис. 1. Слева перечислены типы мономеров, справа схематично изображена модель объединенных атомов для лизинового дендримера второго поколения

В данной работе с помощью численного метода самосогласованного поля находится минимум свободной энергии системы: водный раствор при комнатной температуре с ионами соли и погруженный в раствор лизиновый дендример. На рис. 1 предложена модель объединенных атомов для описания всех мономеров и молекул в такой системе. Параметры взаимодействия Флори были выбраны согласно работе [14], так как они были удачно апробированы при моделировании липидных мембран.

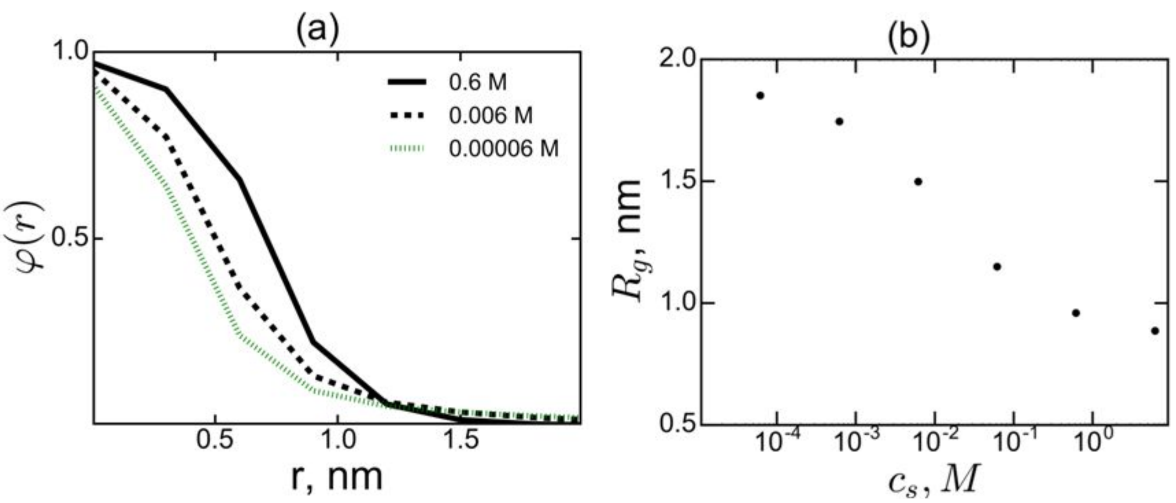


Рис. 2. (a) Распределения объемной доли при разной концентрации соли (6e-5 M, 6e-3 M, 6e-1 M) и (b) зависимость радиуса инерции от концентрации соли.

С применением данной модели получено равновесной распределение объемной доли при разной концентрации соли (в данной работе концентация соли менялась от 6e-5 M до 6 M). На рис. 2а мы приводим размеры дендримера при трех разных концентрациях соли (6e-5 M, 6e-3 M, 6e-1 M). Из распределения объемной доли рассчитывался радиус инерции дендримера по следующей формуле

$$R_g = \sqrt{\frac{\sum_{\mathrm{r}} \varphi(\mathrm{r}) \mathrm{r}^4}{\sum_{\mathrm{r}} \mathrm{r}^2}}.$$

Зависимость радиуса инерции от концентрации соли представлена на рис. 2б. В области небольшой концентрации соли, где размер дендримера выходит на плато, можно говорить, что мы оценили размер, соответствующий бессолевому раствору. В таком растворе есть только противоионы и это соответствует условиям, рассмотренным в работе по молекулярной динамике [6]. Размер, полученный в данной работе (1.8 нм) больше размера, полученного методом молекулярной динамики (1.2 нм). Это может быть вызвано тем, что в выбранной модели при слабой соли сильные электростатические взаимодействия доминируют над выбранными параметрами Флори. С другой стороны, в режиме относительно большой соли (0.01-1 M) размеры дендримера (0.9-1.2 нм) сопоставимые с экспериментальными [3, 4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Frechet M., Tomalia D.* (Eds.). Dendrimers and Other Dendritic Polymer, Wiley, England, 2001.

2. *Klajnert B., Peng L., Cena V.* (Eds.). Dendrimers in Biomedical Applications; RSC Publishing, 2013.

3. *Aharoni S. M., Crosby C.R., Walsh E.K.* Size and solution properties of globular tertbutyloxycarbonyl-poly(α,iϵ-L-lysine). // Macromolecules. 1982. N 15: P. 1093-1098.

4. *Власов Г. П., Корольков В. И., Панкова Г. А., Тарасенко И. И., Баранов А. Н., Глазков П. Б., Киселев А. В., Остапенко О. В. Лесина Е. А., Баранов В. С.* Дендримеры на основе лизина и их «звездообразные» полимерные производные: возможность использования для компактизации ДНК и доставки экспрессирующих генетических конструкций in vitro // Биорган. Химия. 2004. Т.30 N 1. С. 15-24.

5. *Sheveleva N.N., Markelov D.A., Vovk M.A., Mikhailova M.E., Tarasenko I.I., Neelov I.M., Landeranta E.* NMR studies of excluded volume interactions in peptide dendrimers // Sci.Peports. 2018. N 8. P. 8916.

6. *Falkovich S., Markelov D., Neelov I., Darinskii A.* Are structural properties of dendrimers sensitive to the symmetry of branching? Computer simulation of lysine dendrimers // J. Chem. Phys. 2013, N 139, P. 064903.

7. *Abraham M.J., Murtola T., Schulz R., Páll S., Smith J.C., Hess B., and Lindahl E.* GROMACS: High performance molecular simulations through multi-level parallelism from laptops to supercomputers // SoftwareX. 2005. N 1–2. P. 19–25.

8. *Cieplak P., Cornell W.D., Bayly C., Kollman P.A.* Application of the multimolecule and multiconformational RESP methodology to biopolymers: Charge derivation for DNA, RNA and proteins. // J. Comput. Chem. 1995. N 16. P. 1357-1377.

9. *Salomon-Ferrer R., Case D.A., Walker R.C.* An overview of the Amber biomolecular simulation package. // WIREs Comput. Mol. Sci. 2013. N 3. P. 198-210.

10. *Fredrickson H. G.* The Equilibrium Theory of Inhomogeneous Polymers; Oxford : Clarendon, 2006.

11. *Гросберг А.Ю., Хохлов А.Р.* Статистическая физика макромолекул. Учеб. руководство. М.: Наука. Гл. ред. физ. -мат. лит., 1989.

12. *Fleer G. J., Cohen Stuart M. A., Scheutjens J. M. H. M., Cosgrove T., Vincent B.* Polymers at interfaces // Chapman & Hall: London, UK, 1993.

13. *Дэннис Дж., Шнабель Р.* Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений. М.: Мир, 1988.

14. *Pera H., Kleijn J.M., Leermakers F.A.M.* Linking lipid architecture to bilayer structure and mechanics using self-consistent field modeling. // J. Chem. Phys. 2014. V. 140. P. 065102.

УДК 371.321.5

ИННОВАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ПРЕПОДАВАНИЮ МАТЕМАТИКИ И ФИЗИКИ НА БАЗЕ ЦЕНТРА ИПШ «ШАГ В БУДУЩЕЕ» ТвГУ

Кристина Николаевна Бойцова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: kristina_kotrova@mail.ru

Александр Сергеевич Попов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: xxx13515@mail.ru

Артем Александрович Алексеев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: alekseev.artem10@mail.ru

***Ключевые слова*:** обучение, инновационный подход, расчетные формулы, графики зависимости действительной и мнимой частей импеданса, графический редактор «Origin», экспериментальная установка «Вектор-175».

Аннотация. В данной работе на примере синергии математических формул и расчетов с физической экспериментальной частью показывается инновационный подход к изучению математики в общеобразовательных учреждениях. Делается акцент на инновационных методических подходах изучения, а также актуальности математических знаний, полученных в школе. На примере исследований образцов германия на экспериментальном устройстве «Вектор-175» была продемонстрирована значимость автоматизированных математических процессов, доказана актуальность знаний, полученных на уроках математики и предоставлены графики зависимостей сложных физических компонент, таких как мнимая и действительная части импеданса.

Центр ИПШ «Шаг в будущее» является структурным подразделением ИнНО ТвГУ. На его базе школьники города Твери осваивают различные дисциплины в небольших группах и индивидуально. В данной работе делается акцент на инновационных методических подходах в изучении физики и математики. Зачастую обучающиеся общеобразовательных учебных заведений задают на уроках вопросы. «Актуально ли изучение той или иной темы на уроке математики и физики?»; «Каким образом это можно применить в жизни?»; «Необходимо ли это изучать в школе?». Некоторые из них выражают достаточно категоричную позицию, что данная тема не нужна в школе. Зачастую это аргументируется отсутствием данной темы в ЕГЭ, или же небольшим количеством заданий на эту тему и возможностью получить хорошие баллы, не вникая в столь сложные темы. Чтобы повысить мотивацию в изучении физики и математики в Центре ИПШ «Шаг в будущее» было принято решение попробовать способ погружения обучающихся не просто в углубленный курс математики и физики, а демонстрацию применения полученных на уроке математических навыков в более сложных экспериментах и исследованиях. В данном эксперименте принял участие обучающийся Центра ИПШ «Шаг в будущее» (учащийся 11-го класса) и два магистра физико-технического факультета под руководством доцента Бойцовой Кристины Николаевны.

Актуальность работы обусловлена переходом на тестовые способы оценивания знаний обучающихся, а также повсеместной автоматизацией математических процессов.

Цель работы: повышение интереса к изучению дисциплин, связанных с математикой у обучающихся общеобразовательных учебных заведений.

Задачи:

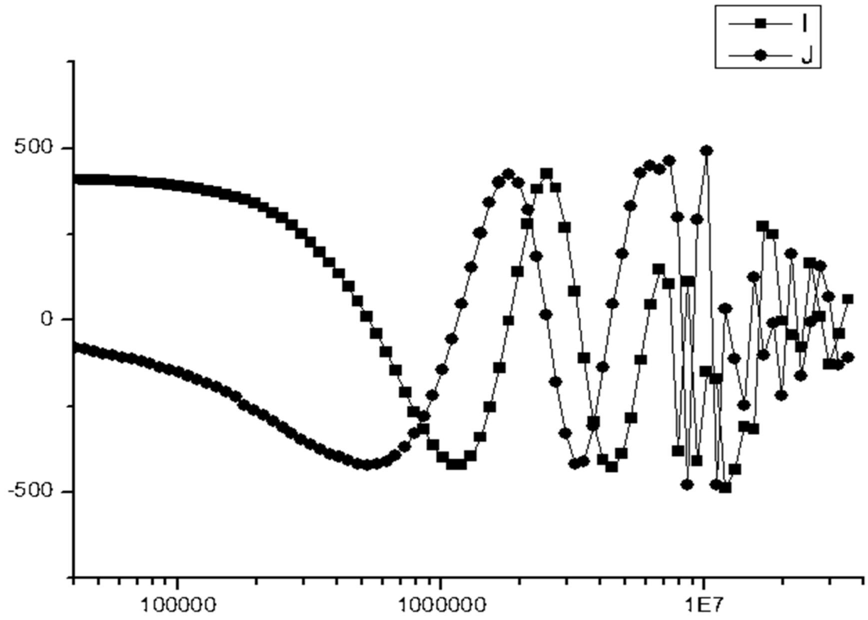
1) развитие математической логики;
2) применение теоретических знаний на практике;
3) повышение мотивации в изучении математических дисциплин в школе;
4) предоставление возможности магистрам провзаимодействовать со школьниками, заинтересовать их и получить научно-педагогический опыт.

В настоящее время техника импеданса при исследовании материалов используется в основном для определения величины ионной проводимости. Для таких измерений достаточен средний частотный диапазон. С другой стороны, измерения частотного отклика в широком спектре значений позволяет получить гораздо более полную информацию о процессах переноса, начиная от релаксации заряда межзеренных границ до процессов в пористых электродах.

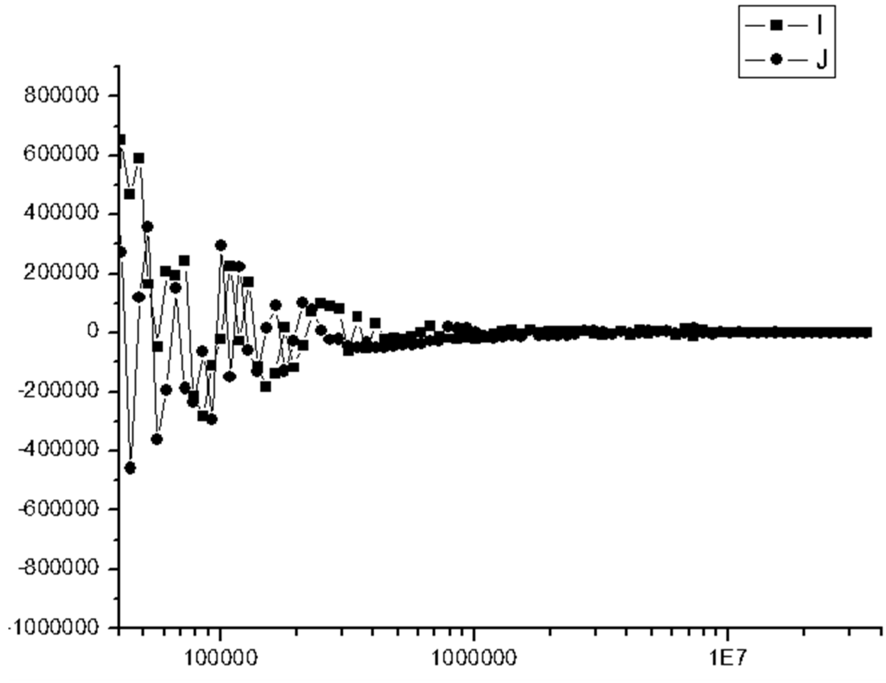
Однако часто анализ данных импеданса представляет довольно сложную задачу так как протекание тока через большое количество границ приводит к тому, что кроме чисто резистивных элементов, емкостей, параллельно с фарадеевским сопротивлением необходимо учитывать процессы накопления заряда на геометрической границе и диффузию сквозь них.

В качестве основы для математических вычислений послужил эксперимент по исследованию зависимости действительной и мнимой части импеданса кристаллов германия n-типа с различным удельным электрическим сопротивлением от частоты подаваемого напряжения. Для более исчерпывающих данных были также использованы подложки из кремния и стали, между которыми помещался образец. В качестве измерительного устройства было использовано устройство ВЕКТОР-175, с помощью которого на образцы подавалось напряжение (с частотой, изменяющейся со временем) и измерялся ряд параметров, таких как импеданс, тангенс угла диэлектрических потерь и т.д. Чтобы в полной мере отразить информативность графиков, было решено с помощью программного обеспечения задать определенное количество раз регистрации данных, распределенное равномерно по времени, во время которого изменялась частота. Всего таких «точек» получилось пятьдесят на каждый кристалл германия.

После измерения всех образцов германия, данные были перенесены на компьютер, где полученный текстовый документ был открыт в программе «Origin» с целью вычисления действительной и мнимой части импеданса с помощью методических формул и построения графиков зависимостей (Рис. 1).



а)



b)

Рис. 1. Графики зависимости действительной (I) и мнимой (J) части импеданса в кристалле германия, с удельным электрическим сопротивлением равным 0,75, от частоты подаваемого напряжения при использовании подложек из меди (а) и стали (b)

Как видно из графиков, фигурируемые значения довольно большие и построить столь точные графики без вспомогательного программного обеспечения вряд ли представляется возможным. Это показывает актуальность математических вычислений и актуальность автоматизации вычислительных процессов.

На протяжении всего эксперимента и дальнейших вычислений учащийся 11-го класса был увлечен работой и принимал активное участие в каждом этапе, что указывает на заинтересованность в практическом применении математических знаний.

Результаты:

1) Обучающийся Центра ИПШ «Шаг в будущее» получил навыки работы с экспериментальной установкой и попробовал самостоятельно снять измерения.
2) Научился самостоятельно осуществлять перенос расчетных данных на компьютер и обрабатывать их в графическом редакторе (Origin).
3) Используя расчетные формулы, предложенные в методическом пособии к установке, попробовал самостоятельно произвести расчеты мнимой и действительной части импеданса.
4) Были наглядно продемонстрированы преимущества программного обеспечения Origin по сравнению с построением графиков вручную.
5) Учащийся 11-го класса получил задание с помощью рекомендованной нами литературы самостоятельно попробовать сделать выводы на основе проделанного эксперимента и сложных математических вычислений.

Выводы:

1) Обучающийся Центра ИПШ «Шаг в будущее» очень заинтересовался работой на экспериментальной установке и понял, что с помощью графического редактора гораздо проще и быстрее обрабатывать результаты и строить графики.
2) У обучающегося появилось желание продолжать работать в данном направлении и изучать дальше математику и физику;
3) Появилась заинтересованность дальнейшего обучения на факультетах университета ТвГУ, связанных с физико-математической направленностью.
4) Ученик 11-го класса осознал, что темы, изучаемые в школе, имеют прикладной характер и действительно используются во множестве сложных экспериментах и исследованиях.
5) Магистры обрели опыт в сфере педагогики, на практике научились объяснять сложный материал доступным языком.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Руководство пользователя многофункционального фазочувствительного измерителя N4L ВЕКТОР-175, Компания ООО «Ориком», 2012.

2. Емельянова Ю.В., Морозова М.В., Михайловская З.А., Буянова Е.С. Импедансная спектроскопия: теория и применение / под общ. ред. Е.С. Буяновой: изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 2017.

УДК 378.1:517.9

КОНТЕКСТНЫЕ ЗАДАЧИ МОДУЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Елена Владимировна Борисова
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: elenborisov@mail.ru

Алексей Евгеньевич Миловидов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Маргарита Аркадьевна Шестакова
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: shest_margo@mail.ru

Ключевые слова: *контекст, компетенция, умения, знания, владения.*

Аннотация. В статье рассмотрены педагогические пути развития у студентов аналитического и креативного мышления по методике практико-ориентированных заданий по теме обыкновенные дифференциальные уравнения. Обоснован контекстный подход и приведены примеры контекстных задач для студентов вузов.

Автором контекстного обучения традиционно называют А.Вербицкого [1], который выдвинул данную технологию в целях оптимизации процесса обучения, как школьников, так и студентов. Л.С. Выготский ввел понятие «зона ближайшего развития»: то, что может делать ученик в сотрудничестве с педагогом, то на следующем шаге своего развития он может сделать это самостоятельно [2].

В основе концепции контекстного обучения находится деятельностная теория А.Леонтьева и С.Рубинштейна, согласно которой овладение социальном опытом и усвоение содержания обучения будет эффективным в процессе внутренне мотивированной активной деятельности.

Стандартами нового поколения определена ориентация оценки результата обучения на практическую составляющую с использованием таких понятий, как компетентность студентов, способность к адаптации в новых условиях. Следовательно, основной целью для преподавателей высшей школы является создание условий для развития у студентов аналитического и креативного мышления. Достижение этой цели возможно при практико-ориентированной направленности обучения, позволяющей обеспечить высокое качество профессиональной подготовки специалистов для разных направлений. Одним из педагогических приемов в названном направлении является использование контекстного обучения.

Контекстное обучение, как средство формирования математической компетентности студентов, предполагает включение элементов научного поиска, использование приемов, направленных на использования внешних и внутренних знаний, умений для решения той или иной учебной ситуации. Реальный контекст задачи обеспечивает условия для применения и развития знаний при использовании математических методов и моделей предметной области знаний. При использовании в процессе изучения модуля дисциплины «высшая математика» контекстных задач, новые знания усваиваются путем моделирования деятельности, приближенной к профессиональной. Это обеспечивает возможность комплексного применения и последующей проверки знаний и умений не только из разных разделов математики, но и из других учебных дисциплин.

Многолетний опыт работы авторов со студентами разных направлений подготовки показывает, что решение контекстных задач по математике является для многих источником особых затруднений. Важно научить студентов по заданной контекстной задаче проводить пошаговый ее анализ, на основании которого: строить математическую модель; выбирать оптимальный метод решения; производить расчеты и оценивать полученный результат. Использование контекстных задач способствует повышению мотивации и интереса к предмету, мобилизует студентов на изучение темы, активизирует мыслительную деятельность. Они могут быть использованы как при изучения новой темы, так и для самостоятельного установления студентами какого-либо математического факта, для более глубокой проработки теоретического материала.

Модуль – это логически завершенная часть учебной дисциплины, обладающая содержательной целостностью, имеющая цели обучения, адекватные данному содержанию, и методическое обеспечение, включающее соответствующие организационные формы обучения, отвечающая за формирование определенной компетенции и сопровождаемая контролем знаний, умений и владений, обучающихся на выходе.

Основным модулем, формирующим базовые компетенции студентов не только технических, но и гуманитарных направлений, считается модуль «дифференциальные уравнения». Дифференциальные уравнения отражают законы природы, общества, используются в смежных дисциплинах естественнонаучного цикла. В.И.Ленин в работе «Материализм и эмпириокритицизм» писал: «…единство природы обнаруживается в поразительной аналогичности дифференциальных уравнений, относящихся к разным областям явлений». В тоже время изучение этого модуля опирается на сформированные ранее знания, умения и владения при изучении модулей дифференциальное и интегральное исчисление. Недостаточный уровень обученности студентов в этих модулях вызывает определенные трудности при составлении и решении дифференциальных уравнений. В силу особенностей современного поколения студентов подача теоретического материала, а, тем более, содержание практических заданий должна быть разнообразной, поэтому контексты могут быть и бытовые, и, показывающие связь с другими разделами математики и, использующие известные законы физики, механики, химии и, конечно, задачи профессиональной направленности.

Приведем некоторые примеры контекстных задач модуля «дифференциальные уравнения».

1. За 5 минут кофе охладился от 100^0С до 80^0С. За какое время он остынет до 40^0С, если температура воздуха на кухне 25^0С, а скорость остывания пропорциональна разности температур.

2. Найдите уравнение кривой на плоскости, обладающей следующим свойством: площадь треугольника, образованного касательной к данной кривой, ординатой точки касания и осью абсцисс, есть величина постоянная, равная *S*.

3. В воздухе учебной аудитории объемом 250 м^3 содержится 0,16% углекислого газа CO_2. Вентилятор подает в минуту 25 м^3 воздуха, содержащего 0,05% CO_2. Определите, через какое время количество углекислого газа уменьшится вдвое?

4. Определите форму равновесия нерастяжимого троса с закрепленными концами, при условии, что на каждую единицу длины горизонтальной проекции нагрузка действует одинаково. (Весом самой нити пренебречь.)

5. Найдите форму однородной вертикальной колонны с круглым поперечным сечением, чтобы давление удерживаемого ею груза и ее собственного веса, приходящееся на единицу площади горизонтального сечения, было везде одинаково.

6. Машина движется по горизонтальному участку пути со скоростью v_0. На каком расстоянии и через, сколько времени она будет остановлена тормозом, если сопротивление движению после начала торможения равно 0,18 ее веса.

7. Пуля, пробив доску толщиной *h*, изменила свою скорость от v_0 до *v*. Найти время движения пули в доске, считая силу сопротивления пропорциональной квадрату скорости.

В современном вузе остро стоит проблема снижения интереса студентов к изучению высшей математики. Одной из причин является отсутствие понимания ценности и значимости данного предмета в решении практических, реальных задач. Поэтому для преподавателя важным является поиск путей повышения мотивации к изучению математики. Познавательный интерес, заложенный в контекстных задачах, является важным фактором активизации при изучении конкретной темы. Благодаря такому подходу студенты вовлекаются в учебно-исследовательскую работу, требующую от них креативности, включения мышления.

В заключение, отметим, что современные студенты понимают, что в условиях стремительного обновления технологий, меняющихся условий жизни общества, его ценностей, необходимо не просто обладать набором знаний, но и уметь их транслировать соответственно данной конкретной, нестандартной ситуации, проявлять компетентность в решении возникающих практических задач, способность быстро пополнять полученные знания. Все чаще от студентов стали звучать вопросы: зачем мы изучаем эту тему, где используются эти понятия, как применять полученные знания. Z-поколению присуще «витание в фантазиях», им с трудом удаётся отделить черты виртуальных героев от реальных. Большую часть информации они получают из Сети, что придает им уверенности в своих взглядах, которые далеко не всегда верны. Задача педагога заинтересовать студента, показать на реальных примерах процесс формирования соответствующих компетенций, востребованных на рынке труда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вербицкий А.А. Контекстное обучение в компетентностном подходе // Высшее образование в России. – 2006. № 11. – с. 39-46.

2. Выготский Л.С. Собрание сочинений: В 6-ти т. Т.3 Проблемы развития психики / Под ред. А.М. Матюшкина. – М. Педагогика, 1983. – 368 с.

УДК 514 (075.3)

НЕИЗВЕСТНАЯ ИЗВЕСТНАЯ ТЕОРЕМА ПТОЛЕМЕЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ И ЕЁ ПРИМЕНЕНИЕ

Ирина Юрьевна Бурова
МБОУ СОШ №17, Тверь
E-mail: biyu2010@mail.ru

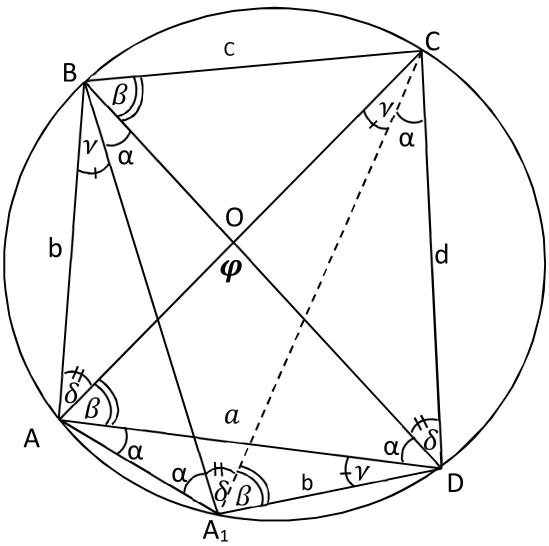
Ключевые слова: *теорема Птолемея, вписанные четырёхугольники, теорема Пифагора, формулы сложения в тригонометрии.*

Аннотация. В работе приводится доказательство теоремы Птолемея и обратной теоремы Птолемея. Приводятся решения задач на применение теоремы Птолемея. Доказывается теорема Пифагора и выводятся тригонометрические формулы сложения с помощью теоремы Птолемея.

Изучение теоремы Птолемея не входит в программу геометрии общеобразовательных школ. Однако многие задачи короче и проще можно решить с помощью этой теоремы.

Изучать теорему следует после знакомства с такими темами геометрии, как «Подобие треугольников», «Вписанные многоугольники» в конце 8 класса или в 9 классе.

Теорема Птолемея. Во вписанном четырёхугольнике произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.



Доказательство. Докажем, что $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$, где AC и BD – диагонали вписанного в окружность четырёхугольника $ABCD$. Обозначим вписанные углы, как показано на рисунке и проведём дополнительное построение: $AA_1 \parallel BD$; A_1B.

Так как $AA_1 \parallel BD$, то AA_1DB – трапеция, вписанная в окружность, значит, она равнобедренная и её диагонали равны. Пусть $A_1D=AB=b$, $A_1B=AD=a$.

$\Delta DA_1B=\Delta DAB$ (по трём сторонам $AB=A_1D$; $AD=A_1B$, BD – общая), значит, их площади равны.

$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD}$; $S_{A_1BCD} = S_{A_1BD} + S_{BCD} \Rightarrow S_{ABCD} = S_{A_1BCD}$.

$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC{\cdot}BD\sin\angle AOD.$

$S_{A_1BCD} = S_{A_1BC} + S_{A_1CD} = \frac{1}{2} A_1B \cdot BC \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} A_1D \cdot CD \sin\angle A_1DC.$

Так как во вписанном четырёхугольнике $\angle A_1BC + \angle A_1DC = 180°$, то

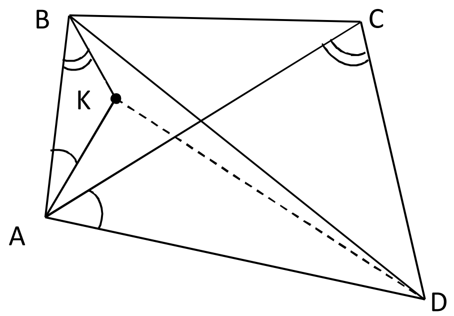
$$\mathbf{\sin\angle A_1BC = \sin\angle A_1DC}.$$

$\angle$AOD$=\frac{1}{2}(\smile AA_1D + \smile BC) = \frac{1}{2}\big((2\gamma + 2\alpha) + 2\delta\big) = \alpha + \gamma + \delta;$

$\angle A_1DC = \alpha + \gamma + \delta.$ Значит, $\mathbf{\sin\angle AOD = \sin\angle A_1DC}$**.**

Тогда $\frac{1}{2}AC{\cdot}BD\sin\angle AOD=\frac{1}{2} A_1B \cdot BC \sin\angle A_1BC + \frac{1}{2} A_1D \cdot CD \sin\angle A_1DC,$ и АС $\cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD.$

Верно обратное утверждение: Если в выпуклом четырёхугольнике *ABCD* выполняется равенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD,$ то такой четырёхугольник можно вписать в окружность.



Доказательство. Пусть дан четырёхугольник ABCD. Дополнительное построение: проведём лучи АК и ВК так, как показано на чертеже, чтобы $\angle BAK=\angle CAD$, $\angle ACD=\angle ABK$.

1.$\Delta ABK \sim \Delta ACD$ (по двум углам), значит, $\frac{AB}{AC} = \frac{BK}{CD} = \frac{AK}{AD} \Rightarrow$

а) $AC \cdot BK = AB \cdot CD$ (1); $b)$ $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AD}$.

2. $\left.\begin{array}{r} \angle BAC = \angle BAK + \angle KAC \\ \angle KAD = \angle CAD + \angle KAC \\ \angle BAK = \angle CAD \end{array}\right\} \Rightarrow \angle BAC = \angle KAD.$

3. $\Delta AKD \sim \Delta ABC$ (т.к. $\frac{AB}{AK} = \frac{AC}{AD}$, $\angle BAC = \angle KAD$), значит, $\frac{KD}{BC} = \frac{AD}{AC}$ и $KD{\cdot}AC=BC{\cdot}AD$ (2).

4. Сложим (1) и (2):

$KD{\cdot}AC + AC \cdot BK = BC{\cdot}AD + AB \cdot CD;$ $AC \cdot (KD + BK) = BC{\cdot}AD + AB \cdot CD.$

Но по условию $AC \cdot BD = BC \cdot AD + AB \cdot CD$, значит, $KD + BK = BD$, и следовательно $K \in BD$, а $\angle ABD=\angle ACD$.

Из последнего следует, что отрезок *AD* виден из точек В и С под одним углом, т.е. точки *A*, *B*, *C* и *D* лежат на одной окружности.

Применяя теорему Птолемея можно легко доказать **теорему Пифагора**.

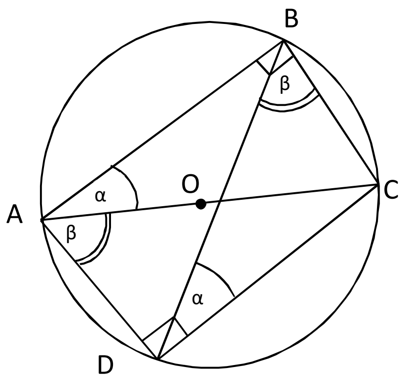
Пусть дан прямоугольный треугольник *ABC*. Достроим его до прямоугольника *ACBD* и около прямоугольника опишем окружность. Тогда

$$CD \cdot AB = AD \cdot CB + AC \cdot DB;\ CD = AB;\ AD = CB;\ DB = AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2 = CB^2 + AC^2.$$

Интересно, что с помощью теоремы Клавдия Птолемея, жившего во II в. н. э., можно получить некоторые тригонометрические формулы:

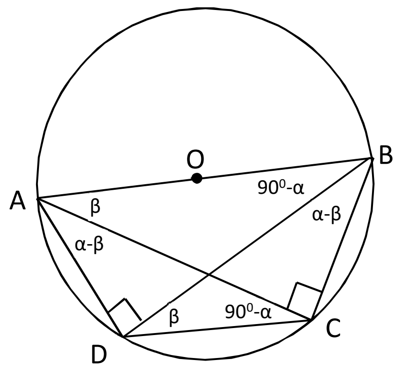
1) Если диагональ AC – диаметр окружности, то *AC·BD=AB·DC+AD·DC*.



Тогда $2R{\cdot}2R\sin(\alpha+\beta) = 2R\cos\alpha\cdot 2R\sin\beta + 2R\cos\beta\cdot 2R\sin\alpha$ или

$$\mathbf{\sin(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}) = \cos\boldsymbol{\alpha}\cdot\sin\boldsymbol{\beta}+\cos\boldsymbol{\beta}\cdot\sin\boldsymbol{\alpha}}.$$

2) Если сторона AB – диаметр окружности, то можно получить формулу для синуса разности или косинуса суммы.

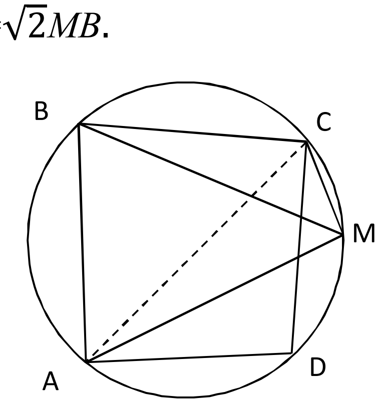


Выведем формулу для синуса разности:
$2R\cdot 2R\sin(\alpha-\beta) + 2R\sin(90°-\alpha)\cdot 2R\sin\beta = 2R\sin(90°+\beta)\cdot 2R\sin\alpha,$
т.е. $\sin(\alpha-\beta)+\cos\alpha\sin\beta = \cos\beta\sin\alpha$ или

$$\mathbf{\sin(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}) = \sin\boldsymbol{\alpha}\cos\boldsymbol{\beta}-\cos\boldsymbol{\alpha}\sin\boldsymbol{\beta}}\,.$$

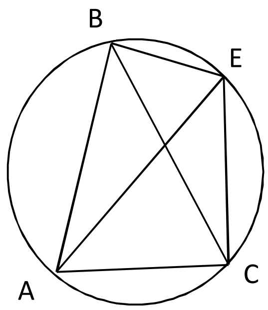
Приведём решение ещё нескольких задач на использование теоремы Птолемея.

Задача 1. На дуге *CD* описанной окружности квадрата *ABCD* взята точка *M*. Доказать, что $MA+MC=\sqrt{2}MB$.



Доказательство. Рассмотрим четырёхугольник $ABCM$. Так как четырёхугольник вписан в окружность, то справедлива теорема Птолемея и выполняется равенство $AC\cdot BM=AB\cdot CM+BC\cdot AM$. Так как $ABCD$ – квадрат, то $AB=BC$ и равенство разделим на AB: $\frac{AC\cdot BM}{AB}=CM+AM$. Учитывая, что $\frac{AC}{AB}=\sqrt{2},$ заключаем $MA+MC=\sqrt{2}MB$.

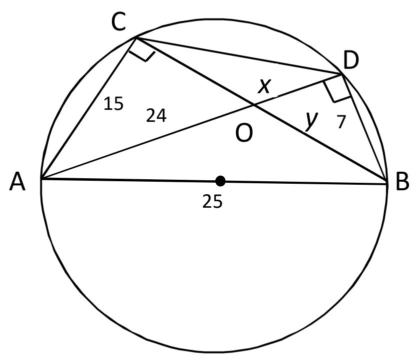
Задача 2. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка E, отличная от вершин треугольника. Докажите, что один из отрезков AE, BE или CE равен сумме двух других.



Доказательство. Докажем, что $AE=BE+CE$. Так как четырёхугольник вписан в окружность, то $AE\cdot BC=AB\cdot CE+BE\cdot AC$. Но ΔABC равносторонний и $AB=BC=AC$, $AE\cdot AB=AB\cdot CE+BE\cdot AB$. При делении равенства на AB получим $AE=BE+CE$.

Задача 3. Из концов диаметра окружности, равного 25 см, проведены по одну сторону от него две хорды длины 24 см и 20 см. Определите расстояние между концами хорд, не лежащих на диаметре.

Решение.



Рассмотрим четырёхугольник $ABDC$. $\angle ACB=90°$, $\angle ADB=90°$ как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.

ΔACB – прямоугольный, $BC=20$ см, $AB=25$ см, значит, $AC=15$ см по теореме Пифагора. Аналогично, ΔABD – прямоугольный, $AB=25$ см, $AD=24$ см, значит, $DB=7$ см по теореме Пифагора.

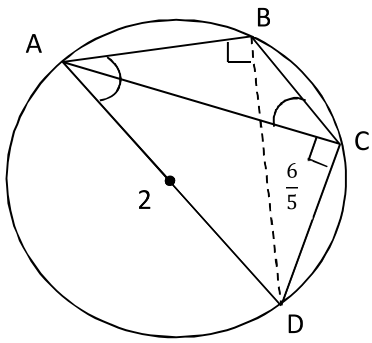
Тогда по теореме Птолемея

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB=AD\cdot CB;\ 25\cdot CD+15\cdot 7=24\cdot 20;\ CD=15 \text{ см}.$$

Ответ: $CD=15$ см.

Задача 4. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, причём $\angle ACD=90°$, $\angle ACB=\angle BAD$; $AD=2$; $CD=\frac{6}{5}$. Найдите BC.

Решение.



Так как четырёхугольник *ABCD* вписан в окружность, причём $\angle ACD$=90°, то AD – диаметр, на который опирается $\angle ABD$, значит, $\angle ABD$=90°.

$\angle$ACB=$\angle$BAD по условию, значит, *AB=BD*, как хорды, стягивающиеся равными углами.

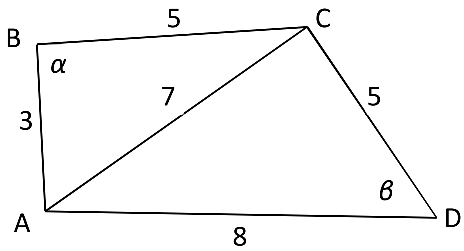
Следовательно, ΔABD – прямоугольный и равнобедренный, *AD*=2 по условию. Значит, $AB=BD=\sqrt{2}$.

ΔACD прямоугольный, *AD*=2, $DC=\frac{6}{5}$ по условию. $AC=\frac{8}{5}$ по теореме Пифагора. По теореме Птолемея *AC·BD=AB·DC+BC·AD*, то есть $\frac{8}{5}\cdot\sqrt{2} = 2\cdot BC + \sqrt{2}\cdot\frac{6}{5}$; $BC=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Ответ: BC=$\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Задача 5. В выпуклом четырёхугольнике *ABCD* известны стороны *AB*=3, *BC=CD*=5, *AD*=8, *AC*=7. Найдите *BD*.

Решение.



ΔABC: по теореме косинусов $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 - \mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cos\alpha$;

$$49=9+25-2\cdot 3\cdot 5\cdot\cos\alpha;\ \cos\alpha = \frac{34-49}{30} = -\frac{1}{2};\ \alpha = 120°.$$

ΔADC: по теореме косинусов $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{A}D^2 + D\mathrm{C}^2 - \mathrm{A}D\cdot D\mathrm{C}\cos\beta$**;**

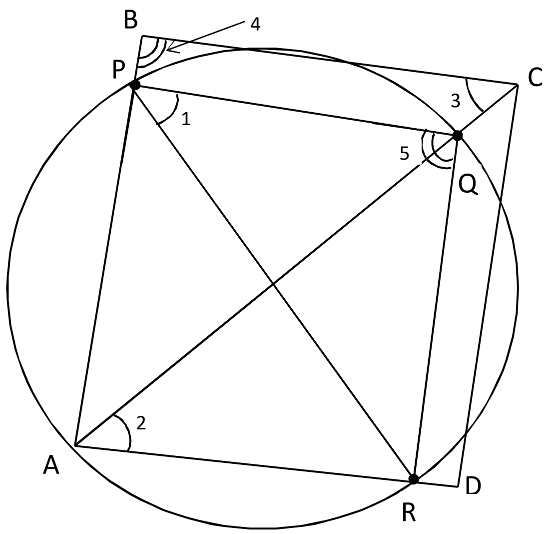
$$49=64+25-2\cdot 8\cdot 5\cdot\cos\beta;\ \cos\beta = \frac{89-49}{80} = \frac{1}{2};\ \beta = 60°.$$

Так как $\beta + \alpha = 180°$, то около *ABCD* можно описать окружность, значит, по теореме Птолемея *AC·BD=AB·DC+BC·AD*; 5·8+3·5=7·*BD*, $BD=\frac{40+15}{7} = \frac{55}{7} = 7\frac{6}{7}$.

Ответ: $BD = 7\frac{6}{7}$.

Задача 6. Дан параллелограмм *ABCD*. Окружность, проходящая через *A*, пересекает отрезки *AB*; *AC* и *AD* в точках *P*, *Q* и *R* соответственно. Доказать, что *AP·AB+AR·AD=AQ·AC*.

Доказательство.



Рассмотрим вписанный четырёхугольник *APQR*. По теореме Птолемея $AP \cdot QR + PQ \cdot AR = AQ \cdot PR$.

$\angle 1 = \angle 2$ (опираются на $\smile RQ$); $\angle 2 = \angle 3$ (по свойству параллелограмма). Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

$\angle 4 + \angle BAD = 180°$ (свойству параллелограмма); $\angle 5 + \angle BAD = 180°$ (по свойству вписанного четырёхугольника)). Следовательно, $\angle 4 = \angle 5$.

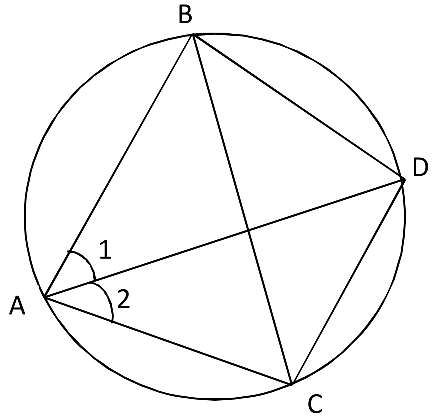
$\Delta PQR \sim \Delta CBA$ (по двум углам: $\angle 1 = \angle 3; \angle 4 = \angle 5$); $\frac{RQ}{AB} = \frac{QP}{BC} = \frac{PR}{AC} = k$; $RQ = AB \cdot k$; $QP = BC \cdot k$; $PR = AC \cdot k$. Тогда

$$AP \cdot QR + PQ \cdot AR = AQ \cdot PR;$$
$$AP \cdot (AB \cdot k) + AR(BC \cdot k) = AQ \cdot (AC \cdot k);$$
$$AP \cdot AB + AR \cdot BC = AQ \cdot AC.$$

Так как $BC = AD$ (по свойству параллелограмма), то $AP \cdot AB + AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.

Задача 7. Биссектриса $\angle A$ треугольника *ABC* пересекает описанную окружность в точке *D*. Докажите, что $AB + AC \leq 2AD$.

Доказательство.



Так как около четырёхугольника описана окружность, то по теореме Птолемея $AB \cdot CD + AC \cdot DB = AD \cdot CB$.

$\angle 1 = \angle 2$ по условию, значит, $BD = DC$ (как хорды, стягивающие равные дуги), и тогда $AB \cdot CD + AC \cdot CD = AD \cdot CB$; $CD \cdot (AB + AC) = AD \cdot CB$. (1)

$BD+CD \geq BC$ (из ΔBDC); $BD = CD$, значит, $2CD \geq BC$. Тогда из (1) следует $AB+AC = \frac{AD \cdot CB}{CD} \leq \frac{AD \cdot CD \cdot 2}{CD} = 2AD$.

Задача 8. Расстояния от центра описанной окружности остроугольного треугольника до его сторон равны d_a, d_b, d_c. Докажите, что $d_a + d_b + d_c = R + r$, где R и r – радиусы соответственно описанной и вписанной окружности.

Доказательство. Пусть $OA_1 = d_a, OB_1 = d_b, OC_1 = d_c$, где O – центр описанной окружности. Тогда A_1, B_1, C_1 – середины сторон соответственно. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$.

Так как OC_1, OB_1, OC_1 – перпендикулярны соответственно AB, AC, BC, то около четырёхугольников AC_1OB_1, BA_1OC_1, CB_1OA_1 можно описать окружность и по теореме Птолемея

$$AC_1 \cdot OB_1 + C_1O \cdot AB_1 = AO \cdot C_1B_1;$$

$$\frac{1}{2} c d_b + \frac{1}{2} b d_c = R \cdot \frac{1}{2} a;$$

$$c d_b + b d_c = R \cdot a \qquad (1)$$

Аналогично $\frac{1}{2} b d_a + \frac{1}{2} a d_b = R \cdot \frac{1}{2} c$; $\quad b d_a + a d_b = R \cdot c$ (2)

$$\frac{1}{2} a d_c + \frac{1}{2} c d_a = R \cdot \frac{1}{2} b; \quad a d_c + c d_a = R \cdot b; \qquad (3)$$

Далее, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a d_a + \frac{1}{2} b d_b + \frac{1}{2} c d_c$; $2S_{ABC} = a d_a + b d_b + c d_c$;

$$a d_a + b d_b + c d_c = (a + b + c) \cdot r \qquad (4)$$

4.Сложим (1) – (4):

$$c d_b + b d_c + b d_a + a d_b + a d_c + c d_a + a d_a + b d_b + c d_c =$$
$$= R \cdot a + R \cdot b + R \cdot c + (a + b + c) \cdot r;$$
$$a(d_a + d_b + d_c) + b(d_a + d_b + d_c) + c(d_a + d_b + d_c) =$$
$$= R(a + b + c) + (a + b + c) \cdot r;$$
$$(a + b + c)(d_a + d_b + d_c) = (a + b + c)(R + r);$$
$$d_a + d_b + d_c = R + r.$$

Что и требовалось доказать.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Учебное пособие для 7-9 классов средней школы «Факультативный курс по математике» / сост. Никольская И.Л. – М.: «Просвещение», 1991.

2. Ткачук В.В. Всё о вступительных экзаменах в ВУЗы «Математика – абитуриенту». – М.: МЦНМО, 2003.

3. Прасолов В.В.Научно-популярное издание «Задачи по планиметрии». – М.: «Наука», 1991.

УДК 378.14.015.62(004+330.4+311)

КОМПЕТЕНЦИИ СПЕЦИАЛИСТОВ ЭКОНОМИЧЕСКОГО ПРОФИЛЯ В ОБЛАСТИ МАТЕМАТИКИ, СТАТИСТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Александр Анатольевич Васильев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vasiljev-tvgu@yandex.ru

Екатерина Васильевна Васильева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: tver-tvgu@mail.ru

Ключевые слова: *компетенция, образовательный стандарт, профессиональный стандарт, требование работодателя, цифровая экономика, экономист.*

Аннотация. В работе проанализированы требования образовательных и профессиональных стандартов, а также работодателей к компетенциям выпускников бакалавриата направления подготовки “Экономика”. Сделан вывод о не полном соответствии этих требований перспективным требованиям к специалистам цифровой экономики в части компетенций в области математических методов и программирования. Рассмотрены тенденции подготовки экономистов в эпоху цифровой трансформации.

Введение. Проекты федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) третьего поколения (ФГОС ВО (3++)) устанавливают, что профессиональные компетенции основной образовательной программы (ООП) бакалавриата определяются на основе: 1) ФГОС ВО; 2) профессиональных стандартов; 3) анализа требований работодателей; 4) обобщения отечественного и зарубежного опыта. Поэтому объектом данного исследования являются перечисленные документы и требования. Предмет исследования – анализ требований стандартов и работодателей к компетенциям выпускников бакалавриата по направлению 38.03.01 “Экономика” в области математики, статистики и информационных технологий. Цель исследования – выявление ключевых компетенций специалистов экономического профиля в области математики, статистики и информационных технологий в эпоху цифровой трансформации.

1. Требования ФГОС ВО. ФГОС высшего профессионального образования по направлению “Экономика” (2009 г.) содержали детальные компетенции в области математики, статистики, эконометрики, информационных технологий и перечень дисциплин для их формирования. Так математические дисциплины (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, методы оптимальных решений и/или теория игр) формировали 12 компетенций. Статистика и эконометрика формировали 6 компетенций. Дисциплины для формирования 3 компетенций в области информационных технологий не приводились.

Ныне действующий ФГОС ВО (2015 г.) устанавливает меньшее количество компетенций в области математики (3 компетенции), статистики

(3 компетенции), эконометрики (1 компетенция) и информационных технологий (3 компетенции) без указания дисциплин для их формирования. Проект ФГОС ВО (3++) (2019 г.) предполагает 1 обобщенную компетенцию в области статистики и 1 обобщенную компетенцию в области информационных технологий. Компетенции в области математики и эконометрики не предусмотрены.

2. Требования профессиональных стандартов. В настоящее время на Портале ФГОС ВО размещены 34 профессиональных стандарта, устанавливающих требования к выпускникам бакалавриата (6 уровень квалификации) направления “Экономика” (1 стандарт “Бухгалтер” и 33 стандарта, связанные с финансовой деятельностью). В 32 (94,1 %) из них перечислены те или знания и умения в области информационных технологий, в 28 (82,4 %) – в области статистики, в 18 (52,9 %) – в области математики.

Профессиональные стандарты предъявляют требования к знаниям и умениям, формируемым в следующих математических дисциплинах (в скобках указана доля стандартов в процентах): количественный анализ рисков (26,5); финансовая математика (20,6); математическая статистика (14,7); теория вероятностей (11,8); экономико-математические методы и модели (8,8); методы прогнозирования (8,8); теория принятия решений (8,8); актуарная математика (5,9); математический анализ (2,9).

3. Требования работодателей. Результаты разведочных исследований и анализа объявлений работодателей г. Москвы и г. Твери на сайте HeadHunter в феврале 2020 г. приведены в табл. 1 (в скобках после названия города указано количество проанализированных объявлений).

Таблица 1

Требования работодателей к компетенциям бухгалтеров и экономистов

Компетенция	Доля упоминаний (в %) в объявлениях работодателей для вакансии			
	Бухгалтер		Экономист	
	Москва (50)	Тверь (50)	Москва (94)	Тверь (21)
В области математики	-	-	21,3	-
В области статистики	-	-	45,7	61,9
В области информационных технологий				
Программы фирмы 1С	100,0	98,0	54,3	52,4
MS Office, в том числе				
MS Word	48,0	48,0	25,5	38,1
MS Excel	58,0	54,0	84,0	66,7

Для бухгалтеров к наиболее значимым программам фирмы 1С относятся: 1С: Бухгалтерия (38,0% объявлений в Москве и 30,0% в Твери); 1С: Управление торговлей (30,0% объявлений в Москве и 10,0% в Твери); 3) 1С: Зарплата и управление персоналом (18,0% объявлений в Москве и 16,0% в Твери). К наиболее значимым инструментам MS Excel для экономистов в Москве работодатели относят: сводные таблицы (31,9% объявлений); встроенные функции (28,7%); макросы (6,4%). Кроме того, в ряде объявлений о вакансиях экономистов в Москве требуются навыки создания электронных презентаций в MS PowerPoint (17,0%), знание языка программирования Visual Basic for Application (7,4%) и навыки написания запросов на языке SQL для создания и редактирования баз данных (5,3%).

Динамика требований работодателей г. Москвы к владению программными продуктами показана в табл. 2. Данные за 2015 и 2017 годы взяты из [1, с. 317].

Таблица 2

Динамика требований к владению программными продуктами

Программный продукт	Доля упоминаний (в %) в объявлениях работодателей для вакансии					
	Бухгалтер			Экономист		
	2015	2017	2020	2015	2017	2020
Программы фирмы 1С	86,0	84,0	100,0	50,0	56,0	54,3
MS Excel	34,0	44,0	58,0	56,0	64,0	84,0
MS Word	22,0	34,0	48,0	30,0	16,0	25,5

Анализ табл. 2 показывает, что имеют место тенденция к повышению требований работодателей к владению бухгалтерами и экономистами табличным процессором MS Excel и тенденция к повышению требований к владению бухгалтерами текстовым редактором MS Word. Кроме того, работодатели требуют от претендентов на вакансии бухгалтеров обязательного владения программными продуктами фирмы 1С.

4. Рынок труда и образование в эпоху цифровой трансформации. Рынок труда в России характеризуется следующими обстоятельствами.

1. В настоящее время Россия входит в число лидеров группы “цифровых последователей” за счет инвестиций в расширение инфраструктуры информационно-коммуникационных технологий и внедрения цифровых технологий в государственных структурах, но значительно отстает от “цифровых чемпионов” по уровню цифровизации компаний [2, с. 35]. Эта ситуация обусловлена следующими причинами [3, с. 8-9; 4, с. 39]: а) отсутствием спроса на знания, так как российская экономика продолжает оставаться преимущественно сырьевой; б) практическим отсутствием подготовки системой образования кадров для экономики знаний; в) отсутствием среды для развития и самореализации работников.

2. Экономика в России в настоящее время сконцентрирована в центре и в регионах добывающей промышленности, в других регионах имеет место падение спроса на высококвалифицированных специалистов [3, с. 34].

3. Образовательные учреждения готовят специалистов для удовлетворения потребностей работодателей, которые к моменту окончания обучения могут существенно измениться [4, с. 6]. Массовая подготовка таких специалистов может привести к попаданию их в квалификационную яму [4, с. 22], а работодателей к проблеме кадрового разрыва.

4. Автоматизация (цифровизация) бизнес-процессов может привести к исчезновению в ближайшие 10 лет от 9 до 50% всех ныне существующих

профессий, а также приводит к существенному изменению ныне существующих профессий [3, с. 17]. К должностям, уже подвергающимся сокращениям в связи с цифровизацией процессов, относятся аналитики общего профиля, бухгалтеры, юристы, трейдеры, рекрутеры, административный персонал [3, с. 18]. К устаревающим профессиям также отнесены: аудитор, менеджер по кредитам, статистик, банковский операционист, риэлтор, логист, телемаркетолог и другие [5, с. 263; 6, с. 46].

5. Чтобы соответствовать темпам развития экономики знаний и быть конкурентоспособным на рынке труда, необходимо учиться в течение всей жизни для адаптации к непрерывным изменениям [3, с. 5]. Кроме того, понятие профессии устаревает, и на смену ему приходит гибкий набор навыков и компетенций, необходимый для решения конкретных задач [5, с. 174]. Для уменьшения размера квалификационной ямы разработана человекоцентричная концепция рынка труда и основанные на ней модели компетенций работника. Одна из моделей компетенций работника в цифровой экономике включает когнитивные навыки, социально-поведенческие навыки и цифровые навыки [3, с. 20]. Кроме того, человекоцентричная концепция рынка труда включает принципы: приобретение навыков будущего, осознанная самостоятельность в выборе профессионального пути, мобильность компетенций и другие [4, с. 8].

6. Центральным элементом цифровой трансформации являются кадры [7, с. 8]. В цифровой экономике резко возрастает потребность в специалистах в сфере цифровых технологий, аналитики данных, а также в специалистах, получивших образование в области науки, технологий, инжиниринга, математики и способных программировать и эксплуатировать сложное оборудование [7, с. 8, 52]. Во всех отраслях цифровой экономики предполагается рост спроса на аналитиков данных, к ключевым компетенциям которых относят: глубокое понимание математической статистики и теории вероятностей; аналитические способности; навыки решения нестандартных задач; умение эффективно представить результаты работы; любознательность; склонность к работе с данными [6, с. 48].

7. В условиях цифровой трансформации при высокой скорости перемен и высоком уровне неопределенности потребность в специалистах узкого профиля снижается из-за быстрого изменения технологий, к которым они привязаны, при этом потребность в специалистах с навыками междисциплинарного общения возрастает [5, с. 12; 8, с. 20-21]. При этом через 15 лет программирование будет являться новой грамотностью, и специалисты с высокой компьютерной грамотностью будут более конкурентоспособными [8, с. 181-182].

8. В цифровую эпоху повышается значимость математики как наиболее важной области знаний специалиста любого профиля в условиях повсеместного использования информационных технологий и компьютерной техники [9, с. 79].

5. Тенденции подготовки экономистов в эпоху цифровой трансформации.

1. Подготовка специалистов в рамках традиционного направления подготовки 38.03.05 “Бизнес-информатика”. Так в ряде вузов реализуются профили: “Электронный бизнес”; “IT-менеджмент в бизнесе”; “Архитектура предприятия”; “Технологическое предпринимательство”.

2. Подготовка математиков с компетенциями в области экономики в рамках направлений подготовки 01.03.01 “Математика”, 01.03.02 “Прикладная математика и информатика”, 01.03.04 “Прикладная математика” и 02.03.01 “Математика и компьютерные науки”. Например, в рамках ООП “Математика” в 5 вузах реализуются профили: “Математические методы в экономике”; “Математика в цифровой экономике”; “Математическая экономика и теория управления”; “Математические методы моделирования социально-экономических систем”; “Математическое моделирование в цифровой экономике”.

3. Подготовка экономистов по новым профилям, связанным с цифровой экономикой, в рамках направления 38.03.01 “Экономика”. По данным портала “Образовательный форум “Навигатор поступления” среди 946 вузов, реализующих ООП из группы направлений подготовки “Экономика и управление”, в 24 вузах (2,5%) реализуются профили, связанные с подготовкой специалистов для цифровой экономики. Примерами таких профилей являются: “Аналитическая экономика”; “Цифровая экономика”; “Бизнес-аналитика” (в большинстве вузов); “Анализ данных и методы оптимизации в экономике”; “Математические методы в экономике”.

4. Расширение математической, аналитической и информационной подготовки в рамках традиционных профилей направления 38.03.01 “Экономика”. В качестве примера можно привести ООП направления “Экономика” (2019 г.) Национального исследовательского университета “Высшая школа экономики”. В ней из 81 зачетной единицы (ЗЕ) базовой части профессионального цикла 45 ЗЕ выделены на изучение дисциплин, формирующих компетенции в области математики и статистики (математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и статистика, эконометрика, наука о данных). Кроме того, студент в рамках дисциплин по выбору может изучать математические дисциплины в объеме не менее 25 ЗЕ. К этим дисциплинам относятся: дифференциальные и разностные уравнения; инструментальные методы цифровой экономики; машинное обучение; теория игр; случайные процессы; динамическая оптимизация в экономике и финансах; прикладная эконометрика; эконометрика временных рядов; актуарные расчеты в страховании жизни.

Выводы. 1. Требования ФГОС ВО (3++) по направлению подготовки “Экономика”, профессиональных стандартов и работодателей не в полной мере учитывают перспективные требования к специалистам цифровой экономики в части компетенций в области экономико-математических методов, эконометрики и программирования. 2. Для учета этих требований ведущие вузы в рамках направления подготовки “Экономика” реализуют профили, ориентированные на подготовку специалистов для цифровой экономики. 3. Для обеспечения адаптации к цифровой экономике выпускников традиционных профилей направления “Экономика” в части мобильности компетенций необходимо в ООП этих профилей предусматривать изучение экономико-математических методов, эконометрики и программирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильев А.А. Требования образовательных и профессиональных стандартов и работодателей к компетенциям специалистов экономического профиля в области математики, статистики и информатики [Электронный ресурс] / Факторы развития экономики России: сб. тр. IX Междунар. научно-практ. конф., Тверь, 27-28 апреля 2017 г. Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – С. 314-319. URL: http://eco.tversu.ru/Doc/conf/frer_sb_2017.pdf.

2. Цифровая Россия: новая реальность [Текст] / А. Аптекман, В. Калабин, В. Клинцов и др. М.: ООО “Мак-Кинзи и Компания СиАйЭс”, 2017. – 133 с.

3. Россия 2025: от кадров к талантам [Электронный ресурс] / В. Бутенко, К. Полунин, И. Котов и др. М.: BCG, 2017. URL: https://bcg.com/Images/Russia-2025-report-RUS_tcm27-188275.pdf.

4. Массовая уникальность - глобальный вызов в борьбе за таланты [Электронный ресурс] / В. Бутенко, К. Полунин, А. Степаненко и др. М.: BCG, 2019. URL: https://bcg.com/Images/RUS-BCG-Mas-Uniq_tcm27-228998.pdf.

5. Атлас новых профессий: вторая редакция [Текст] / П. Лукша, К. Лукша, Д. Варламова и др. М.: Агентство стратегических инициатив (Сколково), 2015. – 288 с.

6. Что такое цифровая экономика? Тренды, компетенции, измерение [Текст]: докл. к XX Апр. Междунар. науч. конф. по проблемам развития экономики и общества, Москва, 9-12 апр. 2019 г. / Науч. ред. Л.М. Гохберг. М.: Изд. Дом ВШЭ, 2019. – 82 с.

7. Глобальное исследование цифровых операций в 2018 г. “Цифровые чемпионы”: Как лидеры создают интегрированные операционные экосистемы для разработки комплексных решений для потребителей [Электронный ресурс]. М.: PwC, 2018. URL: https://www.pwc.ru/ru/iot/digital-champions.pdf.

8. Атлас новых профессий 3.0 [Текст] / Под ред. Д. Варламовой, Д. Судакова. М.: Интеллектуальная Литература, 2020. – 456 с.

9. Еникеева С.Д. О роли математического образования в цифровой экономике // Современные тенденции развития и образования: Теория и практика / под ред. Г.С. Жуковой. М.: Изд-во Институт системных технологий. – С. 79-81.

УДК 004.657

ОПТИМИЗАЦИЯ SQL-ЗАПРОСОВ

Олег Алексеевич Гапченко
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: oleg.ga@ukr.net

Валентина Михайловна Цирулева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *SQL-запрос, реляционная алгебра, оптимизатор запросов.*

Аннотация. В работе осуществлен анализ существующих способов оптимизации SQL-запросов и эквивалентных преобразований реляционных выражений. На основе выбранных способов построен программный оптимизатор.

Низкая производительность сервера обычно возникает, когда база данных не поддерживается должным образом. Один SQL-запрос, настроенный на сбор информации из БД, может тратить полезные ресурсы и ухудшать общую производительность сервера. Поэтому в связи с увеличением темпов роста объема информации и нагрузки на сервер баз данных весьма желательно осуществлять оптимизацию запросов [1], [2]. Промышленные СУБД, например, ORACLE, используют встроенные оптимизаторы. В работе рассматривается СУБД MySQL.

Под оптимизацией запроса будем понимать снижение времени выполнения SQL-запроса. Выигрыш – это положительная разница между временем выполнения тестируемого SQL-запроса и оптимизированного SQL-запроса. В работе осуществлен анализ существующих способов оптимизации SQL-запросов [3] и эквивалентных преобразований реляционных выражений [4]. На основе выбранных способов построен программный оптимизатор.

Из существующих способов оптимизации будем использовать следующие:

- указание поля в SELECT вместо использования SELECT*;
- ограничивание результатов, полученных по запросу;
- удаление DISTINCT, если не требуется;
- избегание функций в предикатах;
- избегание операторов И, ИЛИ, НЕ, если это возможно;
- использование ORDER BY NULL, если это возможно;
- использование WHERE вместо HAVING, если это возможно;
- избегание подстановочных знаков в начале шаблона предложения LIKE.

Для анализа второго метода перечислим набор правил эквивалентности для запросов, написанных в реляционной алгебре. Для оптимизации запроса необходимо преобразовать запрос в его эквивалентную форму, если выполняется правило эквивалентности.

Сигма-каскад. $\sigma_{\theta_1 \wedge \theta_2}(E) = \sigma_{\theta_1}(\sigma_{\theta_2}(E))$. Конъюнктивные операции выбора могут быть записаны как последовательность отдельных выборов. Применение условия θ_1, пересекающегося с условием θ_2 , является дорогостоящим. Вместо этого стоит отфильтровать кортежи, удовлетворяющие условию θ_2 (внутренняя выборка), а затем применить условие θ_1 (внешняя выборка) к получающемуся в результате меньшему количеству кортежей. Данное преобразование оставляет меньше кортежей для обработки во второй раз. Такое преобразование может быть расширено для двух или более пересекающихся выборок. Поскольку мы разбиваем одно условие на серию выборок или каскадов, оно называется «каскад».

Коммутативность выбора. $\sigma_{\theta_1}(\sigma_{\theta_2}(E)) = \sigma_{\theta_2}(\sigma_{\theta_1}(E))$. σ условие носит коммутативный характер. Это означает, что не имеет значения, применяем ли мы σ_1 сначала или σ_2 сначала. На практике лучше и более оптимально сначала применять выбор, который дает меньшее количество кортежей. Это экономит время на нашем внешнем выборе.

Преобразование выборки на декартовом произведении в тета-соединение. $\sigma_\theta(E_1 \times E_2) = E_1 \bowtie_\theta E_2$. Известно, что операция декартова произведения очень дорогая. Это происходит потому, что она соответствует каждому кортежу E_1 (всего m кортежей) каждому кортежу E_2 (всего n кортежей). Это дает m * n записей. Если после этого мы применим операцию выбора, нам потребуется просмотреть m * n записей, чтобы найти подходящие кортежи, которые удовлетворяют условию θ. Вместо того, чтобы делать все это, используем Theta Join, специально разработанное для выбора только тех записей в декартовом произведении, которые удовлетворяют условию тета, без предварительной оценки всего перекрестного продукта.

Коммутативность тета-соединения. $E_1 \bowtie_\theta E_2 = E_2 \bowtie_\theta E_1$. Theta Joins является коммутативным, и время обработки запроса зависит от того, какая таблица используется в качестве внешнего цикла, а какая – в качестве внутреннего цикла в процессе объединения (на основе структур и блоков индексации).

Ассоциативность соединений. $(E_1 \bowtie E_2) \bowtie E_3 = E_1 \bowtie (E_2 \bowtie E_3)$. Все соединения являются как коммутативными, так и ассоциативными, поэтому сначала желательно соединить две таблицы, которые дают меньшее количество записей, а затем применить другое соединение.

Преобразование разности. $\sigma_P(E_1 - E_2) = \sigma_P(E_1) - \sigma_P(E_2)$. В разности множеств используются только те кортежи, которые принадлежат таблице E_1 и не принадлежат таблице E_2. Таким образом, применение условия выбора ко всей разности наборов эквивалентно применению условия выбора к отдельным таблицам, а затем применению разности наборов. Такое преобразование уменьшит количество сравнений на шаге вычисления разности наборов.

В работе на основании перечисленных способов и правил был построен программный анализатор, модель которого представлена на рис. 1.

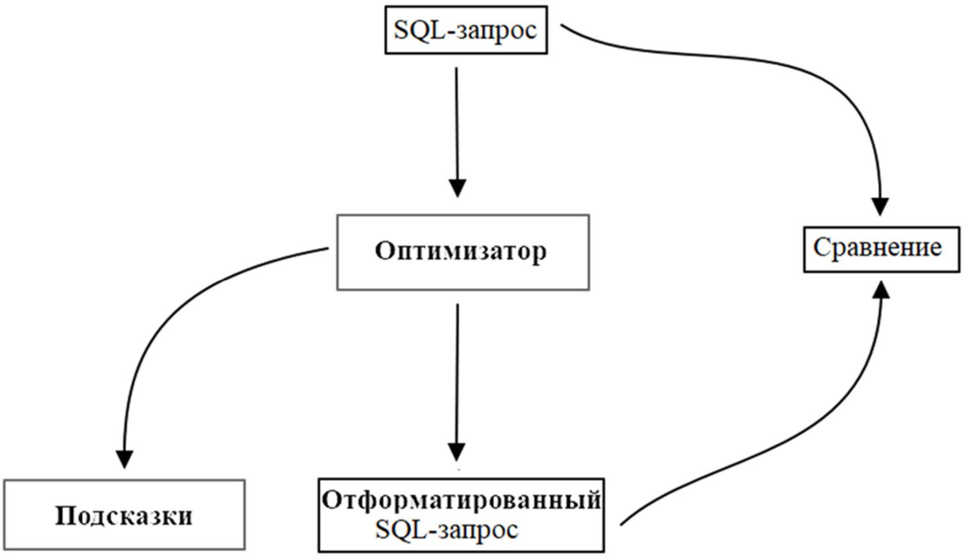


Рис. 1. Модель программного оптимизатора

Оптимизатор состоит из трех частей: лексера, парсера, анализатора. Лексер – это программа или часть программы, которая распознает лексемы (токены). Например, если мы анализируем запись какого-то выражения, то отдельными токенами будут числа и знаки операций. Парсер – это программа или часть программы, которая на основе списка токенов выполняет синтаксический анализ и далее уже строит какую-то модель на основании токенов, например, может построить дерево вычисления выражения. Под парсером, в данной работе, будем понимать парсер, написанный совместно с лексером. В качестве алгоритма парсера был выбран алгоритм «Обратная польская запись».

Рассмотрим работу оптимизатора. Сначала необходимо, чтобы отработал парсер для построения дерева и разделил на элементы (теги) текст запроса, с помощью словаря, описанного в лексере. Это требуется для того, чтобы оптимизатор обработал структуру, из которой составлен SQL-запрос. Структура понадобится анализатору для выявления мест, которые будут считаться доступными для оптимизации. Под оптимизацией, в данном случае, подразумевается реструктуризация вышеупомянутого дерева с помощью парсера и отображения подсказок на основе ранее описанных способов. После того, как оптимизатор отработает, пользователь, воспользовавшийся оптимизатором, получает оптимизированный SQL-запрос, если к нему был применен один из способов, рассмотренных выше. Оптимизированный запрос можно сравнить с SQL-запросом, поступившим на вход. Также пользователь может отобразить подсказки в соответствующих формах для дальнейшего их применения, если посчитает, что у него есть такая возможность. Анализируемое представление, возвращаемое парсером, представляет собой ассоциативный массив важных разделов SQL (тегов) и информацию, которая содержится в каждом из этих разделов. На рис. 2 приведено реструктурированное с помощью парсера представление запроса “*SELECT a FROM some_table_an_alias WHERE d>5*”.

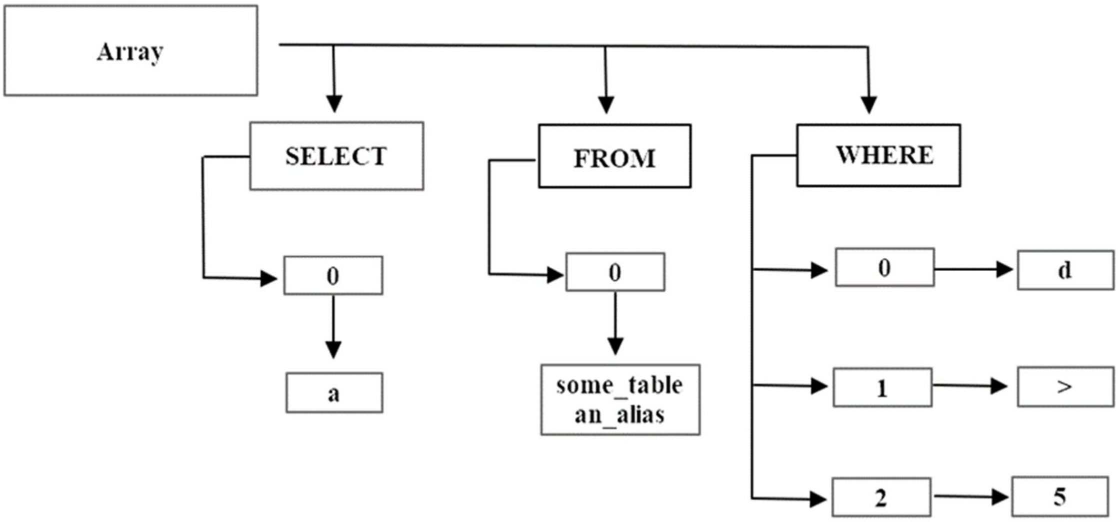


Рис. 2. Пример реструктурированного с помощью парсера представления запроса

Так как оптимизатор разработан в виде веб-приложения, которое использует базы данных для хранения и обмена информацией, то в качестве атак для получения той или иной информации могут использоваться SQL-инъекции. Поэтому была реализована защита от SQL-инъекции. Для реализации оптимизатора использовались следующие языки программирования: JavaScript, PHP, CSS, HTML, а также связанные с этими языками фреймворки. В качестве среды разработки был выбран Atom. Оптимизатор снабжен удобным пользовательским интерфейсом. Выполнен анализ выигрыша во времени обработки SQL-запросов сервером, показано, что во многих случаях предлагаемый способ оптимизации дает существенный выигрыш. Главным преимуществом существующих оптимизаторов являются системы мониторинга и анализа, которые позволяют найти SQL-запросы, которые выполняются за большое количество времени, а предлагаемый оптимизатор SQL-запросов автоматически оптимизирует его или выдаст подсказку по оптимизации, если автоматическая оптимизация неприменима.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Статья на сайте geeksforgeeks.org. SQL | Query Processing//https://www.geeksforgeeks.org/sql-query-processing/.

2. Nevarez B. Inside the SQL Server Query Optimizer // http://assets.red-gate.com/community/books/inside-the-sql-server-query-optimizer.pdf.

3. Статья на сайте hungred.com. 15 Ways to Optimize Your SQL Queries //https://www.hungred.com/useful-information/ways-optimize-sql-queries/.

4. Статья на сайте geeksforgeeks.org. Query Optimization in Relational Algebra https://www.geeksforgeeks.org/query-optimization-in-relational-algebra/.

УДК 004.9, 517.54

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ ТАБЛИЦ (MS EXCEL) И РЕАЛИЗАЦИЯ ВЫЧИСЛЕНИЙ НА ЯЗЫКЕ PASCALABC.NET ПРИ ИЗУЧЕНИИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Александр Анатольевич Голубев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Александр Валентинович Лобанов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Елена Валерьевна Тишина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Ключевые слова: *электронные таблицы, MS Excel, система программирования PascalABC.NET, конформные отображения, целая линейная функция.*

Аннотация. В статье говорится о возможностях использования электронных таблиц (MS Excel) при изучении конформных отображений на примере целой линейной функции. Предлагается реализация вычислений на алгоритмическом языке PascalABC.NET

Теория функций комплексного переменного (комплексный анализ) в рамках университетского курса является в основном продолжением курса математического анализа. На математическом факультете Тверского государственного университета данная дисциплина читается студентам, обучающимся по направлениям подготовки 01.03.01 Математика (уровень бакалавриата), 02.03.01 Математика и компьютерные науки (уровень бакалавриата), а также студентам специалитета 10.05.01 Компьютерная безопасность.

Переход от действительных чисел к комплексным, введение в рассмотрение функций комплексного переменного, возникновение в связи с этим новых инструментов и возможностей позволяют упростить математические выводы, а также сформировать у студентов целостное представление о некоторых математических понятиях. Так, например, дифференцирование и интегрирование приобретают некоторое новое содержание. Наглядность, возможность «потрогать» изучаемое понятие – важные характеристики дисциплины. И хотя, с другой стороны, мы не способны получить наглядного представления о функции комплексного переменного посредством графика, этот недостаток компенсируется наблюдением за образами семейств кривых и областей.

Данное обстоятельство естественно учитывать, например, при изучении геометрических свойств функций комплексного переменного. С этой целью можно использовать различные математические пакеты. В нашей публикации мы расскажем о возможностях применения электронных таблиц (MS Excel) при изучении конформных отображений на примере целой линейной функции.

Напомним, что под целой линейной функцией понимают функцию вида $f(z) = Az + C$, где $A, C \in \mathbf{C}$, $A \neq 0$. Целая линейная функция f определена на всей комплексной плоскости **C**. Функция f голоморфна в комплексной плоскости **C**, $f'(z) = A$. Так как $A \neq 0$, то f – отображение конформное в каждой точке **C**. Так как f действует однолистно в **C**, то f – отображение конформное во всей комплексной плоскости **C**.

Если коэффициент A записать в показательной форме $A = |A|e^{i\varphi}$, где $\varphi = \arg A$, то отображение f можно представить в виде композиции функций:

$$w = \omega + C,$$
$$\omega = e^{i\varphi}\zeta,$$
$$\zeta = |A|z.$$

Полученное покажем схематично:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{C}_z \arrow[r, "w = Az + C"] \arrow[d, "\zeta = |A|z"] & \mathbf{C}_w \\
\mathbf{C}_\zeta \arrow[r, "\omega = e^{i\varphi}\zeta"] & \mathbf{C}_\omega \arrow[u, "w = \omega + C"']
\end{tikzcd}$$

Отображение $\zeta = |A|z$ в действительной записи имеет вид $\begin{cases} \xi = |A|x, \\ \eta = |A|y \end{cases}$, где $\xi + i\eta = \zeta$, $x + iy = z$, и представляет собой гомотетию плоскости $\mathbf{C}_z$ (сжатие при $|A|<1$ и растяжение при $|A|>1$). Второе отображение, $\omega = e^{i\varphi}\zeta$, есть поворот плоскости $\mathbf{C}_\zeta$ относительно точки $\zeta = 0$ на угол φ против часовой стрелки. Это следует, из действительной записи отображения $\begin{cases} p = \xi\cos\varphi - \eta\sin\varphi, \\ q = \xi\sin\varphi + \eta\cos\varphi \end{cases}$, где $p + qi = \omega$. Функция $w = \omega + C$ отвечает сдвигу плос-кости $\mathbf{C}_\omega$ на вектор C (действительная запись $\begin{cases} u = p + \operatorname{Re} C, \\ v = q + \operatorname{Im} C \end{cases}$, где $u + iv = w$).

Таким образом, целое линейное преобразование есть композиция гомотетии, поворота и сдвига [1–3].

В качестве самостоятельного исследования студентам можно предложить изучение геометрических свойств целой линейной функции с привлечением возможностей MS Excel.

Задача. Целое линейное отображение $w = az + b$ задается параметрами a и b. Необходимо выписать отображения, составляющие композицию (гомотетию, поворот и сдвиг), и проследить за образом треугольника (вершины которого могут задаваться произвольно) для каждом из этих отображений.

Решение. На рис. 1 в выделенных цветом ячейках заданы действительные и мнимые части a и b, затем рассчитаны модуль и главное значение аргумента заданного значения a. Здесь же приведены формулы модуля и главного значения аргумента комплексного числа.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	$w=az+b$ - целая линейная функция							
2								
3	Введите параметр a:	-9,00	+	1,00	$\cdot i$	$a_1 = \operatorname{Re} z$	$a_2 = \operatorname{Im} z$	
4	Введите параметр b:	1,00	+	4,00	$\cdot i$	$b_1 = \operatorname{Re} z$	$b_2 = \operatorname{Im} z$	
5								
6	Модуль a ($k=\|a\|$) равен	9,06				$\|a\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$		
7	Главное значение аргумента a ($\varphi = arg\ a$) равно	3,03				$\arg a = \begin{cases} arctg\dfrac{a_2}{a_1}, & a_1 > 0,\ a_2 \geq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & a_1 = 0,\ a_2 > 0, \\ \pi + arctg\dfrac{a_2}{a_1}, & a_1 < 0, \\ \dfrac{3\pi}{2}, & a_1 = 0,\ a_2 < 0, \\ 2\pi + arctg\dfrac{a_2}{a_1}, & a_1 > 0,\ a_2 < 0 \end{cases}$		

Рис. 1

На рис. 2 в выделенных цветом ячейках заданы координаты вершин треугольника *ABC.* Ниже изображен заданный треугольник в плоскости $\mathbf{C}_z$.

	A	B	C	D	E	F
13	Построение образа треугольника *ABC*					
14	Введите кордианы точки A (x_1, y_1)	-8,00		5,00		
15	Введите кордианы точки B (x_2, y_2)	-3,00		4,00		
16	Введите кордианы точки C (x_3, y_3)	8,00		-5,00		

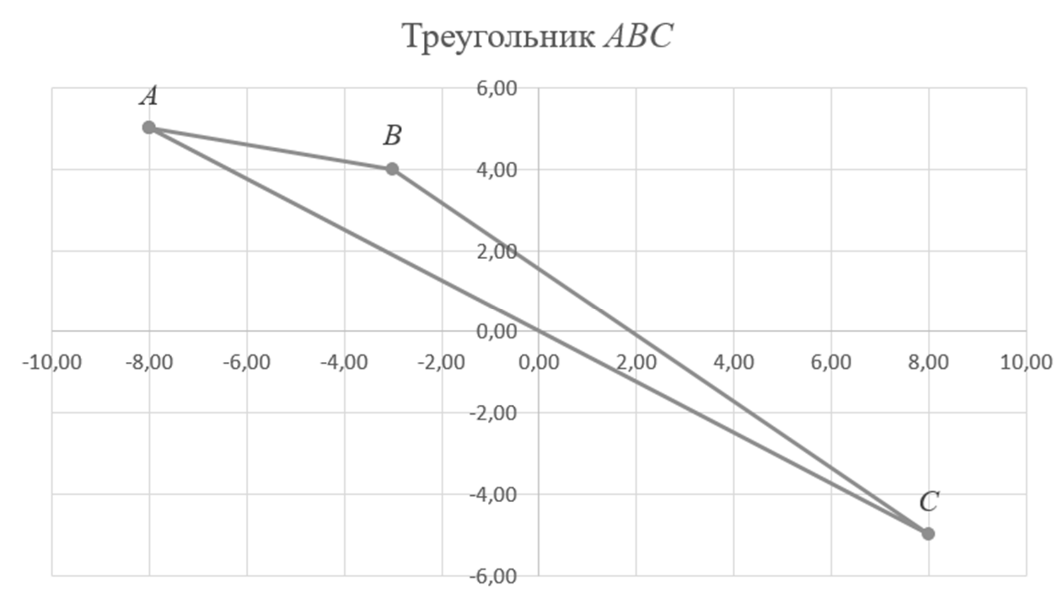


Рис. 2

На рис. 3 в плоскости $\mathbf{C}_\zeta$ показан образ $A_1B_1C_1$ треугольника ABC при отображении $\zeta = |a|z$ (гомотетии).

	A	B	C	D	E	F	G
33	**1) Гомотетия**	ζ=	9,06	z			
34	Кордианы точки $\zeta(A) = A_1$ (ξ_1, η_1)	-72,44		45,28			
35	Кордианы точки $\zeta(B) = B_1$ (ξ_2, η_2)	-27,17		36,22			
36	Кордианы точки $\zeta(C) = C_1$ (ξ_3, η_3)	72,44		-45,28			

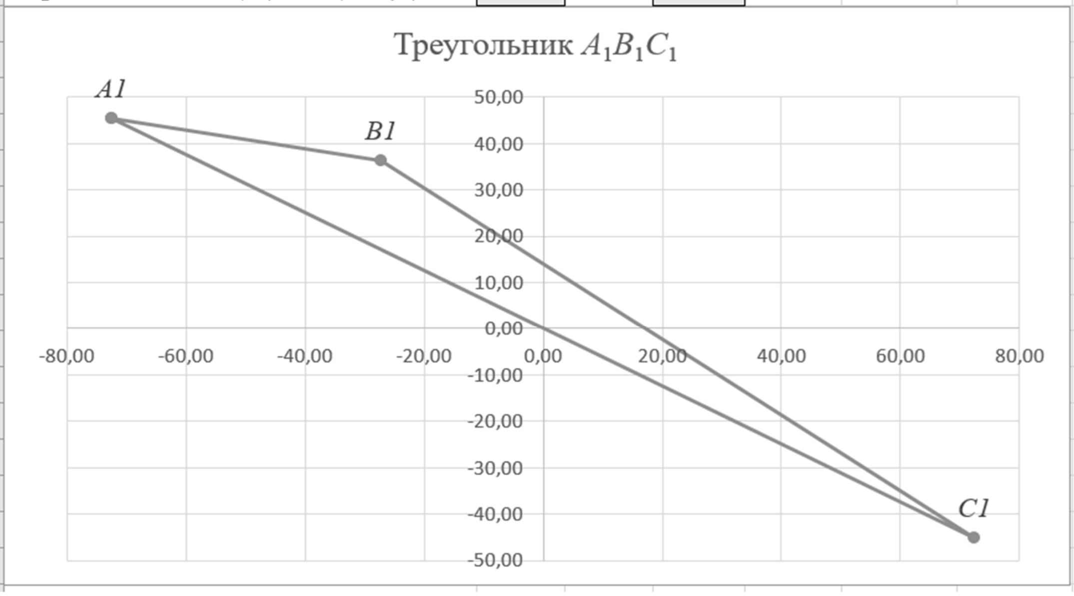


Рис. 3

На рис. 4 в плоскости $\mathbf{C}_\omega$ показан образ $A_2B_2C_2$ треугольника $A_1B_1C_1$ при отображении $\omega = e^{i\varphi}\zeta$ (повороте $\mathbf{C}_\zeta$ относительно точки $\zeta = 0$ на угол φ).

54	**2) Поворот**	ω=	ζexp(i	3,03	)
55	Кордианы точки $\omega(A_1) = A_2$ (p_1, q_1)	67,00		-53,00	
56	Кордианы точки $\omega(B_1) = B_2$ (p_2, q_2)	23,00		-39,00	
57	Кордианы точки $\omega(C_1) = C_2$ (p_3, q_3)	-67,00		53,00	

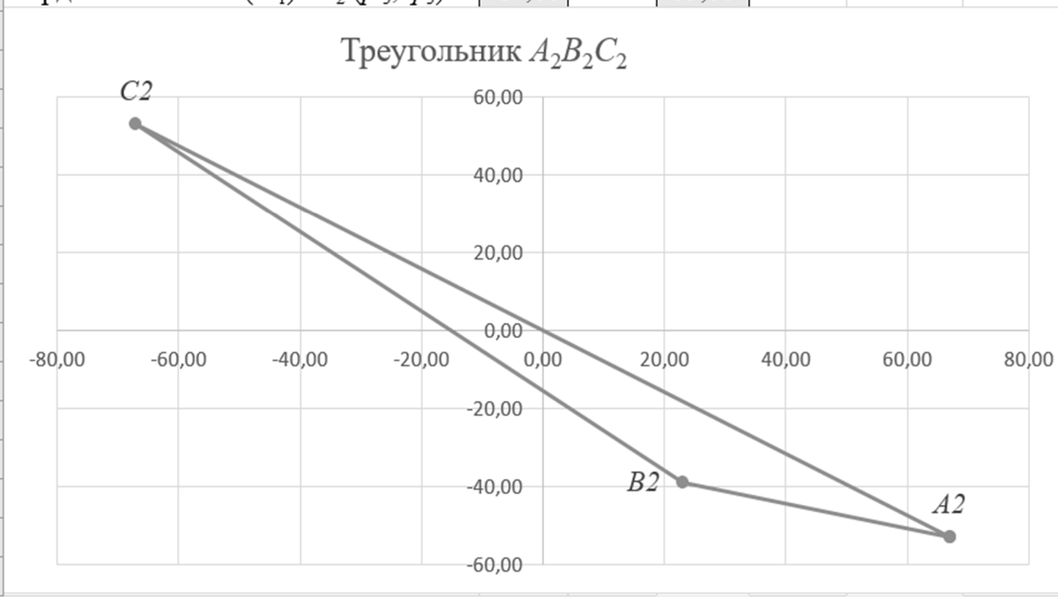


Рис. 4

Наконец, на рис. 5 в плоскости $\mathbf{C}_w$ показан образ $A_3B_3C_3$ треугольника $A_2B_2C_2$ при отображении $w = \omega + b$ (сдвиге плоскости $\mathbf{C}_\omega$ на вектор b.

73	**3) Параллельный перенос**	$w =$	ω +	1,00	+	4,00	$\cdot i$
74	Кордианы точки $w(A_2)= A_3\ (p_1,\ q_1)$	68,00		-49,00			
75	Кордианы точки $w(B_2)= B_3\ (p_2,\ q_2)$	24,00		-35,00			
76	Кордианы точки $w(C_2)=C_3\ (p_3,\ q_3)$	-66,00		57,00			

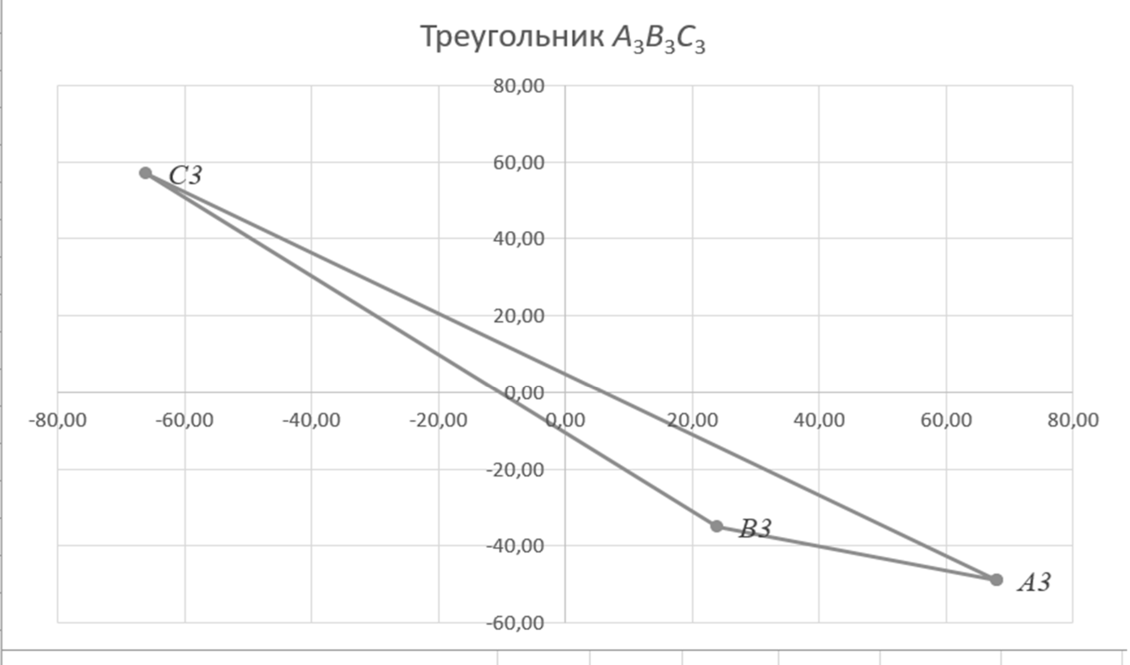


Рис. 5

В работах [4–6] приводятся другие примеры использования математических пакетов для изучения геометрических свойств функций.

Полезно рассмотреть реализацию вычислений на алгоритмическом языке PascalABC.NET, чтобы показать междисциплинарную связь математики и языков программирования:

```
program e1;
uses GraphWPF;
var a1, a2, b1, b2, x1, y1, x2, y2, x3, y3, k, phi, xx1, xx2, xx3, yy1, yy2, yy3: real;
begin
  writeln('Введите параметры a и b целой линейной функции w=az+b');
  write('a1='); readln(a1); write('a2='); readln(a2); write('b1='); readln(b1);
  write('b2='); readln(b2);  k := sqrt(a1 * a1 + a2 * a2);
  writeln('Модуль параметра a равен', k:4:2);
  if (a1 > 0) and (a2 >= 0) then phi := ArcTan(a2 / a1) else  if (a1 = 0) and (a2 > 0)
  then phi := pi / 2 else  if (a1 < 0) then phi := pi + ArcTan(a2 / a1) else
  if (a1 = 0) and (a2 < 0) then phi := 3*pi / 2 else
  if (a1 > 0) and (a2 < 0) then phi := 2 * pi + ArcTan(a2 / a1);
  writeln('Главное значение аргумента параметра a (φ=arg a) равно', phi:4:2);
  writeln ('w=az+b является композицией:');
  writeln ('1) гомотетии ζ=', k:4:2, '* z');
  writeln ('2) поворота ω=ζexp(i * ', phi:4:2, ')');
```

```
writeln ('3) параллельного переноса w = ω + (', b1:4:2, ') + (', b2:4:2, ')* i');
writeln ('Построение образа треугольника ABC.');
write ('Введите координаты точки A (x1, y1)'); readln(x1,y1);
write ('Введите координаты точки B (x2, y2)'); readln(x2,y2);
write ('Введите координаты точки C (x3, y3)'); readln(x3,y3);
SetMathematicCoords (-100, 100, -100, true);
DrawText (x1, y1, 5, 5, 'Треугольника ABC');
Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0));
x1:=x1*k; y1:=y1*k; x2:=x2*k; y2:=y2*k; x3:=x3*k; y3:=y3*k;
Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0)); Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0)); DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Гомотетия');
xx1:=x1;yy1:=y1;xx2:=x2;yy2:=y2; xx3:=x3; yy3:=y3;
x1:=xx1*cos(phi)+yy1*sin(phi); y1:=yy1*cos(phi)+xx1*sin(phi);
x2:=xx2*cos(phi)+yy2*sin(phi); y2:=yy2*cos(phi)+xx2*sin(phi);
x3:=xx3*cos(phi)+yy3*sin(phi); y3:=yy3*cos(phi)+xx3*sin(phi);
Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0));   Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0)); DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Поворот');
x1:=x1+b1; y1:=y1+b2; x2:=x2+b1; y2:=y2+b2; x3:=x3+b1; y3:=y3+b2;
Line(x1, y1, x2, y2, rgb(0, 0, 0));Line(x2, y2, x3, y3, rgb(0, 0, 0));
Line(x3, y3, x1, y1, rgb(0, 0, 0));DrawText(x1, y1, 5, 5, 'Параллельный
перенос');
end.
```

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А. Практический курс комплексного анализа / А.А. Голубев, С.Ю. Граф, В.Г. Шеретов. – Тверь, 2003. – 94 с.

2. Голубев А.А. Конформные отображения / А.А. Голубев, А.С. Неугодников. – Тверь, 2010. – 72 с.

3. Голубев А.А. Основные принципы конформных отображений / А.А. Голубев, А.С. Неугодников. – Тверь, 2011. – 128 с.

4. Цветков А.А., Голубев А.А. Исследование особых точек гармонических отображений с помощью математического пакета Matlab / В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь, 2018. – С. 204-212.

5. Цветков А.А., Голубев А.А. К вопросу об особых точках классических гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. – Тверь, 2018. – С. 32-37.

6. Цветков А.А., Голубев А.А. Matlab как средство визуализации поведения гармонического отображения в окрестности особых точек / В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области Материалы III Всероссийской научно-практической конференции. – Тверь, 2019. – С. 198-201.

УДК 517.54

АНАЛОГИ НЕРАВЕНСТВ С.Н. БЕРНШТЕЙНА И В.И. СМИРНОВА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ

Сергей Юрьевич Граф
Тверской государственный университет, Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: sergey.graf@tversu.ru

Иван Александрович Никитин
Тверской государственный университет, Тверь;
Петрозаводский государственный университет, Петрозаводск
E-mail: greatmath18@yandex.ru

Ключевые слова: *гармонические полиномы, неравенство Бернштейна, неравенство Смирнова.*

Аннотация. В сообщении анонсируются результаты, обобщающие известные дифференциальные неравенства С.Н. Бернштейна и В.И. Смирнова на случай гармонических полиномов.

Исследованию свойств многочленов на комплексной плоскости $\mathbf{C}$ посвящено огромное количество работ как российских, так и зарубежных математиков (см., например, [1–7]). Одной из классических задач данного направления является задача о дифференциальных неравенствах, связывающих многочлены и их производные. Данная тематика сохраняет актуальность, о чем свидетельствует значительное число связанных с ней новых результатов [6–9].

Обозначим символом $\mathbf{D}$ единичный круг $\{z \in \mathbf{C} : |z| < 1\}$, а символом $\mathbf{T}$ – единичную окружность $\partial\mathbf{D}$. Символом $\deg P$ будем обозначать степень n многочлена $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0, a_n \neq 0$.

В 1930 г. С.Н. Бернштейн доказал следующую теорему.

Теорема A [2]. *Пусть* H, h *– многочлены, такие, что*

1) все нули H *лежат в замыкании круга* $\mathbf{D}$*,*

2) $\deg H \geq \deg h$ *и*

3) $|H(z)| \geq |h(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$.

Тогда

$$|H'(z)| \geq |h'(z)| \text{ в } \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}.$$

Неравенство Бернштейна играет существенную роль в теории многочленов и восходит к задаче об оценке модуля производной действительных многочленов на отрезке, поставленной в 1887 г. Д.И. Менделеевым [1]. Впоследствии неравенство Бернштейна неоднократно обобщалось на случаи различных дифференциальных операторов, определенных на линейном пространстве полиномов n-й степени [4–7].

Другим классическим результатом теории многочленов является неравенство В.И. Смирнова.

Теорема B ([3]). *Пусть* H, h *– многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы A. Тогда для любых фиксированных* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$

$$\left|zH'(z) - aH(z)\right| \geq \left|zh'(z) - ah(z)\right|$$

для всех значений a*, принадлежащих образу круга* $\{\varsigma : |\varsigma| \leq |z|\}$ *при конформном отображении* $\phi_n(\varsigma) = n\varsigma/(1+\varsigma)$.

Неравенство Смирнова получается из неравенства теоремы B при $\alpha = 0$.

Гармоническим многочленом называется функция вида

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)},$$

где H, G – многочлены с комплексными коэффициентами. Для определенности далее по умолчанию будем считать, что $G(0) = 0$.

Поведение гармонических многочленов в общем случае существенно отличается от аналитического случая. В частности, открытой остается проблема оценки количества нулей гармонического многочлена [8,9]. Очевидно, что в случае, когда $\deg H = \deg G$ нули F не обязаны быть изолированными и их множество может быть несчётным. Тем не менее, известно [8], что при условии $\deg H \neq \deg G$ нули F изолированы, и их количество не превосходит n^2, где $n = \max\{\deg H, \deg G\}$, хотя точная оценка остается неизвестной. В некоторых специальных случаях (см., например, [9]) получены уточнения данной оценки числа нулей гармонических многочленов. Далее будем считать, что $\deg H = n > m = \deg G$.

Основным результатом, анонсируемым в данном сообщении, являются обобщения Теорем A и B на случай гармонических многочленов.

Теорема 1. *Пусть* $F = H + \overline{G},\ f = h + \overline{g}$ *– гармонические многочлены, такие, что*

1) все нули F *лежат в замыкании круга* $\mathbf{D}$*,*

2) $\deg H \geq \deg h$*,* $\deg H \geq \deg G$ *и* $\lim\limits_{z\to\infty}\left|G(z)/H(z)\right| < 1$*,*

3) $|H(z)| > |G(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$ *и*

4) $|H(z)| \geq |h(z)| \geq |g(z)|$ *для всех* $z \in \mathbf{T}$.

Тогда существует константа K_0,

$$1 \leq K_0 \leq \frac{1 + \sup_{z\in\mathbf{T}} |g(z)/h(z)|}{1 - \max_{z\in\mathbf{T}} |G(z)/H(z)|}, \tag{1}$$

такая, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$

$$K_0\left|H'(z) + e^{i\alpha}G'(z)\right| \geq \left|h'(z) + e^{i\beta}g'(z)\right| \ \text{в}\ \mathbf{C}\setminus\mathbf{D}. \tag{2}$$

Оценка K_0 *в неравенстве (1) точна.*

Заметим, что в случае, когда многочлены F и f являются аналитическими, утверждение теоремы соответствует классическому неравенству Бернштейна для многочленов.

Следующий пример демонстрирует, что в общем случае величина K_0 в теореме 1 не может быть заменена на 1.

Рассмотрим гармонические полиномы

$$F(z) = H(z) + \overline{G(z)} = d(cz^2 - \bar{z}) \text{ и } f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = cz^2 + \bar{z}$$

и подберем действительные параметры $c, d > 1$ так, чтобы F и f удовлетворяли условиям теоремы.

Во-первых, заметим, что в этом случае нули многочлена F расположены в круге $\mathbf{D}$. Действительно, $F(re^{it}) = d(cr^2e^{2it} - re^{-it})$ и, следовательно, многочлен F обращается в ноль при выполнении какого-либо из условий $r = 0$ или $cre^{3it} = 1$. Таким образом, гармонический многочлен F имеет четыре нуля в точках $z = 0$ и $z = c^{-1}e^{i2\pi k/3}$ при $k = 0,1,2$. Все эти точки расположены в единичном круге, если $c > 1$.

На единичной окружности $\mathbf{T}$ неравенства

$$|H(z)| = cd > d = |G(z)| \text{ и } |H(z)| = cd > c = |h(z)| > 1 = |g(z)|$$

выполняются при любых значениях $c, d > 1$. Таким образом, гармонические многочлены F и f удовлетворяли условиям теоремы.

Вместе с тем, нетрудно убедиться, что

$$\min_{|z|=1} |H'(z) + G'(z)| = d(2c-1) \quad \text{и} \quad \max_{|z|=1} |h'(z) + g'(z)| = 2c+1,$$

причём минимум и максимум достигаются в обоих случаях при $z = 1$.

Множество решений системы неравенств

$$\begin{cases} c > 1, \quad d > 1, \\ d(2c-1) < 2c+1. \end{cases} \tag{3}$$

не пусто и представляет собой совокупность точек (c,d) плоскости $\mathbf{R}^2$, ограниченных прямыми $c = 1$, $d = 1$ и гиперболой $d = \dfrac{2c+1}{2c-1}$. Например, системе неравенств (3) удовлетворяет пара значений $c = 2$, $d = 3/2$. Если параметры c, d являются решениями системы (3), то

$$|H'(1) + G'(1)| = d(2c-1) < 2c+1 = |h'(1) + g'(1)|$$

и, следовательно, неравенство (2) не выполняется в $\mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$, и для данной пары гармонических многочленов F и f константа K_0 в теореме 1 строго больше 1. Более того, в приведенном примере неравенство (2) может выполняться только при условии

$$K_0 \geq \frac{1}{d}\frac{1 + 1/(2c)}{1 - 1/(2c)} = \frac{1}{d}\frac{1 + \max_{z\in\mathbf{T}} |g(z)/h(z)|}{1 - \max_{z\in\mathbf{T}} |G(z)/H(z)|}.$$

Параметр d в рассмотренном примере может быть сколь угодно близок к 1, что и доказывает точность верхней оценки K_0 в неравенстве (1).

Точность нижней оценки в (1) очевидна в случае, когда $G \equiv 0$, $g \equiv 0$, т.е. в случае аналитических многочленов.

Следующая теорема представляет собой обобщение неравенства Смирнова на случай гармонических многочленов.

Теорема 2. *Пусть* $F = H + \overline{G}$, $f = h + \overline{g}$ *– гармонические многочлены, удовлетворяющие условиям теоремы 1.*

Тогда существует константа K_0, *удовлетворяющая условию (1), такая, что для любых* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *и для любого фиксированного* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$

$$0 < R_0 \le \sup\{r \le 1 : |H(z)| > |G(z)| \text{ для всех } z, |z| > 1/r\},$$

такие, что для любых $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *и для любого фиксированного* $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{D}$

$$K_0 \left| z\left(H'(z) + e^{i\alpha} G'(z)\right) - a\left(H(z) + e^{i\alpha} G(z)\right) \right| \ge \left| z\left(h'(z) + e^{i\beta} g'(z)\right) - a\left(h(z) + e^{i\beta} g(z)\right) \right|$$

для всех значений a, *принадлежащих образу круга* $\{\varsigma : |\varsigma| \le |z|\}$ *при отображении* $\phi_n(\varsigma) = n\varsigma/(1+\varsigma)$. *Оценка* K_0 *в неравенстве (1) точна.*

При $a = 0$ из теоремы 2 следует теорема 1. При $G \equiv 0$ и $g \equiv 0$ утверждение теоремы 2 представляет собой классическое неравенство Смирнова для многочленов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, проект 17-11-01229.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д.И. Менделеев, *Исследование водных растворов по удельному весу,* тип. В. Демакова, Санкт-Петербург, 1887.
2. S.N. Bernstein*, Sur la limitation des derivees des polynomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, **190** (1930), 338–341.
3. В.И. Смирнов, Н. А. Лебедев, *Конструктивная теория функций комплексного переменного*, Наука, М., 1964.
4. M. Marden, *The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable*, Math. Surveys, 3, Amer. Math. Soc., New York, 1949.
5. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic Theory of Polynomials*, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
6. E.G. Ganenkova, V.V. Starkov, *Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials*, J. Math. Anal. Appl., **476** (2) (2019), 696–714, https://doi.org/ 10.1016/j.jmaa.2019.04.006.
7. Е.Г. Ганенкова, В.В. Старков, *Преобразование Мёбиуса и неравенство В. И. Смирнова для многочленов*, Мат. заметки, **105** (2) (2019), 228–239, https://doi.org/10.4213/mzm11858.
8. A.S. Wilmshurst, The valence of harmonic polynomials, Proc. AMS, **126** (7) (1998), 2077–2081, https://doi.org/10.1090/S0002-9939-98-04315-9.
9. D. Khavinson, S. Lee, A. Saez, *Zeros of harmonic polynomials, critical lemniscates, and caustics*. Complex Anal. Synerg., **4** (2) (2018), https://doi.org/10.1186/s40627-018-0012-2.

УДК 372.8

ПРИМЕНЕНИЕ ОБУЧАЮЩИХ И ИГРОВЫХ СРЕД ПРОГРАММИРОВАНИЯ В ПРЕПОДАВАНИИ ИНФОРМАТИКИ

Вера Владимировна Григорьева
Тверской государственный технический университет, Тверь
E-mail: pontida@list.ru

Петр Викторович Григорьев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: tor7@list.ru

Ключевые слова*: информатика, робототехника, школа, игры, программирование, обучающие среды, Colobot.*

Аннотация. В статье рассматриваются возможность варианты использования некоторых игр и обучающих сред программирования для дополнительного обучения школьников информатике. Особое внимание уделено игре Colobot.

Успех и популярность MicroWorlds, Scratch и других подобных продуктов привели к появлению различных игровых и обучающих сред, в которых учащимся предлагается решать различные задачи по программированию в игровой форме. Как правило, в таких приложениях каждая из предлагаемых задач дополняется элементами, упрощающими ее понимание и решение. Это могут быть изображения, спрайты, наборы переменных, фрагменты программ, частично приспособленных для получения решения нужной задачи. Задания сортируются по сложности и тематике, их трудность, как правило, невелика. При представлении и решении задач используются элементы игры – анимация при демонстрации работы программы, постановка задачи в виде игрового сценария и т.д. Нужно отметить, что в существующих УМК по информатике зачастую присутствуют более интересные и сложные задачи, методики их решения и соответствующие программные среды. Но как дополнение к основным методическим материалам игровые и обучающие программы могут быть эффективны. К примеру, среды на основе блочного редактора программ могут быть полезны при первоначальном изучении того же Scratch. Рассмотрим некоторые среды программирования с элементами обучающих программ и игр.

CodeMonkey – игровая среда для младших школьников, в которой для приобретения первоначальных навыков программирования предлагается решать простые задачи. В большинстве случаев ученику предлагается запрограммировать действия обезьянки и достать банан. Для того, чтобы сделать это, нужно провести обезьянку по определенной траектории, преодолевая препятствия и оптимизируя путь. Игроку предлагается актуальный для каждой конкретной задачи набор команд, из которых в блочном редакторе строится алгоритм. В этой среде есть и более сложные задания с другими героями, большинство из которых предлагается на платной основе.

Code.org – некоммерческая организация, цель которой – научить программировать школьников по всему миру, поддерживается Apple и Microsoft. В открытом доступе курсы по основам информатики и программирования для школьников разных возрастов. Есть возможность публиковать свой код и проекты для обсуждения участниками сообщества. Есть также режим сборки произвольных проектов и возможность подсоединения к движку игры Minecraft.

Рис. 1. Пример решения одной из задач в учебной среде Code.org

Blockly – среда программирования, разработанная Google, которая позволяет из готовых блоков создавать приложения. Содержит в себе набор заданий разной сложности для изучения основ программирования с помощью собственной библиотеки. Каждая задача учит отдельным приемам (например, установке атрибутов объектов, их перемещению, установке реакции на движение других объектов). Поддерживается перевод программы, сформированной в виде блоков на языке JavaScript.

Другой очень интересный класс подобных приложений состоит из известных интерактивных компьютерных игр (или их модификаций), в которых задействованы элементы программирования. Например, существует несколько учебный модификаций широко известной игры Minecraft.

Классический Minecraft не ставит перед игроком каких-либо конкретных целей. В предлагаемом игроку мире можно перемещаться в пространстве, добывать полезные ископаемые, сражаться с противниками и многое другое. Игра может выполняться в различных режимах (режим «выживания», где ограниченные ресурсы нужно добывать, «творчества», где ограничений по ресурсам нет и т. д.) Трехмерный мир игры состоит из параллелепипедов разных размеров и раскрасок, из сочетаний которых строятся различные объекты. Воздействовать на него с помощью программирования можно разными способами. Можно воспользоваться приложением–компаньоном Minecraft Code Connection, которое взаимодействует с предварительно установленным Minecraft и предоставляет блочную среду программирования для управления его объектами. Другой вариант – установить один из образовательных продуктов на основе Minecraft (например, Minecraft Education edition).


```
def on_chat():
    blocks.fill(SLIME_BLOCK,
        pos(-20, 0, -20),
        pos(20, 0, 20),
        FillOperation.REPLACE)
player.on_chat("slime", on_chat)
def travelled_bounce():
    mobs.spawn(PIG, randpos(pos(-10, 20, -10), pos(10, 20, 10)))
player.on_travelled(BOUNCE, travelled_bounce)
```

Рис. 2. Вывод объектов на экран в обучающей блочной среде программирования Minecraft и аналогичный код на Питоне

На рис. 2 показан пример простейшего кода для программного размещения объекта в игровом поле Maincraft в виде блоков и перевод его на Питон, выполненный Minecraft Education edition. Таким образом, становится возможным описывать новые объекты, устанавливать их реакцию на сообщения внутри системы, определять взаимодействия между ними и т. д. С помощью всего этого можно писать свои программы или выполнять задания обучающих программ. Эта возможность может заинтересовать школьников, уже знакомых с Maincraft или играми на его основе.

Также хотелось бы рассказать о замечательной компьютерной игре Colobot и предложить способ ее применения на уроках информатики. Первые версии этой игры были разработаны Epsitec SA в 2001 году, целевой аудиторией были дети от 10 лет. В какой-то степени Colobot похожа на стратегическую трехмерную игру в реальном времени. Но основной смысл игры состоит не «ручном» управлении игровыми объектами, а в создании программ для адаптации этих объектов к выполнению каких-либо задач.

Colobot – акроним от «colonize with bots» – «колонизировать роботами». В фантастическом мире, придуманном авторами, с помощью роботов идет колонизация новых планет. Роботы относятся к различным категориям, среди них есть грузовики, разведчики ресурсов, военные модули, летательные аппараты и т. д. Игра включает в себя множество обучающих заданий, игровых миссий, соревнований. Некоторые задания можно выполнить «вручную», посылая во время игры роботам необходимые команды. Но, если роботов много, то уследить за их работой трудно. Более сложные задачи эффективно решаются путем программирования роботов. Для каждого их класса перед игрой формируются программы на специальном алгоритмическом языке. Эти программы обучают роботов выполнять какие-либо действия и определяют их поведение во время игры. Таким образом, суть игры состоит именно в программировании моделей роботов для успешно «прохождения» миссий. Увлеченные программированием могут для тренировки писать программы роботам и для выполнения простых заданий. Все миссии можно проходить только за счет программирования. Помимо роботов мир игры включает в себя и другие разнообразные игровые объекты (выполняющий миссию астронавт, космические корабли, заводы по производству роботов, научные центры, здания, гигантские насекомые и т. д.).

По заявлению авторов, язык программирования, встроенный в игру, похож на C++ или Java. На самом деле, здесь используется собственный несложный язык программирования CBOT, состоящий из отдельных конструкций C++ – подобного языка. Его описание всегда доступно в справочной системе игры. Программа проверяется на корректность синтаксиса и компилируется в специальном редакторе, внешний вид которого показан на рис. 3. К сожалению, размер программы для одного робота в текущей версии ограничен 20000 символами, что затрудняет или делает невозможным реализацию сложных алгоритмов управления (например, основанных на использовании методов ИИ). Будем надеяться, что в будущем это ограничение будет преодолено.

Когда мы программируем программы для роботов мы не используем режим «централизованного управления», в котором основной алгоритм видит все объекты и предписывает каждому роботу, что он должен делать в конкретный момент времени. Вместо этого перед каждой миссией мы заранее сообщаем каждому роботу «правила действий» для выполнения своей функции. Этот режим можно сравнить с работой тренера и футболистов, когда перед матчем тренер может предложить футболистам определенный стиль игры, но в ходе матча он уже не может напрямую вмешаться в игру. Возможность обмена информации между роботами во время выполнения задания существует, но есть определенные ограничения.

Чтобы начать играть с Colobot по-настоящему, необходимо пройти обучение. Для этого разработана целая система тренировочных заданий, знакомящих с миром игры и возможностями роботов. После этого ученику становится доступным своеобразный виртуальный тренажер по робототехнике. Здесь нет возможности конструировать новые виды роботов, а мир игры не является точной моделью физического мира.

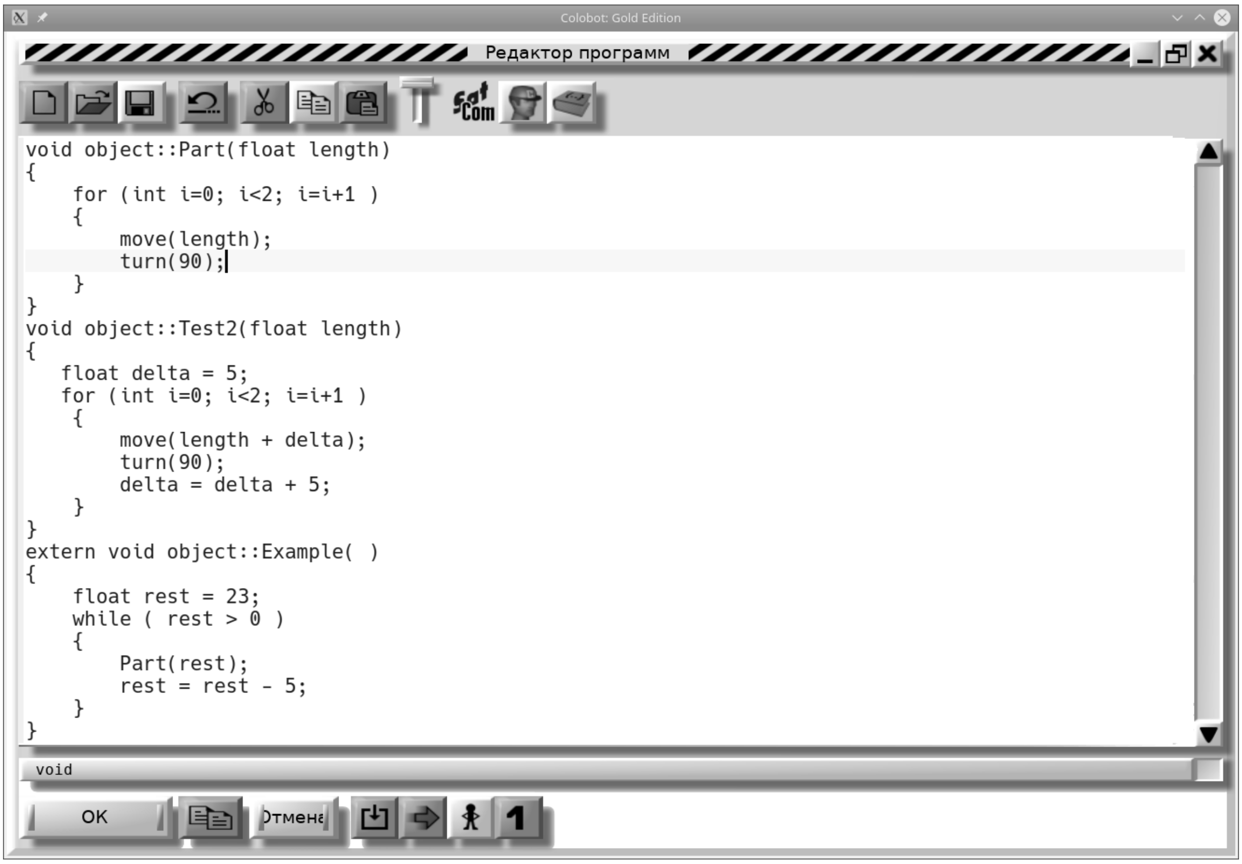


Рис. 3. Внешний вид редактора программ в игре Colobot

Но, несмотря на это, Colobot дает возможность в увлекательной форме приобщиться к одной из областей робототехники – программированию роботов различных типов для их совместной работы по решению конкретных задач. В игре довольно правдоподобно смоделированы как общие физические законы, так и ограничения роботов (такие, как ограничение запаса энергии, ограничения мощностей двигателей, возможностей связи и т. д.)

Таким образом, Colobot хорошо приспособлен для решения одной очень интересной задачи – моделирования работы множеств роботов разных классов под управлением предварительно разработанных программ. Существуют сценарии для этой игры, в которых возможно соревнование роботов. Например, в одном из дополнительных сценариев колесные роботы играют в своеобразный футбол. Такой темой можно заинтересовать школьников на основных или дополнительных занятиях по информатике, робототехнике. В настоящее время существует несколько форков этой игры, один из которых можно найти по адресу https://colobot.info.

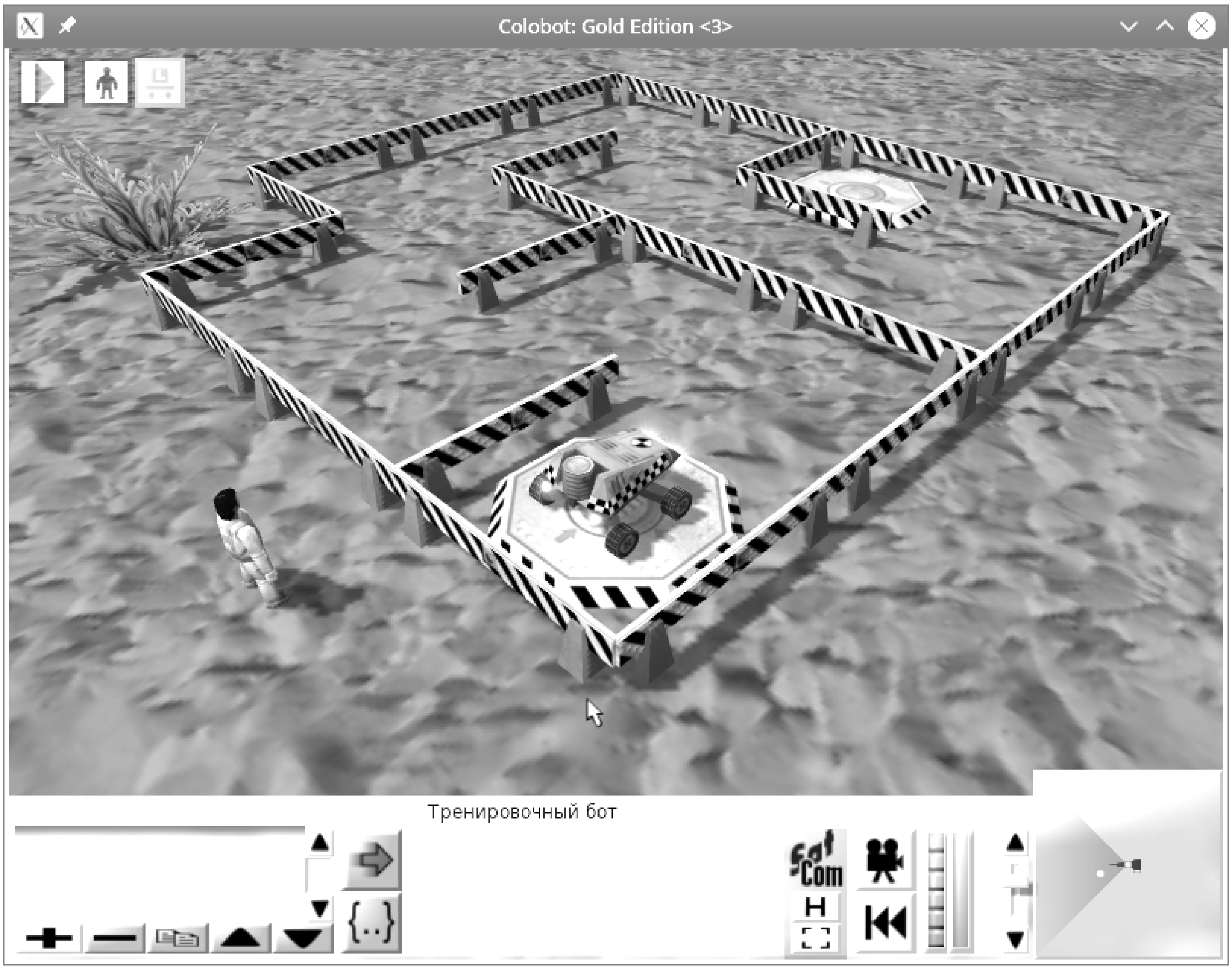


Рис. 4. Одно из тренировочных заданий в Colobot – написать программу для перемещения колесного робота между площадками и обхода препятствий

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Крей Ричардсон. Программируем с Minecraft. – М.: МИФ-Детство, 2015.
2. Джейсон Бриггс. Python для детей. – М.: МИФ-Детство, 2014.
3. Walton, Mark Minecraft in Education: How Video Games Are Teaching Kids. GameSpot. CBS, 2018.
4. Ник Морган. Javascript для детей. – М.: МИФ-Детство, 20145.
5. Мажед Марджи. Scratch для детей: самоучитель. – М.: МИФ-Детство, 2016.

УДК 514.12

РЕШЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ КООРДИНАТНОГО МЕТОДА

Елена Михайловна Ершова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ershova.EM@tversu.ru

Ключевые слова: *система координат, координата, чертеж, фигура, линия.*

Аннотация. В работе рассматривается применение координатного метода для решения задач геометрии.

В настоящее время системы координат применяются практически во всех сферах профессиональной деятельности человека: в геометрии – для нахождения и исследования уравнений кривых и поверхностей, длин и направлений отрезков, вычисления площадей и углов; в биологии – для построения схем молекул ДНК, диаграмм и графиков, прослеживающих эволюцию развития, изучения экологических проблем и проблем биосферы; в физике – для определения взаимного расположения тел и влияющих на них сил; в географии – для описания местоположений объектов; в военном деле – для составления карт местности, разработки стратегии и тактики; в экономике – для построения графика спроса и предложения, при графическом представлении разнообразных зависимых величин; в медицине – для снятия кардиограммы, проведения флюорографии, разнообразных снимков органов, для лазерных операций; в астрономии – для составления карт звездного неба, запуска спутников и космических кораблей. Подобные примеры можно продолжать и продолжать.

История возникновения системы координат уходит в далёкое прошлое. Первоначально идея этого метода возникла ещё в древнем мире. Уже тогда в координатах возникла потребность при изучении звёздного неба и, особенно, при составлении карт. Историки считают составителем первой географической карты Анаксимандра Милетского, жившего в VII-VI веках до н. э. Именно он впервые описал широту и долготу места, используя при этом прямоугольные проекции. Позднее, во II веке до н. э., греческий учёный Гиппарх предложил на всю поверхность Земли наложить параллели и меридианы и обозначить их числами.

Долгое время лишь география – "землеописание" – пользовалась этим замечательным изобретением, и только в XIV веке французский математик Никола Орсем попытался приложить его к "землеизмерению" – геометрии. Он предложил покрыть плоскость прямоугольной сеткой и называть широтой и долготой то, что мы теперь называем абсциссой и ординатой.

На основе этого удачного нововведения возник метод координат, связавший геометрию с алгеброй. Основная заслуга в создании этого метода принадлежит великому французскому математику Рене Декарту (1596 - 1650).

Весьма интересна история, подтолкнувшая Декарта к созданию системы координат. Сейчас, занимая свои места в зале перед началом фильма, спектакля или концерта, мы даже не задумываемся о том, откуда взялась такая простая и удобная система нумерации кресел по рядам и местам. Оказывается, эта идея осенила Декарта при посещении парижских театров. В то время происходила постоянная путаница и конфликты между зрителями по поводу того, какие места кому занимать, так что отсутствие элементарной нумерации мест иногда даже приводило к дуэлям. Простая система, предложенная математиком, в которой каждое кресло получало свою координату: ряд, место – произвела настоящий фурор в высшем обществе Парижа.

Научное описание прямоугольной системы координат Рене Декарт впервые сделал в своём знаменитом труде "Рассуждение о методе" в 1637 году. Поэтому прямоугольную систему координат и называют декартовой системой. Кроме того, в том же 1637 году вышел в свет его не менее известный труд "Геометрия", который открыл взаимосвязь алгебры и геометрии, их взаимопроникновение.

Главное достижение Декарта – построение аналитической геометрии, в которой геометрические задачи переводились на язык алгебры при помощи метода координат. Основные понятия в аналитической геометрии взяты из обычной, но записываются языком алгебры, становящейся вследствие этого средством исследования геометрических форм. Тем самым, метод координат переносит в геометрию наиболее важную особенность алгебры – единообразие способов решения задач. Если в арифметике и элементарной геометрии приходится, как правило, искать для каждой задачи особый путь решения, то в алгебре и аналитической геометрии решения проводятся по общему для всех задач плану, который легко приспособить к любой задаче. Дело в том, что алгебраические задачи легче алгоритмируются и, зачастую, гораздо проще решаются. Данный подход применим к большому числу геометрических и физико-технических задач.

Метод координат – весьма эффективный и универсальный способ нахождения углов и расстояний между объектами. Однако в школе ему уделяется весьма мало времени. В частности, в учебнике Л.С.Атанасяна по геометрии за 7-9 класс разбирается две задачи и еще 5 предлагается для самостоятельного решения. В его же учебнике для 10-11 классов разбирается 3 задачи и еще 12 предлагается решить. В учебнике И.Ф.Шарыгина для 7-9 классов более подробно рассматривается метод введения системы координат на плоскости, исходя из удобства, и подробно разбираются 2 задачи, после чего приводится довольно много задач для самостоятельного решения. В пространстве же подобные задачи не рассматриваются. В учебнике А.В.Погорелова для 7-9 классов среди задач для самостоятельного решения приведены несколько, которые удобно решать, вводя систему координат, но ни теории, ни разобранных примеров на эту тему нет. В учебнике же для 10-11 класса произвольное введение системы координат встречается только в последней теме при выводе уравнений эллипса, гиперболы и параболы. Однако, здесь, как и в учебниках Л.С.Атанасяна, ни слова не говорится о том, как именно удобнее вводить систему координат и почему. Просто говорится: «сделаем так».

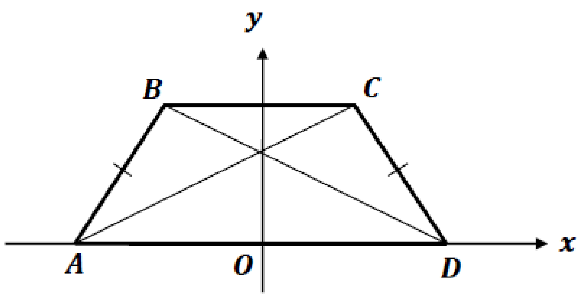
Между тем, координаты на плоскости и в пространстве можно вводить бесконечным числом разных способов. Решая ту или иную математическую или физическую задачу методом координат, можно использовать различные координатные системы, выбирая ту из них, в которой задача решается проще или удобнее в данном конкретном случае. Однако практика показывает, что для школьников и студентов система координат – это нечто незыблемое, раз и навсегда заданное. Поэтому при изучении аналитической геометрии в университете возникают трудности при изучении некоторых тем. Например, при рассмотрении определения параболы, как геометрического места точек, равноудаленных от некоторой фиксированной точки (фокуса) и от некоторой заданной прямой (директрисы), студентам трудно понять, что уравнения здесь будут получаться различными в зависимости от того, как вводится система координат. Далее, при объяснении преобразования уравнения кривой 2-го порядка при повороте и параллельном переносе системы координат мне нередко приходится сталкиваться с непониманием: как же можно эту систему менять? Для многих студентов тот же эллипс должен задаваться только каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, и никаким иным. Когда же им говоришь, что, например, уравнение $25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-$ $-224=0$ также определяет эллипс, то в глазах слушателей часто можно увидеть недоверие и непонимание: разве так может быть? Между тем, этот эллипс получится, если начало системы координат перенести в точку $(1;-1)$, а координатные оси повернуть на $45°$ против часовой стрелки.

Поэтому, я считаю, в школе необходимо уделять побольше внимания координатному методу, тем более что с его помощью некоторые задачи из школьных учебников и из ЕГЭ решаются гораздо проще, поскольку чисто геометрический метод требует интуиции, пространственного воображения, дополнительных построений. При координатном же методе обычно требуется только знание некоторых формул.

Рассмотрим применение координатного метода для решения нескольких геометрических задач на плоскости и в пространстве.

Задача 1. *Докажите, что в равнобедренной трапеции диагонали равны.*

Координатный метод. Введем систему координат следующим образом: ось абсцисс направим вдоль нижнего основания трапеции, расположив начало координат в его середине, а ось ординат направим вверх, перпендикулярно основаниям.



Пусть нижнее основание имеет длину $2a$, верхнее – длину $2b$, а высота трапеции равна c. Тогда вершины трапеции есть $A(-a;0)$, $B(-b;c)$, $C(b;c)$, $D(a;0)$.

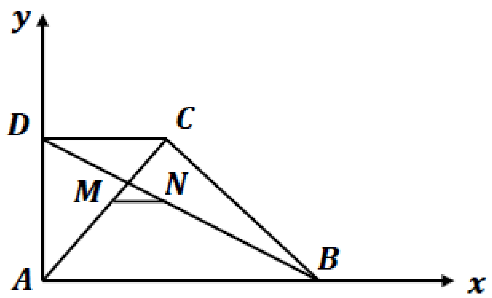
Отсюда по формуле расстояния между двумя точками получаем:

$$\left.\begin{aligned}|AC| &= \sqrt{(a+b)^2+c^2}\\ |BD| &= \sqrt{(a+b)^2+c^2}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad |AC| = |BD|\,.$$

<u>Геометрический метод.</u> Известно, что в равнобедренной трапеции углы при основании равны. Тогда $\Delta ABD = \Delta ACD$ по первому признаку ($AB = CD$, $\angle A = \angle D$, AD – общая). Следовательно, $AC = BD$.

В данной задаче методы практически равноценны. Однако в некоторых планиметрических, а особенно в стереометрических задачах координатный метод нередко является более простым.

Задача 2. *Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и b, $b > a$. Найдите расстояние между серединами ее диагоналей.*



Введем систему координат так, как показано на рисунке. Пусть $AB = b$, $CD = a$. Обозначим высоту трапеции AD через h. Тогда ее вершины будут иметь координаты $A(0;0)$, $B(b;0)$, $C(a;h)$, $D(0;h)$.

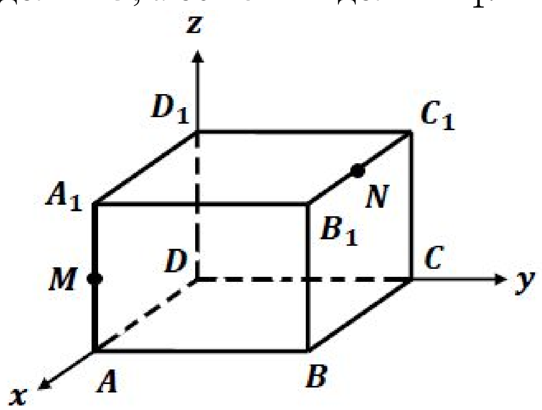
Точка M – середина AC, значит, ее координаты равны полусумме координат точек A и C, т.е. $M\left(\frac{a}{2};\frac{h}{2}\right)$.

Аналогично, N – середина BD, значит, $N\left(\frac{b}{2};\frac{h}{2}\right)$.

Тогда $|MN| = \sqrt{\left(\frac{b}{2}-\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \frac{b-a}{2}$.

Задача 3. *Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, у которого $AD = 6$, $AB = 3$, $AA_1 = 2$. Найти угол между прямой AC_1 и прямой, проходящей через середины ребер AA_1 и B_1C_1.*

<u>Координатный метод.</u> Введем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с точкой D, ось Ox направим вдоль ребра DA, ось Oy - вдоль DC, а ось Oz – вдоль DD_1.



Тогда $A(6;0;0)$, $A_1(6;0;2)$, $B_1(6;3;2)$, $C_1(0;3;2)$.

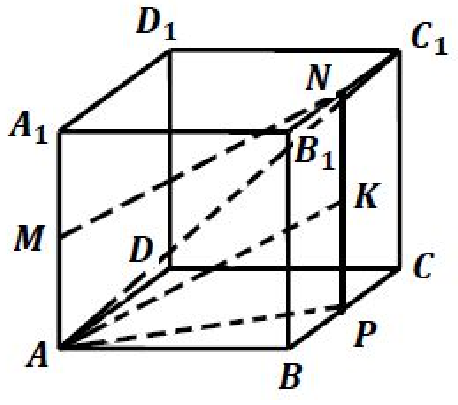
Точка M – середина AA_1, значит, ее координаты равны полусумме координат точек A и A_1, т.е. $M(6;0;1)$.

Аналогично, N – середина B_1C_1, значит, $N(3;3;2)$.

Тогда $\overrightarrow{AC_1} = \{-6;3;2\}$, $\overrightarrow{MN} = \{-3;3;1\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{MN}|} = \frac{18+9+2}{\sqrt{36+9+4}\cdot\sqrt{9+9+1}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

Геометрический метод. Проведем прямую NP, параллельную BB_1. K – середина NP.



$AM||NK,\ AM = NK$, следовательно, $AMNK$ – параллелограмм, откуда $MN||AK$. Значит, искомый угол равен $\angle KAC_1$.

$AC_1 = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA_1{}^2} = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7;$

$C_1K = \frac{1}{2}\sqrt{BC^2 + B_1B^2} = \frac{1}{2}\sqrt{36 + 4} = \sqrt{10};$

$AP = \sqrt{AB^2 + BP^2} = \sqrt{9 + 9} = \sqrt{18};$

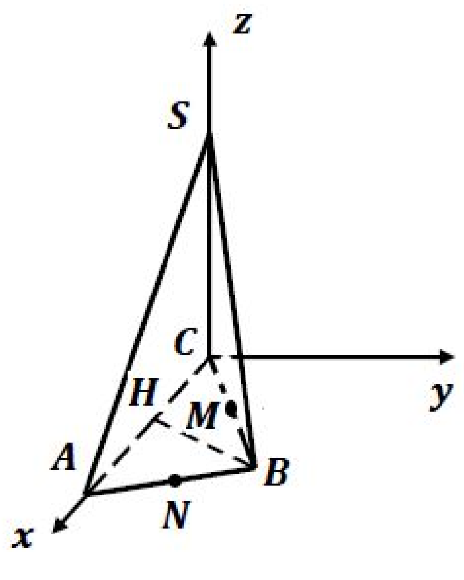
$AK = \sqrt{AP^2 + KP^2} = \sqrt{18 + 1} = \sqrt{19}.$

Тогда по теореме косинусов из ΔAKC_1:

$$\cos\angle KAC_1 = \frac{AK^2 + AC_1{}^2 - KC_1{}^2}{2AC_1 \cdot AK} = \frac{19+49-10}{2\cdot 7\cdot\sqrt{19}} = \frac{58}{14\sqrt{19}} = \frac{29}{7\sqrt{19}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{29}{7\sqrt{19}}.$$

Видим, что в данной задаче координатный метод является более коротким, не требующим дополнительных построений, знания геометрических теорем и пространственного воображения. Такой метод подходит даже не очень сильным ученикам, которых, как правило, пугают стереометрические задачи.

Задача 4. *Основанием пирамиды $SABC$ является равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найти угол между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая проходит через точку C и середину ребра AB.*



Введем систему координат с началом в точке C так, что ось Ox проходит через ребро CA, а ось Oz – через ребро CS.

Тогда $A(4\sqrt{2}; 0; 0)$, $C(0; 0; 0)$, $S(0; 0; 2)$.

Проведем в ΔABC высоту BH. Поскольку треугольник – равносторонний, то BH также является медианой. Значит, $CH = 2\sqrt{2}$.

$BH = \sqrt{BC^2 - CH^2} = \sqrt{32 - 8} = 2\sqrt{6}.$

Тогда $B(2\sqrt{2}; 2\sqrt{6}; 0)$.

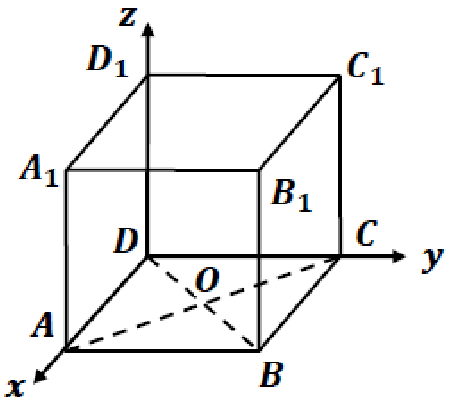
Точка M – середина BC, значит, ее координаты равны полусумме координат точек B и C, т.е. $M(\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$.

Аналогично, N – середина AB, значит, $N(3\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0)$.

Тогда $\overrightarrow{SM} = \{\sqrt{2}; \sqrt{6}; -2\}$, $\overrightarrow{CN} = \{3\sqrt{2}; \sqrt{6}; 0\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{SM}\cdot\overrightarrow{CN}}{|\overrightarrow{SM}|\cdot|\overrightarrow{CN}|} = \frac{6+6+0}{\sqrt{2+6+4}\cdot\sqrt{18+6}} = \frac{12}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 45°.$$

Задача 5. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найти угол между прямыми AD_1 и OC_1, где O – центр грани $ABCD$.*



Введем систему координат, как показано на рисунке, и обозначим сторону куба через a.

Тогда $A(a;0;0)$, $B(a;a;0)$, $D(0;0;0)$ $C_1(0;a;a)$, $D_1(0;0;a)$.

Точка O – середина отрезка BD, значит, $O\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2};0\right)$.

Тогда $\overrightarrow{OC_1}=\left\{-\frac{a}{2};\frac{a}{2};a\right\}$, $\overrightarrow{AD_1}=\{-a;0;a\}$. Пусть α – угол между этими векторами. Следовательно,

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{OC_1}\cdot\overrightarrow{AD_1}}{|\overrightarrow{OC_1}|\cdot|\overrightarrow{AD_1}|}=\frac{\frac{a^2}{2}+0+a^2}{\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}+a^2}\cdot\sqrt{a^2+a^2}}=\frac{\frac{3a^2}{2}}{a\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot a\sqrt{2}}=\frac{\frac{3}{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Rightarrow\quad\alpha=30°.$$

Приведенные задачи показывают, что в ряде случаев координатный метод оказывается весьма удобен и полезен, в частности, иногда позволяя на ЕГЭ достаточно просто решить задачу №14 и набрать дополнительные баллы. Следовательно, в школьном курсе математики требуется выделять на него время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Декарт и его координаты // интернет-канал «Математика для всех». 9 апреля 2019.
2. Л.С.Атанасян и др. Геометрия, 7-9. – М.: Просвещение, 2007.
3. Л.С.Атанасян и др. Геометрия, 10-11. – М.: Просвещение, 2008.
4. Ю.В.Садовничий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Задачи с развернутым ответом. – М.: Экзамен, 2020.

УДК 372.862 : 004.056.55

ЗНАКОМСТВО С КРИПТОГРАФИЕЙ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ И ИКТ

Сергей Александрович Желтов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Zheltov.SA@tversu.ru

Алексей Евгеньевич Миловидов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Ключевые слова: *криптография, шифр на основе метода простой замены, перестановочный шифр.*

Аннотация. В работе рассматриваются примеры задач, которые позволяют в доступной форме на уроках информатики и ИКТ познакомить школьников с криптографией, защитой информации и простейшими шифрами.

В настоящее время практически каждый школьник имеет дело с прикладными аспектами информационных технологий. При этом в отношении вопросов защиты информации сложилась следующая ситуация: со стороны школьников есть интерес к изучению данной тематики, но в большинстве школ данные вопросы не рассматриваются. Это обусловлено несколькими факторами, среди которых можно выделить следующие:

- *требования к уровню подготовки выпускников, согласно действующему стандарту [1];*
- *отсутствие мотивации у учителей средней школы для более глубокого освещения данной тематики.*

В подавляющем большинстве школ данные вопросы не рассматриваются даже в рамках занятий, посвящённых основным понятиям информационной безопасности [2], в других – знакомство с защитой информации сводится к подготовке отдельных учеников к участию в олимпиадах школьников по математике и криптографии [3] и подразумевает соответствующую специфическую подготовку. Не в каждой школе имеется возможность для реализации такого подхода.

В рамках общего курса информатики и ИКТ средней школы можно изучать вопросы защиты информации, в том числе и на примере несложных задач криптографии, с возможностью их реализации на одном из языков программирования.

Данный подход будет мотивировать ученика к более глубокому изучению не только информатики, но и математики, укрепляя межпредметные связи.

В качестве примеров таких задач можно рассмотреть шифры на основе метода простой замены и перестановочные шифры [4].

ШИФРЫ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ПРОСТОЙ ЗАМЕНЫ

На уроке перед знакомством с данной задачей имеет смысл повторить или изучить со школьниками основные понятия и свойства модульной арифметики:

Если $a \equiv b(mod\, m)$, $b \equiv c(mod\, m)$, *то* $a \equiv c(mod\, m)$;

Если $a \equiv b(mod\, m)$, *то* $a + c \equiv b + c(mod\, m)$;

Если $a \equiv b(mod\, m)$, *то* $ac \equiv bc(mod\, m)$;

Если $a \equiv b(mod\, m)$, $c \equiv d(mod\, m)$, *то* $a \pm c \equiv b \pm d(mod\, m)$;

Если $a \equiv b(mod\, m)$, $c \equiv d(mod\, m)$, *то* $ac \equiv bd(mod\, m)$;

Если $a \equiv b(mod\, m)$, $c \equiv d(mod\, m)$, *то* $a^n \equiv b^n(mod\, m)$.

Они рассматриваются в 8 или 10 классе средней школы в зависимости от реализуемой образовательной программы.

С точки зрения информатики полезно повторить функции, реализующие основные математические операции, в изучаемом языке программирования (*mod* – возвращает остаток от деления, *div* – возвращает целую часть от деления и другие).

Идея алгоритма шифра моноалфавитной замены состоит в следующем: любой букве x из алфавита A ставится в соответствие одна буква *y* по правилу

$$y = x + k(mod\, n),$$

где n – количество букв в алфавите $A, k \in Z$ – ключ шифрования, x – буква открытого сообщения, *y* – элемент шифрованного текста. Для удобства к буквам русского алфавита можно добавить символ пробела, а букву *е* и *ё* считать одним символом. При желании используемый в шифре алфавит можно расширить, дополнив его другими символами, например, знаками препинания.

Для реализации вычислений буквы просто нумеруются, как правило, начиная с нуля. Таким образом, алфавит A, состоящий из n символов можно представить как множество чисел $\{0, \dots, n-1\}$.

В качестве примера рассмотрим русский алфавит (с добавлением символа пробела и исключением из алфавита буквы *ё*). Количество букв введённого алфавита равно 33. При $k = 13$ получаем следующее правило шифрования:

$$y = x + 13(mod\, 33).$$

Согласно данному соотношению, открытый текст $X =$ ШИФР ЗАМЕНЫ преобразуется в криптограмму $Y =$ ДЦАЭМФНЩТЪЗ.

Для восстановления исходного текста из шифрованного сообщения необходимо применить тот же алгоритм по правилу, заданному формулой:

$$x = y - 13(mod\, 33).$$

В качестве дополнительного задания, можно предложить ученикам, которые успешно справились с заданием раньше других, реализовать задачу вскрытия данного шифра, методом перебора ключа k. На вход в программу поступает зашифрованный текст, программа должна выдать (вывести на экран) соответствующие тексты для каждого из *n* значений ключа. Один из вариантов будет исходным открытым текстом. Для реализации этой программы желательно знакомство с процедурами (функциями), но можно использовать и циклы. При желании (если изучена работа с файлами) результат можно записать в файл.

ПЕРЕСТАНОВОЧНЫЕ ШИФРЫ

Изучение данной задачи предполагает, что учащиеся имеют представление о таких типах данных, как символьный и двумерные массивы. С точки зрения математики имеет смысл повторить со школьниками основные понятия комбинаторики.

Предварительно нужно рассказать учащимся об элементах теории перестановок. Это можно сделать, рассмотрев пример соответствия элементов двух конечных множеств A и B, у которых одинаковое количество элементов (рис 1).

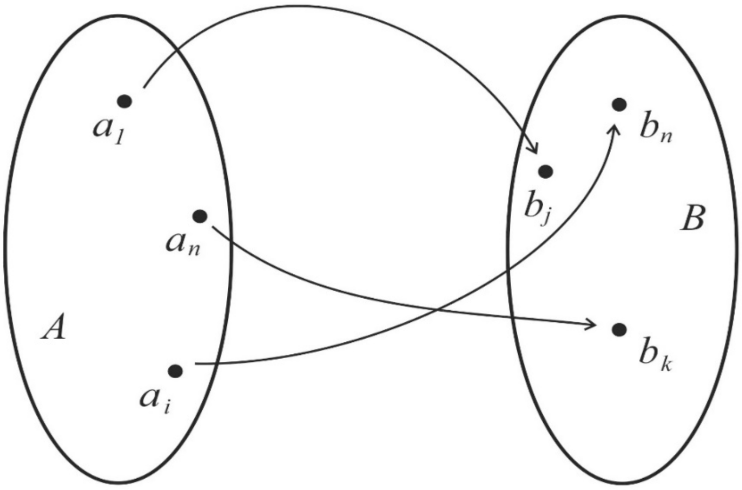


Рис. 1.

Затем необходимо рассмотреть случай, когда множества A и B совпадают и ввести понятие перестановки элементов множества A. Если есть возможность, то имеет смысл, познакомить учащихся со свойствами перестановок, это можно сделать на конкретных примерах.

Простейшим примером шифра перестановки является маршрутная перестановка. Открытый текст записывается в таблицу размера $(n \times m)$, в которой переставляются строки или столбцы в определенном порядке. Такой подход может быть описан с помощью перестановки S. Если, например, первый столбец перемещается на место столбца a_1, второй – на позицию a_2, …, последний столбец $m - a_m$, то соответствующая перестановка S может быть записана в следующем виде:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & m-1 & m \\ a_1 & a_2 & \dots & a_{m-1} & a_m \end{pmatrix}.$$

Можно усложнить задачу путем двойной перестановки строк и столбцов. Рассмотрим пример, пусть открытый текст задан предложением

$$\text{Т} = \text{ШКОЛЬНИКИ УЧАТ КРИПТОГРАФИЮ.}$$

Зададим $n = 3, m = 9$. Получим следующую таблицу 1 (двумерный массив):

Таблица 1. Открытый текст

Ш	К	О	Л	Ь	Н	И	К	И
	У	Ч	А	Т		К	Р	И
П	Т	О	Г	Р	А	Ф	И	Ю

Переставив столбцы согласно перестановке (таблица 2)

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 3 & 5 & 1 & 7 & 6 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix},$$

получаем криптограмму

$$Y = \text{ЛИККОНЬИШФИУРЧ ТК ГЮТИОАРФП}.$$

Таблица 2. Шифрованный текст

Л	И	К	К	О	Н	Ь	И	Ш
А	И	У	Р	Ч		Т	К	
Г	Ю	Т	И	О	А	Р	Ф	П

Как дополнительное задание, можно предложить учащимся реализовать задачу вскрытия данного шифра, методом перебора. На вход в программу подаётся зашифрованный текст и размер таблицы. В качестве результата работы на экран выводятся все возможные перестановки столбцов (строк) в таблице заданного размера и соответствующие тексты. Один из вариантов будет исходным открытым текстом. Как и в предыдущем случае, если учащиеся имеют навыки работы с файлами, то результат можно записать в файл, что будет дополнительным плюсом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Минобразования России от 05.03.2004 N 1089 (ред. от 07.06.2017) "Об утверждении федерального компонента государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего и среднего (полного) общего образования.
2. Желтов С.А. О некоторых аспектах включения понятий информационной безопасности в школьный курс информатики и ИКТ. – Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: сб. науч. тр. научно-практ. конф. (18 февраля 2017 г., г. Тверь). / в 2 ч. Ч.1 – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2017. – с. 110 – 112.
3. Отрыванкина Т.М. Подготовка учащихся средней школы к решению криптографических задач – Оренбургский государственный университет. – Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры, материалы Всероссийской научно-методической конференции (с международным участием), 2015. – с. 2772 – 2775.
4. Осипян В.О. Осипян К.В. Криптография в упражнениях и задачах. – М.: Гелиос АРВ, 2004. – 144 с.

УДК 372.851.4

ИЗУЧЕНИЕ КРИВЫХ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ИНТЕРАКТИВНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ СРЕДЕ GEOGEBRA

Виктор Владимирович Иванов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Ivanov.VV1@tversu.ru

Ключевые слова: *цифровые образовательные ресурсы, интерактивная геометрическая среда GeoGebra, кривые второго порядка, интерактивные компьютерные модели, визуализация.*

Аннотация. В статье рассматриваются возможности применения интерактивной геометрической среды GeoGebra как для создания изображений кривых второго порядка, так и визуализации их свойств в процессах изучения и исследования. Приведены решения задач с использованием компьютерных моделей, созданных с помощью GeoGebra.

Среди приоритетных направлений развития математического образования необходимо отметить его цифровую трансформацию. Современный подход к образовательной деятельности предполагает широкое использование информационных и телекоммуникационных технологий. В сфере обучения появляются новые возможности для визуализации изучаемых понятий. Применение графических иллюстраций в учебных компьютерных системах позволяет на новом уровне передавать информацию и улучшать ее понимание. При обучении математике компьютерные технологии способствуют формированию и, во многих случаях, наглядному представлению основных понятий, развитию умений и навыков в организации работы с теоретическим и практическим материалом, служат средством контроля и самоконтроля.

Представленные в статье цифровые образовательные ресурсы созданы с помощью интерактивной геометрической среды GeoGebra, которая достаточно легка в освоении, в том числе и для тех, кто владеет только элементарными навыками работы на компьютере.

Обладающая простым интерфейсом пользователя кроссплатформенная программа GeoGebra переведена на многие языки, в том числе и на русский. Она распространяется бесплатно и может быть установлена как на стационарные компьютеры и ноутбуки, так и на планшеты и смартфоны. Кроме того, предусмотрена возможность работы on-line на web-странице https://www.geogebra.org.

Покажем возможности использования программы GeoGebra в качестве средства визуализации при изучении и исследовании кривых второго порядка по их каноническим уравнениям.

Запишем каноническое уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Создадим ползунки для динамического изменения полуосей a и b. Зададим диапазон изменения их значений. На рис. 1 показан эллипс, соответствующий каноническому уравнению при $a = 4$ и $b = 2$ ($a > b$), вытянутый по оси Ox.

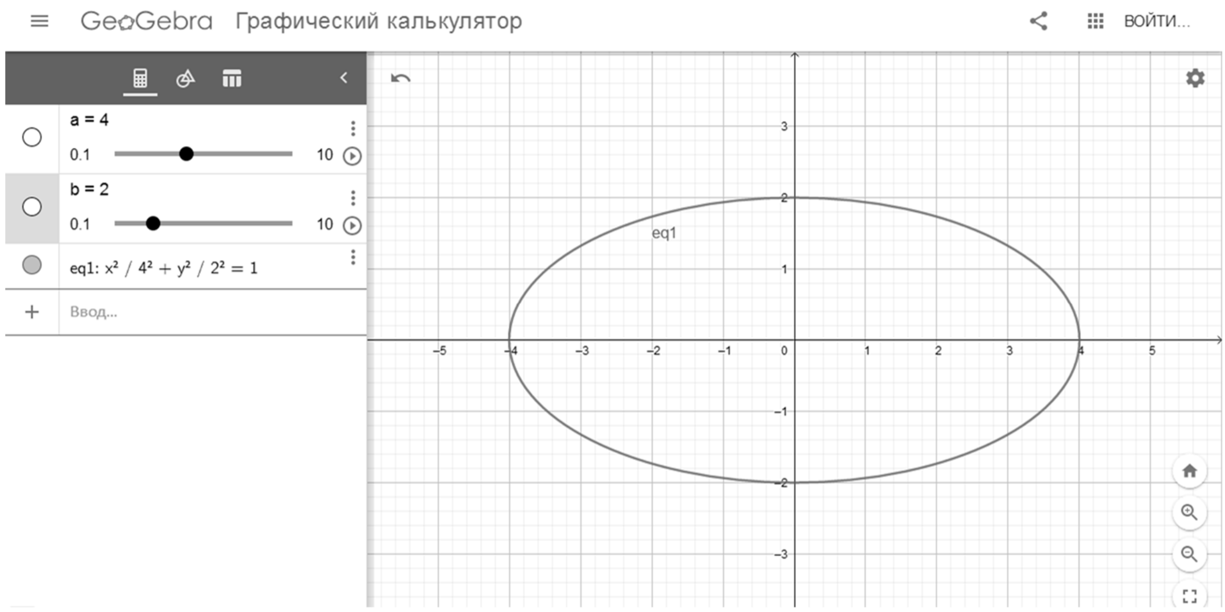


Рис. 1

На рис. 2 показан эллипс, соответствующий каноническому уравнению при $a = 2$ и $b = 4$ ($a < b$), вытянутый по оси Oy.

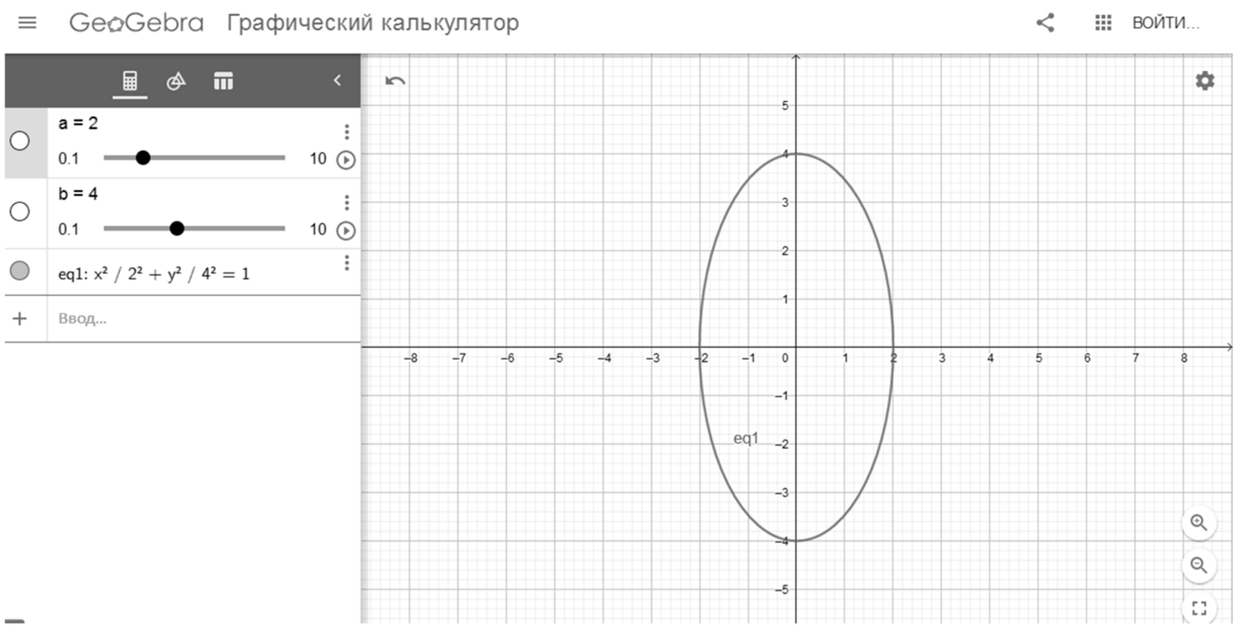


Рис. 2

При $a = b$ эллипс превращается в окружность (рис. 3, $a = b = 3$).

Перемещая положения ползунков для величин a и b вручную (или с использованием анимации), можно проследить за изменением формы эллипса в зависимости от длин его полуосей.

Запишем каноническое уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

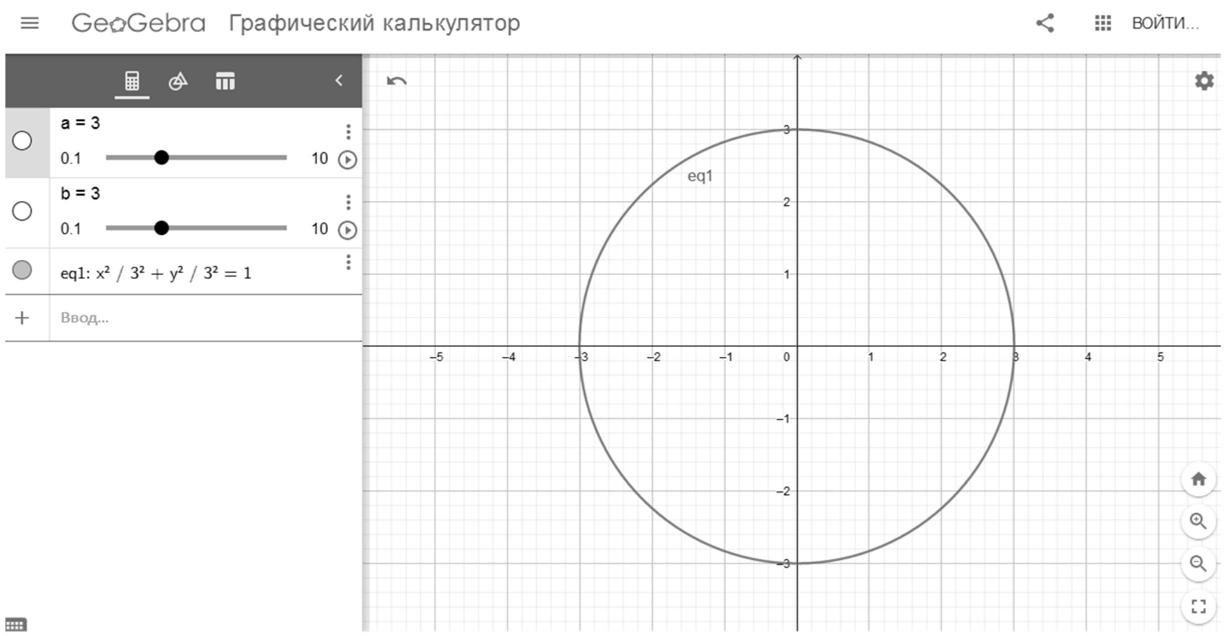


Рис. 3

Создадим ползунки для динамического изменения полуосей *a* и *b*. Зададим диапазон изменения их значений. На рис. 4 показана гипербола, соответствующая каноническому уравнению при *a* = 2 и *b* = 1, и ее асимптоты.

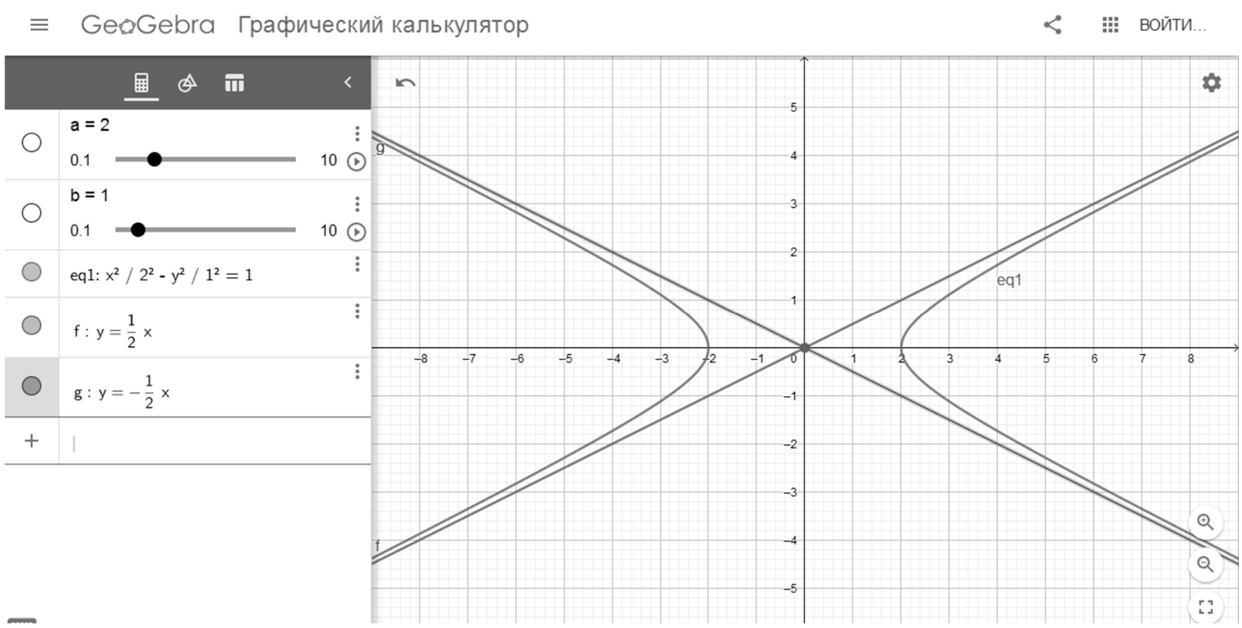


Рис. 4

На рис. 5 показана гипербола, соответствующая каноническому уравнению $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ при *a* = 2 и *b* = 1, и ее асимптоты.

Изменяя значения *a* и *b* с помощью ползунков вручную (или используя анимацию), можно проследить, что происходит с формой гиперболы и расположением ее асимптот.

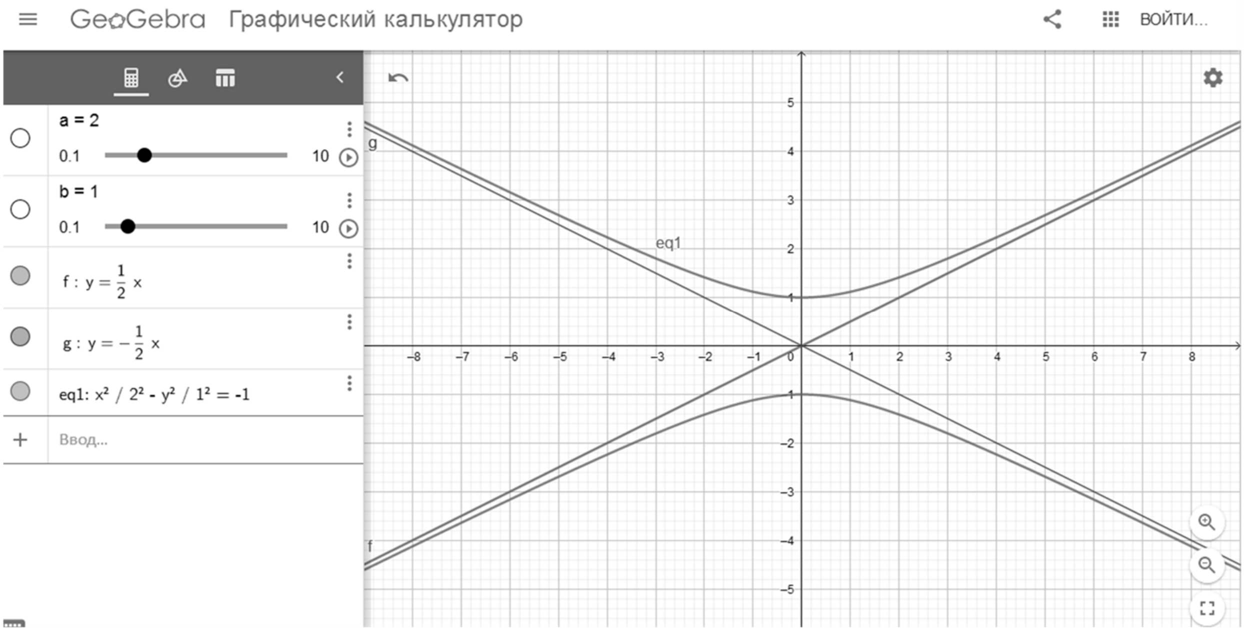


Рис. 5

Запишем канонические уравнения параболы:

$$x^2 = 2py, \ \ x^2 = -2py, \ \ y^2 = 2px, \ \ y^2 = -2px.$$

Создадим ползунок для динамического изменения параметра параболы p. Определим диапазон изменения его значений. На рис. 6 показаны параболы, соответствующие значению $p = 4$.

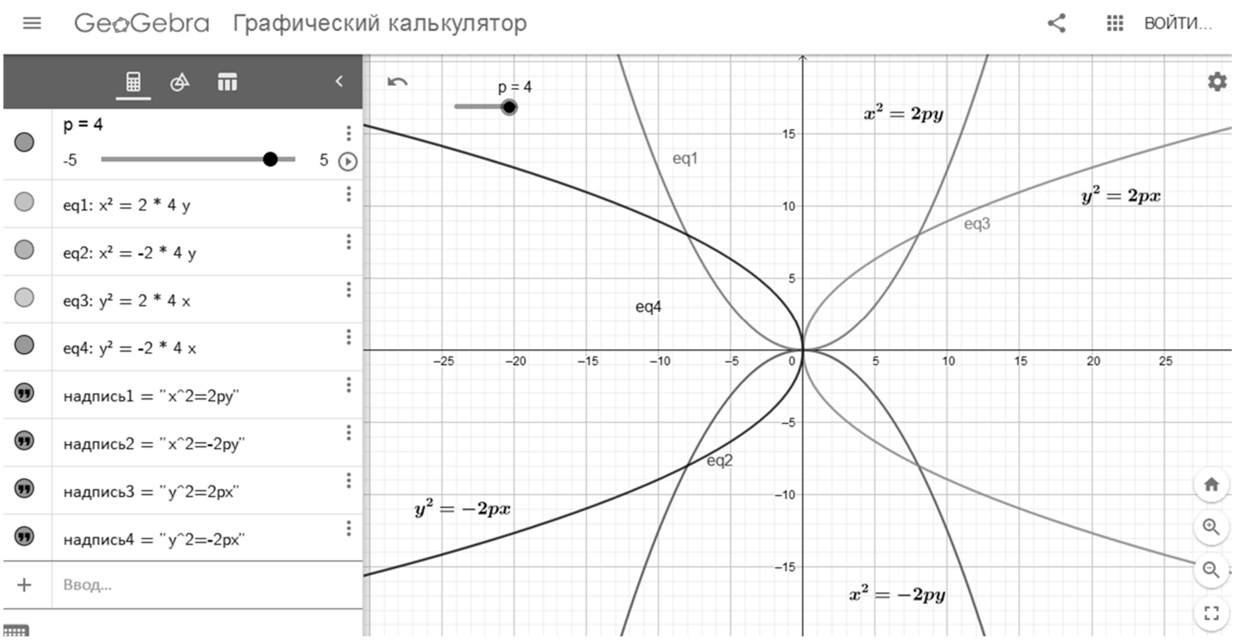


Рис. 6

Изменяя значение p с помощью ползунка вручную (или используя анимацию), можно проследить за преобразованием вида парабол.

Продемонстрируем возможности применения GeoGebra в качестве средства визуализации при решении задач.

Задача 1 [1, с. 115]. Выясните, какую линию на плоскости описывает уравнение $4x^2 - 9y^2 - 40x - 36y + 28 = 0$. Изобразите ее на чертеже.

Решение. Введем уравнение из условия задачи. Получаем гиперболу $\frac{(x-5)^2}{9} - \frac{(y+2)^2}{4} = 1$. Кроме исходной системы координат xOy можно построить каноническую систему координат $\acute{x}\acute{O}\acute{y}$ (рис. 7).

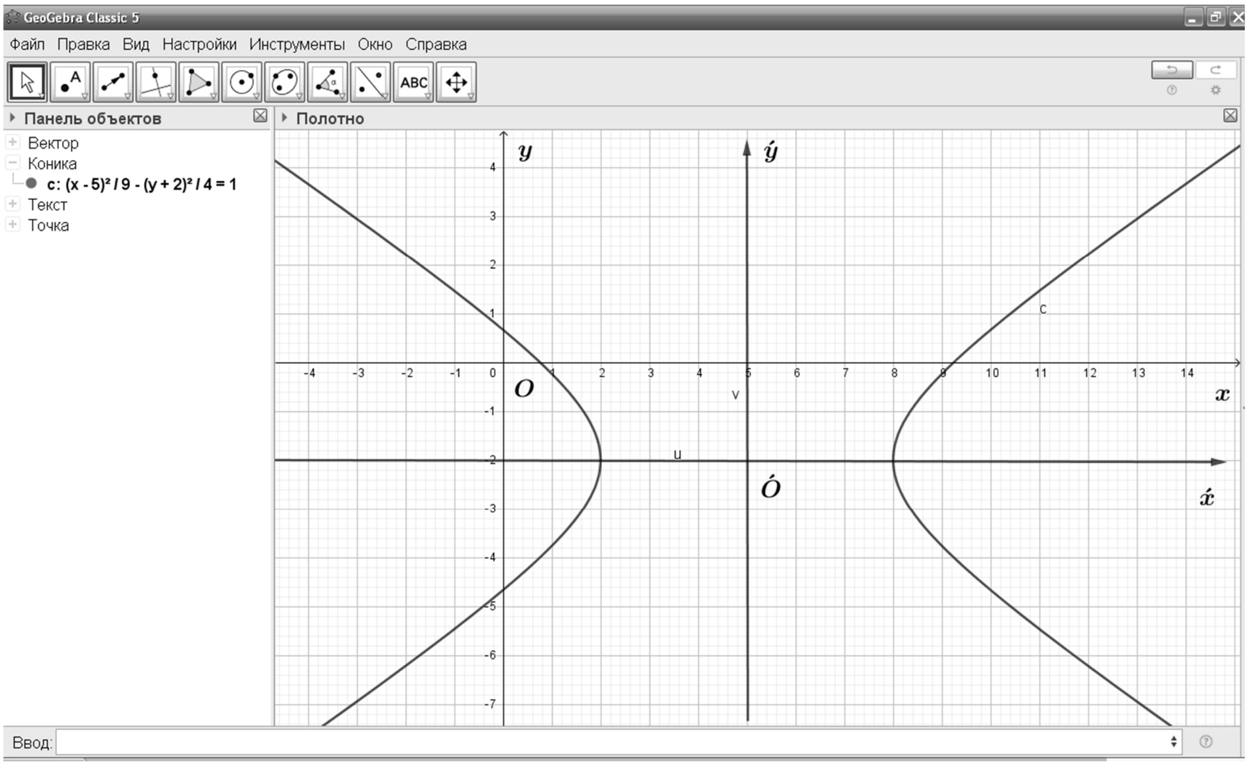


Рис. 7

Задача 2. Выясните геометрический смысл уравнения

$$4x^2 + 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0.$$

Решение. Введем уравнение. Получаем две параллельные прямые, уравнения которых легко получить, используя рис. 8.

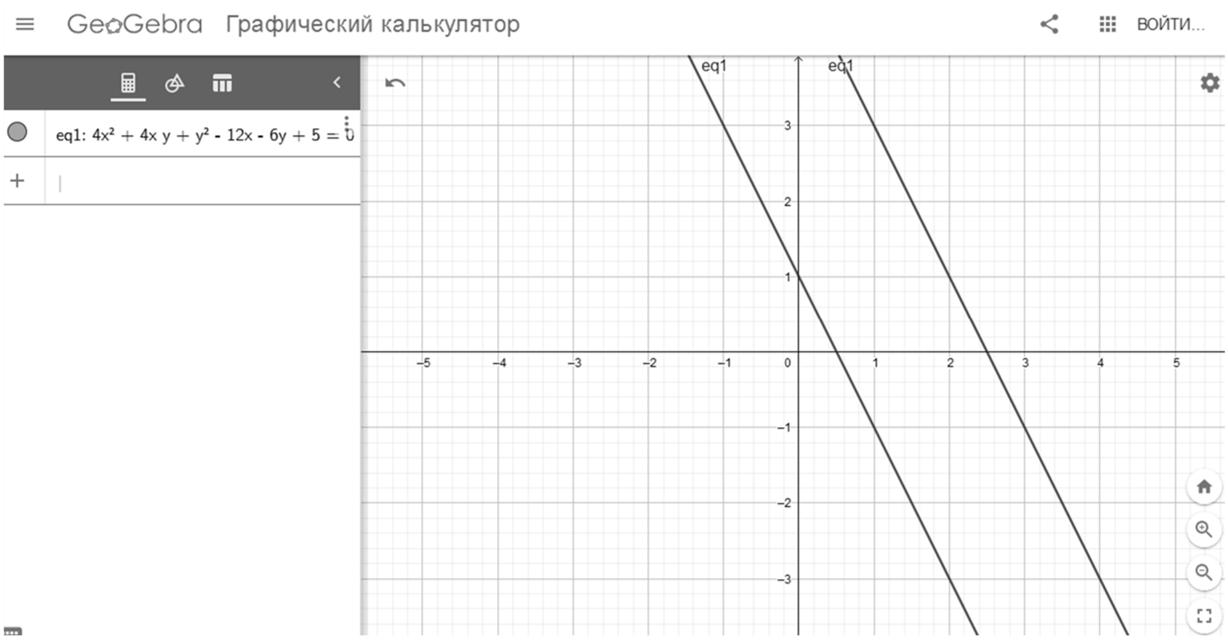


Рис. 8

Задача 3 [2, № 434]. Из точки M (4; – 4) проведены касательные к окружности $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$. Вычислите длину d хорды, соединяющей точки касания.

Решение. Введем из условия задачи уравнение окружности и координаты точки M. Получим окружность $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5$, центр которой находится в точке (3, – 1), а радиус равен $\sqrt{5}$. Проведем касательные к окружности. Найдем координаты точек касания A и B: A (5, – 2), B (2, – 3). Используя инструмент «Расстояние или длина», получим AB = 3,16 (рис. 9). Расчет длины отрезка AB по формуле приводит к результату $\sqrt{10}$. Если результат решения задачи не выражается целым числом или конечной десятичной дробью, то GeoGebra приводит в ответе только приближенное значение искомой величины.

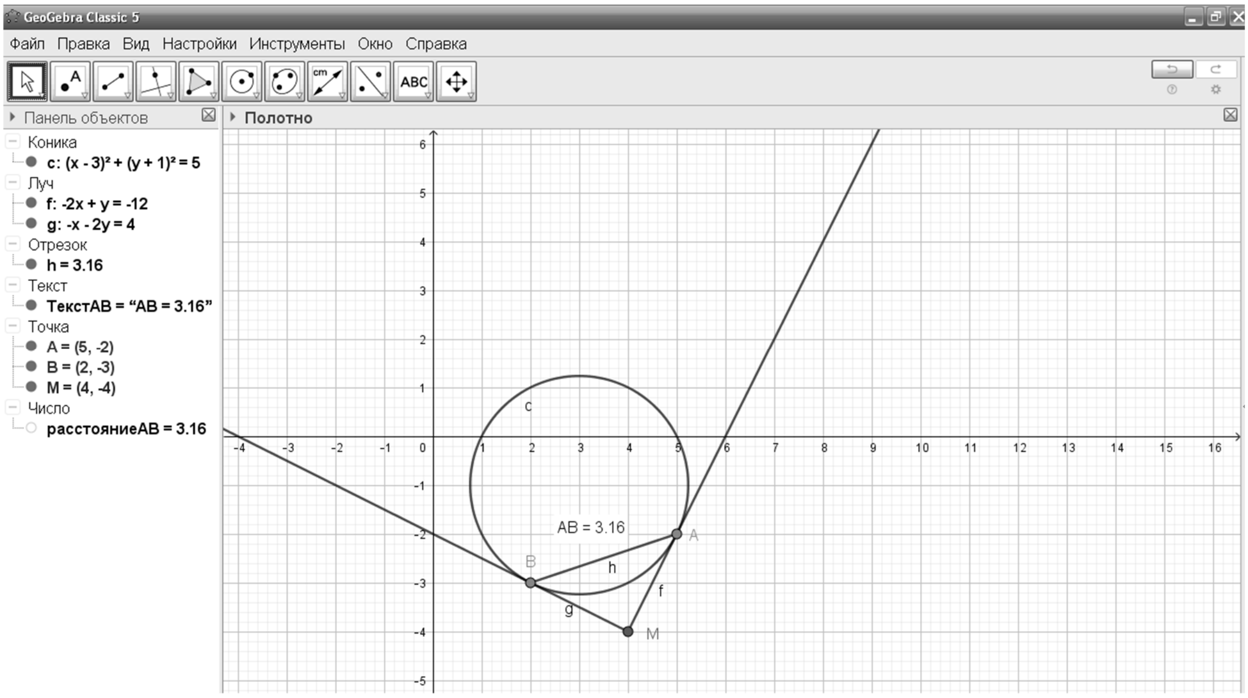


Рис. 9

Использование интерактивной геометрической среды GeoGebra позволяет продемонстрировать свойства кривых второго порядка и проследить, как изменение параметров влияет на изображения кривых, ускоряет процесс решения задач, упрощает вычисления. Созданные с помощью GeoGebra компьютерные модели способствуют повышению эффективности освоения изучаемого материала и оптимизации учебного процесса.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.В. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / В.В. Иванов. – Тверь, 2009. – 160 с.: ил.

2. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д.В. Клетеник, под ред. Ефимова Н.В. – С-Пб., 2020. – 224 с. : ил.

УДК 519.683.8

СУДОКУ КАК ГОЛОВОЛОМКА ДЛЯ СТУДЕНТОВ

Олеся Юрьевна Кашина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: ojkashina@edu.tversu.ru

Иван Романович Комиссаров
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: irkomissarov@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *судоку, головоломки, программирование, олимпиадные задачи.*

Аннотация. Данная статья посвящена головоломке судоку. Рассмотрены история, правила и польза. А также представлено решение задачи с помощью программы.

Головоломки были популярны всегда у людей разных возрастов и интересов. Ведь для них не нужны какие-то специальные знания, а нужно полагаться только на свою сообразительность. Одной из них является судоку.

На языке математики в своём классическом виде задача представляет собой составление особого случая латинского квадрата размером $n \times n$, в котором каждый из n символов появляется ровно один раз в любой строке или столбце, а также в каждом из n малых квадратов (блоков, регионов). Чаще всего встречается судоку с квадратом размера 9 и используются 9 арабских цифр.

История судоку. Первым вариантом судоку можно считать головоломку «Магический квадрат», которая была известна еще в древнем Китае около 2000 лет назад. Игра представляла собой квадрат размером 3×3 клетки. В каждую клетку вписывалось одно число от 1 до 9, так что сумма чисел в каждой строке, каждом столбце и на обеих диагоналях одинакова.

В Европе история судоку приводит к имени знаменитого швейцарского математика, и физика Леонарда Эйлера (1707 – 1783). Исследуя различные варианты магического квадрата, Эйлер в своей работе «Научное исследование новых разновидностей магического квадрата» обратил внимание на проблему комбинации символов таким образом, чтобы не один из них не повторялся ни в одной строке и ни в одном столбце. Эйлер в качестве символов помещал в клетки латинские буквы (получая Латинский квадрат), позже он заполнил клетки греческими буквами и называл квадрат греко-латинским. С помощью своих исследований он выяснил, что в матрице размером 9×9 каждый ряд и каждую колонку можно заполнить числами от 1 до 9 в определенном порядке и без повторения.

Наиболее распространенная версия головоломки создана, вероятно, Р. Гарнсом (США) и впервые опубликована в 1979 г. под названием «Number Place». Задача была существенно усовершенствована путем добавления блоков размером 3×3.

Название "Sudoku"3 этой головоломке уже дало японское издательство Nicoli в 1984 г. как сокращение фразы «Suuji wa dokushin ni kagiru», что в переводе означает "число должно быть единственным". Можно сказать, головоломка в 80-х стала популярной именно в Японии.

В конце 2004 года британская газета «Times» стала печатать судоку на своих страницах, чем прославила эту головоломку на всю Европу. Эта публикация принесла судоку большую популярность, головоломка быстро распространилась по всей Британии, Австралии, США. Так что, вопреки распространенному мнению, судоку – вовсе не японская игра.

Правила. Игровое поле представляет собой квадрат размером 9×9, разделённый на меньшие квадраты со стороной в 3 клетки. Таким образом, всё игровое поле состоит из 81 клетки. В них уже в начале игры стоят некоторые числа (от 1 до 9), называемые *подсказками*. От игрока требуется заполнить свободные клетки цифрами от 1 до 9 так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждом малом квадрате 3×3 каждая цифра встречалась бы только один раз.

Польза головоломки. Правила игры чрезвычайно просты, но разгадывание некоторых задач может занять довольно много времени. Трату времени на судоку многие считают огромным наслаждением и большой пользой. Это уникальный тренажер для логического мышления и внимания. Из-за того, что судоку требует концентрации, мозг устраняет преграды к выполнению обычных, рутинных занятий. Другими словами, наш мозг получает перерыв, отдых от повседневности.

Считается, что решение трудных умственных загадок задерживает или предотвращает развитие болезней, связанных с потерей памяти. Совершенствуется умение быстрого счета. Развивается мышление, логика. Решение задач способствует развитию навыков поиска и решения проблемы.

В данной статье предложен пример кода для решения судоку. Создание этого проекта поможет студентам не только решить сложную алгоритмическую задачу, но и усовершенствовать свои навыки программирования.

Алгоритм решения. На вход подается матрица 9×9, часть клеток в ней заполнена цифрами от 0 до 9 (если в клетке стоит 0, то считаем, что она пуста).

Здесь и далее под словом “кандидат” будем понимать значение из множества 1, 2, …, 9, которое можно поставить в некоторую клетку, значение которой не равно 0.

Далее происходит заполнение пустых клеток, изначально помеченных цифрой ноль по описанному ниже алгоритму.

1) Проверяем корректно ли заполнено поле, если да, то продолжаем алгоритм, если нет, то завершаем его (решения не существует).

2) Для каждой клетки, не равной нулю (под отсутствием значения в клетке понимаем ноль), исключаем кандидатов, значения которых равны значению в данной клетке, в столбце, строке и блоке 3×3.

3) После исключения ищем клетки, в которых есть лишь один возможный кандидат, если нашли такие клетки, то записываем в их значение соответствующего кандидата.

4) Если все клетки заполнены, то завершаем цикл и возвращаем найденное решение.

5) Если нашлась хотя бы одна клетка, в которой есть единственный кандидат, то продолжаем цикл, если нет, то выходим из цикла.

6) Для клетки с минимальным количеством кандидатов: пробуем ставить каждого кандидата по порядку и рекурсивно решать данное судоку. Если решение найдено, то возвращаем его.

На выходе возвращаем полностью заполненную матрицу 9×9:

1) без нулей, в случае если судоку имеет одно единственное решение или имеет несколько решений;

2) полностью заполненную нулями, если решения у судоку нет.

Оболочка основной функции и ее рекурсивная версия.

```
void sudoku::solver(int A[9][9]) { //выделяем память для двумерного массива
//перезаписываем значения из входного массива A в массив f
	static cell **f = new cell*[9];
	for (int j = 0; j < 9; j++)
		f[j] = new cell[9];
	for (int r = 0; r < 9; r++)
		for (int c = 0; c < 9; c++)
		   f[r][c].value = A[r][c];
	r_solver(f); //вызов рекурсивной функции
}
bool sudoku::r_solver(cell **f) {
//создаем переменную типа bool
	bool change = true;
	while (true) {
	     if (!is_correct(f)) {//проверка массива на корректность
		set_to_zero();//если условие не выполняется, то обнуляем массив
	return false;
	}
	exception(f); //вызов ф-ции, исключающей в пустых клетках кандидатов
	  change = loner(f); //вызов функции, которая в клетках с единственным
	  // кандидатом записывает его в значение клетки
	if (is_filled(f)) {//проверяем заполнены ли все клетки массива
	  //если да, то заполняем возвращаемый массив field
		for (int i = 0; i < 9; i++)
		   for (int j = 0; j < 9; j++)
			field[i][j] = f[i][j].value;
		return true;
	  }
	if (change) continue; //если в массив записано хотя бы одно значение,
	  //то продолжаем цикл
	else break;
}
//функция min_num_cand() возвращает пару целых чисел, первое - индекс
//строки, второе – индекс столбца клетки с min количеством кандидатов в ней
```

```
	pair<int, int> p = min_num_cand(f);
//подставляем кандидатов по порядку и пробуем решить задачу рекурсивно
	for (int i = 0; i < 9; i++) {
		if (f[p.first][p.second].candidates[i]) {
			f[p.first][p.second].value = i + 1;
			if (r_solver(f)) //если решить удалось, то заканчиваем перебор
		   return true;
		}
	 }
	return false;
}
```

Функции исключения и поиска одиночных кандидатов.

```
void sudoku::exception(cell **f) {
//вызываем функцию исключения для каждой клетки
	for (int i = 0; i < 9; i++)
		for (int j = 0; j < 9; j++)
		   exception(i, j, f);
}
void sudoku::exception(int i, int j, cell **f) {
//если в клетке 0, то она нас не интересует
	if (f[i][j].value == 0) return;
	int val = f[i][j].value; //запоминаем значение в клетке не равной 0
//исключаем во всех клетках, находящихся в одной строке, столбце, блоке
//3×3 с этой клеткой, кандидатов, значения которых равны переменной val
	for (int k = 0; k < 9; k++)
		f[k][j].candidates[val - 1] = false;
	for (int k = 0; k < 9; k++)
		f[i][k].candidates[val - 1] = false;
//индекс строки и столбца блока 3×3 находим с помощью деления нацело
//на 3 и умножения на 3
	int index_row = (i / 3) * 3;
	int index_column = (j / 3) * 3;
	for (int k = 0; k < 3; k++)
		for (int l = 0; l < 3; l++)
		   f[index_row + k][index_column + l].candidates[val - 1] = false;
}
bool sudoku::loner(cell **f) {
	bool flag = false;
	for (int i = 0; i < 9; i++) {
		for (int j = 0; j < 9; j++) {
		   if (f[i][j].value != 0) continue; //если в клетке не 0, то она нас
//не интересует проверяем для клетки не равной 0 всех кандидатов
			for (int c = 0; c < 9; c++) {
//если кандидат не может стоять в этой клетке, то продолжаем проверять
```

```
                    if (f[i][j].candidates[c] == 0)
                        continue;
//проверяем является ли кандидат единственным кандидатом в строке,
//столбце, блоке 3×3 в других не нулевых клетках
                    if (single_in_sub_square(i, j, c, f) ||
                        single_in_line(i, j, c, f) ||
                        single_in_column(i, j, c, f)) {
                        f[i][j].value = c + 1;
//изменяем значение flag на истина, т.к. мы записали в клетку
//некоторое значение
                        flag = true;
                        for (int cc = 0; cc < 9; cc++)
                            f[i][j].candidates[cc] = false;
                        exception(i, j, f);
                        break;}}}}
    return flag;
}
```

Польза головоломки как задачи для студентов. На примере кода видно, что написание программы для решения судоку тренирует у студентов умение обрабатывать матричную информацию, применять многомерные массивы и работать с рекурсивными функциями. А так как судоку является латинским квадратом, который в свою очередь используется в алгебре, комбинаторике, статистике, теории кодов и криптографии, например, в протоколе с нулевым разглашением и схемой разделения секрета, программное решение головоломки поможет студентам более качественно и глубоко изучить эти разделы математики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.Л.Василенко. Числовая гармония судоку. 2012.
2. Судоку-Википедия. URL: http://www.wikipedia.org (дата обращения 29.02.2020).
3. Как решать судоку: способы, методы и стратегия. URL: http://www.sudoku-club.ru/howto.html (дата обращения 29.02.2020).

УДК 519.004

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО КУРСУ «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И КОМПЬЮТЕРНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ»

Людмила Георгиевна Кожеко
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: kocheko@mail.ru

Елена Аркадьевна Андреева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: elena.andreeva.tvgu@yandex.ru

Ключевые слова: *математическая модель, моделирование, обработка результатов эксперимента, статистические характеристики признака, эмпирическая формула, корреляционная зависимость.*

Аннотация. В работе приводятся некоторые типовые контрольные задания и методические рекомендации к ним по курсу «Математическое моделирование и компьютерные технологии» для студентов биологического факультета (магистратура).

Современная биология не может развиваться без математики, которая необходима для исчерпывающего извлечения информации о типичных объектах, разнообразии их, структуре этого разнообразия, о системах биологических взаимоотношений и взаимодействий, о влиянии разных факторов на биологические объекты, развивающиеся в различных условиях [1].

Актуальные вопросы биологической теории – теория популяций, математическое моделирование биологических процессов предполагают разработку специальных математических методов, а также применение современных компьютерных технологий при сборе, хранении, обработке, анализе и передаче биологической информации для решения профессиональных задач.

Математическое моделирование широко применяется при решении экологических задач, связанных с антропогенными воздействиями на природную среду, имеет большое значение для решения проблем борьбы с вредителями, регуляции численности популяций, стабилизации сообществ [2].

В современных математических моделях выделяют тактические и стратегические модели. Тактические модели экосистем и популяций служат для экологического прогнозирования их состояния, в том числе при разного рода экзогенных воздействиях. Стратегические модели строят в основном с исследовательскими целями, для вскрытия общих законов функционирования биологических систем, таких, как стабильность, разнообразие, устойчивость к воздействиям, способность возвращаться в исходное состояние [4]. В задачи стратегических моделей входит изучить с помощью ЭВМ последствия разных стратегий управления экосистемами, чтобы иметь возможность выбрать наиболее эффективную.

Модели строят на основании сведений, накопленных в полевых наблюдениях и экспериментах. Чтобы построить математическую модель, которая была бы адекватной, т. е. правильно отражала реальные процессы, требуются существенные эмпирические знания [3].

Расчетные методы в случае правильно построенной модели помогают увидеть то, что трудно или невозможно проверить в эксперименте, позволяют воспроизводить такие процессы, наблюдение которых в природе потребовало бы много сил и больших промежутков времени. В математических моделях можно «проигрывать» разные варианты – вычленять разные связи, комбинировать отдельные факторы, упрощать или усложнять структуру систем, менять последовательность и силу воздействий – всё это даёт возможность лучше понять механизмы, действующие в природных условиях [5].

Математическими моделями описываются и проверяются разные варианты динамики численности, популяций, продукционные процессы в экосистемах, условия стабилизации сообществ, ход восстановления систем при разных формах нарушений и многие другие явления. Сами методы математического моделирования биологических систем развиваются, совершенствуются и разнообразятся.

Некоторые типовые контрольные задания

Задание **по теме "*Первичная обработка результатов эксперимента*"**

Управление сельского хозяйства предоставило сводку по ряду хозяйств. Согласно этой сводке, урожайность ржи в них составила (в центнерах с гектара) [4]:

17.5, 17.8, 18.6, 18.3, 19.1, 19.9, 20.6, 20.1, 22, 21.4, 17.5, 18.5, 19, 20, 22, 20.6, 19.1, 18.6, 17.9, 19.1, 22, 19, 17.5, 23, 22, 21, 19, 17.8, 18.3, 19.9, 20.1, 21.4, 18.5, 20, 21, 23, 17.5, 17.8, 18.6, 18.3, 19.1, 19.9, 20.6, 20.1, 22, 21.4, 17.5, 18.5, 19, 20, 22, 20.6, 19.1, 18.6, 17.9, 19.1, 22, 19, 17.5, 23, 22, 21, 19, 17.8, 18.3, 19.9, 20.1, 21.4, 18.5, 20, 21, 23, 17.5, 17.8, 18.6, 18.3, 19.1, 19.9, 20.6, 20.1, 22, 21.4, 17.5, 18.5, 19, 20, 22, 20.6, 19.1, 18.6, 17.9, 19.1, 22, 19, 17.5, 23, 22, 21, 19, 17.8.

1) Определите переменную величину;
2) найдите среднее арифметическое ($\overline{X}$), дисперсию (D) и среднее квадратическое отклонение (σ);
3) определите интервал наиболее вероятных значений ($\overline{X} - \sigma, \overline{X} + \sigma$);
4) найдите частоту больших значений величины X (больших $\overline{X} + \sigma$);
5) найдите частоту малых значений величины X (меньших $\overline{X} - \sigma$);
6) постройте интервальный ряд, гистограмму;
7) найдите по интервальному ряду все числовые характеристики ($\overline{X}$, D, σ);
8) определите долю значений переменной величины, попадающих в промежуток [18; 21].

При выполнении задания

- *из таблицы брать (N+10) значений (N - номер студента по списку);*
- *использовать средства электронных таблиц MS EXCEL.*

Методические рекомендации:

Имеем частичную выборку, состоящую из *n* элементов (*n* – количество отобранных для исследования хозяйств).

Вычислим основные статистические характеристики признака: среднее арифметическое значений, дисперсию и среднее квадратическое отклонение признака по известным формулам.

Расположим значения $X = \{X_1, X_2, X_3, \ldots, X_i, \ldots, X_n\}$ в порядке их возрастания (без повторений). Найдем частоты n_i (число вхождений X_i *в X)* и относительные частоты $w_i = n_i /n$.

Получаем *статистический ряд (статистическое распределение выборки):*

$X^{(i)}$	$X^{(1)}$	$X^{(2)}$	…
n_i	n_1	n_2	…
w_i	w_1	w_2	…

Совокупность полученных результатов (выборочные значения, их частоты, среднее арифметическое, среднее квадратическое отклонение) **представляют собой математическую модель, которая описывает урожайность ржи в регионе.**

Замечание 1. Переменная величина X считается известной, если указано правило, по которому можно находить частоту ее попадания в любой заданный интервал (частота данного интервала). Эта частота равна сумме частот отдельных значений, попавших в данный интервал.

Замечание 2. Интервал $(\overline{X} - \sigma; \overline{X} + \sigma)$ не всегда является интервалом наиболее вероятных значений. Если его частота оказывается меньше ½, то его расширяют; если частота больше ½, то интервал можно и сузить.

При обработке большого числа экспериментальных данных их предварительно группируют и оформляют в виде так называемого *интервального ряда*.

Диапазон наблюдений разбивается на отрезки (разряды) так, чтобы каждый разряд содержал несколько экспериментальных данных. Длину каждого разряда можно найти делением длины диапазона на количество частей.

Подсчитывается число значений, попавших в каждый разряд.

Если число находится на границе между разрядами, оно включается в оба разряда с половинной кратностью. Сложив кратности, найдем *абсолютную частоту разряда* m_i.

Разделив абсолютную частоту m_i на число *n* всех наблюдений, найдём *относительную частоту* p_i *разряда.*

Проделав аналогичные вычисления для всех разрядов, мы получим таблицу, которая называется *интервальным рядом*.

Разделив абсолютную частоту m_i на число n всех наблюдений, найдём *относительную частоту p_i разряда.*

Проделав аналогичные вычисления для всех разрядов, мы получим таблицу, которая называется *интервальным рядом*.

Интервальный ряд изображают графически в виде гистограммы.

Формирование таблиц и процесс построения гистограмм необходимо автоматизировать с помощью компьютера.

Вычисление средних значений по интервальному ряду

Интервальный ряд составляют при обработке больших массивов информации. В таких случаях, как правило, отдельные значения величины X не фиксируют, а подсчитывают абсолютные частоты разрядов, то есть количество значений величины X, попавших в каждый разряд. Исследователь, не зная отдельных значений наблюдаемой величины X, не может по приведенным выше формулам вычислить точные значения среднего арифметического, дисперсии и среднего квадратического отклонения. Но приближенное значение этих числовых характеристик можно найти с помощью интервального ряда.

Идея интервального ряда заключается в том, что все числа, попавшие в один разряд, считаются приблизительно равными друг другу, и на этом основании заменяются одним числом - серединой разряда. Пусть всего имеется k разрядов, серединами которых являются величины $\widetilde{x_1}, \quad \widetilde{x_2}, \ \dots, \widetilde{x_k}$.

Число $\widetilde{x_1}$ заменяет собой m_1 чисел, попавших в первый разряд, поэтому будем считать, что число $\widetilde{x_1}$ встречается m_1 раз. Иными словами, m_1 – это абсолютная частота значения $\widetilde{x_1}$. Точно так же, абсолютную частоту m_2 второго разряда будем считать абсолютной частотой середины $\widetilde{x_2}$ второго разряда и т. д. Далее, поделив каждую абсолютную частоту на сумму всех абсолютных частот, можно найти относительные частоты $\widetilde{p_1}, \widetilde{p_2}, \dots, \widetilde{p_k}$, а затем по известным формулам вычислить среднее арифметическое, дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$\bar{x} = \widetilde{x_1} \cdot \widetilde{p_1} + \widetilde{x_2} \cdot \widetilde{p_2} + \ldots + \widetilde{x_k} \cdot \widetilde{p_k} ;$$

$$D = (\widetilde{x_1} - \bar{x})^2 \, \widetilde{p_1} + (\widetilde{x_2} - \bar{x})^2 \, \widetilde{p_2} + \ldots + (\widetilde{x_k} - \bar{x})^2 \, \widetilde{p_k} ;$$

$$\sigma = \sqrt{D} .$$

Задание по теме «Построение эмпирических табличных зависимостей»

Пусть в процессе опыта получена таблица* некоторой зависимости f:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

а) Найти вид эмпирической формулы данной табличной зависимости в виде функции двух параметров $y=f(x, a_1, a_2)$ графическим или аналитическим способом, используя классический набор функций (линейная, показательная, дробно-рациональная, логарифмическая, степенная, гиперболическая, дробно-линейная).

Далее выбрать и исследовать не менее двух функций.

б) Уточнить коэффициенты полученных эмпирических функций методом

- выбранных точек,
- средних,
- наименьших квадратов.

в) Из полученных в п. б) функций найти наилучшую приближающую.

г) В одной системе координат построить графики исходной зависимости и полученной в п. в) функции.

* Каждому студенту выдается индивидуальное задание в виде таблицы с конкретными данными.

Для построения таблиц и графиков необходимо использовать средства электронных таблиц MS EXCEL.

Методические рекомендации:

Имеется в виду следующая задача. В результате исследования некоторой величины x значениям $x_1, x_2, \ldots, x_n$ поставлены в соответствие значения $y_1, y_2, \ldots, y_n$ некоторой величины y, то есть в процессе опыта получена таблица не которой зависимости f:

Требуется найти функцию заданного вида $y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$, зависящую от m параметров $a_1, a_2, \ldots, a_m$, которая в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает значения как можно более близкие к табличным значениям $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Аналитические зависимости, полученные в результате наблюдений, называются *эмпирическими*.

Процесс получения приближающей функции проводится в два этапа – сначала определяется число параметров и устанавливается вид приближающей функции, а затем уточняются коэффициенты выбранной формулы.

Значения найденной приближающей функции $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будут отличаться от табличных значений $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Значения разностей

$$y_i - f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m) = \varepsilon_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

называются отклонениями измеренных значений y от вычисленных по формуле (1). Для найденной эмпирической формулы в соответствии с исходной таблицей можно найти сумму квадратов

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 \,.$$

Задание по теме «Элементы теории корреляции»

Приведены данные по группе хозяйств о дозах внесения удобрений на 1 га посева зерновых в ц (X) и об урожайности зерновых культур в центнерах с 1 га (Y) в виде таблицы (*):

X	X_1	X_2	…	X_n
Y	Y_1	Y_2	…	Y_n

Методом корреляционного анализа исследовать зависимость между этими признаками. Построить график корреляционной зависимости. Сформулировать выводы по результатам приведенного анализа.

(*) Каждому студенту выдается индивидуальное задание в виде таблицы с конкретными данными.

Для построения таблиц и графиков необходимо использовать средства электронных таблиц MS EXCEL.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ризниченко Г. Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учеб. пособие для бакалавриата и магистратуры / Г. Ю. Ризниченко. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2019. – 181 с.
2. Гринин А.С., Орехов Н.А., Новиков В.Н. Математическое моделирование в экологии: Учеб. Пособие. – М.: ЮНИТИ-Дана, 2003. – 269 с.
3. Горковенко Н.Е. Математическое моделирование в экологии: Учеб.– метод. пособие для практических занятий. – Краснодар: КубГАУ, 2015.
4. Роганов Е.А., Тихомиров Н.Б., Шелехов А.М. Математика и информатика для юристов: Учебник. – М.: МГИУ, 2005. – VI + 364 с.
5. Безручко В.Т. Компьютерный практикум по курсу "Информатика": Учебное пособие. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: ИД ФОРУМ: ИНФРА-М, 2012. – 368 с.: Инфра-М.

УДК 004.451.9

СОВРЕМЕННЫЕ ДИСТРИБУТИВЫ LINUX В РОССИИ

Даниил Александрович Кокорин
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: dakokorin@edu.tversu.ru

Ключевые слова: *операционная система специального назначения, локализация, реестр российских программ.*

Аннотация. В работе даётся краткое описание трёх наиболее известных и востребованных дистрибутивов отечественной разработки, история их возникновения и достоинства.

В 1991 году 21-летний студент Хельсинского университета Линукс Торвальдс поставил цель создать совместимое с UNIX (на тот момент самоё распространённое семейство операционных систем) ядро операционной системы для своего персонального компьютера на базе широко использовавшегося процессора Intel 80386. Важнейшую роль в его развитии также сыграла тогда развивавшаяся глобальная сеть Интернет, в которой создатель публиковал исходные тексты ещё малоработоспособной первой версии проекта под свободной лицензией GNU GPL. Благодаря этому другие разработчики получили возможность самостоятельно компилировать (собирать программу) и тестировать ядро, участвовать в обсуждении и исправлении ошибок, присылать дополнения к коду Линуса.

С выходом версии 1.0 о Linux узнавали во многих странах, и Россия не стала исключением. До тех пор на практике применялась разработка программного обеспечения и построение локальных сетей на базе UNIX. С приходом Linux отечественные компании начали искать решения для его распространения: он стал «движущей силой» для web-серверов и других коммерческих компьютерных систем, к нему была написана документация, появилась потребность к локализации, и впоследствии были выпущены первые отечественные дистрибутивы (набор, включающий ядро и то программное обеспечение, предусмотренное распространителем, или разработчиком, данного продукта, представляющий собой готовую к использованию операционную систему) – модифицированные варианты зарубежных первоисточников с поддержкой русского языка. Позднее возникли образы Linux, в которых также пакеты были замещены, собственно, компанией локализаторов, и они по сей день считаются дистрибутивами отечественного производства. Некоторые из них сохранили свободную лицензию GPL, продолжая обеспечивать распространение продукта среди потребителей без ограничений, однако большая часть известных дистрибутивов придерживаются коммерческого направления использования.

Статистика. Ниже приведена рыночная доля операционных систем в различных областях применения, включая web-серверы, встраиваемые системы (средства управления технологическими процессами, платёжные терминалы, телекоммуникационное оборудование), суперкомпьютеры, смартфоны и планшеты.

ОС	Доля
Linux-подобные	85.92%
UNIX-подобные	6.45%
FreeBSD	4.27%
Windows Server	3.05%
Другие	0.31%

Табл. 1. Доля ОС для web-серверов в России (наше время) [4]

ОС	Доля опросивших
Linux-подобные (вкл. Android)	62%
ОС реального времени (RTOS, DSP, uC и др.)	58%
Собственные (производитель)	19%
Windows Embedded	13%

Табл. 2. Опрос разработчиков встраиваемых систем (апрель 2017) [5]

ОС	Доля
Linux	100%

Табл. 3. Доля ОС для суперкомпьютеров (2019) [6]

ОС	Доля
Android	77.12%
iOS	22.31%
Windows	0.29%
Nokia (SymbianOS, S40)	0.09%
Другие	0.2%

Табл. 4. Доля ОС для моб. устройств в России (сен. 2019-фев. 2020) [7]

Astra Linux. В 2008 году АО «НПО РусБИТех», взяв за основу *Debian* (один из целиком свободных дистрибутивов Linux), начала работу над операционной системой специального назначения для комплексной защиты информации и построение защищённых автоматизированных систем. Годами позже, в 2013 г. была принята на снабжение Минобороны РФ, с тех пор министерство также принимает участие в разработке. Наиболее востребована в силовых ведомствах, спецслужбах и государственных органах.

На данный момент Astra Linux доступна для использования в двух изданиях: *Common Edition* – ОС общего назначения, для потребителей, среднего и малого бизнеса, образовательных учреждений (по договору); *Special Edition* – ОС специального назначения, для автоматизированных систем в защищённом исполнении, обрабатывающих информацию со степенью секретности «совершенно секретно» включительно.

Ниже приведены распространяемые версии Astra Linux, классифицируемые по архитектуре ЭВМ и сфере применения. Кодовые имена соответствующих изданий носят названия городов-героев РСФСР.

Архитектура	Common Edition	Special Edition	Применение
x86-64	Орёл	Смоленск	Рабочие станции и серверы
ARM	-	Новороссийск	Моб. устройства, встраиваемые компьютеры
MIPS	-	Севастополь	Настольные и моб. устройства, сетевое оборудование
POWER	-	Керчь	Высокопроизводительные серверы
IBM System Z	-	Мурманск	Отказоустойчивые серверы (мейнфреймы)
Эльбрус 2000	-	Ленинград	Вычислительные комплексы «Эльбрус»

В набор программного обеспечения входят пакеты с открытым исходным кодом для повседневных задач, как офисный пакет LibreOffice, веб-браузер Firefox, почтовый клиент Thunderbird, растровый редактор GIMP, проигрыватель мультимедиа VLC и другие.

ALT Linux. Первым проектом ALT Linux Team (ранее IPLabs Linux Team) в 1999-2000 гг. был *Linux Mandrake Russian Edition* – локализованный *MandrakeLinux*. По мере развития, к 2005 г. ALT Linux образовался посредством замещения всех поставленных пакетов собственными сборками командой локализаторов, создав семейство одноименных коммерческих дистрибутивов, также отличающихся между собой сферой их применения.

ALT Linux предоставляет образы, входящие в реестр российских программ: для серверов и рабочих станций со встроенными программными средствами защиты информации (*Альт 8 СП*), для широкого круга задач (*Альт Рабочая станция*), для серверного оборудования (*Альт Сервер*), для образовательных учреждений (*Альт Образование*); а также легковесный вариант ОС для потребителей (*Simply Linux*).

Дистрибутивы ALT Linux также предоставляет множество пакетов с программами, необходимых для выполнения повседневных задач каждого пользователя: веб-браузеры Chromium и Firefox, офисный пакет LibreOffice, растровый редактор GIMP, почтовый клиент Thunderbird, а также среду для запуска win32 приложений WINE.

Calculate Linux. В 2007 г. произошёл первый выпуск дистрибутивов на основе Gentoo, предназначенных преимущественно для малого и среднего бизнеса. В отличие от двух вышеупомянутых, Calculate Linux предоставляет право на установку, запуск и использование на неограниченном количестве компьютеров в любых целях, сохраняя силу свободной лицензии GPL. В сентябре 2016 г. разработчиком было объявлено включение дистрибутивов в реестр российского программного обеспечения.

Для скачивания доступны версия для настольного компьютера и для сервера со следующим набором предустановленных пакетов: веб-браузер Firefox, почтовый клиент в зависимости от установленной графической среды (при желании можно установить другой), офисный пакет LibreOffice, графический редактор GIMP, медиапроигрыватель в зависимости от установленной графической среды и др.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Роберт Лав. Ядро Linux: описание процесса разработки = Linux Kernel Development. – 3-е изд. – М.: Вильямс, 2012. – 496 с. – ISBN 978-5-8459-1779-9.

2. Буренин П.В., Девянин П.Н., Лебеденко Е.В., Проскурин В.Г., Цибуля А.Н. Безопасность операционной системы специального назначения Astra Linux Special Edition. – М.: Горячая линия - Телеком, 2016. – 312 с. – ISBN 978-5-9912-0623-5.

3. Сергей Яремчук. Александр Трацевский: «Calculate Linux — полет нормальный» // Журнал «Системный администратор». – 2011. – № 1-2.

4. Operating Systems Market Share Report // The Leader in Technographics | Datanyze URL: https://www.datanyze.com/market-share/operating-systems--443/Russia (дата обращения: 27.02.2020).

5. 2017 Embedded Markets Study // Electronic Engineering Times URL: https://m.eet.com/media/1246048/2017-embedded-market-study.pdf (дата обращения: 27.02.2020).

6. Development over Time // TOP500 Supercomputer Sites URL: https://www.top500.org/statistics/overtime/ (дата обращения: 27.02.2020).

7. Mobile & Tablet Operating System Market Share Russian Federation // StarCounter Global Stats URL: https://gs.statcounter.com/os-market-share/mobile-tablet/russian-federation/#monthly-201909-202002-bar (дата обращения: 27.02.2020).

УДК 007

ТЕРМИН «ИНФОРМАЦИЯ» В СОВРЕМЕННОЙ ИНФОРМАТИКЕ

Юрий Николаевич Крылов
Институт экономики и управления Тверского государственного университета, Тверь
E-mail: Krylov_Yu@mail.ru

Ключевые слова: *информация, информатика, теория информации, источник информации, личностная теория информации.*

Аннотация. В работе анализируется термин «информация» с точки зрения различных теорий. Рассмотрены одинаковые и противоположные характеристики информации и личных знаний личности. Рассмотрены пути взаимодействия информации с личными знаниями личности. Изучаются методы проверки достоверности информации в условиях нарастающего информационного потока в связи увеличением современных устройств для доступа к информационным данным. Делается вывод об актуальности исторически первоначального смысла термина «информация» в условиях современного развития информатики как инструмента работы в «цифровом» обществе.

Так сложилось, что термин «информация» с одной стороны понятен всем, с другой – каждый понимает его по-своему. В **первоначальном** его смысле, в XVIII веке, понимание термина «информация» связано с сознанием человека: осведомление и просвещение – характеристики личности, сознания, накопленных знаний сознания личности. В этимологическом словаре [1, с.185] написано: «Информация. Возникновение: начало XVIII в., от немецкого Information из французского information из латинского Informatio «осведомление, просвещение».

В работах по совершенствованию **систем связи** при передаче информации (в виде символьных сообщений по техническим каналам связи) термин «информация» понимается как мера некоторой свободы выбора, когда необходимо выбрать конкретное сообщение, очевидно для применения цифровых технологий. Под ***количеством информации***, в простейших случаях, может пониматься логарифм по основанию числа 2 от количества возможных вариантов [2, с. 5-11].

В работах по **кибернетике** на первый план выходит аспект управления роботом с помощью некоторых поступающих к роботу сигналов, в том числе от окружающих объектов. В издании 1989 г. своей книги [3, с.17] Норберт Винер писал: «Информация» это имя для содержания того, чем мы обмениваемся с внешним миром, чтобы приспособиться к нему, делая корректировки нашего мировоззрения.

А.В. Ушакова в своей работе [4, с.112], не даёт определения термина «информация», а раскрывает его значение через три подхода к анализу информации:

1. Синтаксический подход имеет основной целью установить количественную меру информации.
2. Семантический подход, который формулирует понятие информации в качестве соотношения языковой системы с материальными объектами и отображаемыми ею явлениями.

3. Прагматический подход, который содержит вопросы цели, ценности, полезности информации.

Чтобы конкретизировать аспект термина «информация» в данной работе – назовём этот аспект «в рамках личностной теории информации» [5, с.282], [6, с.72]. А именно: как личность воспринимает информацию, которую этой личности приподносят через различные методы информационного обмена. Например, как студент или школьник воспринимает речь учителя на лекции или на уроке.

Давайте попробуем ответить на вопрос «Какую информацию Вы получили от следующей надписи на рис. 1?».

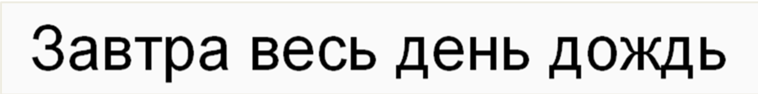


Рис. 1. Надпись первая

Вы ответите: «Ничего сложного, завтра будет дождь весь день».

Давайте теперь поробуем ответить на вопрос «Какую информацию Вы получили от следующей надписи на рис. 2?»

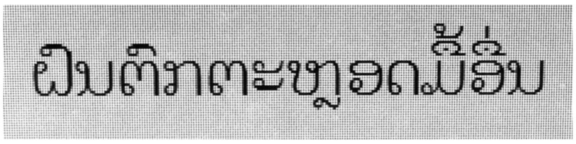


Рис. 2. Надпись вторая

Вы ответите: «Никакой!». Вывод напрашивается сам собой: пока линии на рис. 1 или 2 не расшифрованы и информацию Вы=личность не получаете. А информация возникает нигде кроме, как в <u>Вашем сознании</u>, **личном** сознании.

А вот житель Лаоса скажет: «От рисунка 1 я информацию не получил, а на рисунке 2 сказано, что завтра весь день дождь».

Поэтому в «личностной теории информации» для термина «информация» подходит следующее определение:

Информация – некий «кусочек» знаний, возникающий в сознании после расшифровки сигналов от органов чувств личности. (1)

более научно:

Информация – квант знаний личности, возникающий в сознании после расшифровки сигналов от органов чувств личности. (2)

Квант в смысле некоторой «завершенности», «полноценности», «неделимости». Ведь надпись на рис. 3 никакой информации не даст:

Рис. 3. Надпись третья

Это определение информации (2) и обсуждалось в работе [6, с.73]. Детальный анализ определения (2) приводит к противоречию. Ведь у личности уже имеются накопленные ранее знания – личные знания (ЛЗ), накопленные через систему образования и через личный опыт. Определение (2) имеет претензию на часть ЛЗ. Особенность в различии информации (далее И) и ЛЗ в том, что личность не сомневается в ЛЗ, так как ЛЗ является опорой в основе всех поступков личности. Если будешь сомневаться в ЛЗ, то ничего не станешь и делать.

Особенность же И в том, что личность только что И получила. В результате И может даже противоречить ЛЗ. Поэтому корректнее для И дать уточнённое к (2) определение:

Информация – квант новых знаний личности, возникающих в сознании после расшифровки сигналов от органов чувств личности, по некоторому личному ключу расшифровки из ЛЗ. (3)

Далее будем опираться на определение И согласно (3). Взаимодействие И с ЛЗ достаточно сложный процесс. Рассмотрим варианты взаимодействия И с ЛЗ, приведенные в таблице 1.

Табл. 1. Варианты взаимодействия И с ЛЗ

	Вариант соответствия	Последствия для И	Последствия для ЛЗ	Мотивация к действиям
I	И противоречит ЛЗ	наиболее вероят-но отвержение	наиболее вероят-но без последствий	слабая
II	И противоречит ЛЗ в значи-тельной части	наиболее вероятно отвержение	наиболее вероятно без последствий	любопытство
III	И противоречит ЛЗ в малой части	наиболее вероят-на интеграция И в ЛЗ	дополнение ЛЗ от И	слабая
IV	И соответствует ЛЗ	И влияет на ЛЗ укрепляя ЛЗ	ЛЗ закрепляются	отсутствует, стан-дартное поведение
V	И отсутствует в ЛЗ	наиболее вероят-на интеграция И в ЛЗ	дополнение ЛЗ от И	испытания, эксперименты, желание испытать

Кроме вариантов взаимодействия, последствия влияния И на ЛЗ статистически сильно зависят от дополнительных характеристик затрагиваемых в ЛЗ имеющихся знаний, так как ЛЗ имеют сложную внутреннюю иерархию:

a) по ассоциации с определёнными органами чувств,
b) по наличию личного опыта,
c) по взаимодействию-ассоциации И с положительными или отрицательными эмоциями,
d) по взаимодействию-ассоциации источника И с положительными или отрицательными эмоциями,
e) по взаимодействию-ассоциации с личными интересами,
f) по взаимодействию-ассоциации с первичными инстинктами.

В свою очередь, И имеет свои специфические характеристики:

A. Редко или часто поступает к личности за определённый период времени.
B. Из одного информационного канала или из многих.
C. Содержит ли положительно или отрицательно окрашенные узнаваемые образы, за счёт которых сразу внедряется в ЛЗ или сразу отвергается из ЛЗ.

Ещё 20 лет назад информационные потоки ограничивались личным опытом, книгами, газетами, производственными условиями из реальности. Сегодня смартфон есть у каждого и пользоваться им можно постоянно, поэтому в современных условиях резко увеличились информационные потоки влияния И на ЛЗ. Из табл. 1 следует, что самой «незащищенной» является группа V, а это – молодёжь, школьники, студенты.

Если ещё и при этом применить И с характеристикой А=часто, В=из многих, С=из уст Гарри Потера или другого героя молодёжи.

Если ещё и при этом заблаговременно развить ЛЗ типа *c)* и *d)*, то И будет внедряться в ЛЗ без проблем. Как развить в ЛЗ нужный тип? Так как сейчас и делается: показывать по многим каналам ТВ каждый день голивудские боевики в которых герой из США спасает мир убивая злодеев. В ЛЗ формируется устойчивая ассоциация «герой из США» + «положительная эмоциональная окраска», а также «убивать» + «положительная эмоциональная окраска». Если завтра в новостях скажут «герой из США убивает кого-то в Сирии», то ассоциация этой И у личности будет спокойная типа «значит в Сирии завелись злодеи».

Примером внедрения в ЛЗ И с характеристикой А=часто, В=из многих является фраза «Я тебе **скинул** на почту письмо». Это молодёж слышит часто и от многих сверстников. А когда студента спрашиваешь: «Ты в реальности это действие когда-нибудь делал? **Скидывание**». Ответ всегда один: «Нет». Это типичное создание в ЛЗ ассоциации «скидывание» + «положительная эмоциональная окраска». Не удивлюсь, если завтра они пойдут скидывать правительство или памятники с пьедестала. Ведь «положительная эмоциональная окраска» уже в ЛЗ к этому слову есть.

Как фильтровать информационные потоки при их нарастании, например, по категории «достоверность»? Для этого надо признать:

1) что надписи в форме рис. 1 или рис. 2 всего лишь «объект с кодом», который ещё необходимо расшифровать;
2) объект с кодом (ОК) всегда создан конкретным человеком, природа их не создаёт;
3) если Вы не знаете кто именно создал данный ОК, то признавать ОК достоверным наивно: Вы же даже не знаете его личных интересов;
4) если Вы не знаете кто в реальности сам видел то о чём ОК, то признавать И от этого ОК достоверным наивно: может этого вообще никто не видел;
5) что **Источником информации (ИИ)** является всегда конкретный человек, который лично видел то что в И, а не сайт в интернете без фамилии и авторства или под псевдонимом;
6) что любая И не более чем чьё-то мнение о реальных явлениях.

Тогда и появляются методы проверки на достоверность:

1) Задайте вопрос: «Кто это сказал?» Не нашли = рискуете.
2) Задайте вопрос: «Кто ИИ?» Не нашли = рискуете.
3) Задайте вопрос: «Каковы их личные интересы?» Не знаете = рискуете.
4) Поезжайте и посмотрите **сами** то о чём И.

Вот тогда некоторые губернаторы лишатся должности, потому что «на бумагах»=ОК одно, а в реальности совсем другое. До анекдота может дойти: жители деревни пишут губернатору письмо о том, что при строительстве платной М-11 их местную дорогу изуродовали огромные камазы. Ответ губернатора содержит фразу «…по бумагам дорога не использовалась при строительстве М-11, следовательно…». А откуда тогда появился мост через М-11 на этой местной дороге? Вертолётами что ли за одну ночь доставили? Так что, ОК с И ему соответствующей одно, а реальность совсем другое. Без проверки на достоверность И так может изменить Ваши ЛЗ, что даже восприятие реальности может измениться, но это уже предметная область психологии.

Вывод: в современной информатике, с быстрым развитием информационных устройств и резким увеличением информационных потоков, определение информации в виде (3) в форме «влияние на личность» становится не менее актуальным, чем в форме «для средств связи» и в форме «для кибернетики».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Климова М.В. Большой этимологический словарь русского языка. – М.: ООО «Дом Славянской книги», 2012. – 960 с.

2. Claude E. Shannon, Warren Weaver. The Mathematical Theory of Communication. Univ of Illinois Press, 1963. ISBN 0-252-72548-4. 144 p.

3. Wiener, Norbert, 1894-1964 The human use of human beings: cybernetics and society – Published in Great Britain 1989 by Free Association Books, First published 1950; 1954, Houghton Mifllin, Copyright, 1950, 1954 by Norbert Wiener, Introduction©Steve J. Heims 1989, ISBN 1-85343-075-7, Printed and bound in Great Britain by Bookcraft.

4. Ушакова А.В. Становление и развитие теории информации. Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. / МГТУГА, М. – 2015. № 215 (5). – С. 112-116.

5. Крылов Ю.Н. Анализ термина «информация» в теории информации. Вестник Тверского государственного университета. Серия: Экономика и управление. / ТвГУ, Тверь – 2015. №3. – С. 282-288.

6. Крылов Ю.Н. Личностная теория информации. Виды информационных цепочек. Математика, статистика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании: сб. тр. IV Междунар. научно-практ. конф., 2 июня 2015 года, г. Тверь. Ч. 2. Информационные технологии. Вопросы преподавания / ред. кол.: А.А. Васильев (отв. ред.) [и др.]. – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2015. – С. 72-77.

УДК 51.37+517.53

ПРИМЕНЕНИЕ MAPLE В ИЗУЧЕНИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Сергей Николаевич Куженькин
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Kuzhenkin.SN@tversu.ru

Ключевые слова: комплексные числа, система Maple, дифференцирование и интегрирование функций комплексной переменной.

Аннотация. Рассмотрено применение системы компьютерной математики Maple в преподавании курса ТФКП. Приведены примеры решения некоторых задач с помощью процедур системы Maple.

Система компьютерной математики Maple является мощным инструментом решения математических задач. Надо отметить, что Maple не учит решать задачи, а производит лишь соответствующие вычисления. Maple позволяет проверить правильность вычислений, проведенных вручную, а также избавляет от рутинных вычислений. Предполагается, что читатель обладает начальными знаниями по СКМ Maple. Вычисления проводились в версии Maple 2017.3.

1. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Комплексное число $z = a + bi$ задается командой $z := a + b \cdot \mathrm{I}$. Действительная часть, мнимая часть, модуль и аргумент числа z, а также сопряженное число $\bar{z}$ находятся с помощью функций $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $|z|$, $\mathrm{argument}(z)$, $conjugate(z)$.

Например, при выполнении команд

$$z := 3 + 2\mathrm{I};\ a := \mathrm{Re}(z);\ b := \mathrm{Im}(z);\ r := |z|;\ p := \mathrm{argument}(z);\ z1 := conjugate(z);$$

получается: $z := 3 + 2\,\mathrm{I}\quad a := 3\quad b := 2\quad r := \sqrt{13}\quad p := \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\quad z1 := 3 - 2\,\mathrm{I}$..

Отмечу, что команда $\mathrm{Re}(a + b \cdot \mathrm{I})$, где a и b – символьные переменные, приводит к $\Re(a + \mathrm{I}b)$, так как a и b считаются по умолчанию комплексными числами.

Для изображения рассмотренных выше понятий подключим пакет plots:

$with(plots):$

$r1 := complexplot([z, z1], symbol = circle, symbolsize = 16, style = point, color = black):$ *# изображение точек z и* $\bar{z}$

$r2 := textplot([a, b, "z"], align = \{right, above\}, font = [TIMES, 16]):$ *# надпись точки*

$r3 := plot(b, 0..a, linestyle = 2, color = black):$ *# проекция точки на мнимую ось*

$r4 := plot([[a, 0], [a, b]], linestyle = 2, color = black):$ *# проекция точки на действительную ось*

$r5 := textplot([a, 0, \text{"Re z"}], align = \{below\}, font = [TIMES, 16])$:
действительная часть числа

$r6 := textplot([0, b, \text{"Im z"}], align = \{left\}, font = [TIMES, 16])$:
мнимая часть числа

$r7 := complexplot\left(r \cdot e^{I \cdot t}, t = 0 ..2\,\pi, color = black\right)$: # окружность

$r8 := arrow(\langle a, b \rangle, width = 0.01, head\_length = 0.3, head\_width = 0.1)$:
радиус-вектор к точке

$r9 := textplot\left(\left[\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \text{"}|z|\text{"}\right], align = \{left, above\}, font = [TIMES, 16]\right)$:
модуль числа

$r10 := complexplot\left(\frac{r}{5} e^{I \cdot t}, t = 0 ..p, color = black\right)$: # аргумент числа

$r11 := textplot\left(\left[\frac{a}{4} + 0.1, \frac{b}{6}, \text{"arg z"}\right], align = \{right\}, font = [TIMES, 16]\right)$:
надпись аргумента

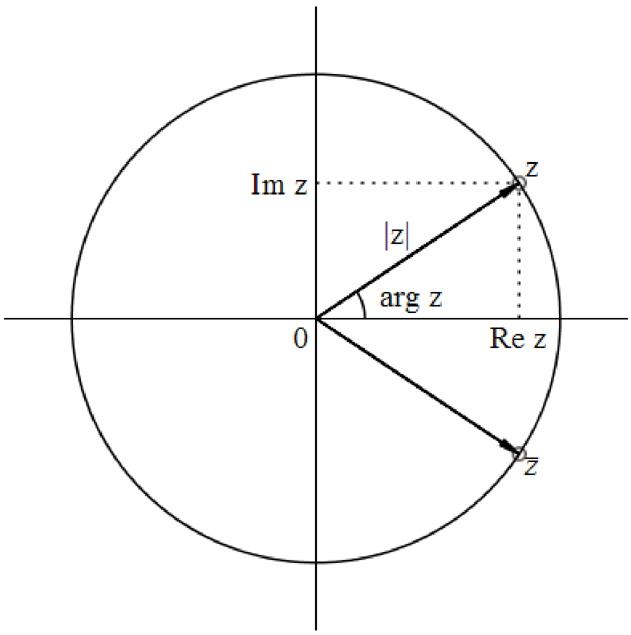
$r12 := textplot([a, -b, \text{"}\bar{z}\text{"}], align = \{right, below\}, font = [TIMES, 16])$:
надпись сопряженной точки

$r13 := arrow(\langle a, -b \rangle, width = 0.01, head\_length = 0.3, head\_width = 0.1)$:
радиус-вектор к сопряженной точке

$r14 := plot([\ ], view = [-r - 1 ..r + 1, -r - 1 ..r + 1], tickmarks = [[\ ], [\ ]])$: # координатные оси без масштаба

$r15 := textplot([0, 0, \text{"0"}], align = \{left, below\}, font = [TIMES, 16])$:
начало координат

$display(seq(r || n, n = 1 ..15), scaling = constrained)$ # рисунок без координат



2. Дифференцируемость функций комплексной переменной

Известно ([2]), что для дифференцируемости функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ необходимо, а в случае непрерывности функций $u(x,y)$, $v(x,y)$ и достаточно, чтобы выполнялись условия Коши–Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ (условия Даламбера–Эйлера). При этом $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Найдем точки дифференцируемости функции $f(z)=x^2-2yi$, где $z=x+yi$.

Ввод: $z := x + y\mathrm{I}; f := z \to z \cdot \sin(z);$ результат: $z := x + \mathrm{I}y \quad f := z \mapsto z\sin(z)$.
Вычисляем функции $u(x,y)$, $v(x,y)$ и их частные производные:
$u := evalc(\mathrm{Re}(f(z)));\ v := evalc(\mathrm{Im}(f(z)));\ ux := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u;\ uy := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u;\ vx := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v;$
$vy := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}v;$. Результат: $u := x^2 \quad v := -2y \quad ux := 2x \quad uy := 0 \quad vx := 0 \quad vy := -2$.

Подставляем найденные значения в условия Коши–Римана и решаем систему: $s := solve(\{ux=vy, uy=-vx\}, \{x,y\})$. Результат: $s := \{x=-1, y=y\}$. Учитывая непрерывность функций $u(x,y)=x^2$, $v(x,y)=-2y$, получаем дифференцируемость функции $f(z)=x^2-2yi$ во всех точках прямой $\mathrm{Re}\,z=-1$, причем значение производной в каждой точке $z=-1+yi$ равно $subs(x=-1, ux) + \mathrm{I}subs(x=-1, vx) = -2$.

Можно оформить эти вычисления в виде процедуры.

$CR :=$**proc**(f)
  local u, v, ux, uy, vx, vy, s :
  $u := evalc(\mathrm{Re}(f(z)))$: $v := evalc(\mathrm{Im}(f(z)))$:
  $ux := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u : uy := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}u : vx := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}v : vy := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}v$:
  $s := solve(\{ux=vy, uy=-vx\}, \{x,y\})$:
  [*'точки дифференцируемости'*$= s, u, v, ux, vx$] **end**:

Для функции $f(z)=x^2+y^2 i$ процедура $d := CR(f)$ даёт

$$d := \left[\text{точки дифференцируемости} = \{x=y, y=y\}, x^2, y^2, 2x, 0\right],$$

т.е. функция дифференцируема на прямой $\mathrm{Re}\,z=\mathrm{Im}\,z$, значение производной в этих точках – $subs(rhs(d[1])[1], d[4]) + \mathrm{I}\cdot subs(rhs(d[1])[2], d[5])$ равно $2y$.

Процедура CR не учитывает особые точки функции. Например, для функции $f(z)=\frac{1}{z(z-i)}$ с помощью команды $CR(f)[1]$ получим

$$\text{точки дифференцируемости} = \{x=x, y=y\},$$

т.е. всю комплексную плоскость.

Особые точки функции находятся командой $singular(f(z))$, которая в данном случае даёт $\{x=-\mathrm{I}y, y=y\}, \{x=\mathrm{I}-\mathrm{I}y, y=y\}$. Так как x и y – действительные числа, то первое множество состоит из $x=y=0$, т.е. $z=0$, а второе – из $x=0$, $y=1$, т.е. $z=i$.

3. Интегрирование функций комплексной переменной

Интеграл $\int\limits_{AB} f(z)dz$, где $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, AB – кривая с начальной точкой A и конечной точкой B, сводится к криволинейным интегралам 2 рода:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{AB} udx - vdy + i\int\limits_{AB} vdx + udy .$$

Если кривая AB задается параметрически $z=z(t)=x(t)+iy(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, $z(\alpha)=A$, $z(\beta)=B$, то комплексный интеграл сводится определенному интегралу:

$$\int\limits_{AB} f(z)dz = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt .$$

Найдем $\int\limits_{AB} z\sin z dz$, где AB – часть единичной окружности с центром в 0, лежащая в I октанте, начальная точка $A=i$, конечная точка $B=1$.

Параметризуем кривую: $x=\cos t$, $y=\sin t$. Вводим исходные данные: $f := z \to z\cdot\sin(z)$; $x := \cos(t)$; $y := \sin(t)$; $A := \mathrm{I}$; $B := 1$; вычисляем кривую и её производную: $z := x + y\mathrm{I}$; $zp := \frac{d}{dt}x + \mathrm{I}\cdot\frac{d}{dt}y$; результат: $z := \cos(t) + \mathrm{I}\sin(t)$ $zp := -\sin(t) + \mathrm{I}\cos(t)$.

Вычисляем нижнюю и верхнюю границы интеграла и сам интеграл:

$$\alpha := solve(z=A);\ \beta := solve(z=B);\ \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\cdot zp\, dt;$$

результат: $\alpha := \frac{\pi}{2}$ $\quad\beta := 0\quad$ $-\cos(1) + \sin(1) + \mathrm{I}\cosh(1) - \mathrm{I}\sinh(1)$.

Приближенное значение можно получить с помощью команды $evalf(\%)$; в результате значение интеграла равно $0.3011686789 + 0.3678794412\,\mathrm{I}$.

Можно оформить эти вычисления в виде процедуры.

$INC :=$ **proc**(f, x, y, A, B)
local z, zp, α, β, s;

$$z := x + \mathrm{I}\cdot y;\ zp := \frac{d}{dt}x + \mathrm{I}\cdot\frac{d}{dt}y;\ \alpha := solve(z=A);\ \beta := solve(z=B);$$

$$s := \int_{\alpha}^{\beta} f(z)\cdot zp\, dt;\ RETURN(s, \text{'интеграл'} \approx evalf(s))\ \textbf{end};$$

параметризовать эту кривую AB можно с помощью функций $x=t$, $y=\sqrt{1-t^2}$.

Применение процедуры $INC\left(f, t, \sqrt{1-t^2}, A, B\right)$ даёт

$$\int_0^1 \left(t + \mathrm{I}\sqrt{-t^2+1}\right)\sin\left(t+\mathrm{I}\sqrt{-t^2+1}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{I}t}{\sqrt{-t^2+1}}\right) dt,$$

$$\text{интеграл} \approx (0.3011686789 + 0.3678794412\,\mathrm{I})$$

т.е. точное значение интеграла здесь не найдено.

Процедура CR из п.2 показывает, что функция $f(z)=z\sin z$ является аналитической на всей комплексной плоскости: $CR(f)[1]$ даёт

$$\textit{точки дифференцируемости} = \{x=x, y=y\},$$

особых точек нет – команда $singular(f(z))$ ничего не возвращает.

Для функции, аналитической в односвязной области, выполняется формула Ньютона-Лейбница $\int\limits_{AB} f(z)dz = F(B)-F(A)$, где $F(z)$ – одна из первообразных функции $f(z)$, причем интеграл не зависит от формы кривой, соединяющей точки A и B. Поэтому искомый интеграл можно найти так:

$$'\int_{i}^{1} z\cdot\sin(z)\,\mathrm{d}z' = \int_{\mathrm{I}}^{1} z\cdot\sin(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

в результате получим

$$\int_{i}^{1} z\sin(z)\,\mathrm{d}z = -\cos(1)+\sin(1)+\mathrm{I}\cosh(1)-\mathrm{I}\sinh(1)\,.$$

4. Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов

Интеграл по положительно ориентированной замкнутой кривой (по контуру) можно вычислить, применяя теорему Коши о вычетах: если $f(z)$ является аналитической в замкнутой области M с границей C за исключением особых точек $z_1, z_2, ..., z_n$, лежащих в внутри M, то $\int\limits_C f(z)dz = 2\pi i\sum\limits_{k=1}^{n}\underset{z=z_k}{Res} f(z)$, где $\underset{z=z_k}{Res} f(z)$ – вычет функции $f(z)$ в изолированной особой точке z_k, равный коэффициенту c_{-1} разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_k.

Вычисление вычета в полюсе осуществляется командой *residue*.

Найдем $\int\limits_{|z-2-i|=2}\frac{dz}{(z-3)(z^4+1)}$. Вводим функцию, центр и радиус окружности:

$$f := z \to \frac{1}{(z-3)\cdot(z^4+1)};\ z0 := 2+\mathrm{I};\ r := 2;$$

вычисляем особые точки и их количество: $d := [singular(f(z))];\ n := nops(d);$ результат:

$$d := \left[\{z=3\}, \left\{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{z=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{z=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right\}, \left\{z=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\right\}\right] \qquad n := 5$$

Занумеруем особые точки: $\mathbf{for}\ i\ \mathbf{from}\ 1\ \mathbf{to}\ n\ \mathbf{do}\ \ z[i] := rhs(d[i][1])\ \mathbf{od};$ результат:

$$z_1 := 3\ z_2 := -\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\ z_3 := -\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\ z_4 := \frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\ z_5 := \frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\mathrm{I}\sqrt{2}}{2}\,.$$

Отберем из этих точек те, которые лежат в круге $|z-z_0|<r$, вычислим вычеты $f(z)$ в этих точках и просуммируем их:

$s := 0;$ **for** i **from** 1 **to** n **do**

if $evalf(evalc(|z[i]-z0|)) < r$ **then** $s := s + residue(f(z), z = z[i])$ **fi;od**;

вычисляем значение интеграла: $S := 2\pi \cdot I \cdot s$.

Результат: $S := 2I\pi\left(\frac{1}{82} + \frac{2}{-8 - 12I\sqrt{2} + 12\sqrt{2}}\right)$, приближенное значение $evalf(S)$ даёт $-0.5787657196 + 0.3825571538\,I$.

Можно оформить эти вычисления в виде процедуры.

$INR :=$ **proc**$(f, z0, r)$
local d, n, i, z, s, S;
$d := [singular(f(z))]; n := nops(d)$;
for i **from** 1 **to** n **do** $z[i] := rhs(d[i][1])$ **od**;
$s := 0;$ **for** i **from** 1 **to** n **do**
if $evalf(evalc(|z[i]-z0|)) < r$ **then** $s := s + residue(f(z), z = z[i])$
fi:**od**: $S := simplify(2\pi \cdot I \cdot s); RETURN(S, 'интеграл' \approx evalf(S))$ **end**;

применение этой процедуры к интегралу $\int\limits_{|z|=3} \frac{2z-i}{z^2+1}\cos(z-2i)\,dz$ даёт

$$I\pi(3\cosh(3) + \cosh(1)),\ интеграл \approx (99.73320975\,I).$$

Попытка применить процедуру к интегралу $\int\limits_{|z|=3} \frac{2z-i}{z^2-9}\cos\left(\frac{1}{z-2i}\right)dz$ приводит к

$$I\pi\left(3\cosh\left(\frac{1}{3}\right) + \cosh(1) + 2\,residue\left(-\frac{(-2z+I)\cos\left(\frac{1}{-z+2I}\right)}{z^2+1}, z = 2I\right)\right).$$

Здесь точка $z = 2i$ является существенно особой, поэтому вычет в этой точке найдем с помощью разложения функции в ряд Лорана. Для этого подключим пакет numapprox: $with(numapprox)$. Команда *laurent* вычисляет ряд Лорана.

Обозначим аргумент косинуса буквой *t*, выразим *z* через *t* и найдем $g(t) = f(z)$. Вычет функции $f(z)$ в точке $z = 2i$ совпадает с коэффициентом при t в *первой* степени разложения функции $g(t)$ в ряд Лорана в точке $t = 0$.

$$z := solve\left(\frac{1}{z - 2 \cdot I} = t, z\right);\ h := laurent(f(z), t = 0);\ c[-1] := coeff(h, t, 1);$$

результат: $z := \frac{2It + 1}{t}$ $\quad h := 2t + -5It^2 - 15t^3 + \frac{87I}{2}t^4 + \frac{1549}{12}t^5 + O(t^6)$ $\quad c_{-1} := 2$.

Значение искомого интеграла равно $I\pi\left(3\cosh\left(\frac{1}{3}\right) + \cosh(1) + 4\right)$,

приближенное значение $27.36734427\,I$.

Автор благодарит Ольгу Евгеньевну Баранову за внимательное прочтение рукописи и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дьяконов В. П. Maple 10/11/12/13/14 в математических расчетах. – М.: ДМК Пресс, 2011. – 800 с.: ил.

2. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1984. – 432 с.

УДК 372.851.4

ПРИМЕНЕНИЕ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, ИХ СИСТЕМ

Алексей Николаевич Лёвин
МБОУ «Красномайская СОШ имени С. Ф. Ушакова», пгт. Красномайский, Вышневолоцкий район, Тверская обл.
E-mail: levin.may@mail.ru

Светлана Валерьевна Нечаева
МБОУ «Есеновичская СОШ», с. Есеновичи, Вышневолоцкий район, Тверская обл.
E-mail: svnechv@mail.ru

Ключевые слова: *уравнения, неравенства, системы уравнений, системы неравенств, графики функций, графический метод, компьютерные программы.*

Аннотация. В работе рассматривается графический метод для решения уравнений и неравенств, их систем с применением компьютерных программ для построения графиков.

Графический метод предполагает использование графиков функций. Его применяют тогда, когда функции, образующие левую и правую часть уравнения (неравенства), являются простыми в построении их графиков. Нужно учитывать и тот факт, что при решении не видно алгебраического метода. Графический метод не всегда можно считать точным, так как в ходе построения графиков могут получиться точки пересечения с координатами, которые можно определить лишь приближённо (такой пример приведен в учебнике Алгебры за 9 класс Колягина Ю.М. и др). Также нужно учесть погрешность и неточность построения графиков от руки, данная проблема может быть разрешима с помощью специальных компьютерных программ, предназначенных для построения графиков функций.

Применение графического метода довольно нередко можно встретить при решении заданий с параметрами в вариантах экзаменационных работ ЕГЭ по профильной математике. Ярким примером использования этого метода служит задание №18 демонстрационного варианта ЕГЭ 2020 года [4]:

Найдите все положительные значения a, при каждом из которых система имеет единственное решение $\begin{cases}(|x|-5)^2+(y-4)^2=9,\\ (x+2)^2+y^2=a^2.\end{cases}$

Уравнения, входящие в состав системы, являются уравнениями окружности, которые несложно построить.

Для построения графиков будем использовать приложение Microsoft Mathematics (рис.1). Скачать установочный файл можно с официального сайта компании Microsoft. Далее необходимо выбрать версию для своей операционной системы. Разрядность Windows можно посмотреть в свойствах компьютера (Панель управления\Система и безопасность\Система). Ставим галочку «Принять лицензионное соглашение» и нажимаем «Далее» до окончания установки. На последнем этапе программа проверит наличие необходимых библиотек DirectX и установит недостающие. Установка приложения Microsoft Mathematics завершена.

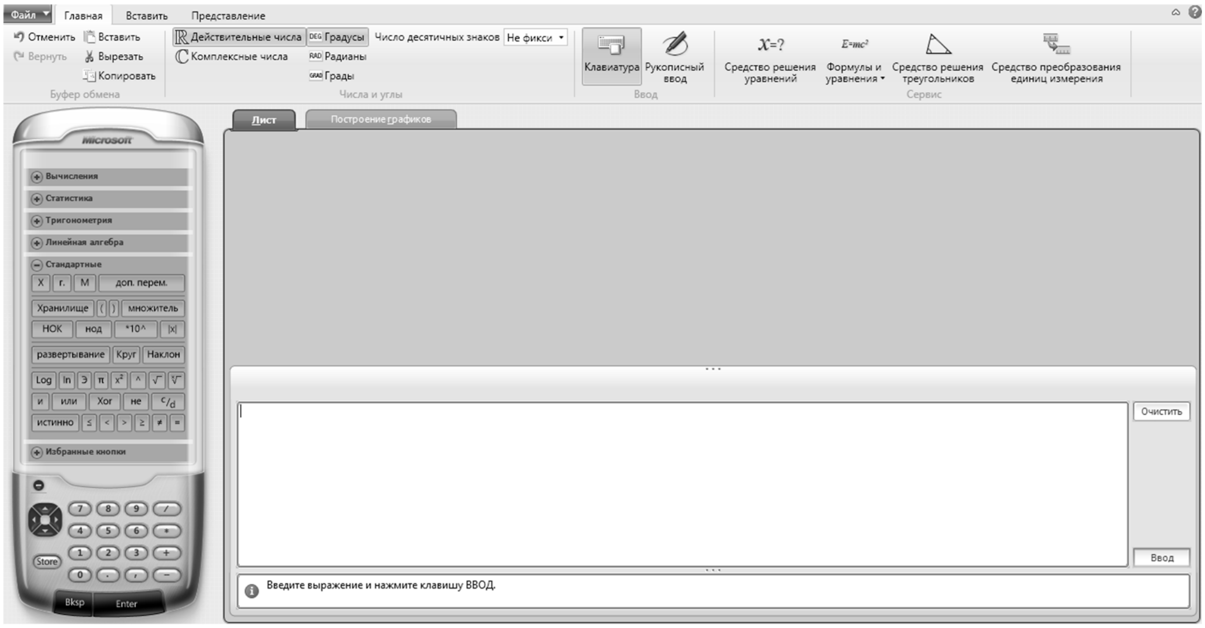


Рис. 1

Рассмотрим несколько примеров решения упражнений с применением данной компьютерной программы.

Пример 1 [3]. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 - 6x + y = 2, \\ y - \sqrt{x-3} = 9. \end{cases}$

Решение. Построим в одной системе координат геометрическое место точек (ГМТ) плоскости, координаты которых удовлетворяют, уравнениям системы. Воспользуемся виртуальной клавиатурой.

В первом уравнении записываем x, а для возведения его в квадрат нажимаем кнопку “x^2” (рис. 2).Остальную часть формулы можно ввести с клавиатуры.

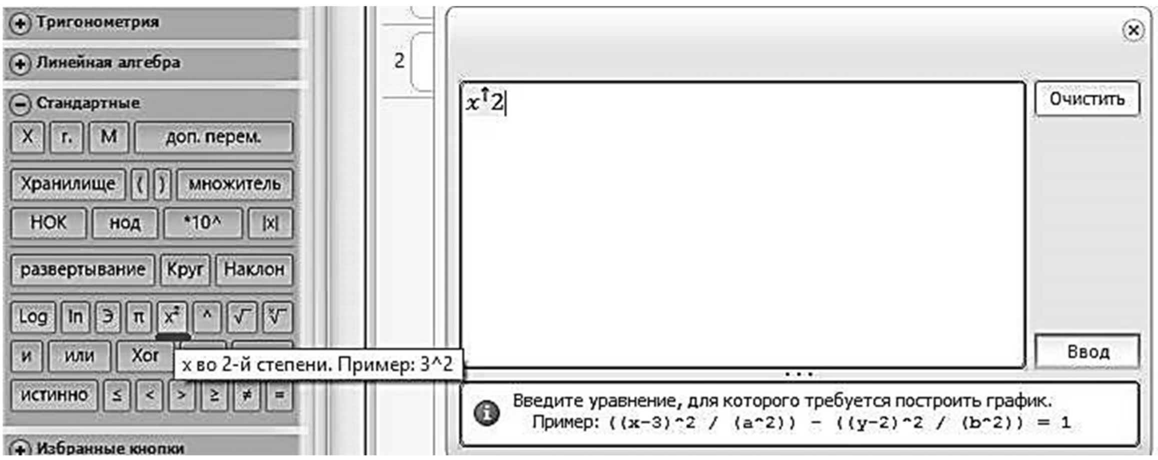


Рис. 2

Во второй формуле для ввода выражения x–3 под корень воспользуемся соответствующей кнопкой на виртуальной клавиатуре (рис. 3).

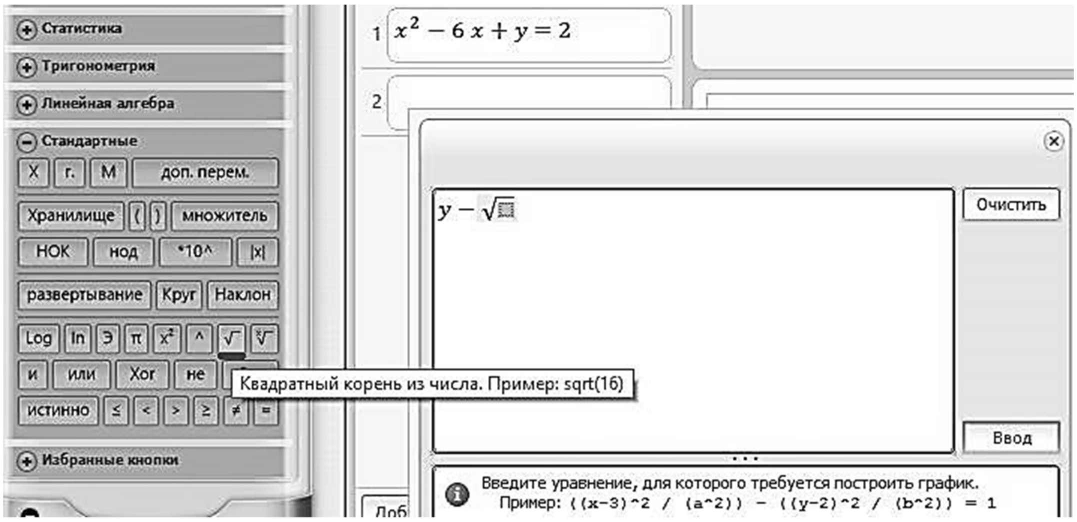


Рис. 3

После ввода уравнений нажимаем кнопку «График» и приложение в системе координат отобразит нам искомое ГМТ (рис. 4).

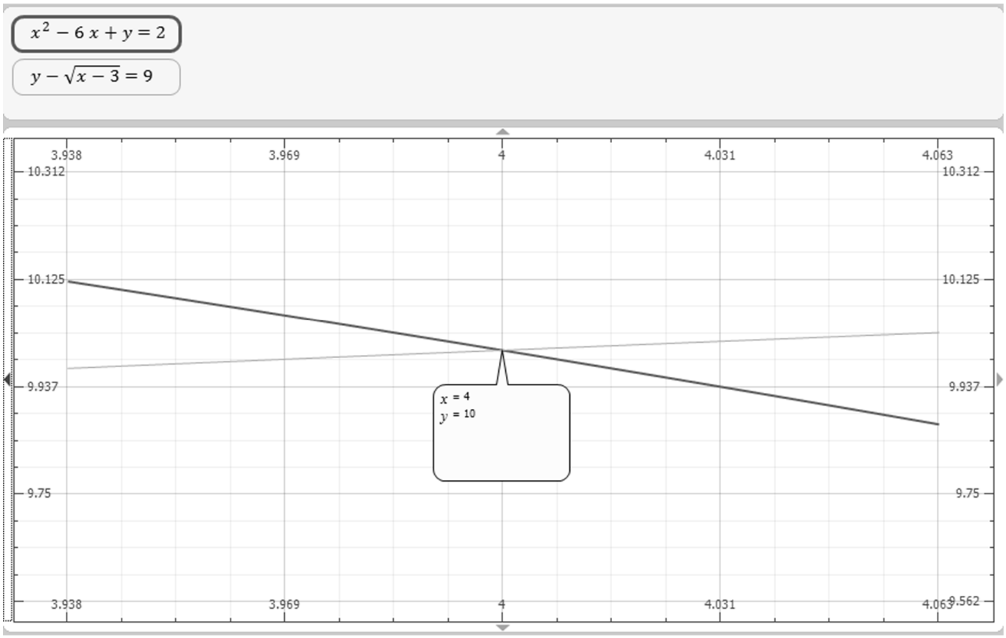


Рис. 4

(4;10) – координаты точки пересечения графиков функции, являются решением системы уравнений.

Ответ: (4;10).

Пример 2 [2]. Решите неравенство $\log_2(x+1) + \log_3 x \leq 3$.

Решение. ОДЗ: $x > 0$.

Перепишем неравенство: $\log_2(x+1) \leq 3 - \log_3 x$.

Построим графики функций в одной системе координат (рис. 5):

$y = \log_2(x+1)$ – монотонно возрастает;

$y = 3 - \log_3 x$ – монотонно убывает.

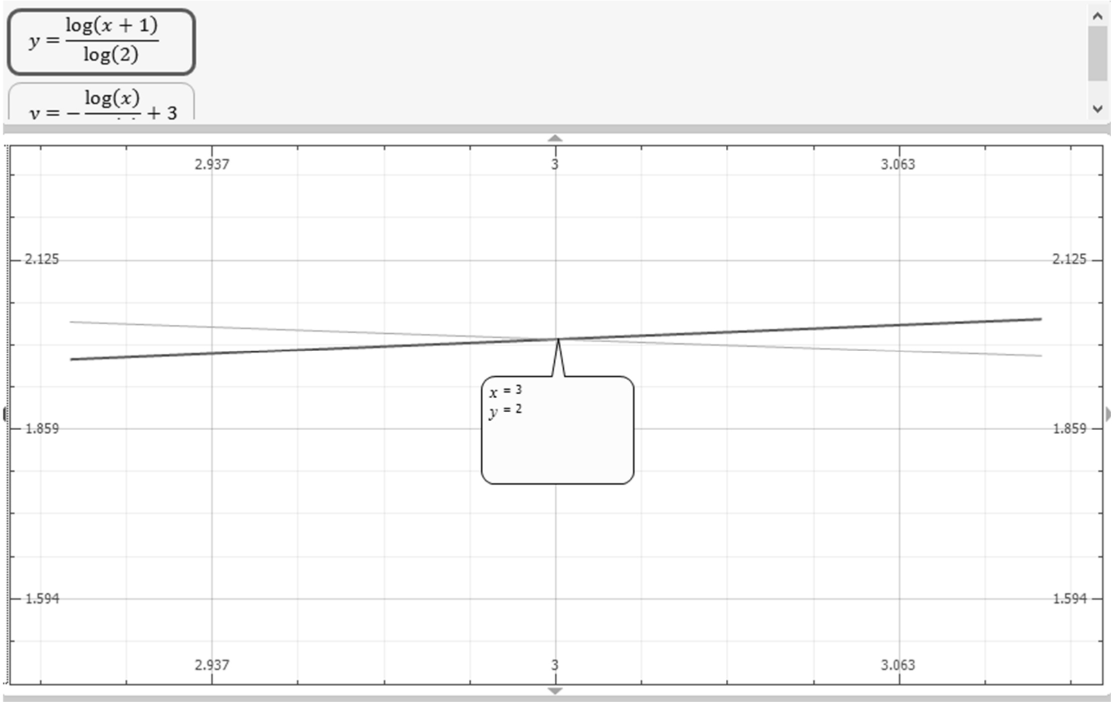


Рис. 5

Учитывая ОДЗ и наши построения, делаем вывод: $x \in (0;3]$.

Ответ: $x \in (0;3]$.

Пример 3 [5]. Решите систему неравенств $\begin{cases} 2|x| + y \ \geq 1, \\ 5x^2 + 5y^2 \ \leq 1. \end{cases}$

Решение. Построим ГМТ плоскости, заданные неравенствами системы, в одной системе координат (рис. 6).

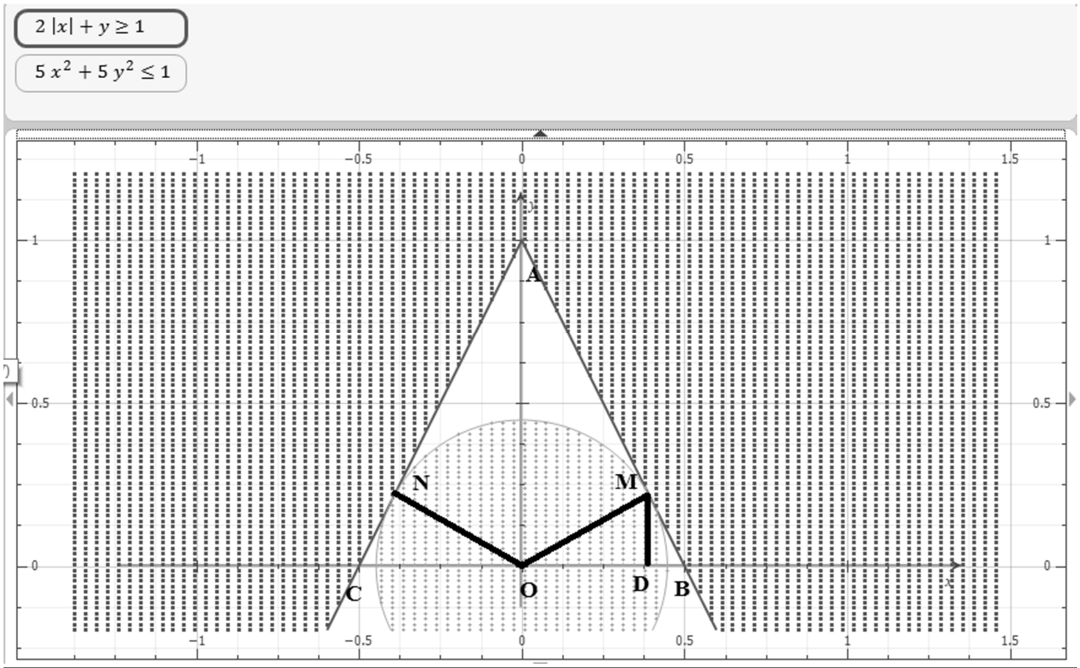


Рис. 6

Из рисунка видно, что решением системы неравенств являются координаты точек M и N. Обе точки симметричны относительно оси ординат, имеют общую ординату и противоположные значения абсцисс.

ΔAOB – прямоугольный: $AO = 1, OB = \frac{1}{2}, AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. $\Delta AOB \sim \Delta OMB$, следовательно, $\frac{AB}{OB} = \frac{AO}{OM} = \frac{OB}{MB}$; $\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{OM} = \frac{\frac{1}{2}}{MB}$; $OM = \frac{1}{\sqrt{5}}, MB = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.

$S_{\Delta OMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{20}$ (половина произведения катетов); С другой стороны, $S_{\Delta OMB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot MD$ (половина произведения основания на высоту). Тогда $MD = \frac{1}{5} = y$ (ордината искомых точек M и N).

Рассмотрим $\Delta AOB \sim \Delta ODM$: $\frac{AB}{OM} = \frac{AO}{OD}$; $\frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{1}{OD}$; $OD = \frac{2}{5}$ (абсцисса точки *M*). Абсцисса точки *N* равна $-\frac{2}{5}$.

Ответ: $\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right), \left(\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$.

Компьютерные технологии стали неотъемлемой частью жизни современного человека. С переходом на новые стандарты в образовании современные школьники активно пользуются информационными ресурсами. Использование в обучении компьютерных программ, безусловно, облегчает и ускоряет учебный процесс, но оно не должно полностью заменять самостоятельную работу школьника. Ученик должен уметь работать в компьютерной среде и вне ее. Только при таком условии возможно воспитать всесторонне грамотную и развитую личность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колягин Ю. М., Ткачёва М. В., Фёдорова Н. Е. и др. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. организаций – 5-е изд. – М.: Просвещение, 2018. – 335 с.

2. Ященко И. В. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень: типовые экзаменационные варианты: 36 вариантов – М. : Издательство «Национальное образование», 2019. – 256 с.

3. Лысенко Ф. Ф., Иванова С. О. Математика. 9-й класс. Подготовка к ОГЭ-2020. 40 тренировочных вариантов по демоверсии 2020 года: учебно-методическое пособие – Ростов н/Д: Легион, 2019. – 384 с.

4. Федеральный институт педагогических изменений – URL: http://fipi.ru/ege-i-gve-11/demoversii-specifikacii-kodifikatory (дата обращения: 13.01.2020).

5. Математика 11 кл // Задания 2019-2020 уч. г. // Школьный этап // Всероссийская олимпиада школьников // Координационно – методический центр по учебно-исследовательской деятельности – URL: https://xn--80aikanhll5i.xn--c1aca0dzc.xn--p1ai/vserossijskaya-olimpiada-shkolnikov/shkolnyj-etap/zadaniya-2019-2020-shkolnyj-etap (дата обращения: 20.01.2020).

УДК 004.921

СОВРЕМЕННЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ ПАКЕТЫ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Александр Валентинович Лобанов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Елена Валерьевна Тишина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Ключевые слова: *графический редактор, пакет Desmos, пакет GeoGebra, пространственное мышление, математика, геометрия, алгебра.*

Аннотация. В статье говорится об использовании графических пакетов для развития пространственного мышления школьников при изучении математики. Рассмотрены два графических пакета, применяемых при изучении математики в средней школе.

Применение новых информационных технологий на уроках математики является одним из наиболее эффективных средств повышения интереса, обучающихся к предмету. С помощью компьютера можно значительно повысить наглядность обучения, быстро актуализировать знания, необходимые учащимся для изучения нового материала, использовать индивидуальный, дифференцированный подход при обучении математике [1].

К примеру, применение графических пакетов в процессе обучения математике поможет развить у обучающихся пространственное воображение, творческие черты характера и познавательный интерес. Графические редакторы для наглядности рассматриваются многими учителями и при применении дистанционных технологий обучения. Известно, как трудно даются первые уроки стереометрии, так как у большинства ребят не сформировано пространственное воображение, они «не видят» свойства геометрических пространственных фигур. На данном этапе, именно на первых уроках графические пакеты позволяют при помощи графики улучшать визуально процесс обучения (при помощи рисунков, схем, диаграмм и пр.) [2].

Рассмотрим некоторые такие графические пакеты.

Первый пакет ***Desmos*** (www.desmos.com) – простой и мощный инструмент для построения графиков, онлайн графический калькулятор (Рис.1). Позволяет не только быстро нарисовать график функции по формуле, но отобразить табличные данные, изучить поведение функции при изменении параметров, решить систему уравнений или неравенств и многое другое.

В дополнение к графическому изображению как уравнений, так и неравенств в нём также есть списки, графики, регрессии, интерактивные переменные, ограничение графа, одновременное графическое отображение, кусочное графическое отображение функций, графическое изображение полярных функций, два типа графических сеток – среди других вычислительных функций, обычно встречающихся в программируемых калькуляторах. Он также может использоваться на нескольких языках.

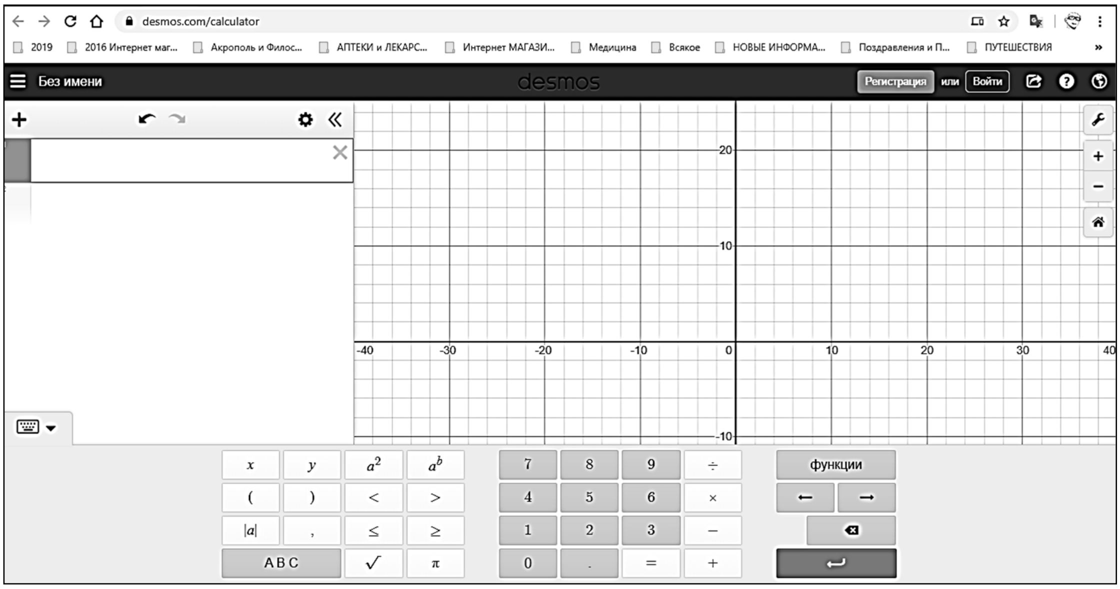


Рис. 1

Пользователи могут создавать учетные записи и тем самым сохранять графики, которые они создали. Затем может генерироваться постоянная ссылка, которая позволяет пользователям делиться своими графиками.

Ценность редактора *Desmos* для уроков математики очевидна. Его можно использовать на уроках алгебры для построения графиков, начиная с 7 класса средней школы вплоть до 11 класса и для подготовки к ЕГЭ.

Перечень заданий, когда можно использовать редактор: построение всевозможных функций, построение параллельных графиков, решение систем линейных уравнений, анализ взаимного пересечения графиков функций и пересечения графиков с осями координат, принадлежит ли точка графику функции, решение неравенств, преобразование функции и так далее.

На рис.2 пример построения графиков функций.

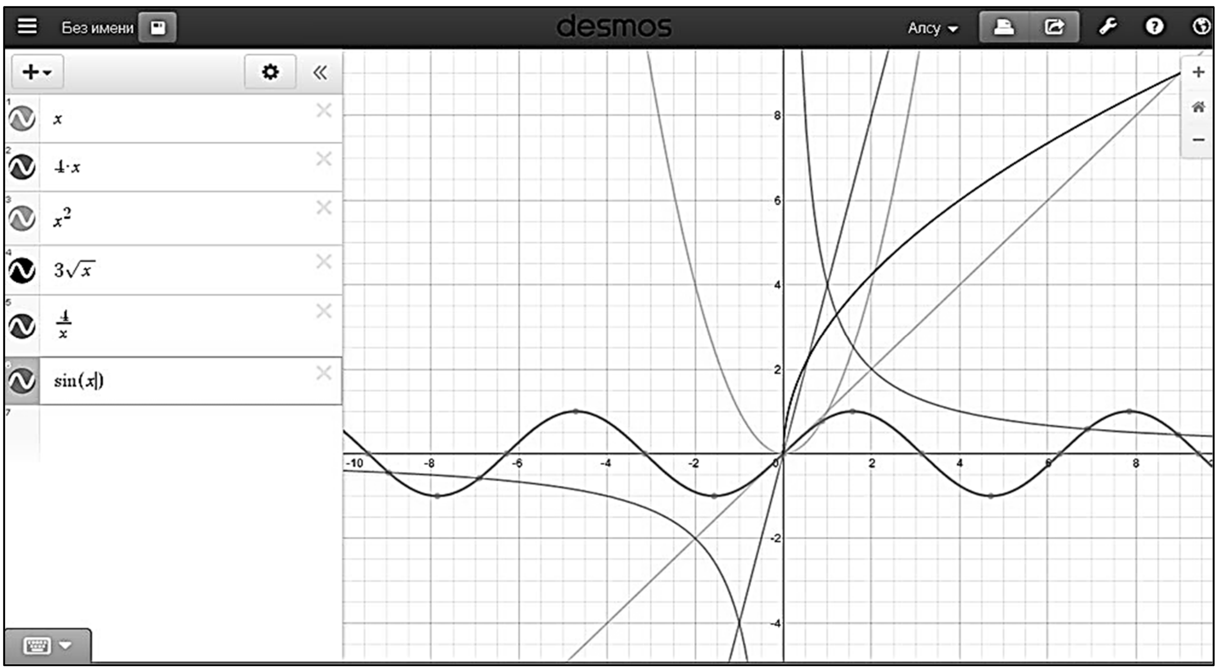


Рис. 2

Сервис предлагает замечательную возможность увидеть динамику графиков. Введите формулу квадратичной функции с коэффициентом ***a*** при ***x***. Ниже появится дополнительное поле, в котором можно изменять значение ***a*** с помощью ползунка или запустить проигрыватель, который сам будет показывать изменения графика при изменении значения параметра ***a*** (рис.3).

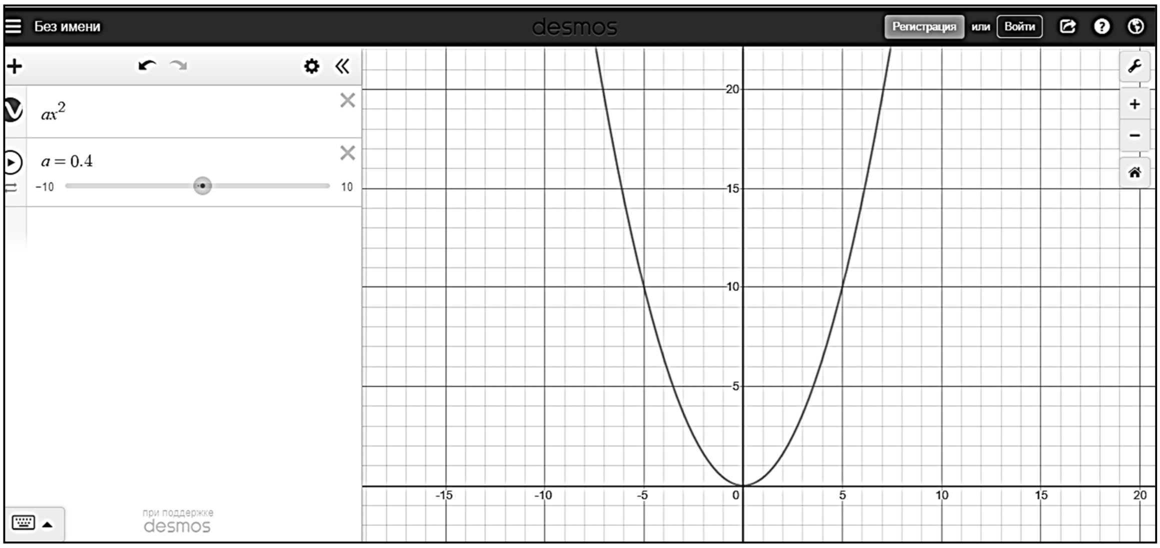


Рис. 3

Дополнительные возможности графического калькулятора *Desmos*:

1. Возможность сделать настройки сетки для декартовых и полярных координат.
2. При построении графиков функций можно задавать промежутки для ***x***.

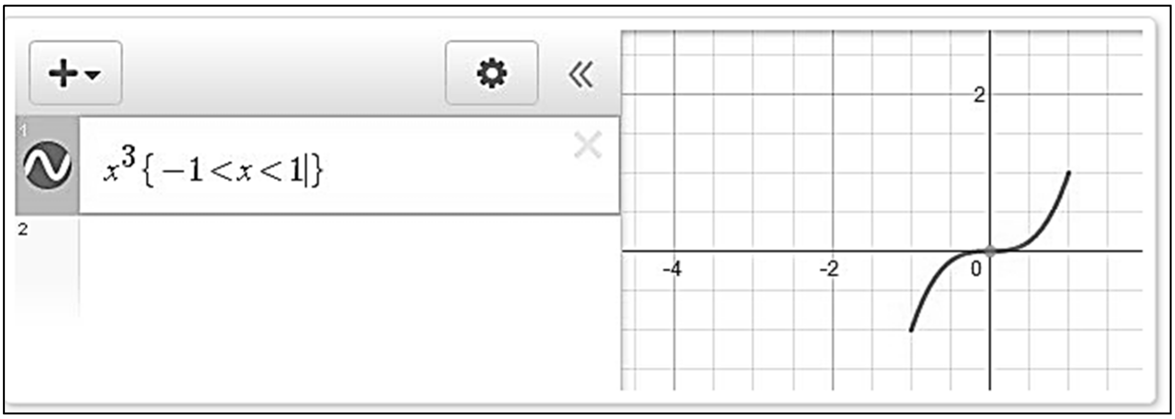


Рис. 4

Модифицированная версия калькулятора может использоваться в стандартизированных тестах, по оценке академической готовности. Кроме того, модули активности для учебных групп также могут быть созданы с помощью учетной записи учителя.

Рассмотрим второй графический пакет ***GeoGebra.***

Программа *GeoGebra* (www.geogebra.org/graphing) обладает широкими возможностями для демонстрации как алгебраических, так и геометрических понятий, и законов. Это свободно распространяемая компьютерная программа для изучения математики.

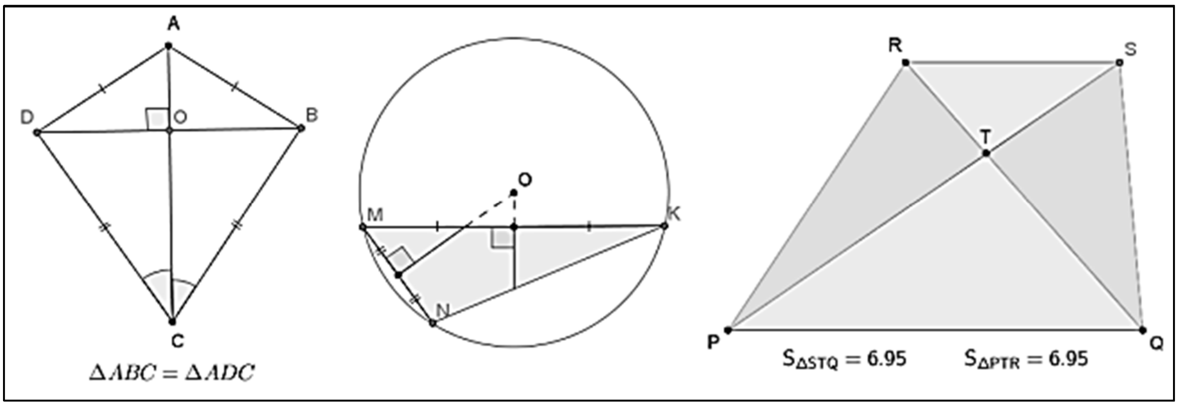


Рис. 5

Если Вы разрабатывали проекты в таких программах, как "Живая геометрия" (The Geometer's Sketchpad) или "Математический конструктор", то Вам будет достаточно комфортно делать это и в системе GeoGebra, которая имеет набор аналогичных инструментов. Но эстетичность моделей в GeoGebra будет на порядок выше, чем в "Живой геометрии", потому что каждый объект (точка, отрезок, угол, окружность и т.д.) имеет очень большое число параметров и гибко настраивается. На рис. 5 изображены примеры трех планиметрических чертежей, выполненных в GeoGebra.

Возможности GeoGebra можно использовать как конструктор стереометрических чертежей. Пространственные инструменты *GeoGebra* позволяют строить геометрические тела, их комбинации, проводить плоскость через три заданные точки (либо через две прямые или через прямую и точку), строить сечения и другие дополнительные элементы геометрических тел, проводить измерения, отмечать углы и многое другое. Отдельного упоминания заслуживает функция построения выносных рисунков, благодаря которой можно быстро построить чертеж любого двумерного объекта (например, изобразить отдельно от основного рисунка сечение многогранника или его грань).

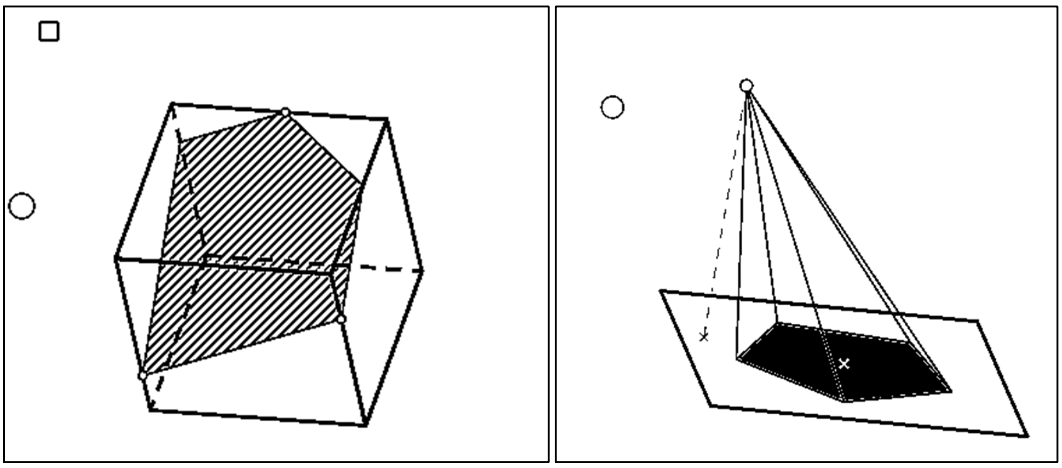


Рис. 6

Благодаря гибким возможностям и наличию широкого ассортимента функций, программа GeoGebra может быть использована для создания различного рода демонстраций и тренажеров для школьников. Весьма полезным свойством является то, что в демонстрационные проекты можно вставить картинки стандартных форматов (bmp, jpg, png, gif).

GeoGebra имеет огромное число пользователей по всему миру, и их ежедневно становится всё больше и больше. Они создают разные проекты и выкладывают их на сайт GeoGebra Tube. В меню самой программы GeoGebra содержится пункт "Файл - Поделиться" для загрузки на GeoGebra Tube созданного вами файла. На данный момент выложено более 300 000 разработок. Например на сайте www.3d-geometry.ru вы можете скачать трехмерные чертежи к задачам из учебника Атанасяна Л.С. "Геометрия 10-11" в формате GeoGebra.

Перечислим еще несколько современных интегрированных графических ресурсов:

1. Maxima (http://maxima.sourceforge.net) - это система для манипулирования символическими и числовыми выражениями, включая дифференцирование, интегрирование, ряды Тейлора, преобразования Лапласа, обыкновенные дифференциальные уравнения, системы линейных уравнений, полиномы и множества, списки, векторы, матрицы и тензоры.
2. Сервис Grafikus.ru предназначен для построения различных графиков в двумерных и трехмерных координатах. В частности, возможно построение графиков простых алгебраических функций вида $y(x)$ и $z(x,y)$, параметрических функций, заданных в двумерном и трехмерном пространстве, а также функций, заданных в полярной системе координат. В двумерных координатах можно строить графики по точкам.
3. C.a.R. (или Z.u.L. http://car.rene-grothmann.de/) – приложение интерактивной геометрии, оно в частности позволяет делать геометрические построения на Евклидовой и неевклидовой геометрии.
4. Kig – программа интерактивной геометрии, входящая в пакет образовательных программ KDE Education Project. Kig даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки, а также служит инструментом для построения математических функций.
5. KSEG — свободная (GPL) программа которая даёт возможность создавать «живые чертежи» в планиметрии, в частности, для построений с помощью циркуля и линейки. KSEG также удобно использовать для построения качественных диаграмм.
6. Euclidea – компьютерная игра, коллекция интерактивных геометрических головоломок, основанная на классических евклидовых конструкциях.

У всех этих интегрированных графических ресурсов есть своя ниша в использовании их в процессе обучения математике.

Использование редакторов в процессе преподавания математики может быть весьма удобным и полезным, как и для преподавателя, так и для обучающегося. Так, например, для преподавателя большим преимуществом может быть экономия времени при подготовке дидактического материала и наглядных примеров к занятию. Для ученика будет большим преимуществом наглядность материалов, созданных с помощью данных графических редакторов.

Графические программные пакеты являются удобным вспомогательным инструментом в процессе обучения. Их применение в процессе преподавания математики поспособствует восприятию новой информации учениками, за счет возможности создания наглядного учебного материала и легкости в использовании, а также поспособствует развитию пространственного воображения.

Увеличение умственной нагрузки на уроках математики и информатики заставляет задуматься над тем, как поддержать интерес учащихся к изучаемому предмету, их активность на протяжении всего урока [3].

Принцип наглядности и компьютерные технологии тесно взаимосвязаны, таким образом, применение графических редакторов в процессе преподавания математики способствует более эффективному усвоению предмета учащимися, а также предполагает больше технических возможностей для преподавателя.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лобанов А.В., Тишина Е.В. Проведение компьютерного тестирования на уроках математики в программе testedu (генератор html тестов) В сборнике: Преподавание математики в школах Тверского региона. – Тверь, 2017. – С. 111–116.

2. Мудракова О.А., Ярова А.Н. Применение графических редакторов при обучении математике в школе: сравнительный анализ. Журнал «Научный альманах». – Тамбов, 2016. № 5-2 (19). – С. 211–216.

3. Мудракова О.А. Информационные технологии в системе непрерывного образования на примере обучения будущих учителей информатики // Ученые записки ИИО РАО, 2009. № 29-1. – С. 217–222.

УДК 372.851.4

ОБ ОТБОРЕ ЗАДАЧ ДЛЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Алексей Евгеньевич Миловидов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Milovidov.AE@tversu.ru

Герман Сергеевич Шаров
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sharov.GS@tversu.ru

Ключевые слова: *олимпиадная задача.*

Аннотация. В работе критически анализируется задачи, предложенная участникам регионального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2019 – 2020 учебном году.

Ежегодно в нашей стране проводится всероссийские олимпиады среди школьников. Согласно Приказу Министерства образования и науки РФ от 18 ноября 2013 г. N 1252 "Об утверждении Порядка проведения всероссийской олимпиады школьников"

Олимпиада проводится в целях выявления и развития у обучающихся творческих способностей и интереса к научной (научно-исследовательской) деятельности, пропаганды научных знаний, отбора лиц, проявивших выдающиеся способности в составы сборных команд Российской Федерации для участия в международных олимпиадах по общеобразовательным предметам.

Данная олимпиада проводится и по математике. Она состоит из нескольких этапов, на каждом из которых повышается сложность заданий, что требует от участников проявления не только всех своих математических знаний, но и математической смекалки. Для решения всех задач отводится не более 4 часов. Это ограничение предъявляет особые требования к заданиям олимпиады. Обычно они содержат в себе какую-то математическую «изюминку», но при этом не являются объёмными. К сожалению, в некоторых случаях это нарушается.

Подобная ситуация имела место на региональном этапе всероссийской математической олимпиады школьников в 2019-2020 учебном году. Во второй день учащимся 10 и 11 классов в качестве пятой задачи была предложена следующая задача (текст задачи и её решения взяты из отрытого источника vos.olimpiada.ru).

Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax^2 + bx + c$ (т. е. степень каждого многочлена не превышает 2). За ход Вася называет Пете число t, а Петя сообщает ему (по своему усмотрению) одно из значений $f(t)$ или $g(t)$ (не уточняя, какое именно он сообщил). После n ходов Вася должен определить один из петиных многочленов. При каком наименьшем n у Васи есть стратегия, позволяющая гарантированно этого добиться?

Несомненно, это интересная задача, но она носит исследовательский характер и может быть предложена школьникам или даже студентам в качестве исследовательской работы. Однако, она не подходит для олимпиады школьников 10 и 11 классов. К такому выводу приводит предложенное автором и организаторами олимпиады решение, которое занимает объём в 3 страницы формата А4 и при этом содержит недопустимые смысловые провалы, сделанные, видимо, для максимального сокращения текста решения.

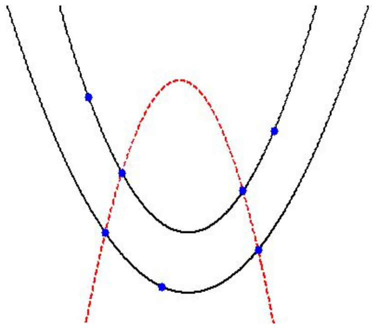
В частности, при доказательстве недостаточности 7 ходов для достижения Васей своей цели в предложенном решении построен странный контрпример, не соответствующий условию задачи. В этом примере Петя не задумывает изначально, а конструирует свои 2 многочлена по мере выполнения Васей своих ходов, используя полный произвол в выборе ординат точек, абсциссы которых – называемые Васей числа. Окончательное определение двух многочленов Пети происходит после седьмого хода Васи. Адекватность сделанного построения поставленной задаче требует обоснования, так как это построение – пример для решения другой задачи.

К недостаткам данной задачи можно отнести и необходимость использования следующей леммы, известной, по предположению авторов школьникам: «Через три любые точки с различными абсциссами проходит график ровно одного многочлена вида ax^2+bx+c» (график такого многочлена мы, как и авторы предложенного решения, будем называть просто «графиком»). Однако приводимое доказательство этой леммы предполагает знание интерполяционного многочлена Лагранжа.

Очевидный недостаток оформления авторского решения – неудачные обозначения: после указания вида ax^2+bx+c задуманных многочленов, авторы обозначают абсциссы точек буквой t, а в решении – сами точки через $A_i=(a_i,b_i)$. Обозначения, например, $A_i=(x_i,y_i)$ не вводили бы читателя в заблуждение.

На наш взгляд, адекватное изложение упомянутой выше части решения (доказательства недостаточности 7 ходов) должно включать наряду с авторском термином «подозрительный график» (график, проходящий хотя бы через три точки A_i) понятие «4-график» для графика, проходящего хотя бы через четыре точки A_i. 4-график назовем «ложным 4-графиком», если он не совпадает ни с одним из задуманных Петей графиков $f(x)$ или $g(x)$.

Изложим стратегию Пети в этих терминах. Он, не отклоняясь от условий задачи, задумывает два графика (на рисунках 1 и 2 они показаны как сплошные линии) и выбирает точки A_1, A_2, ... A_7 на них так, что три из этих точек лежат на одном, четыре – на другом графике. С этим последним совпадает 4-график, который может построить Вася после 7 ходов. Однако Вася не может исключить существования ложных 4-графиков для системы из построенных 7 точек. Примеры таких ложных 4-графиков показаны штриховыми линиями на рисунках 1 и 2. Один такой пример доказывает недостаточность 7 ходов для гарантированного успеха Васи.



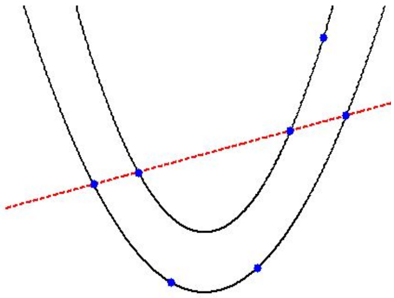


Рис. 1 **Рис. 2**

Дальнейшее доказательство гарантированности успеха Васи на восьмом ходу можно провести по схеме предложенного авторами решения, которое включает разбор двух случаев, возможных после выбора Васей неплохого числа (то есть не являющегося абсциссой точек пересечения имеющихся 4-графиков) и появления точки A_8 с этой абсциссой. В первом случае, в котором пять из восьми точек лежат на одном 4-графике, легко доказать, что этот 4-график – один из петиных (3 из пяти точек обязаны лежать на одном из графиков). Во втором случае с 4 точками на каждом из петиных графиков, доказываем, что они представляют единственную пару 4-графиков, покрывающую все 8 точек. Вася выбирает любой из этих 4-графиков.

Как видим, решение этой задачи содержит несколько этапов, на каждом из которых школьник должен проводить достаточно сложный логический анализ. Даже в случае успешного прохождения этих этапов участник олимпиады затратит на корректное изложение своего решения большое время, отнимаемое от анализа других задач.

В силу сказанного мы хотели бы рекомендовать воздержаться от включения подобных задач в олимпиады для школьников. При отборе олимпиадных задач необходимо руководствоваться наличием в задаче «ключика к ларчику» и возможностью коротко изложить найденное решение.

Отметим, что для рассмотренной задачи можно построить упрощённый вариант, заменив лишь первую фразу условия на следующую: «Петя задумал два многочлена $f(x)$ и $g(x)$, каждый вида $ax+b$ (т.е. степень каждого многочлена не превышает 1)». Этот вариант задачи не имеет рассмотренных выше недостатков. В частности, школьники знают, что через две любые точки с различными абсциссами проходит одна и только одна прямая – график ровно одного многочлена вида $ax+b$. Аналогом понятия «4-график» для этого варианта задачи является «3-прямая» – прямая, проходящая хотя бы через три точки A_i. Однако в этом варианте задачи не существует «ложных 3-прямых», то есть – 3-прямых, не совпадающих ни с одной из задуманных Петей прямых. Это следует из того, что по крайней мере две из трёх точек A_i на 3-прямой лежат на одной из петиных прямых, т.е. 3-прямая и Петина прямая совпадают.

Учитывая сказанное, находим, что в упрощённом варианте задачи решение достигается за n=5 ходов (три из пяти точек A_i обязаны лежать на одной из петиных прямых). Такой вариант задания может быть предложен школьникам 8-10 классов.

УДК 377.8

КОГО И КАК УЧИЛИ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ МАКСИМОВИЧА

Илья Шулимович Могилевский
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: ilia.mogilevski@gmail.com

Ключевые слова: *математическое образование в Твери, Тверская земская женская учительская школа им П.П.Максимовича.*

Аннотация. В работе рассматриваются состав учащихся Тверской земской женской учительской школы им П.П.Максимовича, программы обучения математике в этой школе, использовавшиеся в ней учебники математики и состав преподавателей математики.

Тверской университет ведет свою полуторавековую историю от земской женской учительской школы, основанной меценатом и просветителем П.П.Максимовичем. Открытие школы было с энтузиазмом встречено самыми широкими кругами тверского общества и получило моральную и материальную поддержку тверского земства. Получившая имя своего основателя школа дала возможность получить среднее образование девушкам из тех семей, для которых было недоступно обучение в гимназиях.

Благодарные потомки не забыли благородную инициативу П.П.Максимовича. Проведены и опубликованы исследования о работе школы и по биографии ее основателя. Пятьдесят лет назад вышло исследование В.У.Сланевского [1], в последнее десятилетие опубликованы книги и статьи Т.А.Ильиной, из которых укажем [2] и [3]. Наконец в 2018 году напечатана статья Н.М.Бирюлевой и Ю.В.Чемариной [4], где разбирается преподавание математики в школе Максимовича.

Настоящая статья, так же, как и работа [4] посвящена тому, кого и как учили математике в школе Максимовича. При подготовке материалов для статьи мне оказала неоценимую помощь заведующая отделом редких книг библиотеки ТвГУ Т.А.Ильина, которой я рад выразить свою признательность.

Программы преподавания разных предметов в школе Максимовича опубликованы в протоколах очередного Тверского губернского земского собрания за 1875 год [5]. Программа по математике приведена в [4] и мы не будем ее здесь повторять полностью, ограничившись лишь некоторыми комментариями.

Весьма интересными нам представляются сведения о школе, представленные ее основателем П.П.Максимовичем в нескольких документах, опубликованных в протоколах Тверского губернского земского собрания за 1877 год [6]. В 1876-77 годах тверское просвещенческое начальство в лице директора народных училищ г-на Малова высказало претензии к школе, сводившиеся, как водится, к тому, что в школе учат не тех, кого следует и не так, как следует. На эти претензии П.П.Максимович достойно и весьма аргументированно ответил в докладе земскому собранию от 15 декабря 1877г. [6, стр. 129 – 141], в докладной записке попечителю Московского учебного округа князю Н.П.Мещерскому, поданной в январе 1877г. [6, стр. 141 – 149], и

в докладной записке Тверскому губернатору А.Н.Сомову от 28 ноября 1877г. [6, стр. 149 – 162]. П.П.Максимович охарактеризовал г-на Малова как человека «несимпатизирующего самостоятельному положению в обществе женщины и особенно ее участию в таком великом деле, как воспитание и обучение детей; в деле, к которому, однако женщины как бы самой природой предназначены». Претензии г-на Малова заключались в следующем:
«1) Почему в настоящее время (1877 год) программа преподавания не та, какая выполняема была в начале существования школы (1870-71 годы)?
2) Почему в школу принимаются вместе с 15 –17-летними и девицы 25-летнего возраста?
3) Почему школа принимает не только девиц крестьянок, как это прежде предполагалось учредителем, а и принадлежащих к другим сословиям?
4) Достаточно ли обращено в школе внимание на религиозное воспитание девиц?»

В докладной, поданной губернатору, содержатся подробные ответы на поставленные вопросы. При открытии школы предполагалось двухгодичное обучение. Но довольно быстро стало ясно, что подготовить за два года сколько-нибудь квалифицированного учителя невозможно, с другой стороны Тверское земство выделило средства, достаточные для пятилетнего курса обучения. Первый год сделался подготовительным, а последний год был почти полностью посвящен педагогической практике. Такая система подготовки учительниц оказалась эффективной и сохранялась на протяжении 40 лет, вплоть до 1919 года. Программа преподавания в школе была «составлена применительно к программе мужских правительственных учительских семинарий».

Весьма достойный ответ был дан и на второй вопрос о разновозрастности учениц школы. Благодаря щедрости земства, заметим неправительственного учреждения, школа «не считала себя вправе запереть свои двери для какой бы то ни было девицы, имеющей призвание, способность и желание готовиться быть народной учительницей. Принимая 25-летних девиц, школа не отказывала через это 17-летним. А не принимать 25-летних школа не имела оснований, особенно если замечала в них хорошие душевные качества и любовь к науке, долго не находившую себе приложения только потому, что до открытия моей школы негде было учиться дочерям бедных родителей и бедным сиротам Тверской губернии».

Подробный ответ на вопрос о сословном составе учениц содержится в докладе П.П.Максимовича Тверскому земскому собранию 1877 года. В этом году в школе обучалось 177 учениц, из которых 34 были крестьянками. При этом «ни одной крестьянской девушке, умеющей читать и писать и желающей поступить в мою школу, я в этом не отказываю; но что же делать, если между крестьянками так мало девиц, имеющих сказанную подготовку, а заявляющих желание пройти курс учительской школы между ними еще менее». Так как укомплектовать школу исключительно крестьянками было решительно невозможно, то «отчего же было не принимать и девиц из других сословий, когда в школе моей и для них оказывалось место? Да, наконец, какое право имел я отказывать девицам некрестьянских сословий, получая субсидию от земства, материальные средства которого суть средства всех сословий?» На конец 1877 года в школе обучалось девиц дворянского происхождения 13, из духовного сословия 74, горожанок 29, крестьянок 34, дочерей чиновников 27.

Обвинение в недостаточной религиозности учениц школы было, отчасти политическим и П.П.Максимович считал его самым главным. В ответ на этот донос он говорил: «Пусть укажут хотя на одну из окончивших курс в моей школе учительниц, которые проявили бы свою нерелигиозность». Ставили школе и ее основателю в вину и тот факт, что среди учениц-пансионерок были три неправославных девушки: католичка, протестантка и еврейка. На это П.П.Максимович отвечал, что эти три девушки происходили из западных губерний Российской империи, где женщинам было крайне трудно получить образование на русском языке, приняты они были по просьбе директора департамента таможенных сборов Н.А.Качалова в качестве стипендиаток таможенного ведомства. В связи с этой историей, никак не украшающей тогдашнее тверское начальство, не могу не вспомнить другую историю, относящуюся уже к нынешнему столетию. На математическом факультете ТвГУ весьма успешно училась русскоязычная уроженка Латвии. Так как девушка не имела российского гражданства, то ей или ее семье приходилось платить за обучение. Когда эта студентка была на третьем курсе, материальные возможности ее семьи оказались исчерпанными, и девушке пришлось оставить университет. Попытки математического факультета перевести способную студентку на обучение за счет российского бюджета оказались, к сожалению, безуспешными, а ходатая из таможенного ведомства на этот раз не нашлось.

Руководители школы нетерпимо относились к недобросовестности и обману со стороны учениц, справедливо полагая, что такое отношение в большей степени способствует воспитанию высокой нравственности, чем показная религиозность. В докладной записке Тверскому губернатору приводится следующий пример на этот счет. «Две ученицы были исключены из школы только за то, что, представив учителям несколько раз чужие письменные работы и выдав их за свои, обнаружили свое недобросовестное отношение к делу».

Обсудим теперь, кто и как преподавал математику в школе Максимовича. Как и в других средних учебных заведениях, математика в этой школе занимала существенное место и преподавалась в течение всех пяти лет обучения. Достаточно подробная программа курса математики по состоянию на 1882 год опубликована в [7]. В подготовительном классе было 6 уроков арифметики в неделю, в первом классе – 5 уроков арифметики в неделю, во втором классе – 4 урока арифметики или алгебры и 3 урока геометрии в неделю, в третьем классе – 2 урока алгебры и 3 урока геометрии в неделю. В выпускном четвертом классе на двух уроках в неделю повторялся курс арифметики и разбирались учебники, используемые в народной школе, на трех уроках в неделю изучалась стереометрия и повторялся курс геометрии. Судя по имеющимся источникам, такая программа действовала во все последующие годы существования школы. Занятия по математике вели весьма квалифицированные преподаватели – мужчины были, в основном, выпускниками университетов, а женщины, которые составляли немалую часть преподавательского корпуса, окончили высшие женские курсы. В [2] сказано, что в 1871-72 годах математику в школе преподавал А.И.Дружинин. В докладе П.П.Максимовича Тверскому земскому собранию 1877 года [6] говорится, что А.И.Дружинин в начале 1870-х годов был инспектором народных школ Тверской губернии. По-видимому, речь идет об одном и том же человеке. Упоминавшийся выше г-н Малов сменил А.И.Дружинина на посту руководителя просвещенческого ведомства Тверской губернии. Судя по имеющемуся в [2] списку преподавателей школы, математики в ней редко работали более 6 лет. Исключение составляет только М.И Модестова, преподававшая математику с 1887 по 1919 год.

В школе Максимовича использовались стандартные для того времени учебные пособия по математике: задачник по арифметике В.Евтушевского [8], вошедший в русский фольклор учебник арифметики А.Малинина и К.Буренина [9], задачник по арифметике тех же авторов [10], учебник геометрии А.Давыдова [11].

Элементарная математика не изменилась за последние 150 лет, хотя некоторые напористые деятели современного образования и утверждают обратное. Изменился стиль подачи материала, несколько поменялась терминология, а тексты задач стали соответствовать реалиям современности.

Рассмотрим некоторые характерные задачи, которые приходилось решать ученицам школы Максимовича.

Задача № 155 из первой части задачника [8]. На скамьях рассажены 20 мальчиков, по равному числу на каждой. Сколько скамеек и по скольку мальчиков сидит на каждой? Это задача на делители числа 20 имеет несколько решений: 2 скамьи по 10 мальчиков на каждой, 4 скамьи по 5 мальчиков на каждой, 5 скамеек по 4 мальчика на каждой, 10 скамеек по 2 мальчика на каждой, 20 скамеек по 1 мальчику на каждой. Случай 1 скамьи, на которой сидят все 20 мальчиков, по-видимому, не является решением, так как в условии задачи говорится о скамьях во множественном числе. В задачнике приведен ответ «неопределенно».

Задача № 29 из второй части задачника [8]. Один хлеб весит $\frac{84}{96}$ пуда, а другой $\frac{45}{72}$ пуда, и первый дороже второго на 20 копеек (немаленькие в то время выпекали хлебы и стоили они копейки!). Сколько стоит каждый хлеб? Для решения этой задачи надо уметь обращаться с дробями, каковым умением обладают отнюдь не все выпускники современных школ. Сокращая дроби, получаем, что первый хлеб весит $\frac{7}{8}$ пуда, а второй $\frac{5}{8}$ пуда, следовательно, первый хлеб тяжелее второго на $\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$ пуда. Из условия задачи получаем, что

$\frac{1}{8}$ пуда хлеба стоит 10 копеек. Отсюда находим, что первый хлеб стоит $7\times10=70$ копеек, а второй стоит $5\times10=50$ копеек.

А вот задача по алгебре из задачника Малинина и Буренина, которая могла бы вызвать возмущение учениц дискриминацией женщин.

Задача № 1961. Некто, умирая, завещал жене $\frac{1}{2}$ своего капитала, сыну $\frac{1}{3}$, дочери $\frac{1}{12}$, а оставшиеся 6000 рублей бедным. Сколько досталось жене, сыну и дочери? Здесь надо составить и решить простейшее уравнение, складывая и вычитая дробные числа. Обозначим величину завещанного капитала через x и составим уравнение $\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{12}\right)x=6000$. Выполняя действия с дробями в скобках, получим $\frac{1}{12}x=6000$, откуда следует, что $x=72\,000$. Теперь несложно найти ответ задачи: жене завещателя досталось 36000 рублей, сыну $24\,000$, дочери $6\,000$. В задачнике в качестве ответа приведено только одно число 36000, что наверняка вызывало недоумение учениц.

В учебнике [9] имеется раздел, потерявший актуальность в наше время, – правило учета векселей. По-видимому, умение учитывать векселя было необходимо образованному человеку XIX века.

Геометрия и особенно стереометрия традиционно были наиболее трудными разделами в курсе элементарной математики. Изучению стереометрии по учебнику Давыдова был посвящен четвертый класс школы Максимовича. В третьем классе изучались, в частности, длина окружности и площадь круга. В учебнике Давыдова даны вполне современные определения этих величин, основанные на понятии предела числовой последовательности. Это непростое понятие разъясняется весьма кратко, и, на мой взгляд, понять из этих разъяснений, что такое предел крайне затруднительно. Возможно, квалифицированные и добросовестные преподаватели школы своими объяснениями восполняли краткость учебника.

Есть в учебнике [10] параграф 183, в котором говорится о двух знаменитых задачах на построение – квадратуре круга и трисекции угла. А.Давыдов не слишком жаловал эти задачи. Он написал: «В этом смысле <построение циркулем и линейкой> квадратура круга невозможна, потому что нельзя построить иррациональное число π; она при том и бесполезна, потому что … можно с достаточной точностью определить сторону квадрата, равновеликого данному кругу». Это высказывание ординарного профессора Московского университета могло ввести в заблуждение неискушенного читателя, каковыми были в подавляющем большинстве ученики и ученицы средних учебных заведений. Дело не в том, что число π иррационально, не составляет труда построить отрезок иррациональной длины $\sqrt{2}$ как диагональ квадрата со стороной 1. Дело в трансцендентности числа π, которая была установлена Ф.Линдеманом в 1882 году. Этот результат оказал сильное влияние на развитие математики, а само по себе решение задачи, простоявшей нерешенной более двух тысяч лет, заслуживает уважения. Надо полагать, что дискуссий на эту тему в школе Максимовича не возникало.

С обычными задачами по геометрии, я думаю, особых проблем не возникало. Вот типичная задача № 31 из [10]. Определите углы треугольника, зная, что один из них составляет $\frac{2}{3}$ другого и $\frac{4}{5}$ третьего. Обозначим первый угол через α, второй через β и третий через γ. По условию задачи $\alpha = \frac{2}{3}\beta, \alpha = \frac{4}{5}\gamma$. Отсюда получаем $\beta = \frac{3}{2}\alpha, \gamma = \frac{5}{4}\alpha.$ Воспользуемся теоремой о сумме углов треугольника. $\alpha + \beta + \gamma = 180° \Rightarrow \alpha + \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{4}\alpha = \frac{15}{4}\alpha = 180°$, откуда следует, что $\alpha = \frac{4 \times 180°}{15} = 48°$. Теперь находим углы треугольника: $48°, 72°, 60°$.

Подводя итог, отметим, что, судя по имеющимся сведениям, преподавание математики в школе Максимовича было поставлено хорошо, Преподаватели знали свое дело и добросовестно его выполняли. Хотелось бы пожелать такого же отношения к своему профессиональному долгу и нынешнему корпусу преподавателей математики Тверской области.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сланевский В.У. Тверская женская учительская школа П.П. Максимовича: (К 100-летию со дня основания) // Из истории дореволюционной и советской школы и педагогики. – Калинин, 1971. – с. 115–153.

2. Ильина Т.А. Школа Максимовича: исследование и материалы. – Тверь: ТО «Книжный клуб», 2010. – 184 с.

3. Ильина Т.А. П.П. Максимович: уточнение некоторых биографических фактов // Вестник ТвГУ. Серия «Педагогика и психология» – 2017, выпуск 2. с. 207– 211.

4. Бирюлева Н.М., Чемарина Ю.В. Математические традиции школы П.П.Максимовича // Столетие физико-математического образования в Верхневолжском регионе. Материалы научной конференции. – Тверь, 2018.– с. 34 –39.

5. Протоколы очередного Тверского губернского земского собрания за 1875 год. – Тверь, 1876.

6. Протоколы Тверского губернского земского собрания за 1877 год. – Тверь, 1878.

7. Протоколы экстренного Тверского губернского земского собрания 30 мая 1882 года. – Тверь, 1882.

8. Евтушевский В. Сборник арифметических задач для приготовительного и систематического курса. – СПб, 1872. – 87 с.

9. Малинин А., Буренин К. Арифметика. – Москва, 1897. – 202 с.

10. Давидов А. Элементарная геометрия в объеме гимназического курса. – Москва, 1885. – 348 с.

УДК 004.9

ВНЕУРОЧНАЯ ПРОЕКТНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В ПРОФИЛЬНЫХ КЛАССАХ

Алиса Ивановна Наумова
МОУ "Тверской лицей", Тверь
E-mail: a_naumova_46@mail.ru

Ключевые слова: *информация, разработка проекта, компьютерный эксперимент.*

Аннотация. Одной из *основных задач* школьного курса информатики является *формирование у учащихся умений работать с информацией из различных предметных областей.* Наиболее *удачно* это происходит *в старших классах* профильного уровня. Максимально используя свои возможности и знания, учащиеся с большим желанием и интересом разрабатывают проекты *по выбранному ими профилю.*

В Тверском лицее под руководством преподавателя информатики высшей категории А.И. Наумовой учениками разработаны проекты по профилям:

1. Физико-математический

В 2015-2016 учебном году ученик 10 класса *физико-математического профиля* Маннапов Евгений написал реферативно-экспериментальную работу на тему: "*Информационные модели управления объектами на примере беспилотных летательных аппаратов (БПЛА)*", в которой представлен материал о современных беспилотных летательных аппаратах и рассмотрен один из способов *программного моделирования* их полётов по конкретно заданной траектории. Работа состоит из двух частей: *описательной* и *проектной*.

В первой части дано теоретическое описание современных типов БПЛА, в том числе представлены разработки российских военных инженеров по *многофункциональным комплексам* и *мини-БПЛА* для различных военных округов (ЮВО, ЦВО) с техническими характеристиками, фотографиями и средствами дистанционного управления.

Во второй части представлена разработка *компьютерной модели управления* на языке Delphi: создание графического интерфейса и событийных процедур проекта, компьютерная модель, компиляция проекта в приложение, компьютерный эксперимент.

Конкурсная работа ученика представлена и обсуждена на I Всероссийском конкурсе научно-исследовательских и творческих работ учащихся "Юный учёный" (апрель 2016), опубликована на сайте Российской Академии Естествознания и в научном журнале для школьников "*Старт в науке*", доступна для свободного ознакомления [3]. Получены Диплом Победителя III степени и Свидетельство №13 Автора научной публикации:


РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

Международная ассоциация ученых, преподавателей и специалистов

ДИПЛОМ

победителя III степени

I Всероссийского конкурса научно-исследовательских и творческих работ

«ЮНЫЙ УЧЕНЫЙ»

награждается

Маннапов Евгений

МОУ «Тверской лицей», г. Тверь

за подготовку работы

«ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ НА ПРИМЕРЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ (БПЛА)»

ПРЕЗИДЕНТ РАЕ М.Ю. Ледванов


СВИДЕТЕЛЬСТВО

Настоящее свидетельство подтверждает, что

Маннапов Е.М.

является автором научной публикации в журнале «СТАРТ В НАУКЕ» (ЭЛ № ФС 77-67279)

Маннапов Е.М. ИНФОРМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТАМИ НА ПРИМЕРЕ БЕСПИЛОТНЫХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ (БПЛА) // Старт в науке. - 2016. - N1

URL: www.science-start.ru/ru/article/view?id=12

Главный редактор Н.Ю.Стукова

МОСКВА 2016 № СВИДЕТЕЛЬСТВА 0013

2. Естественно-научный

В 2016-2017 учебном году ученица 11 класса *естественно-научного профиля* Ванюшина Ирина написала реферативно-экспериментальную работу на тему: ”*Математическое моделирование дозирования лекарственных средств в педиатрической практике*”. Путём *математических расчётов различных методов* определения дозы лекарственных препаратов для детей с использованием *визуализации данных* в приложении MS Excel по составленным таблицам и построенным по ним графикам можно определить *наиболее оптимальные варианты*.

В работе рассмотрены два правила: *Исходя из площади поверхности тела* и *Дозис-фактор по Харнаку*. Для визуализации расчётов построены графики зависимости дозы препарата от массы тела ребёнка и Дозис-фактора *(рис. 1, рис. 2)*.

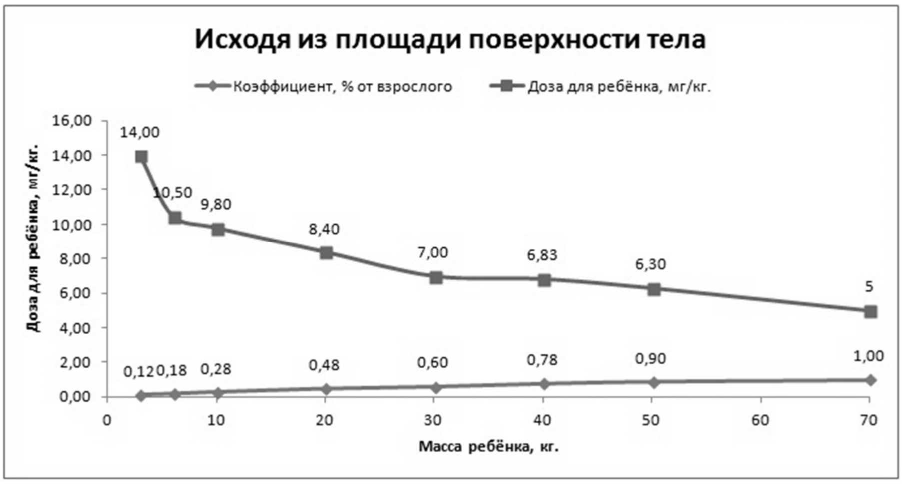


Рис. 1. График зависимости дозы препарата от массы тела и коэффициента

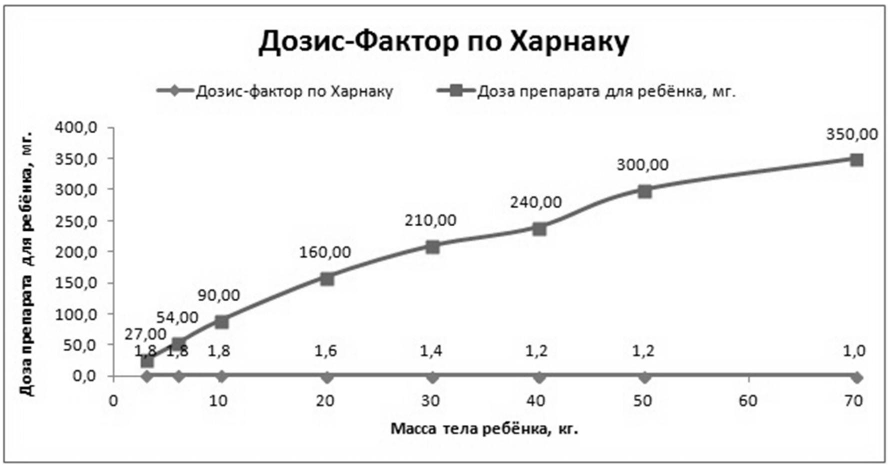


Рис. 2. График зависимости дозы препарата от Дозис-фактора

Сравнив и проанализировав полученные результаты, доказано, что оба метода *максимально* учитывают особенности организма *каждого* ребёнка.

Данная работа выполнена на основании *методической разработки* к уроку информатики в старшей школе естественно-научного профиля преподавателя информатики А.И.Наумовой “*Математическое моделирование расчётов из курса лекарственной терапии для детей*”.

Сценарий проведения урока представлен и обсуждён в режиме on-line на Всероссийском профессиональном педагогическом конкурсе “IT-УРОК” (ноябрь 2016), опубликован на образовательном сайте ЦЕНТРА НОВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ Томского государственного педагогического университета “*Педагогическая планета*” и доступен для свободного ознакомления [4]. Получен ДИПЛОМ за 1 место.

Конкурсная работа ученицы представлена и обсуждена на II Международном конкурсе научно-исследовательских и творческих работ учащихся “СТАРТ В НАУКЕ” (декабрь 2016), опубликована на сайте РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ и в журнале “*Международный школьный научный вестник*”, доступна для свободного ознакомления [1]. Получены ДИПЛОМ ПОБЕДИТЕЛЯ II СТЕПЕНИ и СВИДЕТЕЛЬСТВО № 65 АВТОРА НАУЧНОЙ ПУБЛИКАЦИИ:

3. Социально-экономический

В 2016-2017 учебном году ученица 11 класса *социально-экономического профиля* Кондратьева Кристина написала реферативно-экспериментальную работу на тему: “*Программирование задач из курса экономики. Анализ предложений относительно концентрации рынка*”.

Работа состоит из двух частей: *описательной* и *проектной*. В первой части даны определения и основные характеристики *четырёх моделей рынка* с соответствующими таблицами, рисунками и схемами, во второй части последовательно представлен материал по проектированию *расчётной задачи*: разработка формальной и компьютерной модели с использованием языка программирования PascalABC.NET и приведены *конкретные* примеры компьютерного эксперимента.

Проведённый компьютерный эксперимент разработанного проекта *наглядно показывает*, как с помощью программы расчёта количества участников рынка, общеотраслевого спроса, рыночной цены и себестоимости единицы продукции можно *смоделировать наиболее оптимальную* ситуацию на рынке для *конкретного производителя (рис. 3)*.

Поэтому данная работа носит не только экспериментальный характер, но и имеет *практическую значимость*.

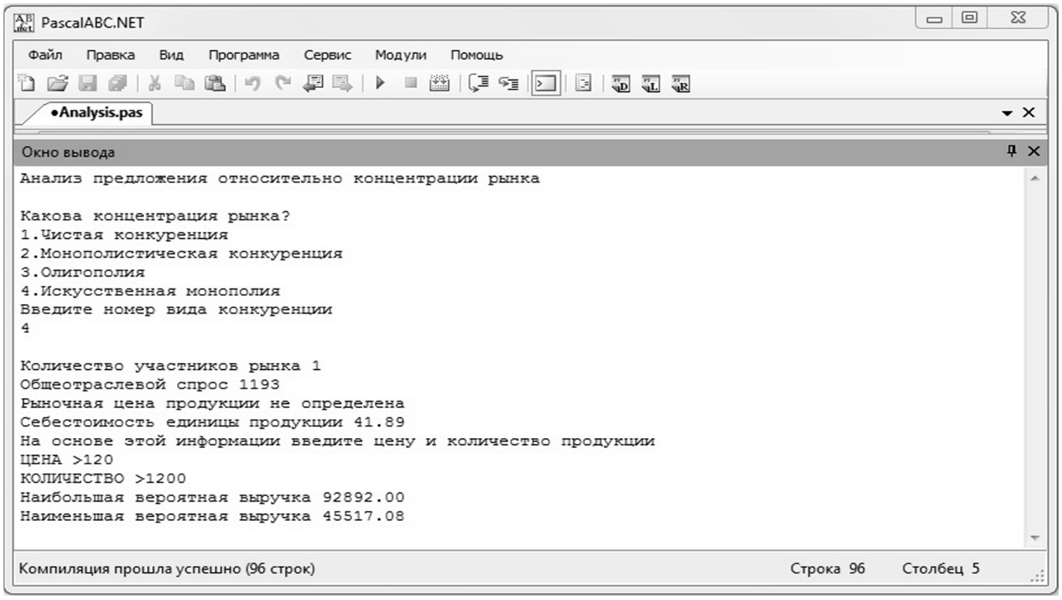


Рис. 3. Выполнение программы в среде PascalABC.NET

Конкурсная работа ученицы представлена и обсуждена в режиме on-line на Всероссийском конкурсе ученических рефератов “Кругозор” (март 2017) и на III Международном конкурсе научно-исследовательских и творческих работ учащихся “Старт в науке” (май 2017). Опубликована на образовательном сайте Центра Новых Образовательных Технологий Томского государственного педагогического университета “*Педагогическая планета*” и на сайте Российской Академии Естествознания, а также в журнале “*Международный школьный научный вестник*”, доступна для свободного ознакомления [2]. Получены Диплом за 2 место, Диплом Победителя II степени и Свидетельство № 213 Автора научной публикации:

Таким образом, разработанные проекты из *различных предметных областей* с использованием *современных IT-технологий*, в том числе и *программирования* полностью соответствует *современным требованиям ФГОС* среднего общего образования. Содержание обучения направлено на достижение учащимися *личностных, метапредметных результатов и предметных результатов по информатике,* на развитие и формирование *универсальных учебных действий УУД* для среднего общего образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ванюшина И. Математическое моделирование дозирования лекарственных средств в педиатрической практике (Научный руководитель – Наумова А.И.) // Международный школьный научный вестник, 2017. – № 1 – С. 56-63. URL: https://school-herald.ru/issue.

2. Кондратьева К. Программирование задач из курса экономики. Анализ предложений относительно концентрации рынка (Научный руководитель – Наумова А.И.) // Международный школьный научный вестник, 2017. – № 4 – С. 44-53. URL: https://school-herald.ru/issue.

3. Маннапов Е. Информационные модели управления объектами на примере беспилотных летательных аппаратов (Научный руководитель – Наумова А.И.) // Научный журнал для школьников “Старт в науке”, 2016. – № 1 – С. 57-61. URL: https://science-start.ru/issue.

4. Наумова А.И. Математическое моделирование расчётов из курса лекарственной терапии для детей [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://planeta.tspu.ru/files/file/1477386223.docx.

УДК 372.851

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ МЕТОДА ИНТЕРВАЛОВ В РАМКАХ ПОДГОТОВКИ К ЕГЭ

Константин Геннадьевич Некрасов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: constantin.nekrassov@yandex.ru

Ключевые слова: неравенства; методы решения.

Аннотация. В заметке рассматриваются современные способы преподавания различных видов неравенств, изучаемых в рамках школьного курса математики, и использования в этой связи метода интервалов.

В школьной математике принято изучать неравенства того или иного вида вслед за соответствующими уравнениями.

Например, изучая линейные уравнения, следом изучают и линейные неравенства. При этом линейные уравнения правильно решают абсолютное большинство учащихся. В то же время, при решении линейных неравенств, дети часто забывают поменять знак неравенства на противоположный, в том случае, когда умножают (делят) на коэффициент меньший нуля. Другими словами, учащиеся нарушают правило, *специально сформулированное* другим человеком, в данном случае – учителем. И это правило, вполне разумное, ученик не принимает как свое, появившееся в результате жизненного опыта. Поэтому с этим правилом хороший ученик должен сделать (и делает) следующее: правило нужно ***запомнить*** и применять при возникновении соответствующей ситуации.

При решении дробно-линейных неравенств, возникают “выколотые точки”, и количество того, что нужно ***запомнить***, начинает нарастать. Любопытен, например, опыт работы некоторых учителей с квадратными неравенствами, в процессе решения которых часто рисуют над и под числовой осью какие-то дуги.

Ещё более усугубляется ситуация, в которой необходимо решить неравенство, содержащее какой-нибудь радикал (обычно – это квадратный корень). Здесь возникает целая инструкция, превращающая процесс решения неравенство в две системы неравенств.

Наконец, своего, не побоюсь этого слова, апогея, достигает необходимость решать логарифмические неравенства, особенно с переменным основанием. Здесь количество инструкций, которые нужно ***запомнить*** достигает особенных широт.

Не хотелось бы подробно останавливаться на методах, которые обычно применяются при изучении тех или иных видов неравенств, поскольку вместо ***всех*** этих методов достаточно применять ровно один хорошо известный метод – это **метод интервалов**.

Следует отметить, что выражение “метод интервалов” употребляется достаточно часто, причем в него могут вкладываться различные смыслы.

Чаще всего это выражение используют при решении дробно-рациональных неравенств, реже – для квадратных неравенств. В 11 классе после тем, связанных с производной, появляется возможность использовать этот метод для ***любого*** неравенства, запись которого связана только с элементарными функциями.

Поэтому уточним тот смысл выражения “метод интервалов”, который будет использован здесь: имеется в виду следующая схема действий при решении ***произвольного*** неравенства, которое можно записать с помощью элементарных функций:

1. Перенесение всех членов неравенства в одну из его частей (тогда в другой части останется 0) и обозначение получившегося выражения в ненулевой части, например, $f(x)$.

2.1. Нахождение множества тех значений переменной x, для которых выражение $f(x)$ имеет смысл (ОДЗ) и изображение этого множества на оси штриховкой.

2.2. Изображение рисунка ОДЗ выражения $f(x)$, представляющего собой только те части оси, которые были заштрихованы. При этом штриховка уже не нужна.

3.1. Решение уравнения $f(x) = 0$ и изображение его корней на рисунке ОДЗ, в результате чего рисунок ОДЗ может быть разбит на промежутки.

3.2. Обозначение полученных выше промежутков (обыкновенно – римскими цифрами).

4. (Выполняется для каждого промежутка.) Установление знака $f(x)$ для данного промежутка, для чего внутри промежутка выбирается произвольным образом точка $x = b$ и выясняется знак $f(b)$. Этот знак помещается на рисунок ОДЗ над изучаемым промежутком. Если полученный знак совпадает с тем, который требуется в неравенстве, то на рисунке ОДЗ над изучаемым промежутком записывается слово “наш”.

5. (выполняется для каждой отмеченной точки $x = k$) Вычисление числа $f(k)$ и идентификация справедливости исходного неравенства в этой точке. Если в точке $x = k$ неравенство оказывается справедливым, то делается запись “точка $x = k$ – наша”.

6. Осуществление записи ответа, в который включаются “наши” интервалы и “наши” точки.

Приведем пример решения неравенства по вышеуказанной схеме.

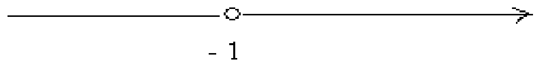
Пример. Решить неравенство: $\sqrt{\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)} < 1$.

Переписываем неравенство в виде: $f(x) = \sqrt{\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)} - 1 < 0$.

Чтобы найти ОДЗ $f(x)$ необходимо решить неравенство

$$g(x) = \log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) \geq 0.$$

Чтобы найти ОДЗ $g(x)$ необходимо решить неравенство $h(x) = \frac{2x+3}{x+1} > 0$. Это и сделаем вначале. ОДЗ $h(x)$: $x \neq -1$. Поэтому рисунок ОДЗ $h(x)$ имеет следующий вид:



Имеем $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$. Отметим корень $x = -\frac{3}{2}$ на рисунке ОДЗ $h(x)$:

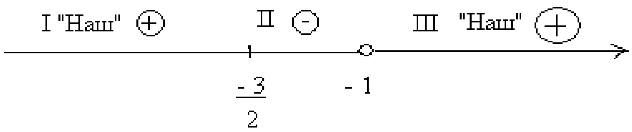


Рисунок ОДЗ $h(x)$ разбился на три части, в которых нужно найти знаки $h(x)$.

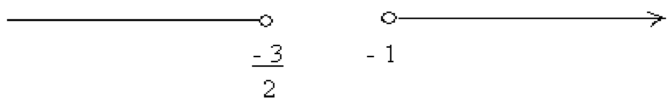
В I выберем $x = -2$: $h(-2) = \frac{2(-2)+3}{-2+1} = \frac{-1}{-1} = 1 > 0$.

В II выберем $x = -\frac{5}{4}$: $h(-\frac{5}{4}) = \frac{2(-\frac{5}{4})+3}{-\frac{5}{4}+1} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{4}} = -2 < 0$.

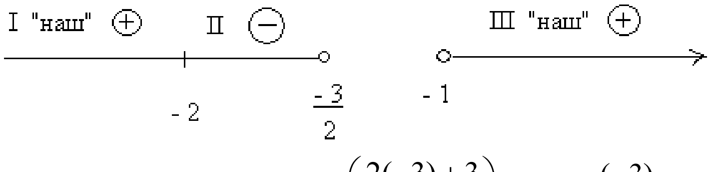
В III берем $x = 0$: $h(0) = \frac{2\times 0+3}{0+1} = 3 > 0$.

Очевидно, нам подходят промежутки I и III, над которыми мы напишем слово “наш”. Остается проверить, подходит ли нам точка $x = -\frac{3}{2}$. Имеем $h(-\frac{3}{2}) = 0$, в то время как нам нужно $h(x) > 0$.

Итак, $h(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -\frac{3}{2}) \cup (1; +\infty)$. Поэтому рисунок ОДЗ для $g(x)$ будет таким:



Найдем решение уравнения $g(x) = 0$: $\log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = -2$. Отметим точку $x = -2$ на рисунке ОДЗ $g(x)$ и получим



В I выберем $x = -3$: $g(-3) = \log_2\left(\frac{2(-3)+3}{-3+1}\right) = \log_2\frac{(-3)}{(-2)} = \log_2\left(\frac{3}{2}\right) > 0$.

В II выберем $x = -\frac{7}{4}$: $g(-\frac{7}{4}) = \log_2\left(\frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{3}{4}}\right) = \log_2\left(\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\right) = -\log_2\frac{3}{2} < 0$.

В III выберем x = 0: $g(0) = \log_2\left(\frac{2\times 0+3}{0+1}\right) = \log_2 3 > 0$.

Над промежутками I и III пишем слово “наш”.

В отмеченной точке $x = -2$ имеем $g(-2) = 0$, и поэтому неравенство $g(x) \geq 0$ выполняется. Итак, неравенство $g(x) \geq 0$ имеет такие решения: $x \in (-\infty; -2] \cup (-1;+\infty)$. Поэтому рисунок ОДЗ исходного неравенства будет следующим:

Далее имеем $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{log_2\left(\frac{2x+3}{x+1}\right)} = 1 \Leftrightarrow \frac{2x+3}{x+1} = 2.$

Последнее уравнение корней не имеет. Поэтому на рисунке ОДЗ $f(x)$ отмечать ничего не нужно.

В I берем $x = -3$: $f(-3) = \sqrt{\log_2\left(\frac{2(-3)+3}{-3+1}\right)} - 1 = \sqrt{\log_2\frac{-3}{-2}} - 1 = \sqrt{\log_2\frac{3}{2}} - 1$ **?** 0. Нужно понять какой знак неравенства следует поставить вместо «**?**». Работаем со знаком «?» так же как со знаком неравенства: $\sqrt{\log_2\frac{3}{2}}$ **?** 1 (обе части числового неравенства положительны) $\Leftrightarrow \log_2\frac{3}{2}$? 1 $\Leftrightarrow$ $\log_2\frac{3}{2}$? $\log_2 2$ (т.к. 2 > 1) $\Leftrightarrow$ $\frac{3}{2}$? 2. Очевидно, что здесь ? есть знак «<».

В II берем $x = 0$: $f(0) = \sqrt{\log_2\frac{2\times 0+3}{0+1}} - 1 = \sqrt{\log_2 3} - 1$? 0 $\Leftrightarrow$ $\sqrt{\log_2 3}$? 1 $\Leftrightarrow$ $\log_2 3$? 1 $\Leftrightarrow$ $\log_2 3$? $\log_2 2$ (т.к. 2>1) $\Leftrightarrow$ 3 ? 2. Очевидно, что здесь «?» есть знак «>». Нам требуется знак «<». Поэтому над первым интервалом пишем слово «наш».

Далее, на рисунке ОДЗ есть отмеченная точка $x = -2$. Имеем: $f(-2) = \sqrt{\log_2\left(\frac{2(-2)+3}{(-2)+1}\right)} - 1 = \sqrt{\log_2\frac{-1}{-1}} - 1 = 0 - 1 < 0$. Поэтому точка $x = -2$ есть точка, входящая в ответ. Итак, мы получили ответ: $x \in (-\infty, -2]$.

В заключение хотел бы отметить целесообразность применения *универсальных* методов решения задач в рамках подготовки к ЕГЭ.

УДК 372.851

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЕБ-СЕРВИСА LEARNINGAPPS.ORG НА РАЗНЫХ ЭТАПАХ УРОКА (НА ПРИМЕРЕ УРОКА АЛГЕБРЫ «ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА»)

Наталья Евгеньевна Плеханова
Приамурский государственный университет им.Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: nata.ya28@mail.ru

Надежда Владимировна Эйрих
Приамурский государственный университет им.Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: nadya_eyrikh@mail.ru

Ключевые слова: *LearningApps.org, веб-сервис, урок, этапы урока, линейные неравенства.*

Аннотация. В работе описано возможное применение интерактивных приложений веб-сервиса LearningApps.org при обучении математике. Предложены задания, созданные на основе готовых шаблонов этого приложения, которые удобно использовать на разных этапах урока: этапе актуализации, этапе первичного закрепления пройденного материала, записи домашнего задания.

Информационные технологии все больше и больше проникают в учебный процесс современной школы. Информатизация общества изменяет способы обучения, а информационные технологии предоставляют новые возможности для улучшения процесса обучения [0]. Многие учителя используют в образовательных целях ресурсы сети Интернет: электронную почту, файлообменные сети, социальные сети, поисковые системы, видеохостинг YouTube, веб-службы. Грамотный педагог может извлечь пользу и от тяги современных школьников к мобильным телефонам, превратив мобильные технологии в «инструмент достижения целей федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования в контексте подготовки обучающихся к жизни в информационном обществе» [0].

Веб-службы заслуживают особого внимания, так как их особенностью является возможность развития, улучшения и наполнения. Достаточно подробный анализ разработанных и функционирующих в настоящее время образовательных веб-сервисов проведен в работе В.И. Меренковой [0]. Автором были отобраны наиболее функциональные с дидактической точки зрения веб-сервисы, которые могут эффективно применяться учителем математики, например, LearningApps.org, Glogster.edu.com, Woordle.net, Jeopardy, Study Stack, Zondle, Story Build, Tagul.com, Wolfram Alfa и другие.

Авторы статьи активно используют в процессе обучения математике онлайн-сервис LearningApps.org [9]. Данное приложение является приложением Web 2.0 и используется для поддержки обучения и процесса преподавания с помощью интерактивных модулей. Уже существующие модули могут быть непосредственно включены в содержание обучения, а также их можно изменять или создавать новые в оперативном режиме. Такими интерактивными упражнениями можно заинтересовать учащихся, так как появляется разнообразие в обучении: рутинный монолог учителя разбавляется работой учеников за ПК.

Для проверки целесообразности методики, заключающейся в применении ресурса LeagningApps.org на уроках математики, создаются онлайн-проекты и ставятся эксперименты. [0]. При использовании учителем в методике своей работы на уроке интерактивных модулей из приложения LearningApps.org, выход в интернет учеников осуществляется через планшет или телефон [0].

Ниже представлено возможное использование приложения LearningApps.org на уроке алгебры «Решение линейных неравенств» в 9-м классе. Обучение проводится по программе, разработанной в соответствии с учебником Г.В. Дорофеева «Алгебра. 9 класс» [0]. Согласно программе, на эту тему отводится два урока, мы планируем использовать интерактивные упражнения на втором уроке.

Согласно федеральному государственному образовательному стандарту современный урок может быть нескольких типов: урок открытия новых знаний, комбинированный урок, урок обобщения и систематизации, урок закрепления, урок рефлексии [8]. Данный урок «Решение линейных неравенств» является комбинированным. Такой урок обязательно должен содержать явно выявленные этапы: актуализация, первичное закрепление, запись домашнего задания.

Задание для этапа актуализации создано в приложении LearningApps.org на основе шаблона «Классификация» (ссылка: https://learningapps.org/display?v=p23ccqoe519). Оно заключается в следующем: необходимо распределить неравенства в соответствии со знаком «больше» или «меньше» (рис. 1).

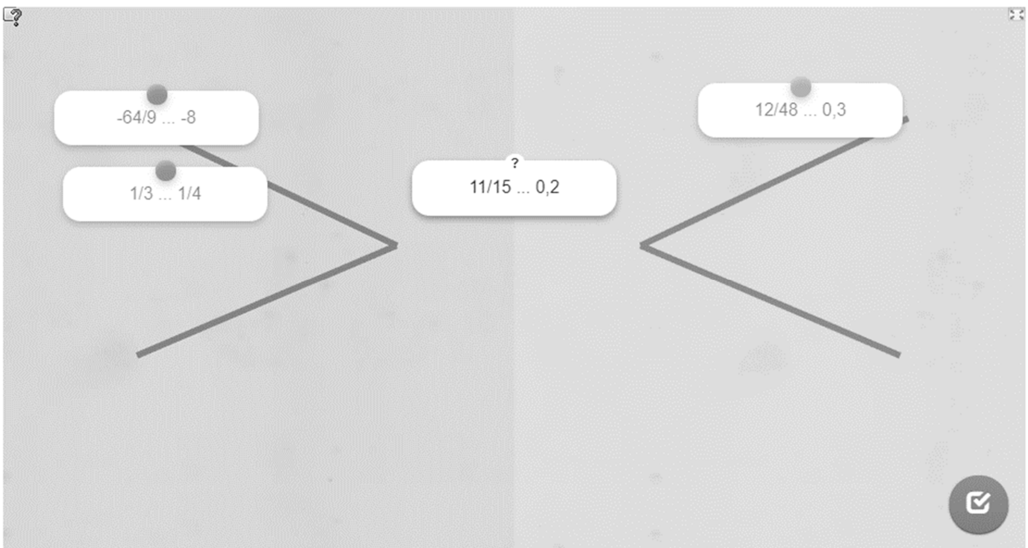


Рис. 1. Вид задания «Классификация»

Выполняя такое задание на этапе актуализации, девятиклассники вспоминают знаки неравенства (больше, меньше), как сравнивать числа (отрицательные и положительные), как переводить обыкновенные дроби в десятичные и наоборот.

Следующий этап, в котором мы задействовали LearningApps.org, это этап первичного закрепления пройденного материала. Здесь предлагается ученикам выполнить задание «Найдите наибольшее целое решение неравенства», созданное по шаблону «Скачки» (ссылка: https://learningapps.org/display?v=pfih1voka19).

На первоначальном экране задания ученику предлагаются варианты прохождения: играть в одиночку или играть с друзьями. Выбор режима игры делается учителем, исходя из оснащенности кабинета компьютерами. Выбирается режим «Играть в одиночку», если есть возможность посадить учеников по одному за компьютер либо выполнять задания на телефонах, или режим «Играть с друзьями», если вышеперечисленных возможностей нет, и ученики играют вдвоем за одним компьютером (телефоном). При выборе режима «играть в одиночку», ученик проверяет свои знания, соревнуясь с компьютером (рис. 2).

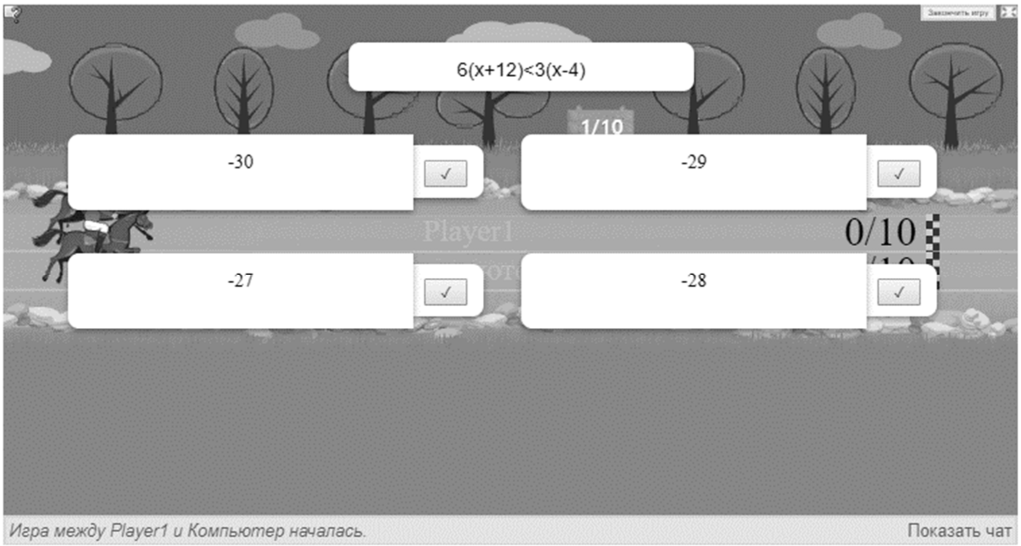


Рис. 2. Вид задания «Найдите наибольшее целое решение неравенства»

В режиме «играть с друзьями» участвуют два ученика, которые соревнуются друг с другом, получая за каждый правильный ответ 1 балл. Побеждает тот ребенок, который набрал наибольшее количество баллов. Всего в игре «Скачки» 10 заданий. Исходя из количества правильных ответов, набранных учащимися, учитель выставляет отметки: «5» – 9-10 баллов, «4» – 7-8 баллов, «3» – 5-6 баллов, «2» – менее 5 баллов.

Заключительный этап урока – это запись домашнего задания. Здесь обучающимся предлагается дома пройти по ссылке (ссылка: https://learningapps.org/display?v=p6vmbczfj19) и выполнить задание, которое было создано по шаблону «Пазл» в LearningApps.org, а именно: соотнести неравенства с аналитической записью их решения (рис. 3).

Выполнив дома задание, ученики могут либо отправить учителю на электронную почту скриншот итогового окна, либо принести его в школу на флеш-карте.

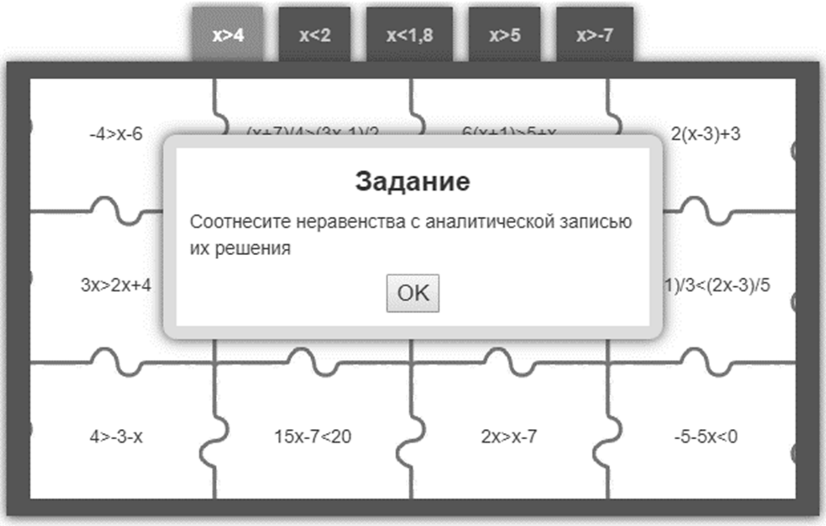


Рис 3. Первоначальный экран задания «Пазл»

Следующее задание, созданное нами в LearningApps.org по шаблону «Викторина с выбором правильного ответа», предназначено для проведения самостоятельной работы на этапе актуализации следующего урока (рис. 4).

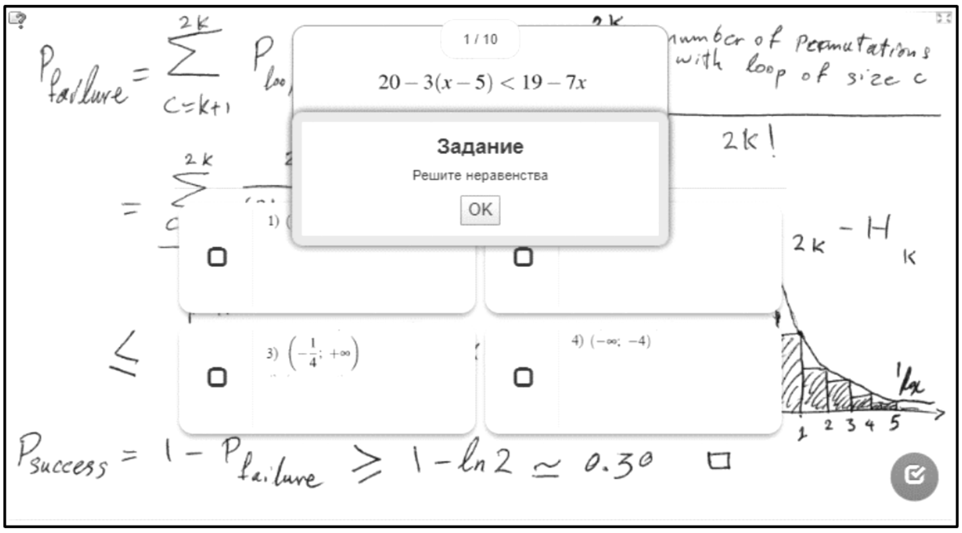


Рис 4. Первоначальный экран задания «Решите неравенства»

Оба задания «Распределить неравенства в соответствии со знаком «больше» или «меньше» и «Найти наибольшее целое решение неравенства», которые выполняются на уроке, рассчитаны не более чем на 10 минут, так как в соответствии с требованиями СанПиН время работы за компьютером на уроке не должно превышать для учеников VIII-IX классов 25 минут [152].

Веб-сервис LearningApps.org отличный помощник учителя в подготовке к урокам, который позволяет разнообразить работу на уроке. С данным сервисом справится любой, даже начинающий пользователь информационных технологий. Ощутимым достоинством LearningApps.org являются простой и удобный интерфейс и общая доступность для всех. В данном приложении есть замечательная возможность создавать интереснейшие и увлекательные задания, работая по шаблонам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бубнова А.А., Гибабулина С.А., Использование информационных технологий на уроках математики // Современный учитель дисциплин естественнонаучного цикла, 2018. – С. 125-128.

2. Дорофеев Г. В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А., Кузнецова Л.В., Минаева С.С., Рослова Л.О., Алгебра. 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / А45 [Г.В. Дорофеев, С.Бю Суворова, Е.А. Бунимович и др.]. – 3-е изд. – М.: Просвещение, 2016. – 336 с.

3. Курушин П.Д., Использование интернет-технологий при изучении темы «Уравнения» пенитенциарного типа // Вестник Томского государственного педагогического университета, 2018. № 7 (196). – С. 114-120.

4. Матвеева А.А., Прокофьева Т.С., Применение средств ИКТ и интернет-технологий при изучении уравнений в 7 классе // Актуальные проблемы современного образования, 2015. № 2 (19). – С. 125-129.

5. Меренкова В.И., Использование образовательных веб-сервисов на уроках математики в средней школе // Continuum. Математика. Информатика. Образование, 2016. № 3 (3). – С. 81-89.

6. Позднякова Н.В., Дидактический потенциал мобильных технологий в обучении школьников математике на ступени основного общего образования // Психолого-педагогический журнал Гаудеамус, 2019. Т. 18. № 3 (41). – С. 19-26.

7. СанПиН 2.2.2/2.4.1340-03 «Гигиенические требования к персональным электронно-вычислительным машинам и организации работы». [Электронный ресурс]. URL: http://12.rospotrebnadzor.ru/rss_all/-/asset_publisher/Kq6J/content/id/285129

8. Федеральный государственный образовательный стандарт [Электронный ресурс]. URL: https://pedsovet.su/fgos/6048_typy_urokov_po_fgos

9. Эйрих Н.В., Фишман Б.Е. Опыт использования игровых технологий в оценивании качества знаний (на примере математики) // Наука и школа. 2019. № 6. – С. 148-162.

УДК 377.8

ТРАДИЦИИ ОБУЧЕНИЯ В ШКОЛЕ МАКСИМОВИЧА

Ольга Владимировна Попова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: polqavlad@yandex.ru

Ключевые слова: *П.П. Максимович, Тверская земская женская учительская школа имени П.П.Максимовича, Тверской учительский институт, Тверской государственный университет.*

Аннотация. В статье говорится об обучении народных учительниц (учителей начальной школы) в школе им. П.П. Максимовича.

В декабре 1870 года была открыта Тверская женская учительская школа П.П.Максимовича.

Школа Максимовича стала первой в России женской учительской школой и одной из лучших в Тверской губернии – первым средним специальным учебным заведением по подготовке учителей. Она просуществовала почти пятьдесят лет и за этот период сумела завоевать большой авторитет по всей России. Об этом свидетельствует хотя бы тот факт, что сведения о П.П. Максимовиче и его школе вошли в энциклопедии XIX и XX веков. Многие педагоги школы известны в России как крупные деятели науки и культуры: А.П. Павлов, А.Н. Робер, Ф.Ф. Ольденбург, Е.П. Свешникова, М.М. Клевенский, Н.А. Кун, Ф.О. Лашек, Л.В. Кандауров и др.

Дружеский союз Николая Дмитриевича Никольского (1873-1952) с академиком В.И.Вернадским, Ф.Ф. и С.Ф.Ольденбургами, другими членами известного в российской истории братства «Приютино» привел к рождению в 1917 г. Тверского учительского института – Калининского (ныне Тверского) государственного университета. С 1913 г. и до конца своих дней Н.Д.Никольский вел неустанную научно-педагогическую деятельность в Твери-Калинине, был организатором и первым директором учительского института и первым ректором педагогического института (1921). Свою административную работу, порой выходившую за пределы области, он всегда совмещал с педагогической и научной деятельностью. Руководил кафедрами языкознания и методики преподавания русского языка, читал для будущих учителей лекционные курсы по различным лингвистическим дисциплинам. Это был высокообразованный человек, в совершенстве владевший французским и немецким языками. Его супруга Прасковья Петровна Никольская также работала преподавателем русского языка и литературы в КГПИ. Николай Дмитриевич выполнял большую методическую работу с учителями города и области. В общей сложности издал более 20 трудов по вопросам языкознания и методике изучения языка. За заслуги перед Отечеством он был награжден шестью орденами и медалями, в том числе орденами Святого Станислава второй и третьей степени, Святой Анны второй и третьей степени, Святого Владимира четвертой степени до 1917 г. и орденом Трудового Красного знамени в 1944 г.

Прасковья Петровна Никольская родилась 20 октября 1895 г. в селе Леонтьево Вышневолоцкого уезда Тверской губернии. Отец – Петр Дмитриевич Стулов, крестьянин, умер в 1903 году. Мать – Анна Ивановна Стулова, умерла в 1919 г. Прасковья Петровна с 1910 по 1915 гг училась в Твери, в учительской школе Максимовича. По окончании служила в д. Курово и на станции Академическая учительницей начальных классов (с 1915 по 1919 гг). Работала с 1919 по 1922 гг на постоянных педагогических курсах Губернского земства. С 1922-26 семья жила в Москве, Прасковья Петровна работала в семилетней школе. После возвращения в Тверь в 1926 г работала в различных школах города (№№2, 8, 26), а также при опытно-показательной школе при Пединституте (с 1931 – 1935 гг). В 1935 г заочно окончила Пединститут по специальности «Русский язык и литература». С 1936 по 1941 работала в средних школах г. Калинина. Во время войны семья переехала в г.Златоуст, где работала в Златоустовском учительском институте (с 1941-1943 гг). С 1943 по 1952 работала преподавателем русского языка в КГПИ им. Калинина на кафедре русского языка. Скончалась в 1982 г. в Твери.

За успешную научно-педагогическую работу П.П. Никольская была награждена медалью «За доблестный труд в Великой Отечественной войне 1941-1945 гг.», другими почетными грамотами и благодарностями.

Никольская Прасковья Петровна вспоминает об учебе в школе Максимовича: «Будили воспитанников в 8 часов утра звонком. С 9 часов начинались уроки. После 3-х уроков в 12 часов обедали и до двух часов ученицы были свободны. С 2-х часов до 4-х было два урока по рисованию. В 6-30 вечера наступала вечерняя работа до 8 часов.

В 8 часов ужинали и до 10 часов каждый занимался своим делом.

П.П.Никольская вспоминает также о педагогической практике: «При школе Максимовича была начальная школа, называемая «нормальной».

Школьная практика в 4 классе шла целый год. В нормальной школе каждый день дежурили по две воспитательницы. Они наблюдали работу учителя, поведение учеников, играли с детьми в переменах и обязательно записывали свои наблюдения в дневник. Все практиканты вели, т.е. списывали у учителей каждодневную запись в классном журнале. Окончив школу, будущие учителя увезли с собой годовые журналы 1, 2, 3, 4 класса за целый учебный год. Для меня эти журналы в первые годы моей работы были настольной книгой, с которой я не разлучалась.

Каждая воспитательница должна была дать в присутствии методистов и учительницы класса и всех свои одноклассниц несколько разнообразных уроков, которые тщательно потом разбирались на беседах и оценивались методистом. До сих помню темы некоторых уроков:

1. Знакомство с какой-то буквой, кажется «О».
2. Таблица умножения на 3 или 4.
3. «Паук-крестовик» - по естествознанию в 3 классе.
4. Чтение в 4 классе «Василий Шибанов» ст. А.К.Толстого.

5. Рисование рыбы – Окунь.

При подготовке к урокам практиканты консультировались с методистами и преподавателями – предметниками. Готовили очень хорошие пособия к урокам сами, многие из воспитательных хорошо рисовали, т.к. преподавание рисования было поставлено серьезно, подбирали и готовые наглядные пособия, которыми школа Максимовича к этому времени была очень богата.

Конспект урока и материалы к нему тщательно просматривался учительницей данного класса. Учительницы Нормальной школы были исключительными мастерами своего дела, одна их Лебедева Татьяна Николаевна была для меня непревзойденным образцом.

Кроме практики в нормальной школе, нас еще отпускали в сельские школы, точно не помню, на какой срок, по-видимому, недели на две. Под руководством учителей мы давали любое число уроков, знакомились со знаниями учеников, их поведением, с условиями работы учителей, изучали школьные здания, мебель.»

Школа ежегодно выпускала около 40 учениц, а за почти 50 лет своего существования подготовила около 1200 учительниц. Выпускницы школы Максимовича работали учителями во всех уездах Тверской губернии, дав начало многим педагогическим династиям. Полученной ими образование по своей идейной направленности и прогрессивности могло сравниться только с Петербургской земской учительской школой.

Сведения о Павле Павловиче Максимовиче и его школе вошли в крупные энциклопедии XIX и XX вв. В 1886 году Павел Павлович Максимович был награжден императорским Вольным экономическим обществом Золотой медалью за особо выдающуюся деятельность в народном образовании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тверской государственный университет: Исторический очерк / ТвГУ; под ред. А.Н. Кудинова. – 2-е изд., пер. и доп. – Тверь: ОГУП «Тверское областное книжно-журнальное издательство», 2001. – 192 с., ил.

2. История ТвГУ в документах / под. ред. С.Н. Смирнова, О.К. Ермишкиной. – Тверь: Лилия Принт, 2006. – 264 с.: ил.

3. Ильина Т.А. Школа Максимовича: исследование и материалы / Науч. ред. М.В. Строганов; ред. О.В. Вершинина. – Тверь: ТО «Книжный клуб», 2010. – 184 с., 16 с. цв. ил.

УДК 372.851

ЗАДАЧИ НА ОПТИМИЗАЦИЮ

Мирослава Степановна Потапенко
МОУ гимназия №12 г. Твери, Тверь
miroslava_tver@mail.ru

Тамара Васильевна Цапиева
МБОУ "Удомельская средняя общеобразовательная школа №5 с углублённым изучением отдельных предметов"
eljvkz88@mail.ru

Ключевые слова: *задачи повышенного уровня сложности, задачи на оптимизацию, математическая модель.*

Аннотация. В своей статье мы хотим рассмотреть задачи на оптимизацию, которые относятся к задачам повышенного уровня сложности на ЕГЭ. В этих задачах проверяются умения применять математические методы при решении практических задач и интерпретировать полученный результат с учётом реальных ограничений. В задачах на оптимизацию требуется найти наибольшее или наименьшее значение некоторой величины. Часто используется тот факт, что переменные могут принимать только целочисленные значения. При решении таких задач ученик должен уметь переходить от текста задачи к построению соответствующей математической модели. Задачи на оптимизацию – это уже небольшие исследовательские задачи, очень близкие по смыслу (но не по методам решения) к задачам с параметром. Сложность таких задач в том, что не всегда есть готовые методы решения и задача может потребовать своего подхода. А чтоб добиться успеха, нужно систематически их решать. Итак, рассмотрим несколько задач.

Задача 1. У фермера есть два поля, каждое площадью200 гектаров. На каждом поле можно выращивать картофель и морковь, поля можно делить между этими культурами в любой пропорции. Урожайность картофеля на первом поле составляет 400 ц/га, а на втором — 300 ц/га. Урожайность моркови на первом поле составляет 300 ц/га, а на втором — 400 ц/га. Фермер может продавать картофель по цене 10 000 руб. за центнер, а морковь — по цене 11 000 руб. за центнер. Какой наибольший доход может получить фермер?

Решение. Площадь: 200 га. Пусть площадь первого поля x (га).

1-е поле	Площадь	Урожайность на первом поле	Цена за центнер	Полный доход с первого поля
Картофель	x	400	10000	4000000x
Морковь	kx	300	11000	3300000kx

Функция полного дохода на первом поле:

$$F(x,k) = 4000000\,x+3300000\,kx \qquad (1)$$

Мы видим, что x+kx=200, выразим $x=\frac{200}{1+k}$, т.е. $k\in[0;200]$.

Подставим x в (1):

$$F(k) = \frac{800000000}{1+k}+\frac{660000000k}{1+k};$$

$$F(k) = \frac{800000000+660000000k}{1+k}.$$

Найдем производную этой функции.

$$F'(k) = \frac{660000000(1+k)-(800000000+660000000k)}{(1+k)^2} = \frac{-140000000}{(1+k)^2} < 0.$$

Производная убывает на всей области определения, значит, она принимает своё наибольшее значение при k=0. Это означает, что всё первое поле нужно засадить картофелем. Доход будет $4000000\times 200 = 800000000$ рублей.

2-е поле	Урожайность на втором поле	Цена за центнер
Картофель	300	10000
Морковь	400	11000

Морковь имеет, как большую цену за центнер, так и большую урожайность, следовательно, второе поле нужно засеять морковью. При этом доход будет $400\times11000\times 200 = 880000000$ рублей. Полный доход составляет 800 млн. + 880 млн. = 1680 млн. рублей.

Ответ: 1680 млн. рублей.

Задача 2. Борис является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары при использовании одинаковых технологий. Если рабочие на одном из заводов трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят t единиц товара. За каждый час работы на заводе, расположенном в первом городе, Борис платит рабочему 500 рублей, а на заводе, расположенном во втором городе, — 200 рублей. Борису нужно каждую неделю производить 70 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Решение

	Количество часов в неделю	Единицы товара в неделю	Оплата рабочему за 1 час	Вся оплата
1 завод	x^2	x	500	$500x^2$
2 завод	y^2	y	200	$200y^2$

Функция еженедельной оплаты труда на двух заводах:

$$F(x,y) = 500x^2 + 200y^2.$$

Мы видим, что x+y=70, т.е. $x = 70 - y$, $y\in [0;70]$.

$F(y) = 500(70 - y)^2 + 200y^2$. Найдем производную этой функции

$$F(y)' = 1400y-70000.$$

Функция принимает своё наименьшее значение при y=50 . $x = 70 - 50 = 20$.

Еженедельная оплата труда: $500 \times 20^2+200\times 50^2 = 700000$ рублей.

Ответ: 700 тысяч рублей.

Задача №3. В 1-е классы поступает 45 человек: 20 мальчиков и 25 девочек. Их распределили по двум классам: в одном должно получиться 22 человека, а в другом — 23. После распределения посчитали процент девочек в каждом классе и полученные числа сложили. Каким должно быть распределение по классам, чтобы полученная сумма была наибольшей?

Решение. Пусть x девочек распределили в первый класс, где 22 ученика, $x \in [2;22]$. Тогда в другой, больший класс, попало (25-x) девочек. Доля девочек в первом классе – x/22, а в другом классе – (25-x)/23. Значит, суммарная доля девочек в двух классах равна x/22+(25-x)/23. Преобразовав сумму, получаем: x/506+25/23. Это линейная функция с положительным угловым коэффициентом, то есть, возрастающая. Значит, эта функция достигает своего наибольшего значения на правом конце промежутка [2; 22], при x=22. Таким образом, меньший класс полностью должен состоять из девочек, а в большем классе должно быть 3 девочки и 20 мальчиков.

Можно было рассмотреть другое решение. Нам нужно найти при каком распределении процентная сумма будет наибольшей. Вместо суммарного процента рассмотрим суммарную долю девочек (проценты и доли отличаются в 100 раз и достигают своего максимума при одном значении). В классе из 22 человек каждая девочка составляет 1/22 от общего количества. А в другом классе- 1/23. Ясно, что $1/23 < 1/22$. Для того, чтобы сумма долей была наибольшей, будем брать максимальные слагаемые, то есть, 1/22. Таких слагаемых 22. Проще говоря, мы заменили всех мальчиков из меньшего класса на девочку из большего класса. Таким образом, максимум достигается, когда все подобные перестановки сделаны, то есть, когда меньший класс полностью состоит из девочек, а в большем классе — 3 девочки и 20 мальчиков.

Ответ: в одном классе 22 девочки, в другом 3 девочки и 20 мальчиков.

Задача №4. В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте имеется 100 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 1 кг алюминия или 3 кг никеля. Во второй шахте имеется 300 рабочих, каждый из которых готов трудиться 5 часов в день. При этом один рабочий за час добывает 3 кг алюминия или 1кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. По условию задачи в первой шахте имеется 500 человеко-часов, а на второй шахте- 1500 человеко-часов. Пусть x человеко-часов затрачено на первой шахте на добыче алюминия, y человеко-часов – на второй шахте. Составим таблицу:

	Шахта 1		Шахта 2	
	Кол-во человеко-часов	Кол-во металла за смену, кг	Кол-во человеко-часов	Кол-во металла за смену, кг
Алюминий	x	x	y	3y
Никель	500-x	3(500-x)	1500-y	1500-y

Суммарная масса сплава:

$$x + 3y + 3(500 - x) + 1500 - y = - 2x + 2y + 3000.$$

По условию, на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля, то

$$x+3y=2(3(500-x) + 1500 -y),$$

отсюда $7x+5y=6000$. Следовательно, $y=1200-1,4x$. Подставим в формулу для общей массы сплава $-2x+ +2(1200-1,4x) +3000=5400 - 4,8x$.

Рассмотрим функцию $s=-4,8\ x +5400$. Это линейная функция, убывающая. Наибольшее значение принимает при $x=0$ $s=5400$. Это значит, что на первой шахте алюминий не добывают вообще. А добывают только никель. При этом, всего никеля добывают треть от 5400. Т.е., 1800. На первой шахте добывают никеля $3(500 - 0) =1500$ кг. Значит, на второй шахте никеля добывают 1800-1500=300 кг.

$1500-y=300$, $y=1200$. Алюминия на 2 шахте добывают $3y=3600$ кг, а на первой его не добывают. Итак, всего на двух шахтах добудут 1500+300=1800 кг никеля и 3600 кг алюминия. А масса сплава будет равна 3600+1800=5400 кг.

Ответ: 5400 кг.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ФИПИ, Открытый банк заданий ЕГЭ. Математика. Профильный уровень.

УДК 004.921

СОЗДАНИЕ АНИМАЦИИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПАКЕТОВ TIKZ И ANIMATE

Иван Михайлович Поташов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Potashov.IM@tversu.ru

Ключевые слова: *анимация, TeX, пакет TikZ/PGF, пакет animate.*

Аннотация. В статье даётся описание возможностей пакета animate для системы компьютерной вёрстки TeX, предназначенного для создания анимации в pdf-документах. Использование данного пакета в сочетании с графическим пакетом TikZ/PGF позволяет создавать анимацию любой сложности.

Ни для кого не является секретом, что графика в статьях и презентациях позволяет лучше описывать те или иные модели и явления. Однако часто требуется показать развитие модели в движении, и статичная графика уже не может справиться с этой задачей. Тогда на помощь приходит анимация. Но далеко не всем известно, как можно создавать анимацию в pdf- документах. Одним из решений данной проблемы является пакет animaite.

Данный пакет был создан в 2007 году Александром Граном (Alexander Grahn). Он позволяет создавать анимированную графику в форматах pdf и svg [1, 2]. Рассмотрим подробно его возможности.

1. Подключение. Пакет подключается стандартным образом при помощи команды *\usepackage[<опции пакета>]{animate}*. Команду можно поместить в любом месте в преамбуле между командами \documentclass и \begin{document} [1]. Опции пакета будут рассмотрены в пункте 3.

2. Средства создания анимации. В пакете имеется два средства создания анимации – с использованием внешних файлов и при помощи программных средств. Первый вариант реализуется при помощи команды *\animategraphics*. Команда имеет следующий формат:

\animategraphics[<опции>]{<частота>}{<имя файлов>}{<первый кадр>}{<последний кадр>}

Для использования данной команды необходимо предварительно разместить графические файлы, которые будут использоваться при создании анимации. Имя представленных файлов должно иметь одинаковое начало, и заканчиваться числовым номером. Например, мы можем использовать файлы «filename0», «filename1» «filename2» и т.д. Общая часть имён файлов указывается в качестве параметра <*имя файлов*>. Параметры <*первый кадр*> и <*последний кадр*> – числовые, указывающие на номера файлов, включённых в анимацию. Параметр <*частота*> также является числовым, и задаёт количество воспроизводимых кадров в секунду [1].

Команда *\animategraphics* также может быть использована для многостраничных pdf-файлов. В этом случае параметры <*первый кадр*> и <*последний кадр*> могут не указываться, т.е. команда будет иметь формат *\animategraphics[<опции>]{<частота>}{<имя файлов>}{ }{ }*.

Для использования программируемой анимации используется окружение *animateinline*. Данное окружение позволяет использовать не только графику из внешних файлов, но и иллюстрации, создаваемые при помощи графических пакетов, например, TikZ или PSTricks [1]. Это окружение имеет следующую структуру:

```
\begin{animateinline}[<опции>]{<частота>}
   ...вставляемый рисунок ...
\newframe[<частота>]
   ... вставляемый рисунок ...
\newframe*[<частота>]
   ... вставляемый рисунок ...
\newframe
\multiframe{<число кадров>}{[<величины>]}{
   ... повторяемый (параметризованный) рисунок...
}
\end{animateinline}
```

Команда *\newframe* используется только внутри окружения *animateinline* и служит, чтобы остановить предыдущий кадр и запустить следующий. Также у этой существует версия со звёздочкой, *\newframe**. Эта команда позволяет сделать паузу перед тем кадром, где эта команда размещается.

Команда *\multiframe* позволяет создавать параметризованную анимацию. Первый параметр указывает количество кадров в анимации. Второй параметр определяет список величин, используемых при программировании анимации. Каждая величина из списка параметров определяется следующим образом:

<имя величины>= < начальное значение>+<шаг>

Параметрические величины могут быть трёх типов: целый (имя такой величины должно начинаться с буквы «i» или «I»), вещественный (используются буквы «n», «N», «r», «R») и единица длины (используются буквы «D», «d»). Отрицательный шаг указывается со знаком «-». Примеры определения величин: i=1+2, Rh=10.0+-2.5, dim=1cm+2pt. Третий параметр данной команды обычно используется для программирования рисунка. В программном коде для ссылки на текущие значения величин используется знак обратной косой черты: \i, \Rh, \dim.

3. Опции пакета и команд. Ниже приведён список основных опций, которые используются для создания эффектов при воспроизведении анимации [1, 2, 3]:

- *autoplay* – используется для запуска автоматического воспроизведения анимации при открытии страницы;
- *autopause* – останавливает воспроизведение анимации при закрытии страницы;
- *autoresume* – возобновляет воспроизведение ранее остановленной анимации;
- *loop* – запускает повторный показ анимации после её окончания;

• *palindrome* – после окончания анимации воспроизводит анимацию в обратном порядке;

• *step* – используется для покадрового воспроизведения анимации. Переход от одного кадра к другому осуществляется при нажатии клавиши мыши;

• *nomouse* – запрещает реагировать на нажатие кнопок мыши.

Для регулирования размеров используются следующие опции:

• *width=<высота>* – определяет высоту изображения;

• *height=<ширина>* – определяет ширину изображения;

• *totalheight=<ширина>* – задаёт общую ширину анимационного виджета. Для указанных опций в качестве параметра указываются единицы длины, используемые в LaTeX;

• *scale=<множитель>* – масштабирует (растягивает по длине и ширине) анимацию в указанное число раз.

Некоторые параметры можно регулировать в ручном режиме при помощи специальной панели. Эта панель добавляется при помощи опции *controls*. Данная панель изображена на рис. 1, а значения кнопок даны в пояснении к рисунку.

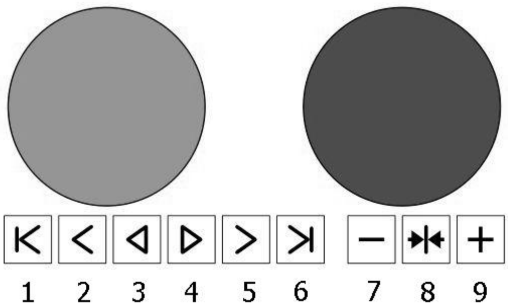


Рис. 1. Анимационный виджет с панелью управления. Назначение кнопок: 1 – переход к первому кадру, 2 – переход к предыдущему кадру при пошаговом воспроизведении, 3 – непрерывное воспроизведение в обратном порядке, 4 – непрерывное воспроизведение в прямом порядке, 5 – переход к следующему кадру при пошаговом воспроизведении, 6 – переход к последнему кадру, 7 – уменьшение скорости воспроизведения, 8 – возврат к начальному значению скорости, 9 – увеличение скорости воспроизведения. Кнопки 3 и 4 при непрерывном воспроизведении заменяются кнопкой «пауза»

Полный список опций и их описания дан в инструкциях [1, 3].

4. **Примеры.** Ниже приведёны несколько примеров, иллюстрирующих возможности пакета animate. В данных примерах для программирования использовался пакет TikZ. С инструкцией и приёмами работы с этим пакетом можно ознакомиться в источниках [4 – 7].

1) ***Движение по прямой***

```
\begin{animateinline}[controls,loop]{10}
  \multiframe{21}{r=-2.0+0.2}{ %анимация состоит и 21 кадра,
          % r –  вещественный параметр, определяющий положение точки
   \begin{tikzpicture}
```

```
    \draw[->](-2.5,0)--(2.5,0) node[right]{$X$}; % ось
     \draw[fill=red] (\r,0) circle (3pt); % окружность, меняющая своё
                                            положение
    \end{tikzpicture}}
  \end{animateinline}
```

2) ***Движение вдоль окружности***

```
  \begin{animateinline}[controls,loop]{15}
   \multiframe{60}{i=0+6}{ % i – целая величина
    \begin{tikzpicture}
    \draw[white](-2.2,-2.2)--(2.2,2.2); %белая линия, нужна чтобы
                                            избежать искажений
    \draw(0,0) circle (2); % траектория движения  - окружность
    \draw[fill=red] (\i:2) circle (3pt); %движущаяся окружность. Её центр
                                            задаётся в полярных координатах
    \end{tikzpicture}}
  \end{animateinline}
```

3) ***Движение по окружности с рисованием радиусов***. Этот пример является модификацией предыдущего примера и подразумевает использование циклов

```
\begin{animateinline}[controls,loop,scale=1.5]{15}
 \begin{tikzpicture}
   \draw[white](-2.2,-2.2)--(2.2,2.2); % первый кадр задаётся отдельно
   \draw(0,0) circle (2);
   \draw[green,thin](0,0)--(0:2); % радиус – тонкая линия зелёного цвета
   \draw[fill=red] (0:2) circle (3pt);
   \end{tikzpicture}
   \newframe  % разделение кадров
  \multiframe{59}{i=6+6}{
   \begin{tikzpicture} %
   \draw[white](-2.2,-2.2)--(2.2,2.2);
   \draw(0,0) circle (2);
    \foreach \x in {0,6,...,\i} % цикл для рисования радиусов
   {\draw[green,thin](0,0)--(\x:2);};
   \draw[fill=red] (\i:2) circle (3pt);
   \end{tikzpicture} }
\end{animateinline}
```

4) ***Изменение цветов***. Возможности пакетов animate и TikZ позволяют цветов объектов:

```
\begin{animateinline}[controls,loop,palindrome]{10}
 \multiframe{21}{i=0+5,}
{
   \begin{tikzpicture}
   \draw[fill=red!\i!green] (0,0) circle (1); %команда для рисования окружности,
меняющей свой цвет с красного на зелёный.
```

\draw[fill=green!\i!red] (3,0) circle (1); *%команда для рисования окружности, меняющей свой цвет зелёного на красный.*
\end{tikzpicture}
}
\end{animateinline}
Кадр из данной анимации можно видеть на рис. 1.

5) ***Вращение фигур.*** В этом примере рассматривается, как можно задать вращение фигур

```
\begin{animateinline}[controls,autoplay,loop,width=10cm]{24}
 \multiframe{60}{i=0+6}{
   \begin{tikzpicture}
   \draw[white] (-5,-2);
   \draw[white] (5,2);
   \draw[fill=red,thick] (-3,0) ellipse [x radius=1, y radius=2,rotate=\i];
   \draw[shift={(3,0)}, rotate=-\i,thick,fill=yellow] (-1,-1) rectangle (1,1) ;
   \draw[rotate=-\i,thick,fill=green] (90:1)--(210:1)--(-30:1)--cycle ;
   \end{tikzpicture}}
\end{animateinline}
```

6) ***Бегущая строка.*** Этот пример показывает, что текст тоже можно анимировать. Особенность данного примера состоит в том, что при создании анимации используются два параметра.

\begin{animateinline}[controls,autoplay,loop,width=10cm]{15}
 \multiframe{65}{D=8.2cm+-2mm,DA=-14em+2mm}
{\rule{\D}{1pt}~{\LARGE бегущая строка}~\rule{\DA}{1pt}}
\end{animateinline} *%Параметры D И DA определяют ширину линий*

На рис. 2 изображён кадр из данной анимации.

Рис. 2. Кадр из анимации «Бегущая строка»

5. Заключительные замечания. При подготовке анимации нужно учитывать следующую особенность: размеры анимации определяются по первому кадру, а остальные кадры анимации при компиляции масштабируются под эти размеры. Часто это приводит к искажениям картинки. Чтобы избавиться от искажений, мы можем расширить кадр, используя невидимые линии и точки. В частности, данный приём был использован в примерах 2, 3 и 5.

Также стоит помнить, что далеко не во всех программах для просмотра pdf-файлов анимация будет воспроизводиться корректно. Для корректного отображения анимации рекомендуется использовать программу Adobe Reader.

Создание анимации – это достаточно сложный процесс, для которого требуются знания возможностей графических пакетов, программирования и геометрии. Но, на наш взгляд, представленные приёмы будут интересны многим, особенно тем, кто начинает пробовать себя в деле создания анимации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Granh. A. The animate Package. – 2019. – 30 с. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: http://ctan.altspu.ru/macros/latex/contrib/animate/animate.pdf (дата обращения: 28.02.20).

2. The animate LaTeX Package. – 2020 [Электронный ресурс]. URL: https://gitlab.com/agrahn/animate (дата обращения: 28.02.20).

3. Серов С.С. Анимированная графика в PDF/LATEX // М.: ВМК МГУ. – 2016. – 17 с. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/0/0e/Animation_in_PDF-LaTeX_Serov.pdf (дата обращения: 28.02.20).

4. TikZ and PGF // Сайт TeXexample.net. – 2020. [Электронный ресурс]. URL: http://www.texample.net/tikz/ (дата обращения: 28.02.20).

5. Crémer J. A very minimal introduction to TikZ – Toulouse: Toulouse School of Economics. – 2011. – 24 с. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: https://cremeronline.com/LaTeX/minimaltikz.pdf (дата обращения: 28.02.20).

6. Tantau T. The TikZ and PGF Packages. Manual for version 3.1.5b – Lübeck: Institut für Theoretische Informatik Universität zu Lübeck, 2020. – 1318 с. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. – URL: http://mirror.macomnet.net/pub/CTAN/graphics/pgf/base/doc/pgfmanual.pdf (дата обращения: 28.02.20).

7. Кирютенко Ю.А. TikZ & PGF. Создание графики в LaTeX2ε-документах. – Ростов-на-Дону: Южный федеральный университет, 2014 – 227 с. [Электронный ресурс]. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: https://open-edu.sfedu.ru/files/pgf-ru-all-method.pdf (дата обращения: 28.02.20).

УДК 004.8

ЦИФРОВИЗАЦИЯ ИДЁТ…

Юлия Анатольевна Пустарнакова
Группа компаний «Ю-Софт», Москва
E-mail: Pustarnakova25@gmail.com

Ключевые слова: *премия «Просветитель», «Математическая составляющая», «Математические этюды» (http://www.etudes.ru/), искусственный интеллект (ИИ), Российское общество «Знание», «Цифровой куратор».*

Аннотация. В публикации автор рассказывает об актуальной инициативе Российского общества «Знание» и Общественной палаты РФ, посвящённой теме искусственного интеллекта (ИИ) и обучения в области информационных технологий.

А также — про веб-проект «Математические этюды» (http://www.etudes.ru/), не имеющий аналогов в мире.

Будучи математиком по образованию, я, волею судьбы, уже много лет работаю в другой сфере. Однако, сохранив интерес к науке, периодически публикую статьи и интервью по научной тематике в центральной печати.

Несколько лет я писала о финалистах и лауреатах премии «Просветитель», которая ежегодно вручается за лучшую научно-популярную книгу на русском языке. Одна из книг-победительниц прошлых лет – «Математическая составляющая» в конце прошлого года была переиздана в существенно расширенном и дополненном виде. В числе авторов этой книги 14 членов РАН, 3 лауреата Филдсовской медали, лауреат Нобелевской премии по физике. Организовал такой коллектив авторов редактор-составитель Николай Николаевич Андреев – заведующий лабораторией популяризации и пропаганды математики Математического института им. В. А. Стеклова РАН. Он же – основатель уникального российского научно-популярного онлайн-проекта «Математические этюды».

Сайт «Математические этюды» (http://www.etudes.ru/) просто находка для учителей математики, которые хотят увлечь наукой своих учеников. Основное его содержание – 3D-мультфильмы и видеоминиатюры на математические темы, посмотрев которые любой ребёнок поймёт сложные научные принципы и узнает о математических задачах, в том числе и до сих пор нерешённых.

Простейший пример – распределение объёма шара. И видеоролик о том, что, покупая апельсин с толстой кожурой, по объёму вы приобретаете в основном кожуру.

Всего мультфильмов (этюдов) около шестидесяти. Вот названия некоторых разделов: замечательные кривые, геометрия многогранников, геометрия с листом бумаги, математика и механика, шарнирные механизмы, непрерывность, наилучшее расположение точек, исторические сюжеты.

Мне больше понравились так называемые миниатюры. Здесь более скромная визуализация, но, на мой взгляд, более увлекательные сюжеты. Например, ответ на вопрос: много ли простых чисел или сколько надо лампочек, чтобы осветить комнату. И таких сюжетов около 40 штук. Кроме того, здесь есть ещё интерактивный задачник для тренировки в устном счёте.

Все желающие могут скачать диск с локальной версией этого сайта, а также диски с другими проектами лаборатории популяризации и пропаганды математики, например, с сайтом, на котором демонстрируются компьютерные модели механизмов нашего великого математика Пафнутия Львовича Чебышёва. Диски можно получить и по почте, фонд «Математические этюды» высылает диск бесплатно в регионы учителям математики и физики и в библиотеки.

Более того, на сайте «Математические этюды» есть раздел «iMath»: математические приложения для iPhone и iPad. Это арифметические ребусы, задачи для устного счёта, геометрические задачи. Причём, позиция авторов такая – приложения на русском языке должны быть бесплатны, версии с переводами на иностранные языки могут быть платны.

Веб-проект подобного рода (серия математической 3D-графики) не имеет аналогов в мире и очень органичен для нашей традиции в популяризации математики и естественных наук. Стоит вспомнить книги Я. И. Перельмана, журнал «Квант» и т. п. У нас популяризация – это не просто показ научных фокусов, что более характерно для западной традиции, в российской и советской традиции – это учёба через увлекательный показ научной идеи.

Николай Андреев читает популярные лекции по математике для взрослых и детей. Как он сам говорит, старается показать красоту науки, не просто популяризовать, а даже навязать интерес к ней.

Я была на его лекции в Культурном центре ЗИЛ в Москве. Зал едва вместил всех желающих. Расслабиться не удалось никому – всё лекционное время шло совместное решение задач.

Ещё более масштабное мероприятие по перспективам цифровизации, организованное Российским обществом «Знание», мне удалось посетить в преддверии начала этого учебного года.

В этом учебном году акции «В День знаний спроси у «Знания» предшествовал «круглый стол» в Государственной Думе, посвящённый теме искусственного интеллекта и обучения в области информационных технологий. Модератором беседы выступила заместитель председателя Комитета по образованию и науке Государственной Думы РФ, Председатель Российского общества «Знание» Любовь Николаевна Духанина.

Участники беседы – представители межрегионального молодёжного общественного движения «Кибердружина», авторы интернет-изданий и видеоблогеры – ведущие научно-популярных каналов на YouTube.

В начале встречи Любовь Духанина рассказала о задачах и проектах Российского общества «Знание». Многих заинтересовало возможное сотрудничество с Обществом, как в него вступить или как стать лектором Общества. Участники хотели узнать больше о конкурсе «Лучший лектор», о программе подготовки по новой профессии «Цифровой куратор» (консультант в области развития компьютерной грамотности населения), которая также будет запущена и в Республике Беларусь.

В вопросах участников поднимались темы цифровизации в разных сферах и опасностей, связанных с применением искусственного интеллекта. Собеседники пришли к выводу, что во избежание угрозы необходима тщательная апробация инноваций. Александр Крайнов, руководитель службы компьютерного зрения и технологий искусственного интеллекта «Яндекса», отметил, что такая апробация уже ведётся. Он также обратил внимание на фундаментальную безграмотность людей в сфере цифровых технологий, из-за чего появляются непонимание и страх. Следовательно, важно достоверно передавать информацию людям.

Но не будет ли сокращения рабочих мест в связи с вовлечением в трудовой процесс искусственного интеллекта? Любовь Николаевна успокоила: количество сокращённых рабочих мест будет меньше, чем количество вновь появляющихся в связи с новыми профессиями.

Возник спор: а нужно ли использовать современные технологии в процессе обучения? Одни утверждали, что технологии мешают разностороннему развитию ребёнка, сужают его воображение и препятствуют поиску альтернативных решений задач – например, посмотреть слово в словаре, а не в интернете, или произвести вычисления самому в уме вместо использования калькулятора. Другие настаивали, что технологии использовать нужно, ведь в будущем каждый человек должен хорошо ориентироваться в цифровом пространстве. Детям непременно нужно учиться этому! Любовь Николаевна Духанина согласилась, что это необходимо, однако рядом всё равно должны быть взрослые – учитель и родитель.

Говорили про образование в целом. Здесь много актуальных вопросов: от попыток запретить телефоны в школе до проблемы доступности образования для детей из небольших населённых пунктов.

А 2 сентября состоялось центральное событие проекта «В День знаний спроси у «Знания» – вебинар (онлайн-трансляция) по теме «Искусственный интеллект (ИИ)», подготовленный совместно Российским обществом «Знание» и Общественной палатой РФ.

Эксперты, которые отвечали на вопросы со всей страны в прямом эфире: Душкин Роман Викторович, директор по науке и технологиям Агентства Искусственного Интеллекта; Незнамов Андрей Владимирович, кандидат юридических наук, основатель проекта «Робоправо», заместитель руководителя Рабочей группы Госдумы по регулированию ИИ и робототехники, исполнительный директор ПАО «Сбербанк»; Пивоваров Игорь Олегович, главный аналитик центра искусственного интеллекта НТИ на базе МФТИ, Организатор Открытой конференции по ИИ Open Tasks AI; Сапунов Григорий Владимирович, технический директор Intento, CTO и сооснователь Intento, основатель Eclass, экс-руководитель разработки сервиса «Яндекс.Новости», эксперт по искусственному интеллекту и машинному обучению; Сошников

Дмитрий Валерьевич, старший эксперт по искусственному интеллекту и машинному обучению компании Microsoft.

В интернете все желающие могли заполнить анкету об отношении к искусственному интеллекту. Предварительные результаты по некоторым вопросам оказались такими.

Подавляющее большинство (более 88%) считают, что нужно контролировать развитие искусственного интеллекта, который превзойдёт человека в его способности анализировать информацию и принимать рациональные решения.

Области знаний, в которых следует повысить квалификацию, чтобы работать «бок о бок» с системами искусственного интеллекта: цифровая (компьютерная) грамотность – 75%, правовая грамотность – 54%, развитие креативных способностей – 51%.

Сферы общественной и личной жизни, где допустимо присутствие искусственного интеллекта: промышленность и сельское хозяйство – 71%, предоставление государственных услуг – 68%, в работе (переводчик с иностранных языков, планировщик времени и т. п.) – 67%.

А вот недопустимым искусственный интеллект посчитали в сфере образования – 34%, против беспилотного транспорта выступили 47% опрошенных.

Против замены человека искусственным интеллектом при принятии решений в гражданском судопроизводстве – около 70%, в уголовном – 74%.

Из этого анкетирования видно, что те, кто приняли участие в тестировании, трезво оценивают свои знания в области компьютерной грамотности (три четверти признают, что им необходимо повышение квалификации в этой сфере).

Вряд ли многие понимают, что именно сейчас вкладывается в понятие «Искусственный интеллект». Даже в научно-технической среде не вполне чёткое понимание на этот счёт. А люди, не работающие в данной сфере, по фантастическим книгам и фильмам представляют себе мыслящих антропоморфных роботов, которые чаще опасны, чем полезны человеку. Видимо, поэтому предполагаемый сильный ИИ и вызывает достаточно сильное опасение. А против беспилотного транспорта выступает почти половина опрошенных, хотя все уже давно летают на фактически беспилотных самолётах, где управление после взлёта пилот полностью передаёт автомату.

И эксперты на вебинаре стремились доступным образом объяснить, что же такое искусственный интеллект сейчас и в ближайшем будущем, и снять связанные с ним неоправданные опасения.

В частности, страх потерять рабочее место с приходом технологий ИИ. Вероятно, тот же страх испытывали извозчики, когда на смену гужевому транспорту пришёл автомобильный. Ведь целая индустрия обслуживала лошадей. Однако все благополучно нашли себе новые сферы деятельности. Или переход от печатных машинок к персональным компьютерам: делопроизводители переориентировались, переобучились. Ничего исключительно необычного не происходит, появление и развитие ИИ – это очередная ступенька технологического прогресса.

И в сфере образования фигура учителя не исчезнет. ИИ сможет ему помогать, например, выдавая рекомендации по обучению конкретного ученика, при проверке домашних заданий, а также автоматизируя административную часть работы учителя. Уже сейчас есть чат-боты – ассистенты преподавателя, которые отвечают на вопросы учеников.

ИИ в образовании — насущная необходимость, если мы хотим получать кадры, разбирающиеся в современной науке, технике и вообще жизни. Если раньше средняя продолжительность жизни человека была 40–50 лет, и 100 лет вокруг него ничего не менялось, то теперь при продолжительности жизни, стремящейся к 100 лет, принципиальные изменения происходят каждое десятилетие. В области ИИ качественный скачок вообще случается через каждые 3 года. И образование должно быть в авангарде изменений.

Специалистов в области ИИ в России готовят в МГУ, МФТИ, МИФИ, ВШЭ, МИСиС, НИУ ИТМО, Томском политехническом университете совместно с Microsoft, есть магистерские программы в МАИ, РУДН.

На вопрос «Где в ближайшее время ИИ заменит человека?» ответил Игорь Пивоваров. Он также рассказал о выходе в свет двух номеров первого в России альманаха про развитие искусственного интеллекта. Как раз первый июньский выпуск содержит обзор текущего состояния отрасли ИИ в России и мире.

Исходя из сегодняшнего положения дел, можно прогнозировать, что ИИ заменит человека в сфере финансов (на 99,9%), транспорта (разработки отечественных компаний уже позволяют использовать автомобили без человека за рулём), промышленности, сельского хозяйства и сфере обслуживания. В итоге, ИИ возьмёт на себя 90% рутинных функций, которые сейчас вынужден делать человек.

Главное сейчас для России – заняться стратегическим планированием в области ИИ. Здесь мы отстаём, некоторые страны уже подводят промежуточные итоги.

Нам нужен развитый финансовый рынок, адекватное правовое поле. Глубокая наука у нас есть. Проблема в том, что мы не умеем превратить её в деньги. Тут две причины. Во-первый, маленький рынок. IT-продукт можно продавать в любой стране, нужно интегрироваться в мировую систему, не замыкаться на территории своей страны. Во-вторых, и в главном – у нас дефицит людей с «продуктовым мышлением», то есть с чётким пониманием своих компетенций, сферы и способов приложения своих способностей.

Любовь Николаевна Духанина дополнила ответ Игоря Пивоварова, сказав о том, что ИИ в будущем сможет заменить людей в профессии «цифровой куратор». Она напомнила, что общество «Знание» не только разработало эту профессиональную квалификацию, но и добилось юридического признания новой профессии, на которую в обществе есть колоссальный запрос. В России образовано уже семнадцать независимых экзаменационных комиссий, которые могут выдавать диплом по этой специальности.

Будет ли единый государственный или надгосударственный «мозговой» центр управления ИИ? Наши эксперты считают, что это неправильно, и даже опасно, лучше несколько малых центров. Собственно, так всё и идёт естественным путём. Не правительства регламентируют конкретные шаги в развитии ИИ, а конкурирующие между собой IT-корпорации, например, в США – Google, Amazon, у нас – «Сбербанк», «Яндекс».

Уже сейчас обычные разработчики программного обеспечения могут использовать ИИ. Тут широкий спектр возможностей, существуют библиотеки готовых сервисов ИИ с уже решёнными задачами машинного перевода с одного языка на другой, распознавания эмоций и т. п.

ИИ, который сейчас у нас есть, применяется для решения плохо формализуемых конкретных задач. Его ещё называют «слабый ИИ».

Дам пояснения уже от себя. Принцип работы тут такой. Одна группа специалистов создаёт математическую модель (систему уравнений) под какую-либо конкретную задачу. Другая группа – готовит большую базу данных примеров, на которых проявляются закономерности этой задачи. Затем проводится «обучение» ИИ: на вход запрограммированной математической модели подаются примеры из обучающей выборки, и коэффициенты уравнений подстраиваются под известные выходы.

Таким образом, в числовые значения коэффициентов «закладывается» закономерность – та трансформация, которую нужно проделать с входными данными, чтобы получить желаемые данные на выходе.

После машинного обучения на большом массиве примеров ИИ готов работать: получив пример не из обучающей выборки, выдавать адекватный в рамках выявленной закономерности ответ.

Планируется, что в будущем появится сильный ИИ, который сможет решать разные задачи, то есть в своей универсальности будет ближе к человеческому интеллекту.

Что касается настоящего, то у нас в России есть чем гордиться: только две страны имеют свои поисковые системы, успешно конкурирующие с доминирующим Google США, – Россия и Китай. Наш «Яндекс» в русскоязычном сегменте интернета работает даже несколько лучше, чем Google.

О первой десятке наших лидеров в сфере ИИ (компании и люди) как раз можно прочесть в первом выпуске альманаха «Искусственный интеллект».

А цикл вебинаров по современным цифровым технологиям будет продолжаться. Анонсированы темы: виртуальная и дополненная реальность, большие данные.

УДК 004

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИСКУССТВЕННЫХ НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ В СИСТЕМАХ ОБНАРУЖЕНИЯ ВТОРЖЕНИЙ

Андрей Олегович Романенков
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: amicus765@gmail.com

Ключевые слова: *информационная безопасность, системы обнаружения вторжений, искусственные нейронные сети, перцептрон, LSTM, сетевой трафик*

Аннотация. В данной работе рассматривается проблема использования искусственных нейронных сетей (ИНС) в анализе сетевого трафика системами обнаружения вторжений (СОВ). Приводится краткая классификация СОВ и способы анализа данных в них, сделан выбор в пользу интеллектуального анализа данных. Для проведения исследования использованы многослойный перцептрон (определение типа трафика) и LSTM-сеть (прогнозирование трафика), даётся краткое описание их структуры и параметров. Описывается база данных KDD-99, на которой проводилось обучение ИНС. Поставлен эксперимент, по результатам которого сделаны выводы о точности прогнозов и даны предложения для дальнейшего исследования.

1. Введение и постановка задачи. С построением информационных систем и вычислительных сетей всё чаще требуют внимания проблемы возникновения новых угроз информации и обеспечения безопасности соответствующих источников от атак. Одним из средств, помогающим в обнаружении компьютерных атак, являются системы обнаружения вторжений (СОВ). Существуют следующие основные классификации СОВ:

- по способам реализации (сетевые – действуют на узлах сети, хостовые – решение реализовано на конкретном устройстве, а также гибридные);
- по шагам реализации атаки (до сбора нарушителем информации о системе; анализ в реальном времени; оценка целостности системы после завершения атаки);
- по способам анализа (анализ по сигнатурам или аномальному поведению в сети).

Сигнатурный метод помогает обезопасить систему от атаки злоумышленника, если уже заранее известны фрагменты заголовков и/или тела сетевых пакетов, считающихся подозрительными, и они внесены в базу данных СОВ. Однако СОВ часто сталкивается с неизвестным поведением, поэтому желательно заранее построить «эталонный профиль поведения пользователя» и отталкиваться от него. Для этого используются (описано в [3]):

- пороговые значения (когда наблюдаемые характеристики выходят за границы интервала доверия, система сигнализирует об этом событии);
- статистические меры (критерий хи-квадрат, критерий Колмогорова – Смирнова, U – критерий Манна-Уитни; ROC -кривые, контрольные карты и т.д.)
- кратномасштабный анализ (непрерывное и дискретное вейвлет-преобразования, мультифрактальный анализ и т.д.)

• интеллектуальный анализ (деревья решений, кластерный анализ, байесовские сети, метод опорных векторов, k-ближайших соседей, эволюционное программирование, генетические алгоритмы, а также нейронные сети).

В текущей работе применяется один из интеллектуальных методов анализа данных в сетевой СОВ реального времени – обучение искусственных нейронных сетей долгой краткосрочной памяти (LSTM) на пакетах трафика с целью построения модели генератора трафика, а также обучение на трафике многослойного перцептрона - для возможности выявлять в дальнейшем аномалии в сети. Математический аппарат нейронных сетей позволяет более простым, чем в случае со статистическими мерами и кратномасштабным анализом, образом, производить обучение на входящих сетевых данных и получать при этом эффективное решение.

2. Модель. В рамках данной работы для обучения нейронных сетей использовалась выборка из базы данных KDD-99 (она находится в открытом для скачивания доступе в сети Интернет по ссылке [5]), записи в ней представляют собой сетевые соединения с заданным количеством параметров, их примерное описание показано, например, в [1]. Эта выборка имитирует полученный на вход СОВ сетевой трафик (его также можно собрать с помощью специальных утилит, например, Wireshark, и далее сохранить в удобном формате – JSON, XML, CSV и т.д.). Для перцептрона имеются метки «вид атаки»/ «не атака». LSTM – сети работают с векторами, при этом обучение проводится без учителя, поэтому им не нужны метки класса. Более полное описание перцептрона можно найти в [4], а сетей LSTM-вида – в [6], [7] и [8].

Наша полносвязная сеть состоит из последовательно связанных слоёв: входного слоя (количество нейронов в нём – это размерность поступающего на вход вектора данных, 121 нейрон, почему так – будет сказано далее), четырёх скрытых слоёв с 10 нейронами на первом из них, 50 нейронами на втором, 10 нейронами на третьем, и единственным нейроном - линейным классификатором – на четвёртом, а также выходного слоя с одним нейроном. Архитектура скрытых слоёв была подобрана экспериментально, её можно модернизировать по усмотрению. В качестве функции активации нейронов на первых трёх скрытых слоях использовалась ReLU, на четвёртом скрытом слое – линейная активация, на выходном слое – softmax. Для инициализации весов межнейронных связей на скрытых слоях использовалось случайное нормальное распределение. Применяемый метод оптимизации – Adagrad, функция потерь – перекрёстная энтропия.

Теперь рассмотрим, как работает LSTM – сеть для предсказания трафика, обучаясь на той же базе KDD-99. Для создания датасета используем разбиение на входные данные, временной шаг, и выходные данные, при этом выходные данные – это массив входных данных, сдвинутый на переменную look_back (символизирующую собой то, насколько далекие во времени предсказания может делать сеть), временной шаг по умолчанию делаем равным 1 (поскольку у нас есть множество независимых друг от друга во времени соединений). В качестве функции потерь при обучении сети используем среднеквадратичную ошибку, метод оптимизации – Adam (усовершенствованный метод стохастического градиентного спуска). Методы Adam и Adagrad описаны в [2]. Сеть имеет 121 выходной слой, по количеству генерируемых признаков. На вход подаётся по одному вектору данных, каждый размером 121×1. Количество эпох обучения – 100 (экспериментально). recurrent_dropout=0.25, это значит, что на каждой эпохе обучения четверть нейронов «отключается», чтобы избежать переобучения.

Далее можно приступать к реализации задачи аппаратным методом.

3. Эксперимент. При написании работы была реализована программа на языке программирования Python с использованием библиотеки для машинного обучения Keras. Первая часть программы описывает перцептрон, вторая – LSTM-сеть. Аппаратная платформа – сервера Google.

Входные данные для многослойного перцептрона должны быть нормализованы. Поскольку в наборе данных есть как вещественные числа, так и строки, все они приводятся к общему виду – действительным числам, а затем мы пользуемся z-оценкой для каждого значения (она равна значению минус среднему арифметическому всех значений данного столбца, делённому на среднеквадратическое отклонение данных столбца), чтобы положить их в диапазон от -1 до 1. Так из 41 параметра получается 121 аргумент. Параметры подаются на вход сети, и начинается процесс обучения.

В нашем случае полносвязная сеть обучалась 48 эпох. Для ускоренного обучения сети использовалась функция ранней остановки – если за n эпох функция потерь изменялась менее чем на отклонение $minDelta$, то обучение сети заканчивалось. Автором были взяты значения $n = 5$, $minDelta = 0.001$. Точность проверки на валидационных данных составила 0.987. Точность проверки на тестовых данных составила 0.964. Для многослойного перцептрона, обучавшегося 48 эпох, это достаточно неплохой результат.

Далее, научив LSTM-сеть предсказывать соединения по тренировочным данным, опробуем обученную модель на тестовом наборе. Предсказанные значения оказываются близки по точности к реальным (критерий оценки здесь в определённой степени субъективен, поскольку трафик может сильно изменяться во времени; однако, временные ряды прогнозируются с высокой вероятностью) и поэтому в связке с перцептроном могут использоваться для прогнозирования поведения сети в ближайшее время, что, в свою очередь, и является основной пользой описанной модели.

4. Выводы и дальнейшая работа. Полученные нами результаты показывают, что связка «перцептрон + LSTM-сеть» эффективна при анализе сетевого трафика, что позволяет использовать её в аналитическом модуле систем обнаружения вторжений вместо традиционных методов анализа или вместе с ними. В то время как LSTM-сеть успешно работает с временными рядами и позволяет прогнозировать их, полносвязная ИНС выполняет задачу распознавания типа трафика.

Представленную таким образом сеть можно также обучать в режиме реального времени с системным администратором или, доработав, саму по себе – например, создавать классы новых, ещё неизвестных типов трафика, и в дальнейшем назначать им метки. Более того, анализ можно распространить не только на сетевой трафик, но и на системные действия пользователя, что является частью более обширной темы (в частности, здесь возможен новый подход к построению «эталонного профиля поведения пользователя»).

Что можно улучшить в данной модели?

- Изменить количество слоёв / нейронов для полносвязной сети и LSTM-сети
- Применить иные методы оптимизации
- Варьировать количество эпох обучения
- Изменить размер и параметры выборки для обучения сети (подключить другие существующие базы)
- В случае с LSTM – сетью – варьировать параметры временного шага и «взгляда в будущее»
- Использовать другие технологии распараллеливания данных на GPU и TPU для ускорения процесса обучения сети
- Ввести критерий объективной оценки трафика, генерируемого LSTM-сетью
- Использовать другую программную библиотеку для ускорения обучения и работы сети

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Выходные данные TCP-анализатора // Интеллектуальные информационные технологии URL: http://iit.bstu.by/index.php/news/20/17/vyhodnye-dannye-TCP-analizatora (дата обращения: 1.03.2020).
2. Модификации метода стохастического градиентного спуска для задач машинного обучения с большими объемами данных // http://www.machinelearning.ru/ URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/images/a/a0/2016_417_ChabanenkoVD.pdf (дата обращения: 1.03.2020).
3. Шелухин О.И. Обнаружение вторжений в компьютерные сети [сетевые аномалии]: учебное пособие для вузов по направлению 210700 "Инфокоммуникационные технологии и системы связи" / О.И. Шелухин, Д.Ж. Сакалема, А.С. Филинова; ред. О.И. Шелухин. – М.: Горячая Линия-Телеком, 2013. – 220 с.
4. Ясницкий Л.Н. Интеллектуальные системы. – М.: Лаборатория знаний, 2016. – 221 с.
5. KDD Cup 1999 Data URL: http://kdd.ics.uci.edu/databases/kddcup99/kddcup99.html (дата обращения: 1.03.2020).
6. LSTM: A Search Space Odyssey // arxiv.org URL: https://arxiv.org/pdf/1503.04069.pdf (дата обращения: 1.03.2020).
7. The Unreasonable Effectiveness of Recurrent Neural Networks // Andrej Karpathy blog URL: http://karpathy.github.io/2015/05/21/rnn-effectiveness/ (дата обращения: 1.03.2020).
8. Understanding LSTM Networks // colah's blog URL: http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/ (дата обращения: 1.03.2020).

УДК 378.096, 510.6, 510.642

ЭЛЕМЕНТ КОНСТРУКТИВНОСТИ В МАТЕМАТИЧЕСКИХ КУРСАХ[1]

Михаил Николаевич Рыбаков
ИППИ РАН, Москва; ВШЭ, Москва; ТвГУ, Тверь
E-mail: m_rybakov@mail.ru

Ключевые слова: *конструктивное доказательство, математическое образование.*

Аннотация. Обсуждаются вопросы, связанные конструктивностью и неконструктивностью математических рассуждений, возникающих на занятиях по математическим дисциплинам.

Школьная математика *неявно* формирует у учащихся отношение к математическому знанию как к *строгому* и *конструктивному* (*алгоритмическому*): математические утверждения строго доказываются, а математические задачи решаются за счёт применения чётко описанных методов. Позже (например, в вузе) выясняется, что имеется немало оснований усомниться как в строгости, так и в конструктивности многих рассуждений и построений.

Ниже мы не будем обсуждать вопросы строгости изложения и применения математических фактов, и затронем лишь вопросы, связанные с конструктивностью рассуждений.

Конструктивность рассуждений, доказательств и построений становится важной, когда мы хотим располагать методом решения тех или иных задач, в частности, написать соответствующую компьютерную программу, поэтому на занятиях уделять внимание конструктивности стоит.

Неконструктивность в доказательствах возникает, как минимум, «по вине» логики, которой мы пользуемся, и «по вине» некоторых специальных аксиом тех или иных математических теорий. Примерами часто применяемых в доказательствах неконструктивных логических законов являются *закон исключённого третьего*, *закон двойного отрицания*, *закон контрапозиции*. Примером неконструктивной аксиомы является *аксиома выбора*, которую в ряде случаев приходится добавлять к аксиоматической теории множеств: например, без неё не удаётся доказать некоторые важные теоремы математического анализа, в том числе входящие в программу первого года обучения в ВШЭ, ТвГУ и других вузов.

То, что хотелось бы здесь обсудить, и на что хотелось бы обратить внимание, – это ситуации, когда на математическом занятии происходит следующее:

(1) приводится существенно неконструктивное рассуждение (доказательство, построение, и т.п.) и при этом не подчёркивается его неконструктивность;

[1] Работа поддержана РФФИ, грант 18-011-00869.

(2) приводится конструктивное рассуждение и при этом не подчёркивается его конструктивность;
(3) приводится неконструктивное рассуждение, но при этом оно подаётся в такой форме, что может быть воспринято слушателями как конструктивное;
(4) приводится неконструктивное рассуждение в случае, когда имеется конструктивное рассуждение, приводящее к том же результату и при этом не являющееся существенно сложнее приведённого.

Регулярное возникновение указанных ситуаций может привести к тому, что у обучающихся математике грань между конструктивными и неконструктивными построениями, рассуждениями и доказательствами будет стираться (а может, даже и не возникнет).

Далее будут приведены примеры и пояснения для каждого из указанных выше четырёх пунктов; на выступлении предполагается обсудить эти примеры, а также, возможно, и другие, близкие к ним.

Начнём с пункта (1).

Сразу отметим, что здесь как раз сложности обычно не возникают: если приведено существенно неконструктивное доказательство, то обычно на это обращается внимание.

Пример 1. *Утверждение о существовании невычислимых функций.*

Формулировка: существуют невычислимые по Тьюрингу функции.

Доказательство состоит в том, что множество всех вычислимых функций счётно, а множество всех функций на счётном множестве несчётно, откуда следует, что множество невычислимых функций несчётно, а значит, они существуют.

Это доказательство не является конструктивным, т.к. оно не даёт ни способа построения, ни, тем более, хоть одного примера невычислимой функции. В математических курсах по теории алгоритмов обычно оно лишь предваряет дальнейшее изложение теории, где примеры невычислимых функций затем всё-таки приводятся.

Подобные доказательства называются доказательствами чистого существования: в них доказывается существование объекта, но при этом не предъявляется способ его построения.

Пример 2. *Лемма Куратовского – Цорна.*

Частично упорядоченное множество, в котором любая цепь имеет верхнюю грань, содержит максимальный элемент.

Доказательство основано на применении аксиомы выбора.

Пример 3. *Теорема Цермело.*

Формулировка: любое множество можно вполне упорядочить.

Доказательство основано на применении аксиомы выбора.

На самом деле, и лемма Куратовского – Цорна, и теорема Цермело эквивалентны в теории множеств аксиоме выбора, поэтому оба эти утверждения не имеют конструктивных доказательств.

Теперь обратимся к пункту (2).

Пример 4. *Теорема о существовании обратной матрицы.*

Формулировка: если $|A| \neq 0$, *то существует* A^{-1}.

Доказательство состоит в том, что при условии $|A| \neq 0$ *приводится и обосновывается формула вычисления* A^{-1}.

Формально, утверждение имеет такую же форму, как приведённое в примере 1. Но для утверждения в примере 1 приведено неконструктивное доказательство, а в случае утверждения в примере 4 доказательство является конструктивным, т.к. содержит способ построения объекта, существование которого утверждается. Можно было бы подчеркнуть конструктивность, заменив формулировку «*если* $|A| \neq 0$, *то существует* A^{-1}» на «*если* $|A| \neq 0$, *то можно построить* A^{-1}».

Пример 5. *Теорема о линейном разложении наибольшего общего делителя двух чисел.*

Формулировка: если d *– наибольший общий делитель чисел* a *и* b, *то существуют такие числа* u *и* v, *что* $d = au + bv$.

Доказательство основано на алгоритме Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух чисел; анализ алгоритма и даёт способ нахождения таких чисел.

В этом примере, в отличие от примера 4, не предлагается формула нахождения требуемых объектов. Тем не менее, указывается способ их нахождения, т.е. доказательство является конструктивным. Снова можно усилить формулировку, заменив фразу «*существуют такие числа* u *и* v» на «*можно найти такие числа* u *и* v».

Теперь обсудим пункт (3).

Прочтение кванторов существования возможно не только как «*существует*», а как, например, «*можно указать*», «*можно выбрать*» и т.п. Подобные фразы допускают понимание типа «*имеется способ* указать», «*имеется способ* выбрать», при этом в некоторых случаях такого способа (как метода или алгоритма) может и не быть.

Чтобы пояснить это, вернёмся к примеру 3, где приводится следующая формулировка теоремы Цермело: *любое множество можно вполне упорядочить.* Теорема Цермело эквивалентна аксиоме выбора, поэтому содержащееся в ней утверждение не является конструктивным, в частности, слова «можно упорядочить» здесь понимаются как утверждение лишь о существовании порядка (упорядочения) с соответствующим свойством, а не о способе его нахождения или построения.

Следующие два примера связаны не с доказательствами, а с определениями математических понятий.

Пример 6. *Определение десятичной дроби, взятое из Википедии.*

Формулировка: десятичная дробь – разновидность дроби, которая представляет собой способ представления действительных чисел в виде $\pm d_m \ldots d_1 d_0, d_{-1} d_{-2} \ldots$, *где* (и далее идёт некоторое пояснение).

При этом предполагается, что десятичные дроби можно использовать для представления любого действительного числа. Если в примере 6 понимать слово «способ» как «метод, алгоритм», то фактически мы *можем* представить в виде десятичных дробей лишь вычислимые числа, образующие счётное множество; но всё множество действительных чисел континуально, и содержит больше элементов, чем множество всех алгоритмов.

Пример 7. *Определение функции, взятое из Википедии.*

Формулировка: функция – это соответствие между элементами двух множеств, установленное по такому правилу, что каждому элементу первого множества соответствует один и только один элемент второго множества.

Здесь слово «правило» не надо понимать конструктивно, в частности, как «закон, метод, способ, алгоритм»; иначе мы получим, что множество функций должно быть не более чем счётно, т.к. таково множество правил, которые мы можем сформулировать в используемом нами конечном алфавите.

Ещё один пример связан с неконструктивной составляющей известного метода.

Пример 8. *Метод приведения квадратичной формы к главным осям, или метод Якоби.*

Описание метода: нужно построить матрицу формы, найти её собственные числа, затем записать форму, определяемую как сумму квадратов букв с коэффициентами, равными найденным числам.

Этот метод действительно даёт способ приведения квадратичной формы к главным осям, если количество букв формы не превышает четырёх. В остальных случаях мы сталкиваемся с задачей нахождения корней многочлена, степень которого больше или равна пяти, а мы не располагаем методом, позволяющим точно указывать корни любого такого многочлена.

Замечание. Имеется метод, позволяющий найти корни любого многочлена *приближённо* с любой точностью: достаточно построить и применить систему функций Штурма для отделения корней многочлена друг от друга, а затем для нахождения каждого из корней применить, например, метод половинного деления. Но он решает другую задачу – не точного, а именно приближённого вычисления корней.

Наконец, обратимся к пункту (4).

Пример 9. *Единственность разложения вектора по базису.*

Формулировка: для любого вектора x *линейного пространства* L *с базисом* $e_1,\dots,e_n$ *существует единственный набор чисел* $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, *для которого выполнено равенство* $x = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Схема доказательства: существование такого набора заложено в определении базиса, а для обоснования единственности предполагаем, что существуют два разных таких набора, а потом показываем, что это приводит к противоречию с линейной независимостью векторов базиса.

Доказательство основано на применении рассуждения «от противного», основанного в данном случае на использовании закона исключённого третьего, или, как вариант, на законе двойного отрицания. Эти законы не являются конструктивными, и с их помощью можно получать доказательства чистого существования. Применение этих законов для доказательства приведённого в примере утверждения не является необходимым, т.к. можно рассуждать иначе: предположить, что существуют два таких набора чисел, и затем показать, что они равны. В таком доказательстве не возникает предположения о том, что наборы различны, и потому их равенство не приводит к противоречию, но, тем не менее, даёт единственность.

Это подводит нас к вопросу: а всегда ли можно так поступать в доказательствах единственности? Покажем, что во многих случаях в доказательстве единственности действительно можно обойтись без рассуждения «от противного».

Пример 10. *Доказательства единственности объекта.*

Формулировка: существует единственный x, *для которого имеет место* $P(x)$.

Схема доказательства: предположим, *что существует* y, *для которого имеет место* $P(y)$, *но при этом* $x \neq y$; *далее доказываем*, *что отсюда следует равенство* $x = y$, *а это даёт противоречие с предположением*, *что* $x \neq y$; *делаем вывод о единственности* x.

Если доказательство единственности проводится по указанной схеме рассуждения, то оно неконструктивно. Но из него извлекается следующее рассуждение: *если выполнены условия* $P(x)$ *и* $P(y)$, *то* $x = y$. А этого рассуждения достаточно, чтобы доказать единственность, и оно является конструктивным.

Отметим, что оба примера связаны с тем, как мы понимаем определение единственности, а также с тем, как мы его формулируем.

Фактически можно считать, что выше были использованы два разных определения единственности x, обладающего свойством $P(x)$:

(а) *если* $y \neq x$, *то* $P(y)$ *не выполняется*;

(б) *если выполняется* $P(y)$, *то* $y = x$.

Логические формулы $y \neq x \to \neg P(y)$ и $P(y) \to x = y$, соответствующие форме приведённых определений (а) и (б), являются *логически эквивалентными*: их эквивалентность выражается законом контрапозиции. Но закон контрапозиции не является конструктивным, поэтому определения (а) и (б) не эквивалентны с точки зрения конструктивной логики. Более точно, утверждение «из (б) следует (а)» является конструктивным, а утверждение «из (а) следует (б)» – нет.

Сделанное наблюдение приводит к выводу, что оказывается важным не только то, как мы доказываем математические утверждения, но и то, как мы даём определения математическим понятиям.

УДК 004.8

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ПРИМЕНЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИСКУССТВЕННОГО ИНТЕЛЛЕКТА В МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБРАЗОВАНИИ

Анатолий Александрович Серов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Serov.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *искусственный интеллект, математическое образование, машинное обучение ML и его виды*.

Аннотация. Работа посвящена некоторым вопросам и возможным перспективам применения современных технологий искусственного интеллекта (ИИ) в математическом образовании различного уровня. Представлены возможные направления такого применения. Основное внимание отведено использованию технологий, связанных с машинным обучением. Приведены результаты проведения некоторых вычислительных экспериментов.

Искусственный интеллект настойчиво проникает во все сферы деятельности современного человека, в том числе и в математическое образование. В Википедии дается такое определение ИИ: «Искусственный интеллект (англ. artificial intelligence, AI) - свойство интеллектуальных систем выполнять творческие функции, которые традиционно считаются прерогативой человека, наука и технология создания интеллектуальных машин, особенно интеллектуальных компьютерных программ» [1]. На наш взгляд, существуют несколько направлений возможного применения технологий ИИ в математическом образовании. При этом есть основания полагать, что наиболее важное значение данные технологии будут иметь в дошкольном и начальном математическом образовании. Технологии ИИ и средства на их основе могут занять важное место в обучении математике детей с ограничениями по здоровью, с ЗПР и др. На основе технологий ИИ, адаптированных к математическому образованию, могут быть разработаны специальные программы-приложения на базе различных устройств для самостоятельной работы (обучения) учащихся. Значительные место технологии ИИ могут занять также в среднем и высшем профессиональном образовании. Рассмотрим отдельные направления возможного применения технологий ИИ в математическом образовании различного уровня.

Одним из традиционных применений технологий ИИ в математическом образовании является создание и использование компьютерных средств для выполнения математических заданий, т.е. так называемых «математических решателей». К этим технологиям можно отнести средство UMS («универсальный математический решатель»), предназначенное для символьных вычислений, построения графиков функций и др. [2]. Также к этому классу условно можно отнести различное специализированное ПО: MATLAB, Mathcad, Mathematica и др. Полагаем, что в этот класс можно включить и различные математические онлайн решатели-тренажеры, например, Wolfram Alpha [2] и др. Целесообразность применения данных учебных средств в обучении математике не очевидна и оценивается математиками по-разному. У нас имеется многолетний опыт использования ресурса Wolfram Alpha в преподавании дисциплины «Математика» для студентов ИПОСТ ТвГУ, обучающихся по профилю «Начальное образование», при изучении отдельных тем. Данный ресурс используется нами только в качестве дополнительного способа выполнения задания. При этом часто возникает новая учебная задача: показать эквивалентность полученных решений (например, множество решений линейных уравнений с двумя переменными с целыми коэффициентами в целых числах может быть записано в разных формах).

Широкие возможности для создания различных инструментов ИИ для тестирования правильности выполнения некоторых математических заданий (в начальном образовании) представлены в программе SMART Notebook v.11-18: специальные тестирующие таблицы (классификация), инструментальное средство «Конструктор занятий» (классификация) и др. [5].

В математическом образовании достаточно много внимания уделяется работе с различными математическими текстами: с текстом арифметической задачи (сокращение текста задачи, определение структуры текста задачи: условие, вопрос (начальное образование); чтение числовых выражений, числовых неравенств и др. Представляют интерес возможные применения технологий ИИ в данной сфере математического образования. Мы приведем два важных примера таких применений:

1. Генерация человеческой речи. Данное применение технологий ИИ реализовано, например, в программных продуктах Word Online, OneNote Online от компании Майкрософт как иммерсивное средство чтения текста [3]. Доказана эффективность применения данного приема обучения, особенно для детей с различными ограничениями по здоровью. Программа читает текст вслух и одновременно выделяет отдельные слова. Это помогает улучшить правильность, беглость и осознанность чтения, акцентируя и удерживая внимание, преодолевая «скученность текста». У нас имеется положительный опыт применения данного средства на уроках математики в начальной школе: чтение текстов задач, математических правил, заданий и др.

Прямой называется задача, которая решается первой.

Обратная задача получается из прямой взаимозаменой

известного и искомого чисел.

Рис. 1. Пример применения иммерсивного средства чтения для математического текста в среде Word Online

2. Текстовый анализ или обработка естественного языка (NLP). В данном разделе машинного обучения решаются разнообразные задачи работы с текстами: классификация, кластерный анализ текстов, поиск сущностей,

облако слов и многое другое. На наш взгляд, представляет интерес классификация некоторых математических текстов или поиск сущностей в данном тексте: простая задача или составная, с полными или недостающими данными и др. На этой основе могут быть разработаны обучающие приложения (тренажеры) для самостоятельного обучения. Нами был проведен вычислительный эксперимент с применением алгоритмов NLP для оценки возможности разделения текстов задач из школьного курса математики по типу пропорциональной зависимости в задаче: прямая или обратная. Вычисления были выполнены в среде Python 3. Точность результатов на тестовой выборке приближается к 100%. Приведем пример применения полученной модели к тексту задачи Л.Ф. Магницкого.

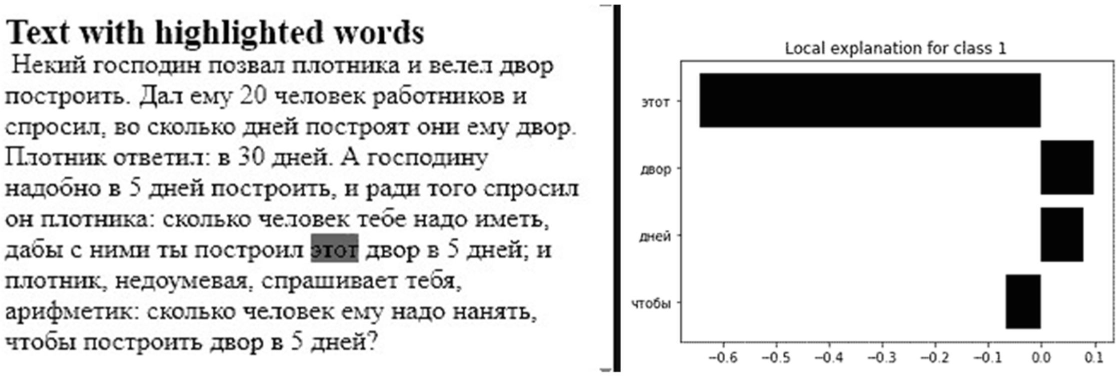


Рис. 2. Текст задачи с выделением слов, наиболее важных для классификации (слева). Важность слов текста задачи для классификации (справа). Визуализация выполнена в среде Python 3.5 с применением модуля LIME

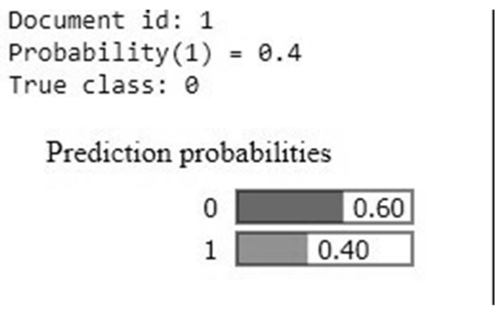


Рис. 3. Предсказание класса задачи по ее тексту: данная задача с вероятностью 0.6 относится к классу задач с обратной пропорциональной зависимостью. Визуализация выполнена в среде Python 3 с применением модуля LIME

Одной из наиболее интенсивно развивающихся технологий ИИ является компьютерное зрение (CV) [6]. В качестве одного из примеров возможного применения компьютерного зрения в математическом образовании нами были разработаны специальные компьютерные средства (модели) на основе свёрточных нейронных сетей для оценки качества всех рукописных цифр 0-9. Данные средства (при использовании в учебном процессе) могут способствовать устранению типичных графических ошибок детей: нарушений пропорций и угла наклона рукописных цифр. Проведен следующий вычислительный эксперимент: разработаны обучающая и тестовая выборки, состоящие из цифр с различным качеством; обучена соответствующая нейронная сеть; сохранена соответствующая модель. Вычисления производились в среде Python 3 и R с применением модуля/пакета keras.

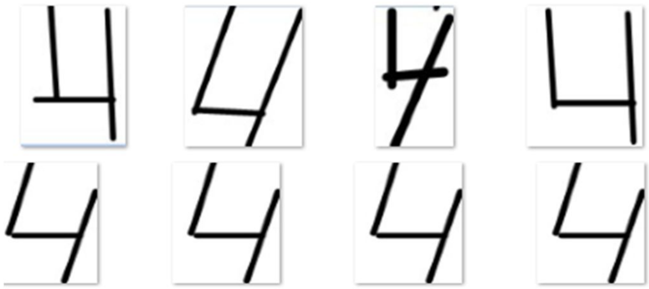


Рис. 4. Обучающая выборка для цифры «4» (фрагмент). Верхний ряд – цифры «4» с типичными графическими ошибками, нижний ряд – цифры с высоким качеством

На тестовой выборке модель определила качество цифр (хорошая или плохая) с точностью 100%. Полученная модель позволяет оценить качество произвольных рукописных цифр, написанных обучающимися.

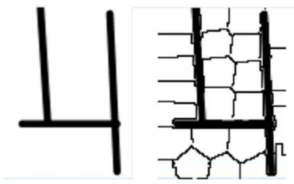


Рис. 5. Применение модели к изображению рукописной цифры «4» с низким качеством. Слева – оригинал, справа - компьютерное представление (суперпиксели). Качество данной цифры, определенное моделью - 19% (низкое)

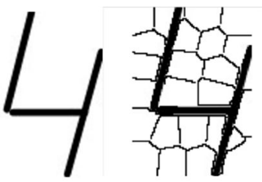


Рис. 6. Применение модели к изображению рукописной цифры «4» с высоким качеством. Слева – оригинал, справа - компьютерное представление (суперпиксели). Качество данной цифры, определенное моделью - 99.9% (высокое)

Обнаружено полное соответствие между оценками качества цифр, полученными с помощью данной реализации технологии компьютерного зрения, и оценками эксперта (каппа Коэна 0.9).

Возможны и другие области применения технологий компьютерного зрения в математическом образовании для оценки качества графических объектов: графические диктанты, лабиринты, геометрическая мозаика, задачи-раскраски, задачи на построение и др. Разработаны специальные программы и для распознавания 2D/3D геометрических фигур [7, 8].

Считаем, что в будущем подобные технологии ИИ могут найти широкое применение в достаточно сложном для обучающихся математическом образовании. Данные направления требуют проведения соответствующих научных исследований. Результаты подобных исследований могут найти свое отражение и в методике преподавания математики. На основе подобных подходов также могут быть разработаны различные приложения для аудиторной работы и самостоятельного обучения. Элементы технологий ИИ уже представлены в современном стандартном ПО для интерактивной доски и др. Например, в программе SMART Notebook содержатся инструменты для распознавания рукописных цифр и некоторых геометрических фигур. Данные технологии на основе ИИ широко применяются на уроках математики в начальной школе и вызывают огромный интерес у детей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Википедия. Искусственный интеллект. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki.

2. Кублановский С.И., Матиясевич Ю.В. Искусственный интеллект в математике – универсальный математический решатель // Компьютерные инструменты в образовании, 2003. №2. – С. 49-54. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://cyberleninka.ru/article/n/iskusstvennyy-intellekt-v-matematike-universalnyy-matematicheskiy-reshatel.

3. Онлайн калькулятор Wolfram Alpha [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.wolframalpha.com/.

4. Иммерсивное средство чтения текста. Средства обучения (Майкрософт). [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://www.onenote.com/learningtools.

5. Серов А.А. Электронные интерактивные обучающие тренажеры в преподавании информатики // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: Материалы научно-практической конференции, 2017. – С. 83-86.

6. Осваиваем компьютерное зрение. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/461365/.

7. Алгоритмы распознавания геометрических фигур. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://api-2d3d-cad.com/recognition/

8. Учим нейронную сеть геометрии. [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://habr.com/ru/post/328698/.

УДК 004.9

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ НА УРОКАХ ИНФОРМАТИКИ

Елена Георгиевна Соодла
МОУ "Тверской лицей", г. Тверь
E-mail: soodla@yandex.ru

Ключевые слова: *информатика, алгоритмизация, программирование, лабораторная работа.*

Аннотация. В работе рассматривается пример использования лабораторных работ на уроках информатики, разработанных для учащихся старших классов (базовый уровень) при изучении раздела «Алгоритмизация и программирование».

Согласно ФГОС, изучение информатики на базовом уровне в старших классах, продолжает общеобразовательную линию курса информатики в основной школе. Опираясь на достигнутые в основной школе знания и умения, курс информатики для 10–11 классов развивает их по всем разделам образовательной области.

При изучении курса «Информатика» в соответствии с требованиями ФГОС формируются личностные результаты, такие как готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, осознанный выбор будущей профессии. Данное качество формируется в процессе развития навыков самостоятельной учебной работы учеников. Выполнение лабораторных работ требует от ученика проявления самостоятельности в изучении нового материала, в поиске информации в различных источниках, а также для закрепления полученных знаний, умений и применения их в новых условиях. Такая деятельность раскрывает перед учениками возможные перспективы в изучении предмета и в дальнейшей профориентации в этом направлении.

В процессе изучение раздела «Алгоритмизация и программирование» формируются следующие предметные результаты, которые ориентированы на обеспечение, преимущественно, общеобразовательной и общекультурной подготовки: владение стандартными приемами написания программы для решения задач с использованием основных конструкций программирования и отладки таких программ. Использование готовых прикладных компьютерных программ по выбранной специализации.

Формированию метапредметных результатов, например, умению самостоятельно определять цели и составлять планы; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения целей; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях, способствует и алгоритмическая линия курса: алгоритм можно назвать планом достижения цели исходя из ограниченных ресурсов (исходных данных) и ограниченных возможностей исполнителя (системы команд исполнителя).

В разделе «Алгоритмизация и программирование» школьники знакомятся с понятием и свойствами алгоритма, основами теории алгоритмов, способами описания алгоритмов, языками программирования высокого уровня (в Тверском лицее на базовом уровне изучаются основы PascalABC.Net), решают задачи по обработке данных средствами программирования.

Известно, что лабораторно-практический метод обучения включает в себя самостоятельное выполнение учащимися лабораторной или практической работы. Учитель выполняет роль направляющего - поясняет, что нужно сделать и в каком порядке. Результат лабораторной работы зависит от самих школьников, от их знаний и умения применять их в своей практической деятельности.

Важным является то, что при проведении лабораторных работ требуется большое внимание и сосредоточенность учеников в процессе выполнения, но этого не всегда удается достичь. К тому же использование таких видов работ постоянно может приводить к снижению интереса учеников к предмету из-за однообразия. Поэтому использовать лабораторные работы следует с целью разнообразия деятельности учащихся, и только в тех случаях, где это будет наиболее эффективным способом достижения цели.

Приведу пример разработанной лабораторной работы для самостоятельного освоения учащимися темы «Программирование циклических алгоритмов. Использование цикла с предусловием (цикл *while*)».

Работа состоит из 3 этапов:

1. Теоретическая часть. Разбор примера.
2. Выполнение вручную двух алгоритмов, записанных с помощью блок-схем.
3. Самостоятельное составление и отладка на компьютере 2-х программ (первая – подобна разобранному на 1-м этапе примеру, вторая собирается из предложенного набора команд).

Лабораторная работа «Учимся программировать задачи с циклами: циклы с предусловием (цикл *пока*)»

Цель работы: изучить циклическую конструкцию *while* в языке программирования PascalABC, научиться составлять программы с циклами с предусловием (цикл *пока*).

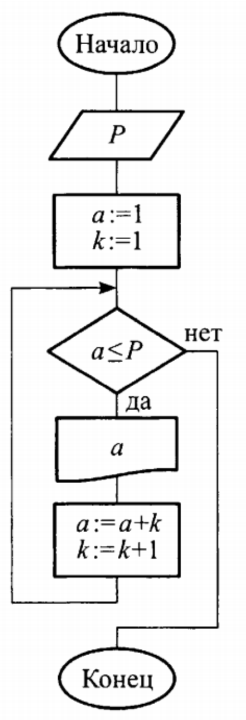
Шаг 1. Знакомимся с циклами в языке программирования PascalABC

1. Познакомьтесь с циклом *пока (while)*. Источник информации выберите самостоятельно. Соответствующую конструкцию языка PascalABC запишите в тетрадь.
2. Ознакомьтесь с примером решения задачи:

Пример. Требуется выводить числа ряда 1, 2, 4, 7, 11, 16, 22, 29, … до тех пор, пока они не превысят заданное число P.

Решение

Блок-схема:

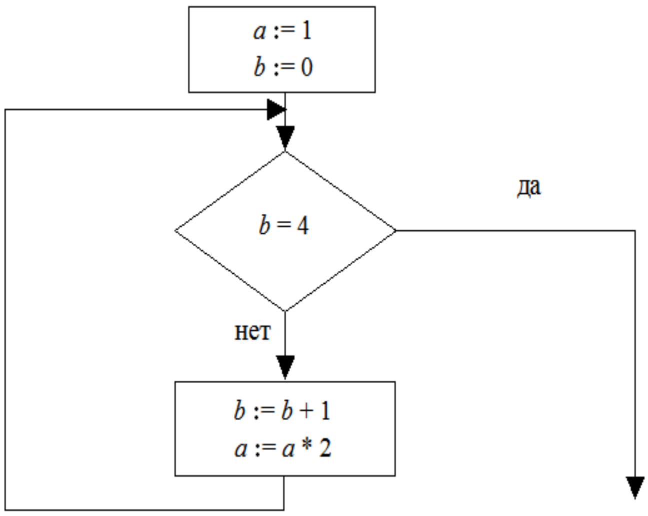


Программа:

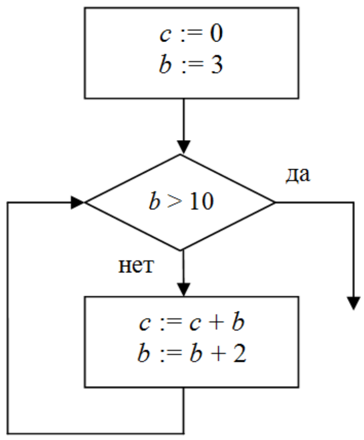
```
program ryad1;
var a, k, p: integer;
begin
  readln (p);
  a:=1;
  k:=1;
  while a<=p do
    begin
      write (a, ' ');
      a:=a+k;
      k:=k+1;
    end;
  writeln;
end.
```

Шаг 2. Выполнение алгоритмов

1. Определите значение переменной ***a*** после выполнения фрагмента алгоритма, записанного в виде блок-схемы:



2. Определите значение переменной ***c*** после выполнения фрагмента алгоритма, записанного в виде блок-схемы:



Шаг 3. Решаем задачи на PascalABC

<u>Задача 1</u>. Требуется выводить числа ряда 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, … до тех пор, пока они не превысят заданное число P.

Составьте и протестируйте программу для решения задачи 1.

Задача 2. Вводится целое положительное число ***a***. Найти сумму его цифр (используйте в программе операции *div – целочисленное деление* и *mod – остаток от деления*).

1. *Соберите программу путем выбора правильных команд из представленного ниже набора (других команд в программах быть не должно).*

```
b := a div 10;
writeln ('k = ', k);
while a > 1 do
begin
b := b mod 10;
readln (a, b, k);
writeln ('s = ',  s:5:2);
s:=0;
end;
var a, k: integer;
k := 0;
a := b mod 10;
readln (a);
writeln ('s = ', s);
a := a div 10;
var a: real;
end.
var a, b, k, s: integer;
s := s + b;
readln (a, b);
var a, b, s: integer;
b := a mod 10;
k := k +1;
a := a mod 10;
while a > 0 do
begin
```

2. *Составьте тесты для проверки правильности решения задачи (в тетради):*

№ теста	**Входные данные**	**Результат**
	a	***s***
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3. *Выполните программу для предложенных тестовых данных (протестируйте её). Если обнаружите ошибки, исправьте их. Текст правильной программы запишите в тетрадь. Заполните таблицу по результатам тестирования программы.*

Подведение итогов работы. Отчет о выполнении проверяется и оценивается.

Заключение. Разработанные учителем лабораторные работы способствуют формированию практических умений и навыков, обучению самостоятельному освоению теоретического материала и применению знаний при решении практических задач.

ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. Операционная система Windows.
2. Программная среда PascalABC.NET.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего (полного) общего образования. Утвержден приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 17 мая 2012 г. № 413.
2. Семакин И.Г. Информатика. 10–11 классы. Базовый уровень: методическое пособие. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2016. – 64 с.: ил.
3. Угринович Н.Д., Серёгин И.А., Полежаева О.А. Информатика. Лабораторный журнал для 9 класса. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2015. – 104 с.: ил.

УДК 004.657, 004.85

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВЫЯВЛЕНИЯ АНОМАЛЬНЫХ SQL-ЗАПРОСОВ

Анна Андреевна Сорокина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: nycha96@mail.ru

Валентина Михайловна Цирулева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *аномальный запрос, квиплет, нейронная сеть.*

Аннотация. В работе анализируются и реализуются способы выявления аномальных SQL-запросов с помощью синтаксических методов и нейронных сетей.

На сегодняшний день имеется обширный круг различных баз данных, предназначенных для хранения и обработки данных разного уровня секретности. Актуальной проблемой является проблема информационной безопасности, и в особенности, защиты баз данных.

В работе анализируются и реализуются математические методы выявления аномальных SQL-запросов. Под аномальным запросом понимается запрос пользователя на выполнение действий, не характерных для его нормального поведения. Методы обнаружения аномальных запросов делятся на синтаксические, основанные на шаблонах нормального поведения пользователя и последующем сравнении этих шаблонов с действиями, выполняемыми пользователями во время работы с БД, и семантические, которые основываются на смысловой логике запроса, т.е. важными в запросе являются сами данные и результат их изменения. В работе рассматривается один из синтаксических методов – метод Кампа, Бертино [1]. Основная идея, лежащая в основе этого подхода, заключается в том, чтобы сформировать профили нормального поведения пользователей, взаимодействующих с базой данных, а затем использовать эти профили для обнаружения аномального поведения. В этом методе запросы представляются в виде векторов квиплетов.

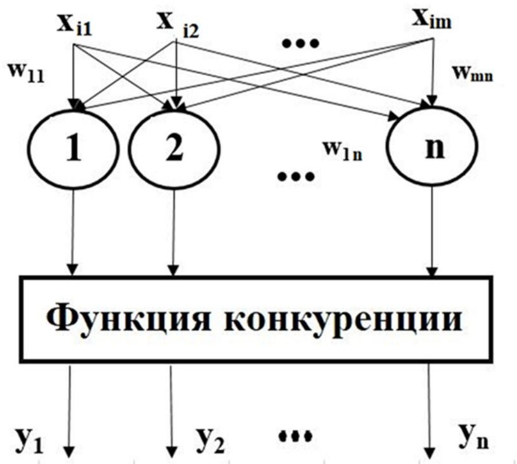


Рис. 1. Структура сети Кохонена

Для обучения и распознавания аномальных запросов используется нейронная сеть Кохонена – однослойная нейронная сеть, в основе которой лежит принцип конкуренции или WTA (Winner Takes All – «Победитель получает всё») [2], [3]. На рис. 1 изображена структура нейронной сети Кохонена.

На вход сети подается множество объектов, каждый из которых описывается вектором признаков x. Число нейронов равно числу классов, между которыми происходит распределение объектов из обучающей выборки. В сети Кохонена применяется функция конкуренции, которая определяет нейрон-победитель - нейрон, расстояние от которого до входного вектора минимально.

Приведем алгоритм самообучения сети.

1. Задание числа нейронов и нормализация данных обучающей выборки

$$\widetilde{x_{ji}} = \frac{x_{ji} - x_{minj}}{x_{maxj} - x_{minj}}, \ j = \overline{1,N}, \ i = \overline{1,m},$$

где x_{ji} – i-ый параметр j-го примера обучающей выборки, N – число примеров, m – число параметров, x_{maxj} и x_{minj} – максимальное и минимальное значения соответственно

$$x_{maxj} = \max_{1\le j\le N} x_{il}, \ x_{minj} = \min_{1\le j\le N} x_{il}.$$

2. Инициализация весовых коэффициентов.

3. Подача на вход примера обучающей выборки и расчет евклидовых расстояний по формуле:

$$R_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left(\widetilde{x_{ji}} - w_{ij}\right)^2}, \qquad j = \overline{1,n}.$$

4. Определение нейрона-победителя и корректировка весовых коэффициентов:

$$w_{ij}^{(q+1)} = w_{ij}^{(q)} + \gamma\left(x_{ji} - w_{ij}\right), \qquad i = \overline{1,m}, \ j = \overline{1,n},$$

где n – количество нейронов, m – число параметров, γ – коэффициент скорости обучения, q – номер эпохи обучения.

5. Процесс завершается при достижении условия остановки цикла (исчерпано заданное предельное количество эпох). Если условие остановки не выполнено, переходим к пункту 3.

Для реализации метода была создана тестовая база данных «Больница». База данных «Больница» должна содержать в себе информацию о врачах (личная информация: фамилия, имя, отчество врача, телефон, а также номер кабинета, в котором он ведет прием) и о их специализациях; о графике работы каждого доктора, включающем в себя дни работы, время начала и время окончания работы; о каждом пациенте (личная информация: фамилия, имя, отчество, дата рождения, адрес, номер телефона, номер полиса и паспорта), а также номер и дата создания медицинской карты); о поставленных диагнозах и назначенных на приеме лекарствах, которые необходимо принимать больному. ER-диаграмма БД представлена на рис. 2. Для базы данных были определены 4 роли [4] (администратор, главный врач, регистратор и доктор), наделенные привилегиями на доступ к таблицам БД. На основании этих привилегий определялось нормальное поведение пользователя (действия с данными БД, к которым пользователь обращается ежедневно).

Для определения нормального поведения пользователя необходимо предварительно обработать запросы и преобразовать их в формат, который может быть проанализирован алгоритмом. Каждый запрос представляется базовым блоком данных, который содержит пять полей и, таким образом, называется квиплетом. Каждый квиплет содержит следующую информацию: команду SQL, набор доступных отношений и для каждого такого отношения - множество атрибутов отношений.

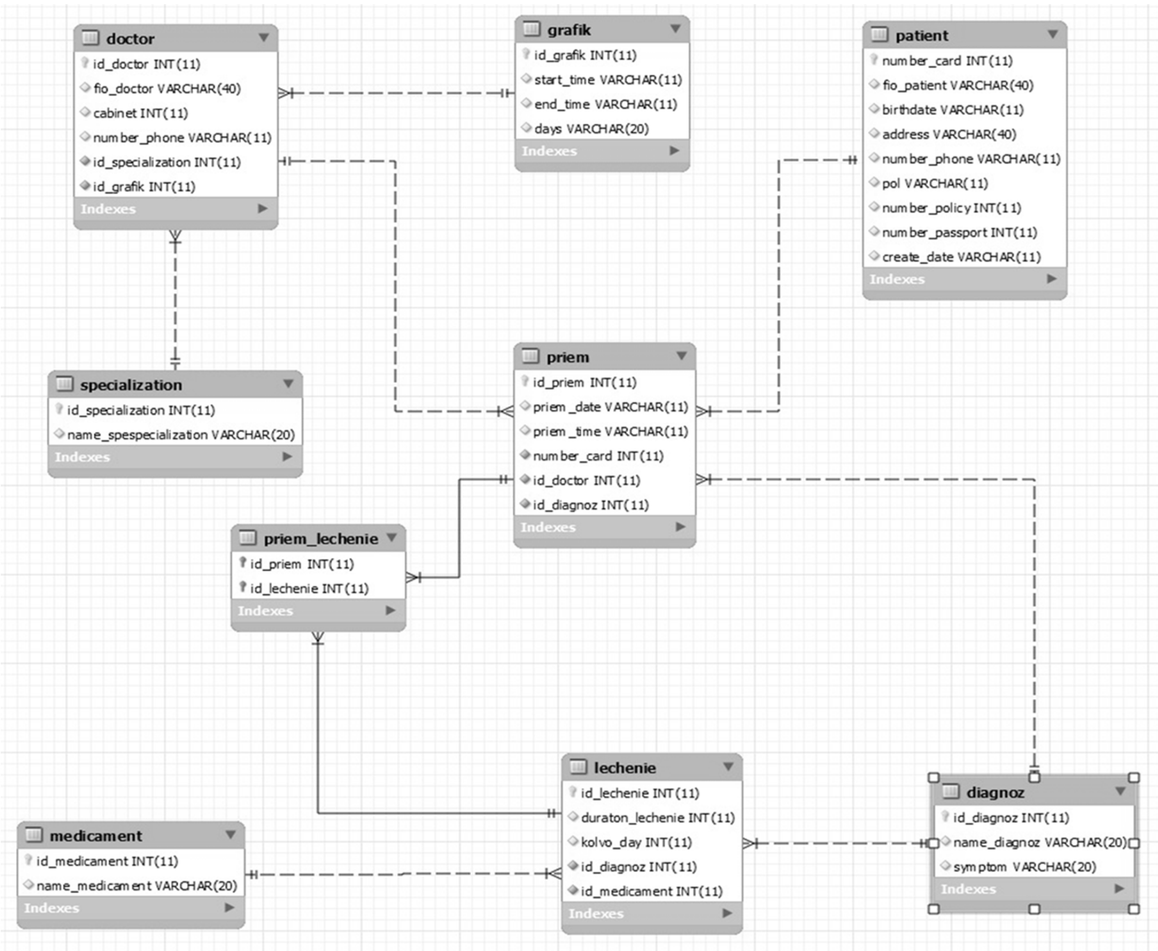


Рис. 2. ER-диаграмма базы данных «Больница»

Квиплет может быть построен в трех видах. Каждый вид отличается различным количеством записанной информации. Представление запроса в виде квиплетов рассмотрим на примере оператора SELECT. Формат запроса типа SELECT выглядит следующим образом:

$$SELECT\ [DISTINCT]\ \{\text{СПИСОК ЦЕЛЕЙ (что)}\}$$
$$FROM\ \{\text{СПИСОК ОТНОШЕНИЙ (откуда)}\}$$
$$WHERE\ \{\text{СПИСОК ОТБОРА (условия ограничений)}\}$$

В качестве примера рассмотрим следующий запрос:

```
SELECT id_medicament, name_medicament, duraton_lechenie, kolvo_day
FROM lechenie NATURAL JOIN medicament
WHERE name_medicament = 'Биопарокс';
```

тогда

c: select <2> <4> <1> <1>;

m: select <0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0> <0, 0, 0, 3, 1, 0, 0, 0, 0> <0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0> <0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0>;

f: select <0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0> <[0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 1, 1, 0, 1], [0, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0], [0, 0]> <0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0> <[0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0], [0, 1], [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0, 0, 0, 0, 0], [0, 0], [0, 0]>.

Проектирование базы данных «Больница» осуществлялось с помощью инструмента для визуального проектирования баз данных MySQL Workbench, программная реализация метода выявления аномальных SQL-запросов с применением нейронной сети Кохонена была осуществлена на языке C# в среде разработки Visual Studio. Программное приложение снабжено удобным пользовательским интерфейсом. Интерфейс разработанного приложения, состоит из нескольких модулей. В программном модуле База данных можно произвести подключение к базе данных, получить информацию о таблицах и их полях, считать запросы к базе данных и преобразовать их в каждый из трех видов квиплетов. В программном модуле Нейронная сеть осуществляется обучение нейронной сети для каждого из множеств квиплетов на выборке из 100 запросов, характеризующих нормальное поведение пользователя, и осуществляется распознавание нейронной сетью аномальных запросов.

Нейронная сеть Кохонена, реализованная с целью выявления аномальных SQL-запросов, показала очень хорошие результаты. Результаты проведенных экспериментов позволяют сделать вывод, что обнаружение аномалий более эффективно при представлении запросов в виде m-квиплета (распознано 14 аномальных запросов из 15, что составляет 93,33%). На рис. 3 наглядно представлены результаты работы программы, исходя из которых можно сделать вывод, что более корректно отработали m-квиплет и f-квиплет, которые показали результаты в 93% и 87% распознавания аномальных запросов соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ashish Kamra, Evimaria Terzi, Elisa Bertino. Detecting Anomalous Access Patterns in Relational Databases. // Научная статья.

2. Анисимов В.В. Искусственные нейронные сети. – https://www.sites.google.com/site/anisimovkhv/learning/iis/lecture/tema16#p169 (дата обращения: 25.11.2019).

3. Горбаченко В. И. Сети Кохонена. // Научая статья.

4. Григорьев В.Р., Кузнецов В.С. Адаптация ролевой модели разграничения доступа в системах облачных вычислений. // Научная статья.

УДК 514 (075.3)

ЧЕТВЁРТЫЙ ПРИЗНАК РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Татьяна Александровна Спасская
Академическая гимназия Тверского государственного университета, Тверь
E-mail: spasskaya_tanya@mail.ru

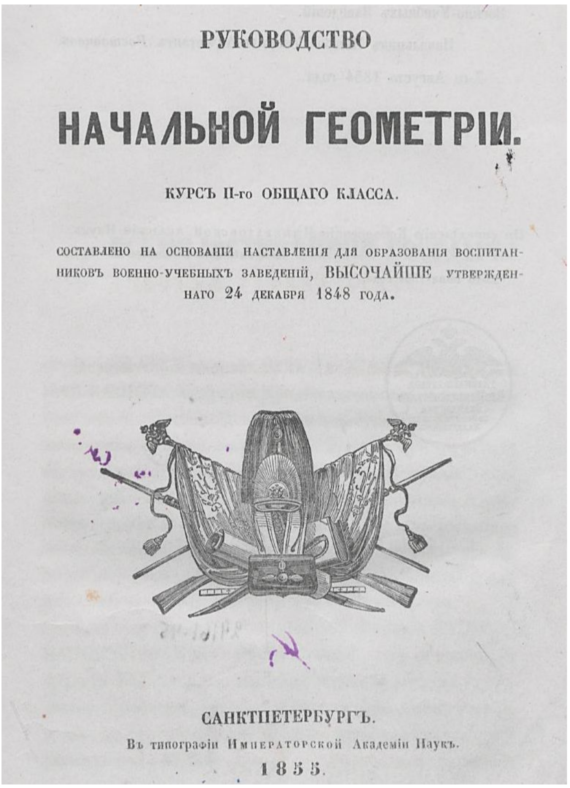
Александр Анатольевич Голубев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Виктор Алексеевич Соколов
МОУ гимназия №12 г. Твери, Тверь
E-mail: Bromyname.800@gmail.com

Ключевые слова: *признаки равенства треугольников, четвертый признак.*

Аннотация. В статье говорится о четвертом признаке равенства треугольников, сформулированном и доказанном выдающимся российский математиком и механиком М.В. Остроградским в своей книге «Руководство начальной геометрии».

В рамках школьного курса планиметрии чаще всего выделяют три признака равенства треугольников: по двум сторонам и углу между ними, по стороне и двум прилежащим к ней углам и по трём сторонам [1]. При решении задач равенство треугольников доказывается, опираясь на один из этих признаков. Выдающийся российский математик и механик, признанный лидер математиков Российской империи середины XIX века М.В. Остроградский в своей книге «Руководство начальной геометрии» формулирует и доказывает четвёртый признак (рис. 1).


РУКОВОДСТВО

НАЧАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРІИ.

КУРСЪ II-го ОБЩАГО КЛАССА.

СОСТАВЛЕНО НА ОСНОВАНІИ НАСТАВЛЕНІЯ ДЛЯ ОБРАЗОВАНІЯ ВОСПИТАННИКОВЪ ВОЕННО-УЧЕБНЫХЪ ЗАВЕДЕНІЙ, ВЫСОЧАЙШЕ УТВЕРЖДЕННАГО 24 ДЕКАБРЯ 1848 ГОДА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.

Въ типографіи Императорской Академіи Наукъ.

1855.

Рис. 1

Этот признак звучит так: если две стороны и угол, лежащий против большей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, другого треугольника, то эти треугольники равны [2], [3].

Приведем пример задачи, в которой удобно применить четвёртый признак равенства треугольников (см. [4], вар. 7, С–6 №1, с. 58).

Основная задача. В равнобедренном треугольнике ($AB = AC$) взята точка O так, что $\angle AOB = \angle AOC = 120°$. Доказать, что AO – биссектриса угла BAC. Найти угол BOC.

Решение. 1-й способ. Треугольники AOB и AOC равны по 4 признаку (см. рис. 2): $AB = AC$ по условию задачи, АО – общая сторона, $\angle AOB = \angle AOC$ – лежат против большей стороны (являются тупыми, значит два другие угла треугольника – острые, а против большей стороны в треугольнике лежит больший угол). Из равенства треугольников следует, что $\angle BAO = \angle CAO$, то есть АО – биссектриса.

$\angle BOC = 360° – (\angle AOB + \angle AOC) = 360° – (120°+120°) = 120°$.

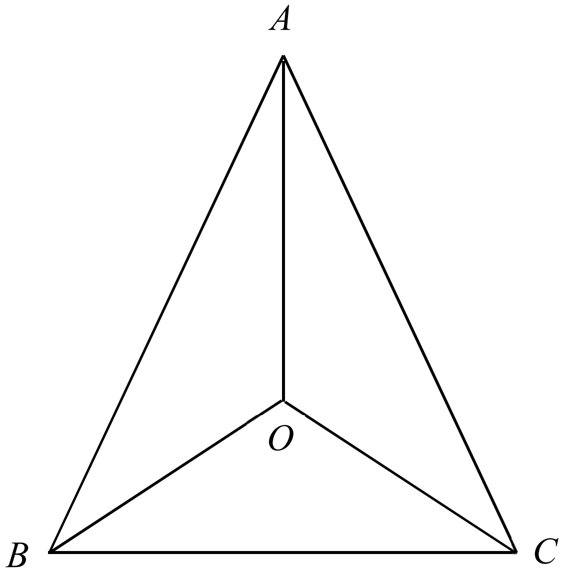


Рис. 2

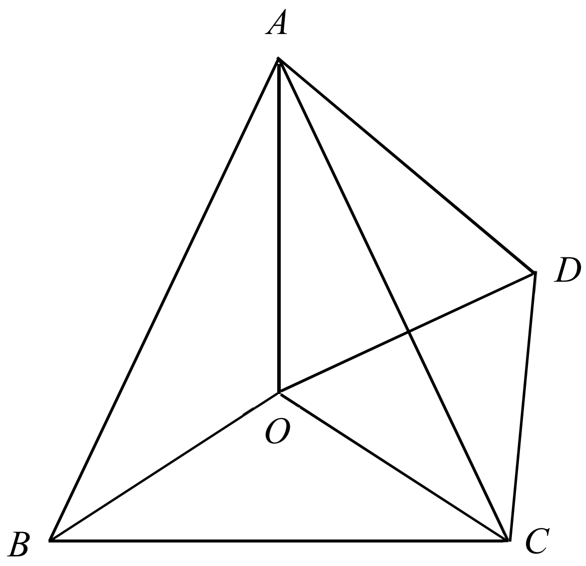


Рис. 3

2-й способ. Приведем решение, не опирающееся на четвертый признак равенства треугольников.

Строим ΔADC, равный ΔAOB ($AO = AD$), так как показано на рис. 3 и проводим отрезок OD. Тогда ΔAOD – равнобедренный и $\angle ADO = \angle AOD$.

Так как $\angle CDO = \angle ADC – \angle ADO = \angle AOB – \angle ADO = \angle AOC – \angle AOD = \angle COD$, то ΔCOD – равнобедренный ($CO = CD$). Тогда $\Delta ACD = \Delta AOC$ (по трём сторонам). Отсюда $\angle DAC = \angle OAC$, следовательно, $\angle OAC = \angle OAB$, что и требовалось доказать.

Приведем вариант доказательства четвёртого признака равенства треугольников, учитывая логику изложения материала в учебнике Л.С. Атанасяна [1].

Теорема. Если две стороны и угол, лежащий против большей из них, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу, лежащему против большей из них, другого треугольника, то эти треугольники равны.

Доказательство. Пусть даны ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$; $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$; $AB > AC$ и $A_1B_1 > A_1C_1$; $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$.

Расположим ΔABC и $\Delta A_1B_1C_1$ так, как показано на рис. 4 и проведём отрезок CC_1. Так как $AC = AC_1$, то ΔACC_1 – равнобедренный, следовательно, $\angle ACC_1 = \angle AC_1C$.

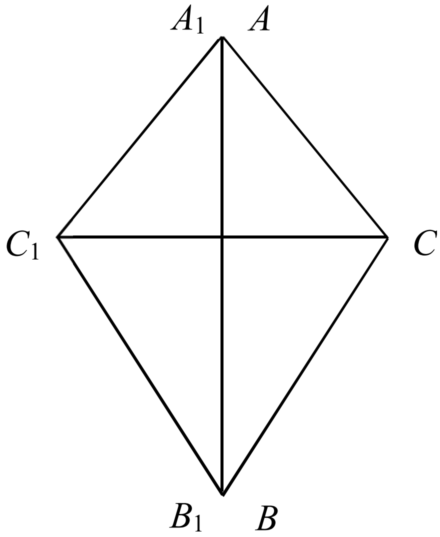


Рис. 4

Тогда $\angle BCC_1 = \angle ACB - \angle ACC_1 = \angle A_1C_1B_1 = \angle A_1C_1C = \angle B_1C_1C$, и ΔCBC_1 – равнобедренный ($BC = B_1C_1$). Следовательно, $\Delta ABC = \Delta A_1C_1B_1$ (по трём сторонам). Утверждение доказано.

Остроградский М.В. доказывал сформулированный им четвёртый признак, опираясь на тот факт, что *если некоторые элементы однозначно определяют треугольник, то равенство этих элементов в двух треугольниках влечёт равенство самих треугольников*. Рассмотрим предложенное им доказательство [2], добавив оставленный на самостоятельную работу читателя случай для тупого угла.

Доказательство. Пусть даны отрезки a и b и угол B. Попытаемся построить треугольник с данными сторонами и углом, противолежащим стороне b.

На произвольной прямой берём отрезок $BC = a$, затем строим прямую BD, составляющую с BC угол CBD, равный данному углу B. Если мы построим отрезок CA, равный данному отрезку b, который должен противолежать углу B, то треугольник будет построен.

Для этого опустим перпендикуляр CE на прямую BD и рассмотрим каждый из двух случаев: $b > a$; $b < a$. (Случай $a = b$ приводит к равнобедренному треугольнику с данными углами при основании. Такой треугольник однозначно определяется своими элементами.)

Случай 1. $b > a$.

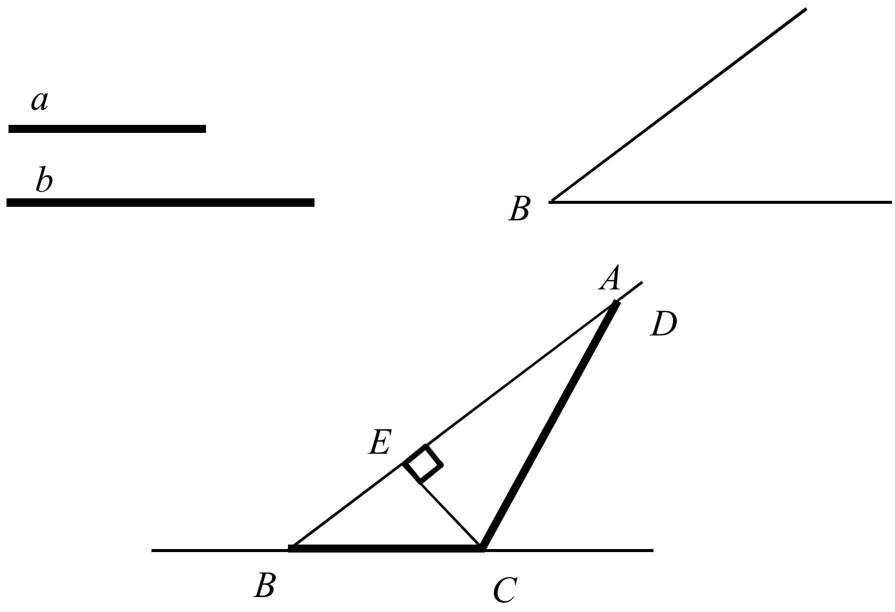


Рис. 5

Пусть $\angle B$ – острый (см. рис. 5). Точка A не может лежать между точками B и E, так каr наклонная $CA = b > a = CB$. (О свойствах наклонных в книге Остроградского написано выше). Точка A на прямой BD определена однозначно, следовательно, полученный треугольник ABC – искомый.

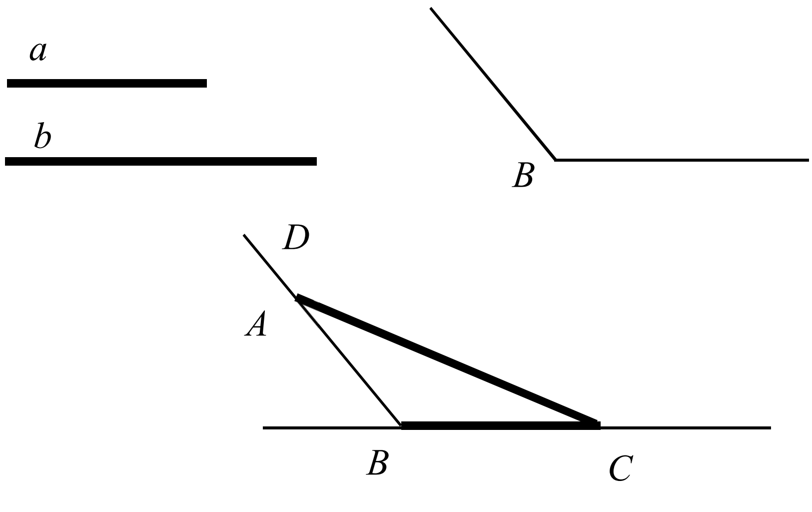


Рис. 6

Если $\angle B$ – тупой, то точка A на прямой BD, а, следовательно, и сам треугольник ABC также определены однозначно (см. рис. 6).

Случай 2. $b < a$ (см. рис. 7).

Тогда угол B, как меньший угла A, будет непременно острый, конец отрезка b может оказаться в точке $A^{/}$ между B и E, и составится треугольник $A^{/}BC$, имеющий данные части, а именно, $CB = a$, $CA^{/} = b$, $\angle A^{/}BC = \angle B$.

Однако если мы возьмём точку A по другую сторону перпендикуляра CE на расстоянии $EA = EA^{/}$ и проведём отрезок CA, то он будет равен $CA^{/} = b$, и следовательно треугольник ABC также будет иметь данные части: $CB = a$, $CA = b$, $\angle ABC = B$.

Таким образом, *две стороны и угол, лежащий против меньшей из них, не вполне определяет треугольник.*

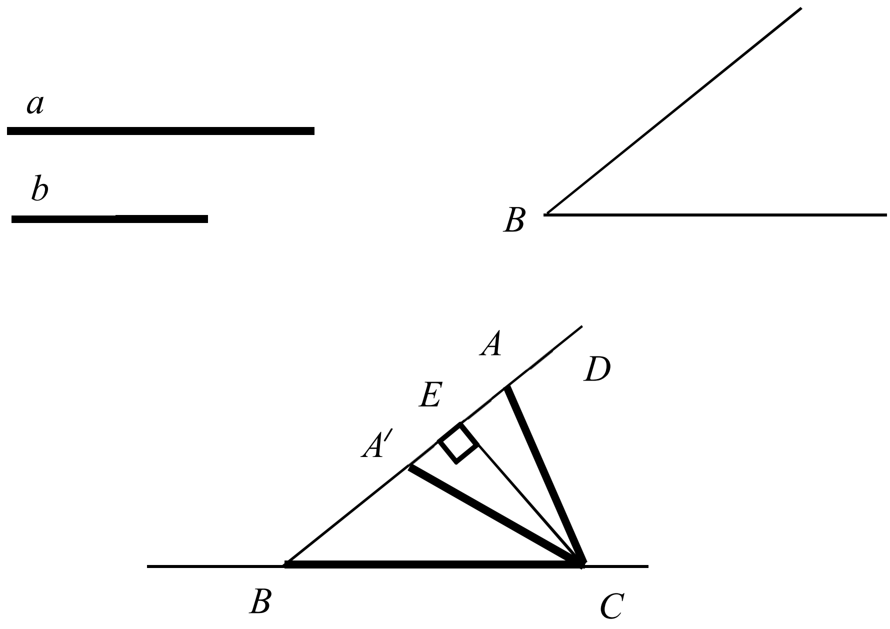


Рис. 7

Отметим, что в книге Остроградского признаки равенства треугольников расположены в следующем порядке:

1. Одна сторона и три угла.
2. Две стороны и угол между ними.
3. Две стороны и угол против большей из них.
4. Три стороны.

Такой порядок удобен, так как из перечисленных признаков равенства произвольных треугольников следуют известные признаки равенства прямоугольных треугольников:

1. По катету и острому углу. По гипотенузе и острому углу.
2. По двум катетам.
3. По гипотенузе и катету.

В своей работе М.В. Остроградский выдвинул актуальные и на сегодняшний день принципы геометрии:

1. Изложение геометрии необходимо начинать с подробных объяснений оснований, на которых она строится (анализ предложений и начальных истин).
2. При рассмотрении геометрического вопроса надо исходить из более общей его постановки, из которой он вытекал бы как частный случай.
3. Запрещается подменять доказательство ссылкой на чертеж. Всякое доказательство в геометрии должно состоять из логических рассуждений, в которых роль наших наглядных представлений исключительно вспомогательная.
4. Изложение метрической геометрии, по возможности, должно быть аналитическим (алгебраическим), в котором чертежи не обязательны.

Работа М.В. Остроградского и изложенные в ней идеи и сегодня вызывают живой интерес у преподавателей математики и школьников, увлеченных данной предметной областью, а публикация явилась результатом обсуждения предложенной ученику 7 класса 12 гимназии г. Твери Соколову Виктору темы реферата «Четвёртый признак равенства треугольников».

Проблематика, затрагиваемая в данной статье, получила отражение также в других работах авторов [5–9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Атанасян Л.С. Геометрия, 7–9: учебник для общеобразовательных учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев др. – М.: Просвещение, 2010. – 384 с.
2. Остроградский М.В. Руководство начальной геометрии: курс 2-го общего класса. – СПб., 1855. – 146 с.
3. Кропотов А.И. М.В. Остроградский и его педагогическое наследие: пособие для учителей / А.И. Кропотов, И.А. Марон. – М.: Учпедгиз, 1961. – 204 с.
4. Зив Б.Г. Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс / Б.Г. Зив, В.М. Мейлер. – М. Просвещение, 2019. – 127 с.
5. Голубев А.А. Пособие по математике для подготовки к ЕГЭ–2017: учебное пособие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2017. – 124 с.
6. Голубев А.А. Стандартные и нестандартные задачи по геометрии. Часть 1: Планиметрия: учебное пособие / А.А. Голубев, Т.А. Спасская. – Тверь: Тверской государственный университет, 2013. – 96 с.
7. Голубев А.А., Баранова О.Е. О подготовке школьников к ОГЭ и ЕГЭ: обсуждение и решение задач повышенного уровня сложности. В сборнике: Преподавание математики в школах Тверского региона. Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Тверь, 2016. С. 208–231.
8. Голубев А.А., Спасская Т.А. Векторно-координатный метод решения геометрических задач. В сборнике: Преподавание математики в школах Тверского региона. Сборник материалов в помощь учителю. Под редакцией Голубева А.А., Барановой О.Е. – Тверь, 2017. С. 86–100.
9. Голубев А.А. Три способа решения одной геометрической задачи. В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции. Министерство образования и науки Российской Федерации; Тверской государственный университет; Тверская региональная общественная организация «Ассоциация учителей и преподавателей математики Тверской области». – Тверь, 2018. С. 40–45.

УДК 372.8

GEOGEBRA КАК СРЕДСТВО ОРГАНИЗАЦИИ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ГЕОМЕТРИИ

Ольга Борисовна Стародубова
Лицей Приамурского государственного университета им.Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: olya.starodubova.02@mail.ru

Ирина Геннадьевна Одоевцева
Лицей Приамурского государственного университета им.Шолом-Алейхема, Биробиджан
E-mail: dichenko-irina@list.ru

Ключевые слова: *стереометрические задачи, информационные технологии, математическая среда GeoGebra, исследовательская деятельность.*

Аннотация. В работе рассматривается возможность использования математической среды GeoGebra для изучения математики с элементами исследования. Приведен пример индивидуального проекта исследовательского характера, в котором обучающейся 10 класса Стародубовой О. были решены геометрические задачи разных типов в среде программы GeoGebra с созданием наглядных, пошаговых построений.

В связи с реализацией ФГОС обостряется необходимость поиска средств для обеспечения условий достижения обучающимися новых образовательных результатов, заданных стандартами. Руководствуясь системно-деятельностным и компетентностным подходами, составляющими методологическую основу ФГОС, эффективному формированию соответствующих умений будет способствовать включение обучающихся в деятельность, реализация которой требует активизации этих умений. Таким образом, необходима организация познавательной деятельности, предоставляющей возможность учащемуся ориентироваться в потоке информации, осуществлять основные интеллектуальные операции, самостоятельно приобретать знания, критически их осмысливать и применять на практике, размышлять, сопоставлять разные факты, точки зрения, формулировать и аргументировать собственную позицию. В качестве такой деятельности может быть рассмотрена учебно-исследовательская деятельность учащихся

Одним из центральных предметов в школе, способствующих организации учебно-исследовательской деятельности, является геометрия. Изучаемые геометрические объекты допускают различные конфигурации, что позволяет выявить важные взаимосвязи и произвести обобщения. Традиционно геометрию относят к сложным школьным курсам. Одной из причин является то, что из-за отсутствия достаточного количества времени, отводимого на изучение геометрии, у учащихся возникает непонимание, и усвоение строиться на заучивании и как следствие учащиеся теряют интерес к предмету. Кроме того, при изучении стереометрии не у всех учащихся в достаточной мере развито пространственное воображение, что затрудняет понимание задач.

Сегодня существует достаточно много приложений, позволяющих визуализировать и автоматизировать процесс решения тех или иных математических задач. Об использовании информационных технологии в математическом образовании имеется множество публикаций, как в отечественной литературе [1 – 5], так и в зарубежной: J.Tooke, N.Henderson [6], D.Tinsley, D.Johnson [7]. Например, M.Тагаев и M.Сейдалиев [4] в своей работе рассматривают решение геометрических задач с помощью программы Mathcad plus. А.И.Кухарчук и В.А.Романова [3] в своей статье рассматривают визуализацию решения графических задач в среде AutoCAD. В свою очередь, Д.С.Колпакова [2] рассматривает математическую среду GeoGebra как средство визуализации решения задач на уроках геометрии в 7 классе. Танкевич Л.М. и Шкляр А.Е. также рассматривается применение возможностей программы GeoGebra учителями на уроках решения стереометрических задач. Но о применении самими учащимися программы GeoGebra при работе по индивидуальной программе развития статьи отсутствуют.

GeoGebra – это бесплатная математическая программа для всех уровней образования, включающая в себя геометрию, алгебру, таблицы, графы, статистику и арифметику, в одном удобном для использования пакете. Математическая среда GeoGebra может использоваться на уроках в школе, дома при подготовке домашних заданий. А также она дает возможность организовать исследовательскую деятельность в учебном процессе и продемонстрировать элементы эксперимента при изучении математики.

GeoGebra проста в использовании, старшеклассники способны самостоятельно изучить функции программы. Она позволяет ученикам увидеть геометрическое тело с разных сторон, что делает задачу наглядной. Чертёж, созданный в среде динамической геометрии, – это модель, которая сохраняет результат построения, исходные данные и алгоритм. При этом все данные легко изменить (можно менять значения числовых данных, перемещать точки, варьировать длины отрезков и т.д.), и результат этих изменений сразу отразится на экране компьютера. Все это позволяет обучающимся экспериментировать в процессе решения, рассмотреть различные случаи расположения фигур или полученных сечений.

В рамках выполнения индивидуального проекта исследовательского характера автором статьи были решены геометрические задачи разных типов в среде программы GeoGebra с созданием наглядных, пошаговых построений.

Продемонстрируем лишь одну из них.

Задача. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α. Через вершины B и C проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках E и F соответственно. Определите взаимное расположение отрезков EF и AB.

Выполним построения:

1) $ABCD$ – трапеция, построить которую мы можем с помощью операции «Отрезок ». Плоскость α можно создать с помощью команды «Плоскость », обозначив прямую и точку, которая не лежит на этой прямой (рис. 1).

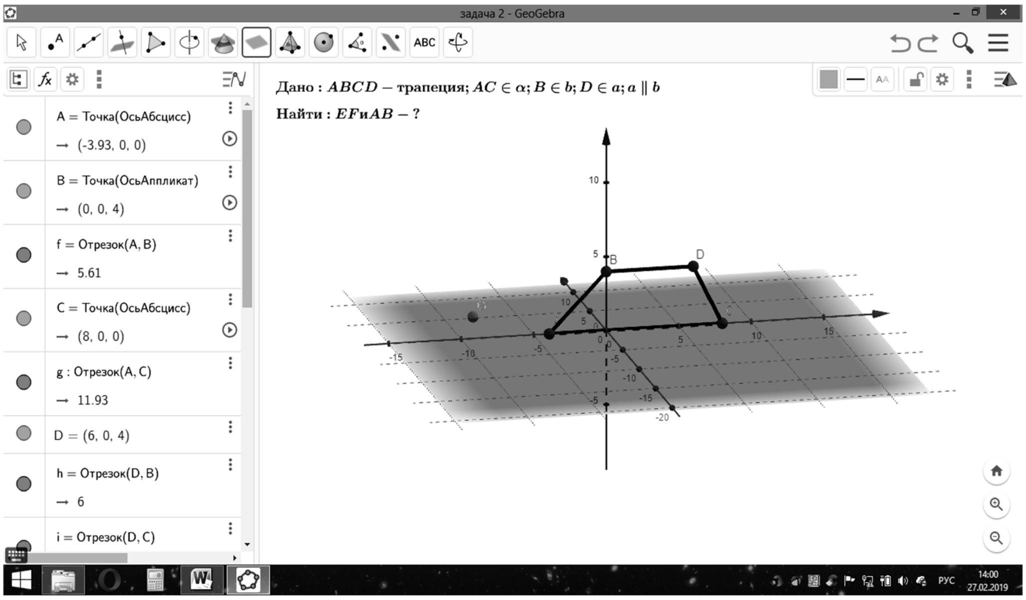
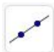


Рис. 1. Построение трапеции *ABCD*

2) Нам даны прямые *a* и *b*, проходящие через точки *D* и *B* соответственно и пересекающие плоскость α в точках *E* и *F*.

Рассмотрим первый случай. Пусть прямые *a* и *b* не пересекают основание *AC* трапеции. Воспользуемся командой «Прямая » и укажем две точки (рис. 2).

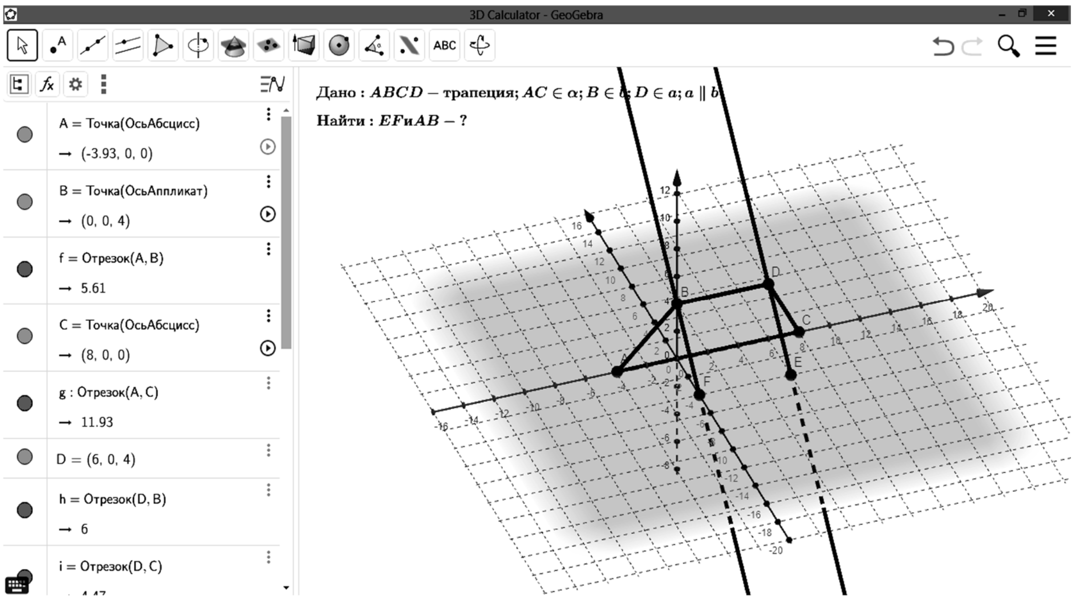


Рис. 2. Построение прямых *a* и *b* (первый случай)

Вывод: прямые *EF* и *AB* скрещивающиеся.

Рассмотрим второй случай. Построение будет отличаться только тем, что прямые *a* и *b* будут пересекать основание трапеции (рис. 3).

Вывод: прямые *EF* и *AB* пересекающиеся.

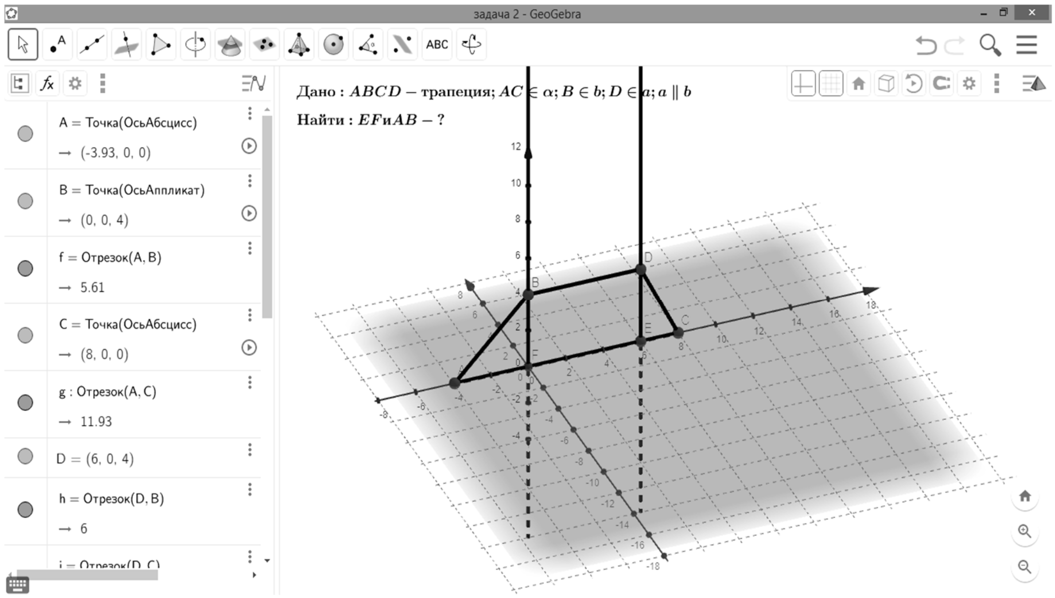


Рис. 3. Построение прямых *a* и *b* (второй случай)

Таким образом, посредством использования математической среды GeoGebra при решении стереометрических задач обучающиеся включаются в исследовательскую деятельность, которая способствует достижению целого ряда образовательных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безумова О.Л., Овчинникова Р.П., и др. Обучение геометрии с использованием возможностей GeoGebra: учебно - методическое пособие / Федер. гос. автоном. образоват. учреждение высш. проф. Образования «Север. (Аркт.) федер. ун-т им. М. В. Ломоносова»; [О.Л. Безумова, Р.П. Овчинникова, О.П. Троицкая и др.; отв. ред. О.Л. Безумова]. Архангельск: КИРА, 2011. – 140 с: рис., табл.

2. Колпакова Д.С. GeoGebra как средство визуализации решения задач на уроках геометрии в 7 классе // Молодой ученый, 2018. №11. – С. 164-167. URL http ://mo uch.ru/arch v /197/48799/ (дата обращения: 18.06.2019).

3. Кухарчук А.И., Романова В.А. Визуализация решения графических задач // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования, 2014. № 1. – С. 23-28.

4. Тагаев М., Сейдалиев М. Решение геометрических задач с помощью блок-схемы и расчет с помощью программы Mathcad plus // Известия ВУЗов Кыргызстана, 2016. № 10. – С. 198-201.

5. Усова Л.А., Шкляр И.П., Одоевцева И.Г. Использование MATHCAD И EXCEL при изучении школьного курса математики // Постулат, 2016. №3. – С. 12.

6. Tooke J., Henderson N. Using Information Technology in Mathematics Education // CRC Press, 11 окт. 2001 г. – 187 с.

7. Tinsley D., Johnson D.C., Johnson D.B. Information and Communications Technologies in School Mathematics // Springer Science & Business Media, 28 февр. 1998 г. – 306 с.

УДК 004.91, 374

ЦИФРОВЫЕ ИНСТРУМЕНТЫ В ОБРАЗОВАНИИ

Елена Валерьевна Тишина
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Tishina.EV@tversu.ru

Александр Валентинович Лобанов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Lobanov.AV@tversu.ru

Ключевые слова: *создание контента, облачные сервисы, облачные технологии в образовании.*

Аннотация. В статье делается обзор современных облачных сервисов, которые полезно применять как в профессиональной работе преподавателя, так и как инструмент личной эффективности.

Цифровая грамотность стала частью нашей жизни. В современном мире сложно найти область жизни, которая не затронута цифровыми технологиями. Современные технологии в значительной степени проникли во все сферы нашего общества, в том числе и в образование. Цифровые технологии изменили образование, и будут продолжать это делать. Список навыков, в которых работодатели больше всего нуждаются в кандидатах не ограничивается стандартными технологиями для создания и хранения контента; сейчас наиболее востребованы сотрудники, которые смогут творчески использовать цифровые технологии для выполнения задач по анализу, структурирования, композиции, декомпозиции и удобному представлению данных. Кроме того, применение ИТ должно повысить мотивацию учащихся, способность проводить собственные исследования и работать в команде. [1]

Интернет – это мир информации, средство общения, диалог культур, место учебных площадок и обмена идеями и опытом, это способность к цифровому сотрудничеству. Облачные технологии, как одна из сфер Интернета, – это распределенная цифровая технологии обработки и хранения данных, в которых компьютерные ресурсы (программные продукты и вычислительные мощности) предоставляются Интернет-пользователю как онлайн-сервис в режиме реального времени. Термин «облако» возник как метафора для Интернета, который, по сути, представляет собой сеть сетей, предоставляющих удаленный доступ к набору децентрализованных ИТ-ресурсов.

Предлагаю рассмотреть несколько облачных технологий, которые могут быть полезными в образовании и в профессиональной работе преподавателя:

1. ***Облачные офисные пакеты, интегрированные с облачным хранилищем*** (сервисы хранения, редактирования и синхронизации файлов). Google Диск, Яндекс.Диск, Microsoft Office-365, Облако Mail.ru, есть и другие. Это бесплатные пакеты офисных веб-приложений с их помощью можно создавать и редактировать документы онлайн и работать над ними вместе с другими пользователями в режиме реального времени.

https://lifehacker.ru/funkcii-google-diska/

2. ***Google Classroom***. Сервис Google Classroom позволяет преподавателям организовывать свои занятия, общаться со студентами, вести ленту новостей, оценивать работу студентов, проверять их успеваемость и многое другое. Для работы учитель создает «класс» и приглашает студентов присоединиться, отправив им приглашение через Gmail. Затем ученики присоединяются к классу и получают доступ ко всем материалам, которые предоставляет учитель. Кроме того, преподаватель может выдавать задания, создавать опросы, назначать эссе, создавать календарь занятий с важными датами, чтобы учащиеся всегда оставались в курсе событий и т.д. Учитель имеет доступ к текущей работе студентов и может связаться с каждым для дополнительной консультации. Также студент с помощью данного сервиса может просить помощи или консультации.

3. ***Сервисы для создания викторин, тестов и опросов, обсуждений*** можно использовать в обучении для проведения итогового и формирующего оценивания, для повторения материала (можно в игровой форме) перед итоговым оцениванием, для того, чтобы выяснить точку зрения студентов на различные события и мероприятия.

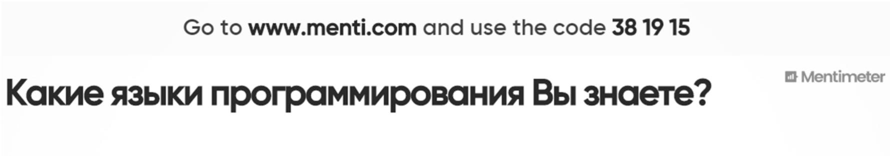
Широко используемый инструмент для оценки знаний учащихся – это ***Google Forms*** как часть Google Диск. Google Forms позволяет преподавателям создавать вопросы с выбором одного или нескольких вариантов ответов в форме опроса, дополнять его изображениями и видео. Опросу можно выставить срок сдачи. После выполнения задания, сведения об этом автоматически поступают к преподавателю.

Mentimeter – простой в использовании инструмент для онлайн-голосования, обеспечивающий мгновенную обратную связь от аудитории. Его удобно использовать для опроса студентов в режиме реального времени в аудитории, поскольку он доступен на мобильных устройствах. Используя Mentimeter можно задавать вопросы во время лекций, встреч или конференций, вебинаров или любых других мероприятий, где вам необходимо привлечь внимание. Аудитория может ответить, используя свои мобильные устройства. Результаты отображаются сразу на экране. Преподаватели могут, используя Mentimeter, сделать свои лекции более интерактивными, например, оценивая предшествующие знания своих студентов или спрашивая их, что они считают самой сложной темой в лекции. Mentimeter является удобным инструментом для того, чтобы голос каждого был услышан. Этот инструмент активно и с успехом используется и на профессиональных конференциях и семинарах.

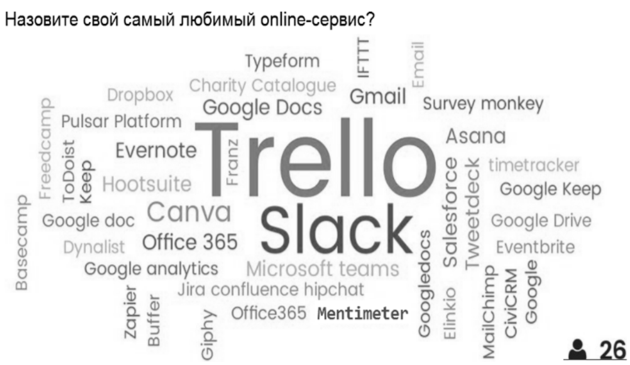
Ознакомимся с основами данного сервиса. Для работы с сервисом необходима: регистрация на сайте mentimeter; на момент проведения опроса преподавателю необходим проектор с компьютером для отображения на экране презентации с текстом опроса, мобильные устройства (планшеты, смартфоны, компьютеры и пр.) у студентов; доступ в Интернет как у преподавателя, так и у студентов.

Для проведения опроса преподаватель заранее создает презентацию с вопросами. На сайте Mentimeter преподаватель запускает презентацию.

На экране отображается адрес и код опроса для студентов.



Студенты, используя свои мобильные устройства, заходят на сайт menti.com, вводят код опроса (например, 381915) и отвечают на вопросы; на экране отображаются результаты опроса.



Голосование проходит анонимно. Mentimeter позволяет создать различные типы вопросов: множественный выбор, выбор изображения, облако слов, весы (ранжирование ответов в пределах одной шкалы); открытый ответ (участники могут свободно вводить свои ответы) и др.

В бесплатной версии сервиса количество участников опроса неограниченно и количество презентаций для одного аккаунта также неограниченно, но есть ограничение, что презентация может содержать не более двух вопросов, если два вопроса недостаточно, можно для одной лекции создать две и более презентации. В платной версии ограничение на количество вопросов снимается.

Похожие сервисы: Kahoot, Quizizz, SurveyMonkey и др.

https://marinakurvits.com/quizizz/

4. ***Инфографика*** — это графический способ подачи информации, данных и знаний; целью инфографики является донесение сложной информации до аудитории быстрым и понятным образом. Используются почти во всех сферах человеческой деятельности, где имеет место передача информации, в том числе и в образовании. Средства инфографики кроме изображений могут включать в себя графики, диаграммы, блок-схемы, таблицы, карты, списки.

Некоторые сервисы для создания инфографики. Infogram, Canva, Easel.ly, Venngage.

Эти инструменты для создания и публикации инфографики достаточно просты в использовании. Обладают похожим набором возможностей. Для пользователей доступны готовые шаблоны и схемы, темы оформления и графики.

https://www.creativebloq.com/infographic/tools-2131971

5. ***Сервисы для создания и обработки графических изображений***, блок-схем, Uml-диаграмм: pixlr, Draw.io, Microsoft Visio, Cacoo, Umletino.

http://onservis.ru/online-servisy-grafika.html

6. ***Online-инструменты для работы с PDF и DJVU документами***. Portable Document Format (PDF) – кроссплатформенный формат электронных документов. В первую очередь предназначен для представления в электронном виде полиграфической продукции. Для просмотра можно использовать официальную бесплатную программу, а также программы сторонних разработчиков Adobe Reader, Foxit Reader, STDU Viewer, Google Chrome (Google Chrome удобно использовать также для создания pdf-документа из окна браузера с помощью команды «Печать…»). PDF-файлы могут быть двух типов: текстовыми и растровыми (сканированными). Характерным признаком текстового файла является возможность выделения отдельных слов и фраз. В сканированных этого сделать нельзя. Соответственно и принципы работы с такими файлами будут немного отличаться. Если из текстовых файлов можно извлечь оригинальный, (почти) безошибочный текст, то сканированные придётся распознавать. В DJVU формате часто встречаются различные электронные книги. На pdf-файлы можно установить разные виды защиты: запрет на редактирование документа; запрет на печать; защита от копирования; пароль на открытие файла; запрет к доступу содержимого и т.д.

Список некоторых online-конверторов pdf-файлов ilovepdf, pdf.io, smallpdf, online-convert.com.

https://ru.wikipedia.org/wiki/Portable_Document_Format

7. ***Ментальные карты*** (карта мыслей, диаграмма связей, ассоциативные карты) – это способ представления, обобщения и структуризации идей при помощи графических записей и схем. Главная задача – разложить все по «полочкам», разобраться в путанице мыслей. Можно использовать: в методике обучения и в подготовке материала по определенной теме, создание презентаций, конспектирование лекций, в методиках «мозгового штурма», в планирование и разработки проектов разной сложности, для решения организационных вопросов. Главный принцип: в центре ключевая идея, от нее отходят ветви-ассоциации, каждая из которых детализируется, рождает новые ассоциации и т.д.

Coggle – бесплатный сервис, позволяющий создавать ментальные онлайн-карты. Можно создать карту любой сложности с большим количество веток, можно перемещать ветки, менять цвета.

Бесплатный тариф позволяет создать до трех бесплатных личных карты и неограниченное количество открытых карт.

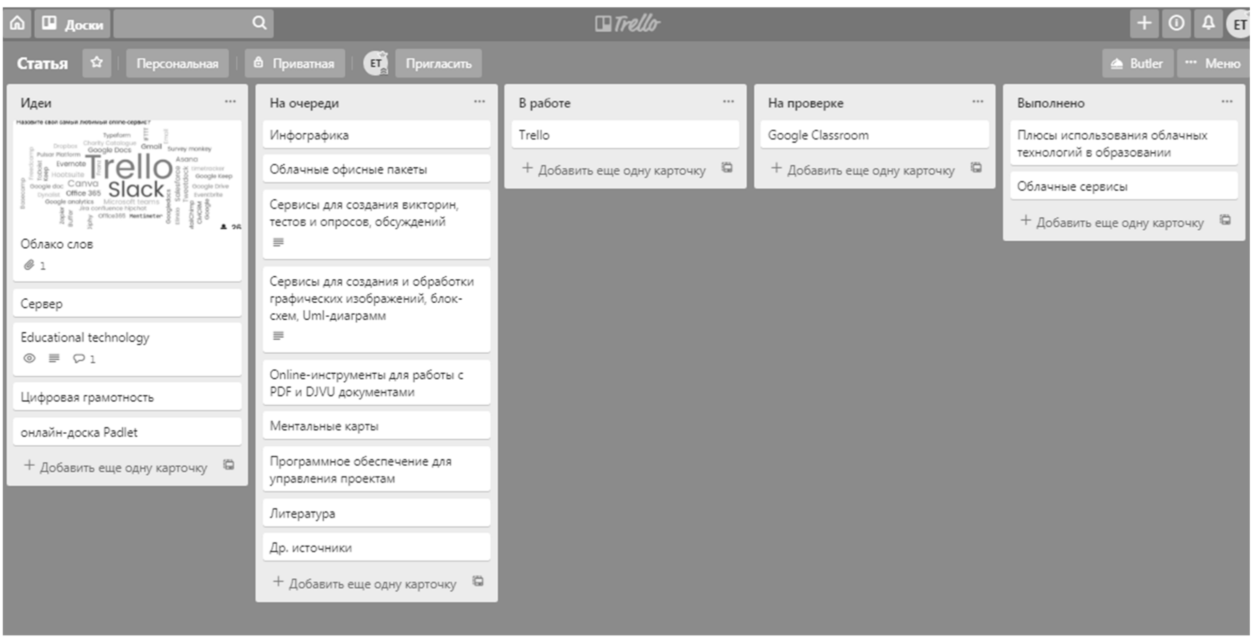
Подобные сервисы: mindmeister, mind42, и пр.

https://quokka.media/obzory/coggle/

https://texterra.ru/blog/obzor-15-besplatnykh-programm-dlya-sozdaniya-intellekt-kart.html

8. ***Программное обеспечение для управления проектам***. Программы для управления проектами позволяют эффективно планировать и управлять ходом выполнения задач разной сложности. Существует много десктопных и браузерных решений по проектному управлению: «Планировщик» от Microsoft (в составе пакета Microsoft Office 365), JIRA, KanbanFlow, MeisterTask, Trello.

Рассмотрим ***Trello***, как один из самых популярных сервисов этой категории легких в освоении и с удобной визуализацией. Используется для организации задач, ведения и отслеживания списка дел, управления проектами, совместной работы. Имеет простой и удобный интерфейс. Базовая часть сервиса бесплатная, оплачиваются только дополнительные расширения. Пользователь создает проект, называемый доской задач, который содержит столбцы со списками задач. Каждая задача – это карточка. Обычно столбцы содержат заголовки: запланированные задачи, текущие, выполненные. Карточки можно перетаскивать как внутри одного списка, так и между столбцами списков, например, когда задача, находящаяся в разработке, меняет свой статус на выполненную. В карточку можно добавить изображения, заполнить описание, добавить списки, ссылки, видео, чек-листы, вложения «Google Диск», сроки выполнения. Карточку можно переименовывать, редактировать, добавлять метки и участников, комментировать, копировать, архивировать. В блоке «Действия» каждой карточки указано, кто и какие совершал в ней действия (есть история действий). Пользователь в базовой версии может создавать любое количество задач, списков и досок, добавлять неограниченное число участников, можно делиться досками с коллегами и работать над задачами совместно.

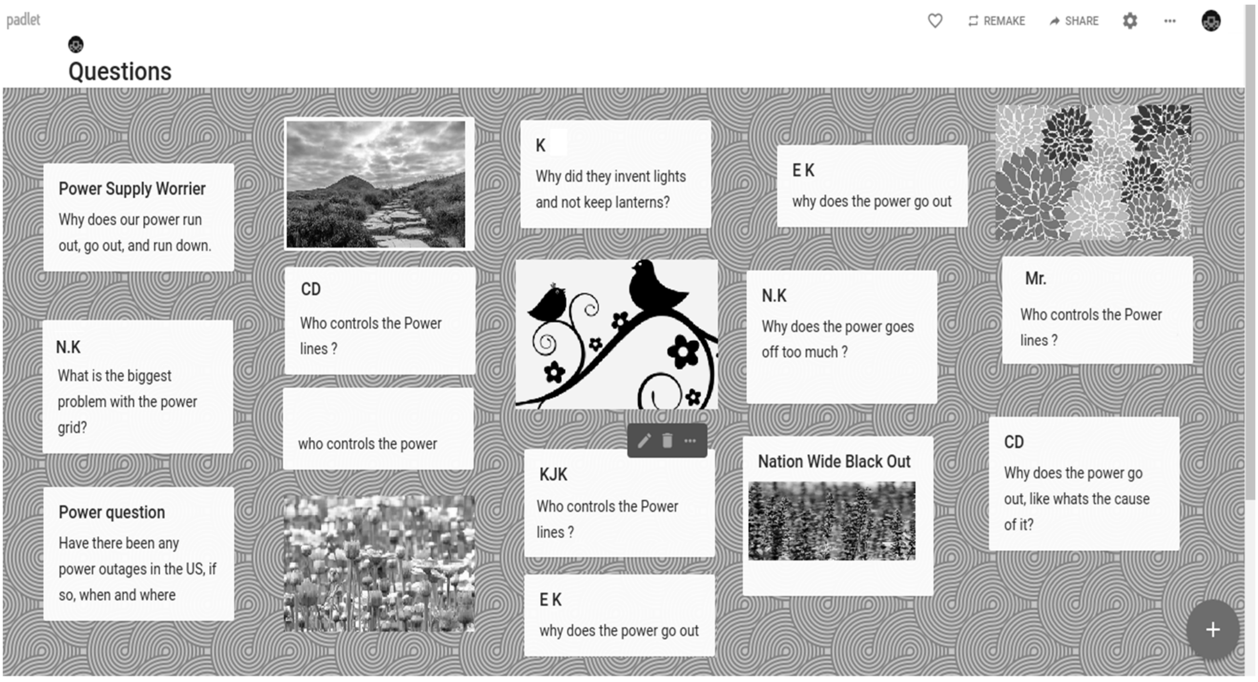


Инструмент может быть применен для личного и делового использования. Для делового: используется в разных областях: включая управление проектами в области разработки программного обеспечения, ведение школьной доски объявлений, планирования уроков, маркетинга, веб-дизайна, управление делами в небольших организациях. Trello применим, и как инструмент личной эффективности для еженедельного упорядочивания задач, позволяя держать под контролем длинные списки дел, отслеживать свои достижения, планировать задачи на следующую неделю. Например, планирование свадьбы, ремонт, путешествие. Большим плюсом программы можно считать то, что её можно использовать на разных устройствах: смартфоне, планшете, компьютере. Удобство использования обеспечено на любом устройстве.

https://habr.com/ru/post/171503/, https://netology.ru/blog/trello

9. ***Интерактивная online-доска***. Linoit, Padlet и пр. ***Padlet*** – это веб-доска выполненный в виде стены (или учебной доски), на которую пользователь может помещать свои стикеры с текстом, изображением или видео с мобильного устройства или с компьютера. Главных достоинством Padlet является тот факт, что сразу несколько пользователей могут одновременно публиковать свои сообщения, что делает его очень подходящим для совместной работы. Можно создавать, удалять, редактировать и перемещать ранее созданные сообщения, настраивать фоновое изображение. Это делает данный инструмент удобным способом для организации планов, мыслей, списка покупок, структурирования заметок. Примеры использования: мозговой штурм, сбор идей для проекта, планирование мероприятий, задания на поиск и отбор информации, сбор контента по определенной тематике и совместное конспектирование, площадка для размещения учебной информации для студентов. Еще полезные примеры использования:

http://teachtech.ru/instrumenty-veb-2-0/kak-ispolzovat-onlajn-dosku-padlet-v-klasse.html



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ferrari A., Digital Competence in Practice: An Analysis of Frameworks, 2012. – С. 3. ([Электронный ресурс]: ftp://jrc.es/pub/EURdoc/JRC68116.pdf.)

2. Free educational technology. – 321 Free Tools for Teachers – Free Educational Technology [Электронный ресурс] – Режим доступа: elearningindustry.com/321-free-tools-for-teachers-free-educational-technology.

3. Графические онлайн сервисы [Электронный ресурс] – Режим доступа: http://onservis.ru/online-servisy-grafika.html.

4. Поиск и подбор сервисов для бизнеса [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://startpack.ru/.

5. Что такое инфографика? [Электронный ресурс] – Режим доступа:

https://skillbox.ru/media/design/chto_takoe_infografika_5_besplatnykh_servisov_dlya_eye_sozdaniya/.

6. Лобанов А.В., Тишина Е.В. Проведение компьютерного тестирования на уроках математики в программе testedu (генератор html тестов) В сборнике: Преподавание математики в школах Тверского региона. – Тверь, 2017. – С. 111–116.

УДК 004.056, 519.83, 519.178

ОБНАРУЖЕНИЕ УЯЗВИМОСТЕЙ В ИНФОРМАЦИОННОЙ СИСТЕМЕ НА ОСНОВЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВОГО ПОДХОДА И ТЕОРИИ ГРАФОВ

Светлана Олеговна Федорова
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: fedorova.lans@yandex.ru

Валентина Михайловна Цирулева
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: vtsiruljova@mail.ru

Ключевые слова: *уязвимость, атака, теория игр, теория графов.*

Аннотация. В работе анализируется и реализуется комплексный метод обнаружения уязвимостей в информационной системе на основанный на теоретико-игровом подходе и теории графов.

Наличие уязвимостей в информационных системах приводит к возможности осуществления компьютерных атак и вирусных эпидемий. Чтобы избежать подобных ситуаций необходимо проводить анализ безопасности информационной системы. С его помощью можно обнаружить уязвимые места в системе, оценить стоимость для обеспечения должной безопасности, подобрать средства защиты. Целью работы является реализация комплексного метода обнаружения уязвимостей в информационной системе на основе теоретико-игрового подхода и теории графов.

Что же такое уязвимость? Это такая черта информационной системы, с помощью которой может быть организована угроза ее безопасности. Другими словами, уязвимость – это слабость актива, который может быть использован одним или несколькими злоумышленниками. Она помогает атаке увенчаться успехом [1]. Атака – это действия нарушителя, направленные на реализацию угроз несанкционированного доступа к информации, воздействия на нее или на ресурсы информационной системы путем использования уязвимостей этой информационной системы [2].

Рассмотрим некоторую специализированную систему, в которой осуществляется обработка и хранение информации [3]. Математическая игровая модель предполагает участие в рассматриваемой ситуации двух сторон: нападения и защиты. Информационная система подвергается атакам по наиболее уязвимым местам со стороны нападения. В свою очередь сторона защиты, проанализировав поступающие данные, должна обнаружить и защитить от потерь уязвимые места. Модель рассматриваемой системы представим в виде графа G. Вершинам графа G соответствуют объекты информационной системы, которые могут подвергаться атакам со стороны злоумышленников. Маршрут, по которому может проходить атака, представляет собой последовательность вершин и ребер графа, в которой любые два соседних элемента инцидентны друг другу. На ребрах указывается стоимость, которую необходимо затратить на осуществление атаки конкретного объекта, и вероятность осуществления атаки.

Пусть сторона нападения – игрок I – обладает n стратегиями $x_1, \ldots, x_n$. Под стратегией игрока I будем понимать проведение нападения на информационную систему на одном из потенциальных маршрутов атаки. Каждая стратегия x_i представляет собой совокупность угроз, реализующихся на данную компьютерную систему, которые могут прервать или помешать работе системы. Целью игрока I является осуществление нападения на информационную систему с наименьшими для себя потерями. Решением задачи для игрока I будет совокупность средств нападения, расположенных на конкретном пути, по которому идет нападение на атакуемый объект.

Пусть U – ожидаемая полезность, P – полученная выгода, C – цена, затраченная на проведение атаки, тогда ожидаемая полезность равна [3]:

$$U = P - C. \tag{1}$$

Цель атакующей стороны – максимизация ожидаемой полезности (1), то есть получение максимального выигрыша: $U = P - C \rightarrow max$.

Игрок II – администратор защиты. Обозначим его стратегии $y_1, \ldots, y_m$. Применяя одну из своих стратегий y_j, администратор выбирает *j-ый* набор средств, которые способны обезопасить систему от повреждений на *j- ом* маршруте. Стратегия данной стороны заключается в устранении возможности реализации атаки, либо, если атака произошла, сведении к минимуму ущерба, который она повлекла за собой. Решением задачи для игрока II будет совокупность средств защиты, которые расставлены на пути, по которому вероятно производится атака. Таким образом цель защищающей стороны заключается в минимизировании ожидаемой полезности (1), то есть его задача – сделать потери минимальными: $U = P - C \rightarrow min$.

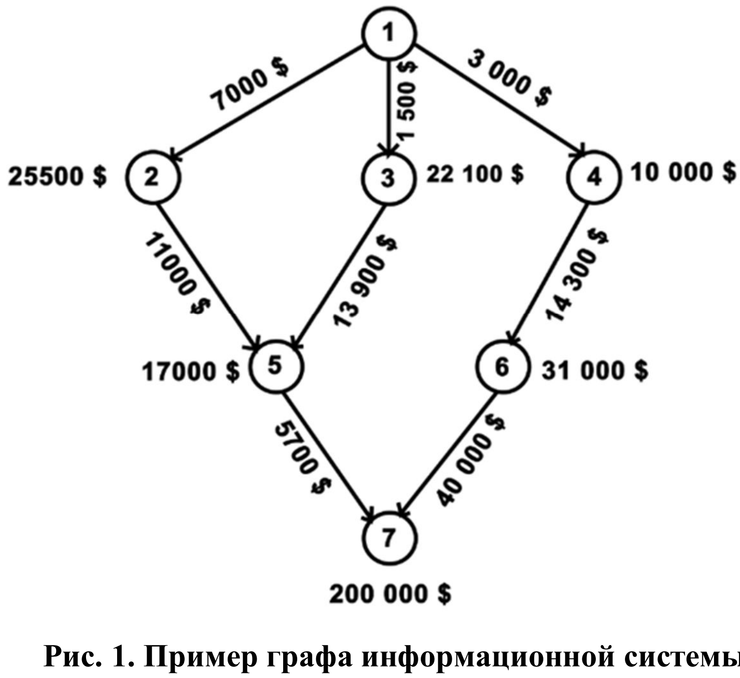


Рис. 1. Пример графа информационной системы

На рис. 1 представлен один из возможных графов, изображающий схему атаки. Предполагаем, что атака исходит с одного компьютера, и целью атакующего является информация на некотором другом компьютере. Для информационной модели необходимо провести аудит безопасности сети для выявления слабых мест системы защиты и прогнозирования действий нарушителя.

Пусть атака начинается из вершины 1, а целью атаки является вершина 7. Проанализировав данный граф, мы получаем следующие три стратегии для стороны нападения (см. рис. 2).

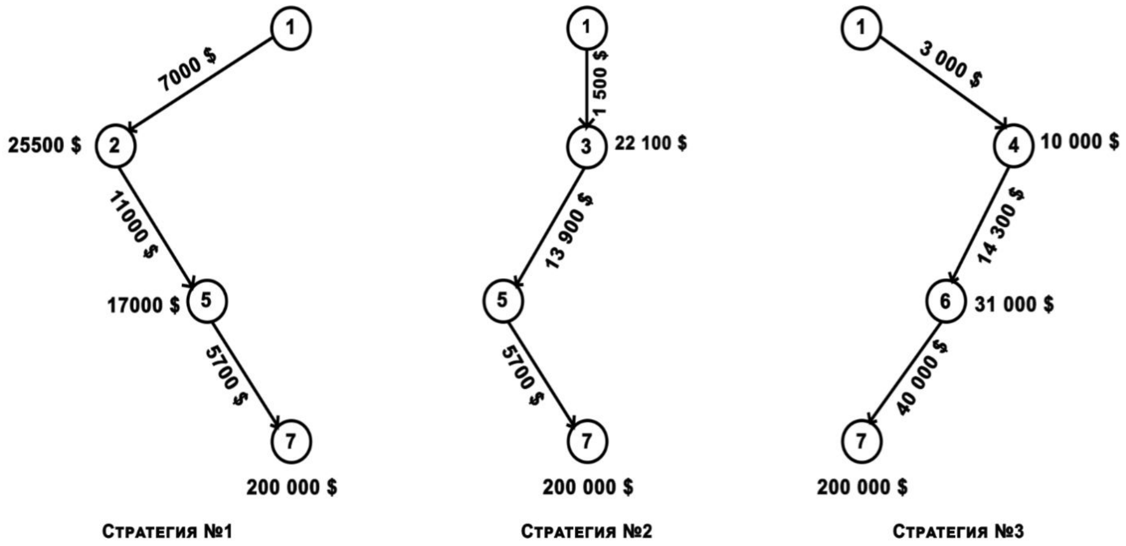


Рис. 2. Стратегии стороны нападения на информационную систему

Самой выигрышной из них является стратегия №1, так как при данных затратах для реализации атаки по этому пути, злоумышленник получит максимальный выигрыш.

Для выбора актуальных средств защиты были проанализированы ресурсы [4], [5], которые содержат данные о проведенных независимых экспертизах различных средств защиты. На сайте представлен список популярных СЗИ.

В списке указана цена за покупку лицензии продукта сроком на 1 год. Размер цены взят с сайтов производителей средств защиты. Результат представлен в таблице 1. Данные актуальны на момент 28.09.2019 г.

Таблица 1. Список средств анализа защищенности информационной системы.

№	Средства анализа защищенности	Цена
1	Сетевой сканер «Ревизор сети»	7875 р.
2	XSpider	14000 р.
3	Red Check	12950 р.
4	Сканер – ВС	5000 р.

5	Max Patrol	15300 р.
6	Nessus Pro	9240 р.
7	GFI LANguard	1840 р.

Для составления списка уязвимостей, на которые будут совершаться атаки, был проанализирован банк данных уязвимостей безопасности, разработанный ФСТЭК [6].

1. Слабые требования к паролям.
2. Раскрытие информации.
3. Неправильный контроль доступа.
4. Разрешения, привилегии и средства управления доступом.
5. Неправильная аутентификация.
6. Внедрение кода.
7. Недостаточная проверка ввода данных.
8. Неверная инициализация.
9. Проблемы использования криптографии.
10. Неправильное присваивание привилегий.
11. Незашифрованное хранение критичной информации.
12. Неправильная авторизация.
13. Недостаточная проверка подлинности данных.

Таким образом, для того, чтобы найти уязвимости в информационной системе, необходимо представить эту систему в виде графа, выбрать сторону нападения или защиты и применить один из алгоритмов поиска оптимального маршрута. Найденный путь будет означать, что именно объекты, расположенные на данном пути, являются наиболее уязвимыми. Для нахождения оптимальных стратегий используются методы Беллмана-Форда и Дейкстры [7] для определения минимальных расстояний от заданной вершины до любой другой вершины графа и соответствующих им маршрутов.

Для решения задачи было создано программное приложение на языке C++ в среде разработки Visual Studio 2017 с помощью платформы Qt, реализующее ввод данных, построение графа, алгоритмы Беллмана-Форда и Дейкстры. Оно позволяет рассчитать оптимальные стратегии игроков при заданных параметрах. Приложение снабжено удобным интерфейсом.

Проведенные эксперименты позволили установить зависимость времени выполнения от размерности графа (см. рис. 3). При этом технические характеристики компьютера были следующие: операционная система – Windows 10; процессор – Intel® Core ™i5-6400U CPU 2.7GHz; установленная память (ОЗУ) – 16,00 ГБ; тип системы – 64-рязрядная операционная система, процессор x64.

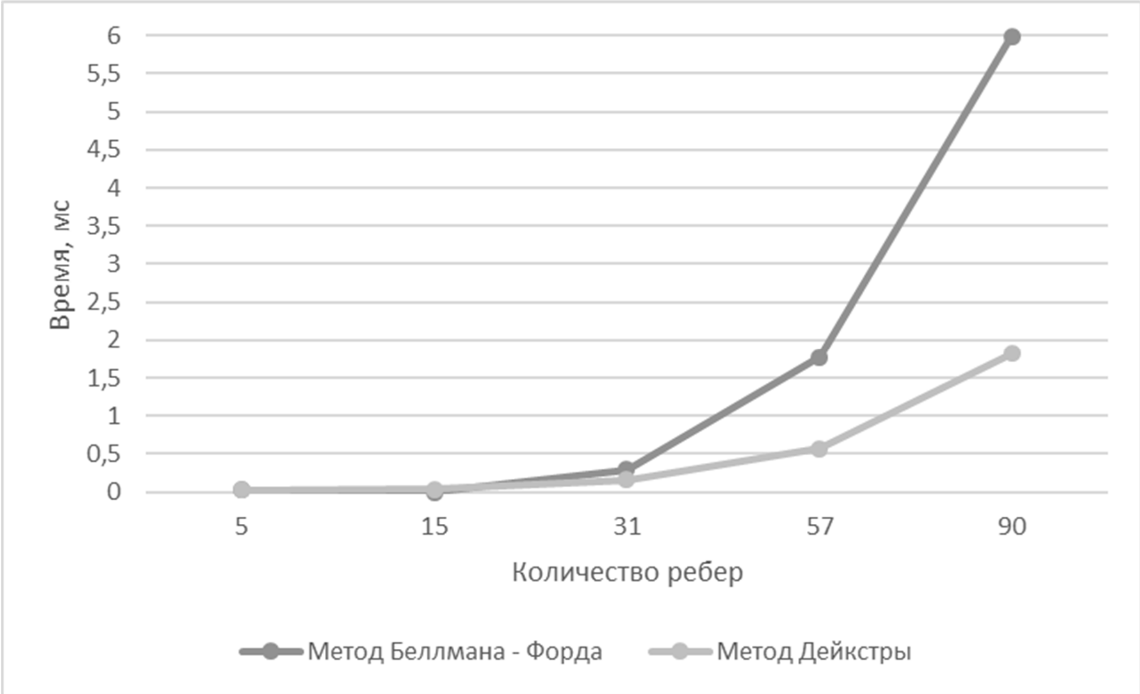


Рис. 3. График зависимости времени выполнения программы от размерности графа

Из графика видно, что при увеличении размерности графа время выполнения программы растет, но у каждого из предложенных методов по-своему. Так мы можем заметить, что для алгоритма Беллмана, при увеличении числа ребер в графе, время экспоненциально возрастает, для алгоритма Дейкстры оно растет медленнее. При этом на небольших значениях размерности графа время выполнения работы алгоритмов практически совпадает. Отсюда мы можем сделать вывод, что алгоритм Дейкстры работает быстрее, на графах большой размерности, нежели алгоритм Беллмана – Форда.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ Р 56545-2015 [Электронный ресурс] / ФГУП СТАНДАРТИНФОРМ.

2. Лукацкий А.В. Обнаружение атак. – 2-е изд., перераб. и доп. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 608 с.

3. Басараб М.А., Вельц С.В. Теоретико-игровой подход к оценке рисков и нахождению уязвимостей в сетях передачи информации. [Электронный ресурс] – Научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2013.

4. АСТА-информ. Средства контроля и анализа защищенности – [Электронный ресурс].

5. Васильев Д. Топ-10 малоизвестных, но перспективных продуктов по информационной безопасности. – [Электронный ресурс].

6. Банк ФСТЭК. [Электронный ресурс].

7. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. – М.: Мир, 1978. – 432 с.

УДК 004.021

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ, СВОДИМОЙ К НАХОЖДЕНИЮ МАКСИМАЛЬНОГО ПОТОКА В СЕТИ

Иван Сергеевич Филимонов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: mr.filimonov-iwan@mail.ru

Ключевые слова: *теория графов, программирование, вычислительная сложность, динамическое программирование, ДП по профилю, потоки в сети, максимальный поток, олимпиадное программирование*

Аннотация. Данная статья посвящена одной из алгоритмических задач, которая может быть решена стандартным методом за экспоненциальное время, но решение которой за полиномиальное время неизвестно. Приводится пример несколько упрощённой исходной задачи с её решением с использованием метода поиска максимального потока в сети и ставится вопрос об аналогичном решении исходной, более сложной задачи.

В практике олимпиадного программирования часто встречаются довольно интересные и необычные задачи. При этом некоторые из них решаются не очень быстрыми (в плане времени выполнения) алгоритмами и методами, в том числе имеющими экспоненциальную сложность от размера входных данных. При решении одной из таких задач передо мной встал вопрос – а можно ли решать её быстрее? Наработки в этом направлении я представляю далее.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Пусть имеется прямоугольное клеточное поле (матрица), состоящее из n строк и m столбцов. Требуется соединить некоторые диагонали (назовём эти соединения штрихами) в клетках так, чтобы штрихи не пересекались между собой и никакие две диагонали, проведённые в разных клетках, не имели общих концов. При этом количество штрихов должно быть максимально.

Можно сформулировать задачу 1 эквивалентным образом: провести диагонали в некоторых клетках поля так, чтобы ни через какую точку (из четырёх, ограничивающих каждую клетку) не проходило две диагонали и ни в одной клетке не было проведено сразу две диагонали. Действительно, то, что штрихи не пересекаются между собой, как раз означает, что ни в одной клетке не проведено сразу две диагонали, а требование о том, что никакие две диагонали, проведённые в разных клетках, не имеют общих концов, эквивалентно требованию о единственности диагонали, проходящей через каждую конкретную точку.

Данную задачу можно решить вполне стандартным, общим способом – динамическим программированием (ДП) по профилю. Достаточно взять в качестве профиля, например, столбец на поле, и закодировать отсутствие диагонали в клетке нулём, диагональ из левого нижнего угла в правый верхний – единицей, из левого верхнего в правый нижний – двойкой, и применить стандартные приёмы. В результате получаем решение задачи 1 не лучше, чем за экспоненциальное время. Эту динамику можно ускорить, но в результате изменится, разве что, основание экспоненты и множители (в том числе неконстантные) перед ней.

Можно ли быстрее?

Чтобы попробовать дать ответ на этот вопрос, ослабим условия задачи 1 и рассмотрим новую задачу.

Задача 2. Пусть имеется прямоугольное клеточное поле (матрица), состоящее из n строк и m столбцов. Провести максимальное количество диагоналей в некоторых клетках поля так, чтобы ни через какую точку (из четырёх, ограничивающих каждую клетку) не проходило две диагонали.

Как видно, мы убрали второе условие из задачи 1. Оказывается, это послабление позволяет успешно решить задачу с использованием алгоритма поиска максимального потока в сети за полиномиальное от количества клеток на поле время.

Рассмотрим построение сети для задачи 2 на примере поля из 4 строк и 7 столбцов. Пронумеруем границы строк таблицы числами от 1 до 5, границы столбцов – латинскими буквами от a до h. Точку на пересечении строки i и столбца α будем обозначать αi (например, $b4$).

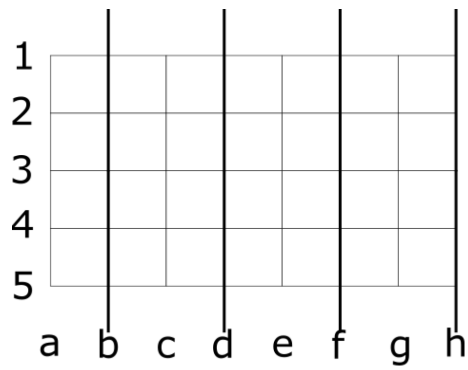


Рис. 1

Разделим столбцы таблицы на две группы – чётные и нечётные. Тогда можно считать, что все возможные диагонали идут из точек на пересечении строк и четных столбцов (b, d, f, h).

Рассмотрим столбец b. Из него (здесь и далее под «диагонали идут из столбца» понимается «диагонали идут из точек на пересечении данного столбца и строк») могут идти диагонали в столбцы a и c. Сопоставим столбцу b группы вершин сети А, Б, В, Д, столбцам a и c – группу Г (см. рис. 2).

Истоком в данном графе является вершина s, стоком – вершина t. Точкам, лежащим в одном столбце/одной строке, соответствуют вершины с одинаковыми буквенными/первыми числовыми индексами. Предполагается, что у всех рёбер пропускная способность равна единице. Также, для каждого столбца в вершины группы Д добавлено две дополнительные изолированные вершины, наличие которых не несёт смысловой нагрузки, но упрощает реализацию и подсчёты, поскольку количество вершин группы Д становится равно количеству вершин группы В.

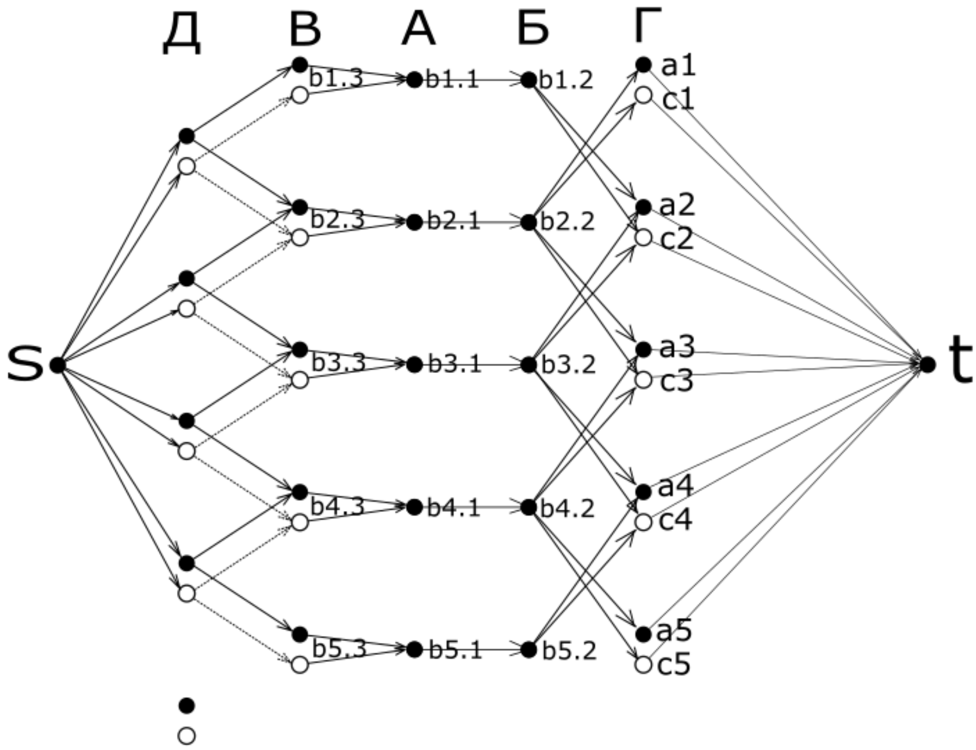


Рис. 2

Аналогично достраивается граф для оставшейся части чётных столбцов: группы А, Б, В, Д для каждого чётного столбца создаются снова, а в некоторые «старые» вершины группы Г рёбра идут из точек новых чётных столбцов.

Требование о единственности диагонали через каждую точку в данной сети наглядно: в каждую вершину группы Б, соответствующую точке в чётном столбце, входит ровно одно ребро, т.е. через неё не может пройти поток, больший единицы. Аналогично для вершин группы Г – только одно выходное ребро не позволяет пройти через соответствующую точку более, чем одной диагонали. Максимальность же количества задействованных диагоналей гарантируется алгоритмом поиска максимального потока в сети.

Вершины групп А, В и Д могут быть полезны для модификации сети под решение задачи 1. Поясним их смысл на примере. Закрашенная вершина $b2.3$ соответствует прохождению диагоналей влево из точки $b2$ в точки $a1$ и $a3$, незакрашенная - вправо из точки $b2$ в точки $c1$ и $c3$. Вершины группы Д, соединяющие пары вершин группы В, должны соответствовать однократному прохождению диагонали через каждую отдельную клетку. К сожалению, их недостаточно при любых $n \geq 2$, поскольку они не помешают потоку пройти, например, сначала из вершины $b1$ в c2, а затем из вершины $b2$ в $c1$. Возможно, некоторая модификация приведённой структуры позволит реализовать выполнение того условия, которое отличает задачу 1 от задачи 2.

Итоговое количество вершин в сети линейно $O(nm)$ относительно количества клеток nm. Количество рассматриваемых точек на границах клеток есть $(n+1)*(m+1)$, на каждую из клеток четных столбцов приходится по шесть вершин, на каждую из других – по одной, ещё две вершины – исток и сток. Количество рёбер также есть $O(nm)$, поскольку для каждой вершины (кроме истока, стока и изолированных вершин) единственно либо исходящее, либо входящее в вершину ребро. Максимальный поток можно найти с помощью алгоритма Диница. Итоговая сложность алгоритма есть $O\left((nm)^{\frac{3}{2}}\right)$.

Ответом на задачу является величина максимального потока в сети – итоговое количество проведённых диагоналей. Ответ можно восстановить по рёбрам из группы Б в группу Г, поток через которые равен единице.

Как видим, задача 2 с помощью алгоритма поиска максимального потока успешно решается за полиномиальное время. Для исходной же задачи (1) формализовать условие отсутствия двух диагоналей в одной клетке при сохранении второго условия автору статьи не удалось. Вполне возможно, такая формализация есть, и эту задачу также можно решить за полиномиальное время.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Домнин, Л.Н. Элементы теории графов: учеб. пособие / Л.Н. Домнин. – Пенза: Изд-во Пенз.гос. ун-та, 2007. – 144 с.

2. Свами, М. Графы, сети и алгоритмы / М. Свами, К. Тхуласираман. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 450 с

3. Лааксонен, И. Олимпиадное программирование / пер. с анг. А. А. Слинкин – М.: ДМК Пресс, 2018. – 300 с.

УДК 517.54

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПРОГРАММНЫХ СРЕДСТВ ДЛЯ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Андрей Алексеевич Цветков
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: cvetkoandrejj@gmail.com

Александр Анатольевич Голубев
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Golubev.AA@tversu.ru

Ключевые слова: *математический пакет MATLAB, гармонические отображения, особые точки, программа Adobe Illustrator.*

Аннотация. В работе демонстрируется, как с помощью математического пакета MATLAB возможно проследить динамику изменения образа нулевой линии якобиана гармонического отображения в зависимости от некоторого параметра.

Классическим гармоническим отображением называется функция комплексного переменного $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = \overline{g(z)} + h(z)$, где $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – гармонические функции; $g(z)$ и $h(z)$– голоморфные функции.

Пусть $w = f(z)$ – гармоническое отображение, заданное в некоторой окрестности точки $z_0 \in \mathbf{C}$. Точка z_0 называется особой точкой гармонического отображения f, если отображение не является биективным в любой окрестности этой точки. Согласно теореме Леви для гармонического отображения точка z_0 является особой тогда и только тогда, когда якобиан $J_f = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$ отображения f в точке z_0 обращается в ноль.

Тип особой точки гармонического отображения зависит от взаимного расположения нулевой линии якобиана и ортогональной траектории ассоциированного дифференциала [1 – 4]. В работе [6 – 8] с помощью математического пакета MATLAB описано поведение отображения

$$f(z) = z^2 + z^3 + \overline{\iota z^2}. \tag{1}$$

С точностью до топологического отображения образ окрестности особой точки $z = 0$ имеет вид, показанный на рис. 1.

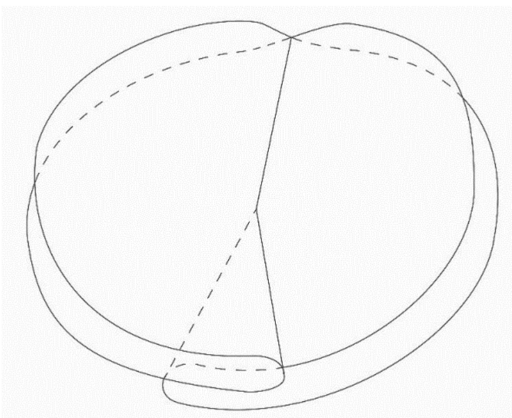


Рис. 1

Данное отображение характеризуется пересечением нулевой линии якобиана и ортогональной траектории (рис. 2).

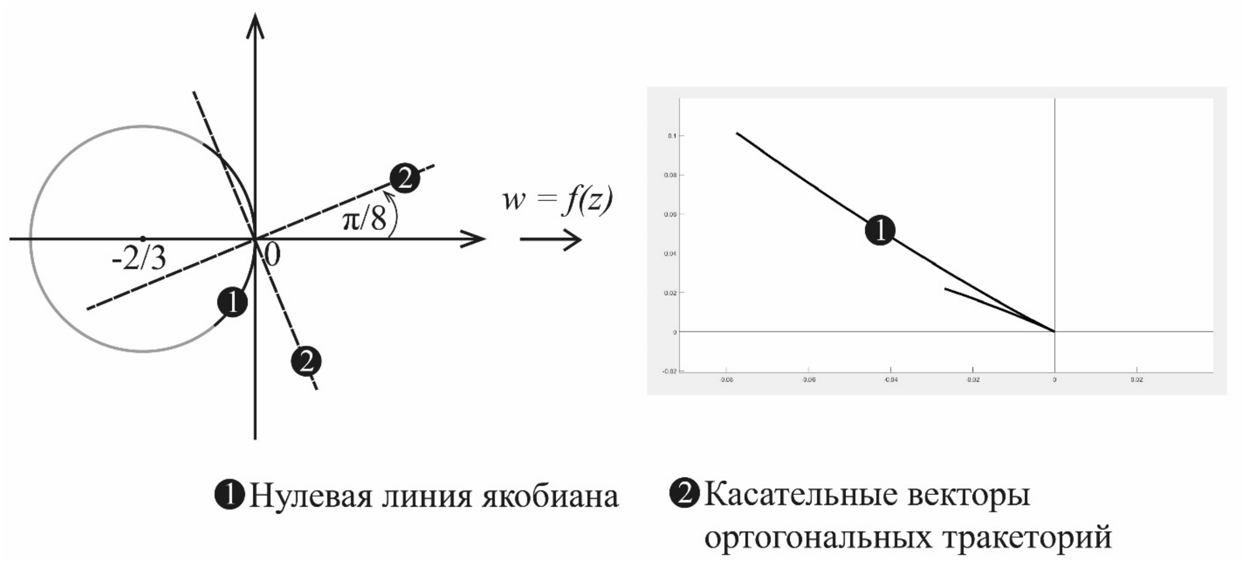


Рис. 2

Интересно проследить за изменением поведения отображения

$$f(z) = z^2 + z^3 + \overline{e^{\iota\varphi} z^2} \quad (2)$$

при разных значениях коэффициента $e^{i\varphi}$, то есть при разных значениях угла φ. При изменении φ нулевая линия якобиана будет оставаться неизменной, однако будут меняться ортогональные траектории. Особый интерес представляет случай, когда нулевая линия якобиана и ортогональная траектория будут касаться в точке $z = 0$. Отметим, что отображение (1) является частным случаем (2) при $\varphi = \pi/2$. На рис. 3 приведены образы нулевой линии якобиана при разных значениях угла φ.

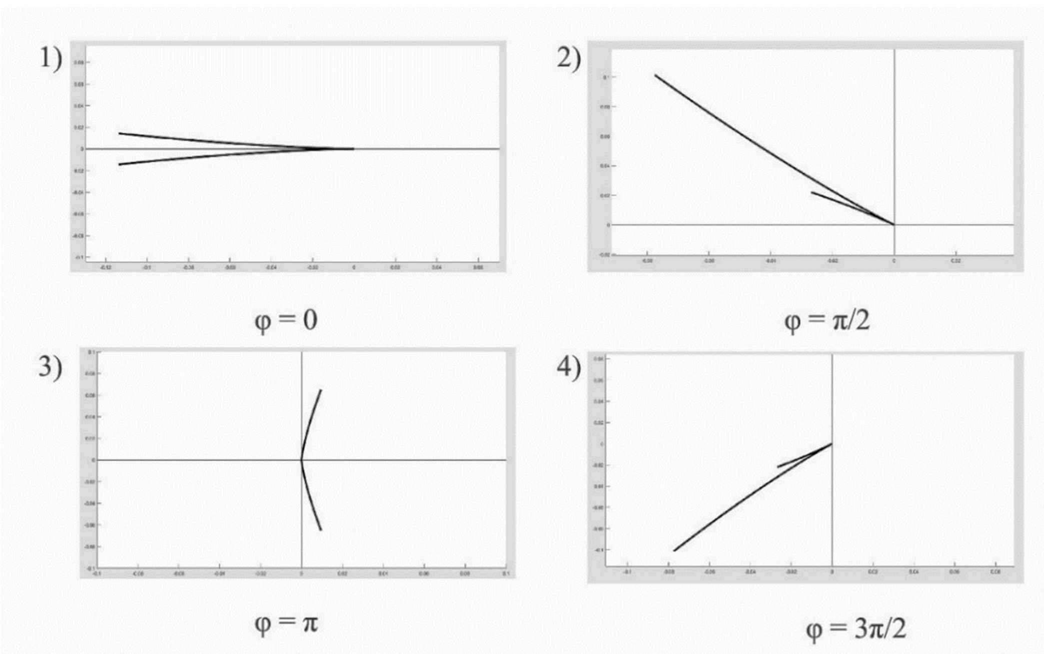


Рис. 3

Доказано, что для устойчивых гармонических отображений касание нулевой линии якобиана и ортогональной траектории соответствует точке сборки, а их трансверсальное пересечение – точке складки (см., например, [1], [4] или [5]). Поведение неустойчивого гармонического отображения в окрестности особой точки может быть более сложным. Найдём такой угол φ при котором нулевая линия якобиана и одна из ортогональных траекторий касаются в точке $z = 0$.

Получим асимптотическую формулу для ассоциированного голоморфного квадратичного дифференциала $\varphi_f dz^2$:

$$\varphi_f dz^2 = (2z + 3z^2)2e^{i\varphi} z dz^2 = 4e^{i\varphi} z^2 \big(1 + o(1)\big) dz^2.$$

Таким образом, для отртогональных траекторий выполняется неравенство $\varphi_f dz^2 \approx 4e^{i\varphi} z^2 dz^2 < 0$, что равносильно условию

$$\arg\big(4e^{i\varphi} z^2 dz^2\big) = \pi;\ \ \varphi + 2\arg(z) + 2\arg(dz) = \pi;\ \ \arg(z) + \arg(dz) = \tfrac{\pi-\varphi}{2}.$$

Выразим аргумент через арктангенс и возьмём тангенс от обеих частей уравнения:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}\tfrac{y}{x} + \operatorname{arctg}\tfrac{dy}{dx}) = \operatorname{tg}\tfrac{\pi-\varphi}{2}.$$

Для удобства обозначим $\operatorname{tg}\frac{\pi-\varphi}{2} = p$ и воспользуемся формулой тангенса суммы, получим

$$\frac{\frac{y}{x}+\frac{dy}{dx}}{1-\frac{y dy}{x dx}} = p; \quad \frac{y}{x} + \frac{dy}{dx} = p\left(1 - \frac{y}{x}\frac{dy}{dx}\right).$$

Сделаем замену для полученного дифференциального уравнения $y = zx$, тогда $y' = z'x + z$.

$$z + xz' + z = p\big(1 - z(z'x + z)\big) \ \Rightarrow\ z + xz' + z = p - zz'xp - pz^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ xz'(1 + zp) = p - pz^2 - 2z \ \Rightarrow\ \frac{dz(1+zp)}{dx(p-pz^2-2z)} = \frac{1}{x} \ \Rightarrow\ \frac{dz(1+zp)}{pz^2+2z-p} = -\frac{dx}{x} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ln|pz^2 + 2z - p| = \ln cx^{-2}, c \in \mathbf{R} \ \Rightarrow\ pz^2 + 2z - p = \frac{c}{x^2}, c \in \mathbf{R}.$$

Выполним обратную замену

$$\frac{y^2}{x^2}p + 2\frac{y}{x} - p = \frac{c}{x^2}, c \in \mathbf{R};$$

$$y^2 p + 2yx - (px^2 + c) = 0, c \in \mathbf{R}.$$

Выразим y из полученного квадратного уравнения и возьмём одно из решений

$$y = \frac{-2x + \sqrt{4x^2 + 4(px^2 + c)}}{2p} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + px^2 + c}}{p}, c \in \mathbf{R}.$$

Так как ортогональная траектория должна проходить через точку $z = 0$, то используя условие $y(0) = 0$ находим что $c = 0$. Таким образом,

$$y = \frac{-x + x\sqrt{1+p}}{p} = x\left(\frac{\sqrt{1+p}-1}{p}\right).$$

Таким образом, тангенс угла наклона $h = tg\alpha = \frac{\sqrt{1+p}-1}{p}$. Ортогональная траектория в начале координат касается нулевой линии якобиана при $h = \infty$. Тогда $p = 0$; $tg\frac{\pi-\varphi}{2} = ctg\frac{\varphi}{2} = 0$; $\varphi = \pi$.

Мы нашли значение парметра $\varphi = \pi$, при котором нулевая линия якобиана и ортогональная траектория касаются в точке $z = 0$. Образ нулевой линии якобиана в таком случае приведён на рис. 3, вариант 3. Видим, что полученная кривая не имеет точки возврата, как в других случаях (см. рис. 3, варианты 1,2 и 4). Следовательно, в окрестности особой точки $z = 0$ поведение установленного гармонического ооображене существенным образом отличается от поведения отображения (1), для которого парметр $\varphi = \pi/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев А.А., Шеретова В. В. Квадратичные дифференциалы и локальные свойства гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1994. – С. 48 – 60.

2. Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали интеграла энергии // Математические заметки. 1994. Т.55, № 6. – С. 50 – 58.

3. Голубев А.А., Шеретов В.Г. Квазиконформные экстремали интеграла Дугласа-Дирихле и квадратичные дифференциалы / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1996. – С. 44 – 53.

4. Голубев А.А. Об особых точках плоских гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 1997. – С. 47 – 52.

5. Голубев А.А. Об особых точках гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2014. – С. 22 – 35.

6. Цветков А.А., Голубев А.А. Исследование особых точек гармонических отображений с помощью математического пакета Matlab / В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции. Тверь, 2018. – С. 204–212.

7. Цветков А.А., Голубев А.А. К вопросу об особых точках классических гармонических отображений / Применение функционального анализа в теории приближений. Тверь, 2018. – С. 32–37.

8. Цветков А.А., Голубев А.А. Matlab как средство визуализации поведения гармонического отображения в окрестности особых точек / В сборнике: Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы Третьей Всероссийской научно-практической конференции. Тверь, 2019. – С. 177–181.

УДК 374.31

ШКОЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ В СТУДЕНЧЕСКОЙ НАУЧНОЙ РАБОТЕ

Антон Ильич Цветков
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: czvetkov.1990@bk.ru

Дмитрий Константинович Паршин
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: supermain99@mail.ru

Ключевые слова: *сердечно-сосудистая система, кардиоритмы, кардиоинтервалы, аппроксимация, фрактал, квантование.*

Аннотация. В данное время достаточно мало студентов занимается научной деятельностью во время своего обучения в университете. Однако имея хорошую школьную базу по информатике и математике, а также некоторые познания в высшей математике и определенные наработки других ученых, можно уже проводить некоторые исследования и выявлять определенные паттерны. Потому цель данной статьи – рассказать, как школьные знания помогают нам в нашей научно работе. Далее, в качестве примера, рассмотрим 2D визуализацию больших данных на основе квантового фазового пространства мгновенного сердечного ритма (нашу последнюю работу, представленную на NEC2019).

Квантовое фазовое пространство МСР S_q

Кардиоритмы представляют собой недетерминированную хаотическую систему. Для их описания в работе [1] введены и используются функции частоты мгновенного сердечного ритма (МСР) $y(t)$ и скорости её изменения $v(t)$. Недетерминированный хаос МСР содержит статистические закономерности, адекватно отражающие состояние сердечно-сосудистой системы. Мощное средство для изучения хаотических недеторминированных систем даёт квантовое фазовое пространство.

$$y(t) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i).$$

$$v(t) = v_i + \frac{v_{i+1} - v_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i).$$

Проводим обезразмеривание функций $y(t)$ и $v(t)$. Для этого поделим $y(t)$ на мин$^{-1}$, а $v(t)$ на мин$^{-1}$сек$^{-1}$. В дальнейшем нами используется безразмерные значения этих функций. Квантование $y(t)$ и $v(t)$ проведём согласно алгоритму:

$$\begin{aligned} &y_i = h[y(t)h^{-1}], v_i = h[v(t)h^{-1}], \\ &i = 1, 2, \ldots, N(h,t), \end{aligned} \tag{1}$$

где [ ] – оператор округления до ближайшего целого числа.

Квантовое фазовое пространство МСР (КФП S_q) – множество клеток пространства R^2 со стороной, равной шагу квантования h безразмерных мгновенной частоты сердечного ритма $y(t)$ и скорости её изменения $v(t)$, которым принадлежат значения этих функций. В данном случае квантовыми числами являются координаты центров клеток y_i и v_i ($i = 1, 2, \ldots, N(h)$), а также числа заполнения клеток $n_i(y_i, v_i)$.

Одной из важнейших статистических закономерностей кардиоритмов является фрактальность их КФП МСР [2–3]. Это следует из аппроксимации полного числа элементарных ячеек S_q $N(h, t)$ степенной по h функцией

$$\overline{N}(h,t) = \Gamma_q(t) h^{-D_q},$$

где $\Gamma_q(t)$ и $D_q(t)$ – параметры аппроксимации, которые находим из условия минимальности уклонения функций $N(h, t)$ и $\overline{N}(h,t)$.

Нами проведены расчёты зависимости числа элементарных ячеек КФП МСР $N^{(p)}(h_k)$ (p=1,2,3,4, p – номер пациента) при α=0.1, K=5 для 4-х исследуемых пациентов Тверского областного клинического кардиологического диспансера (ТвОККД) и их аппроксимации степенными функциями (1) представим на рис. 1.

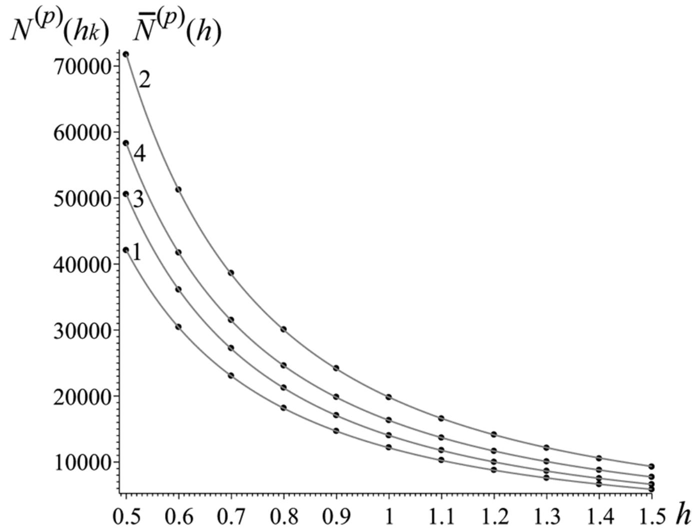


Рис. 1. Зависимости функций $N^{(p)}(h_k)$ и $\overline{N}^{(p)}(h)$ для пациентов p=1,2,3,4 от h_k и h, соответственно

Из рис.1 следует, что S_q исследованных пациентов близки к фракталам с высокой степенью точности (порядка 1%).

Визуализация S_q

Важнейшим достижением нашего подхода является возможность визуализации множества состояний $\{n_i, y_i, v_i\}$, позволяющая представить суточные данные по кардиоинтервалам в простой и наглядной форме. С этой целью мы присвоим разные цвета элементарным ячейкам с координатами центров y_i, v_i КФП МСР в зависимости от значений чисел заполнения n_i. Наши оценки показывают, что при этом достаточно использовать порядка десяти цветов.

На рис. 2–5 мы представим КФП МСР четырех пациентов ТвОККД, построенные по данным суточного ХМ. Горизонтальные линии рис. 2–5 разбивают КФП МСР на три области $|v|<15$, $v<-15$ и $v>15$. Первая область соответствует регулярному МСР, а вторая и третья – скачкам (катастрофам) МСР.

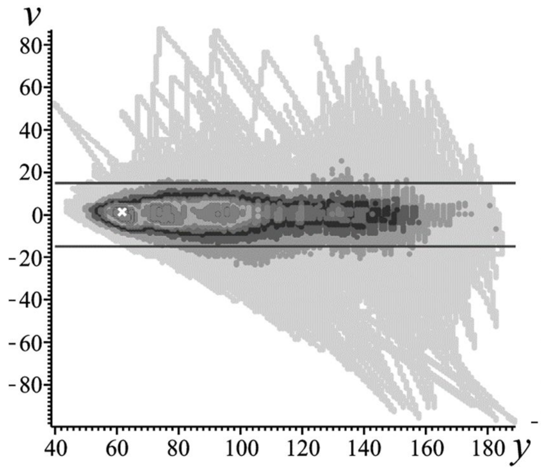


Рис. 2. КФП МСР первого пациента; диагноз - норма; D=1.7945;Г=12139

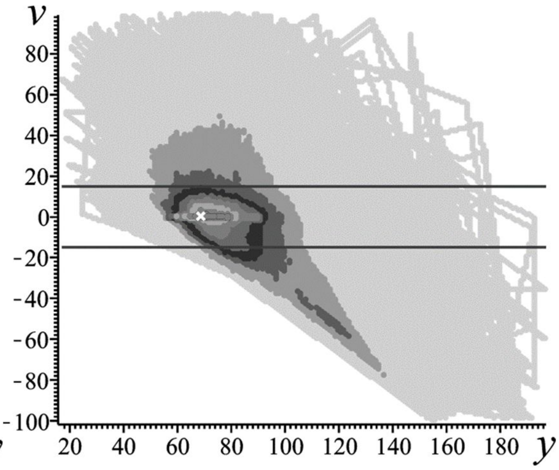


Рис. 3. КФП МСР второго пациента; диагноз - желудочковая экстрасистолия 4а градации по Ryan; D=1.8580; Г=19811

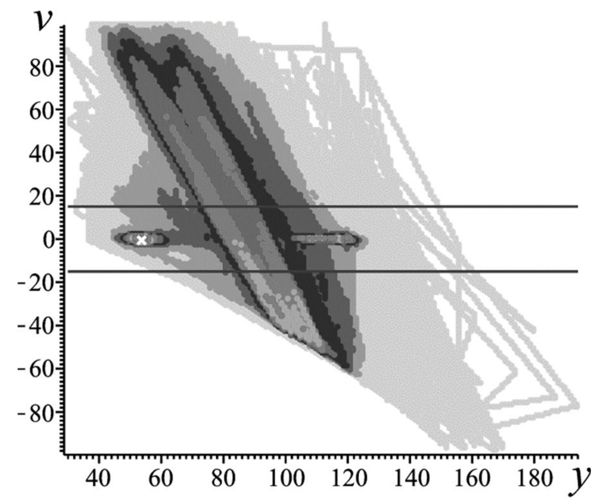


Рис. 4. КФП МСР третьего пациента; диагноз – желудочковая экстрасистолия 4а градации по Ryan; D=1.8516; Г=14017

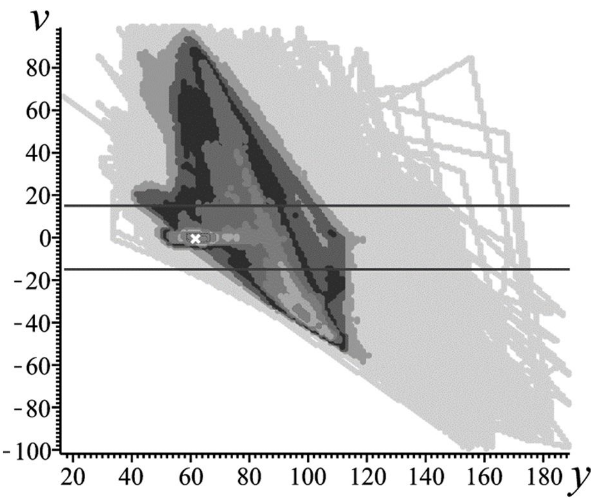


Рис. 5. КФП МСР четвертого пациента; диагноз - желудочковая экстрасистолия 5 градации по Ryan; D=1.8385; Г=16301

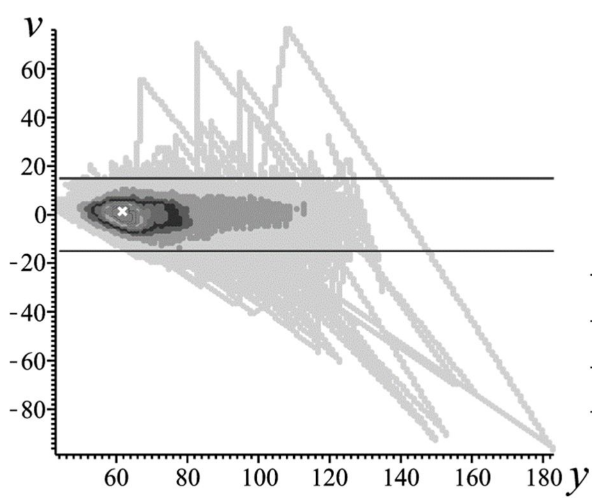


Рис. 2a. КФП МСР первого пациента; диагноз - норма; состояние – сон

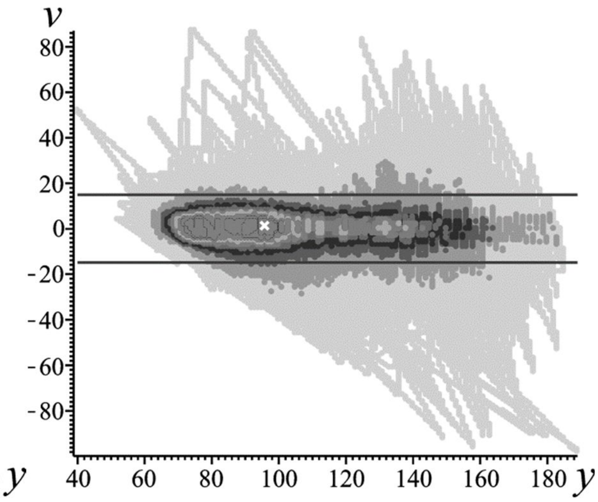


Рис. 2b. КФП МСР первого пациента; диагноз - норма; состояние – бодрствование

На Рис. 2a и 2b представлены КФП МСР для первого пациента (p=1) в состоянии сна и бодрствования, соответственно.

На Рис. 5a и 5b представлены КФП МСР для четвертого пациента (p=4) в состоянии сна и бодрствования, соответственно.

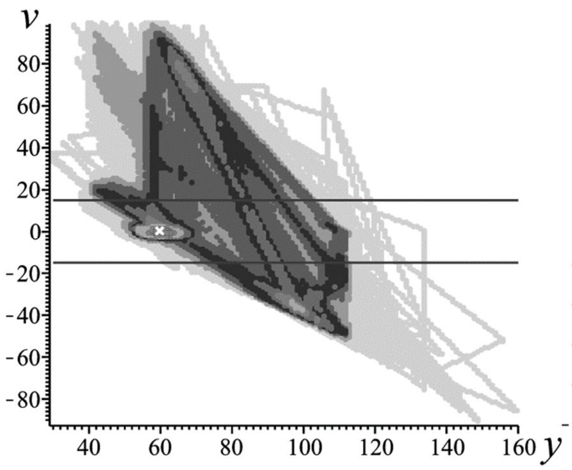


Рис. 5a. КФП МСР четвертого пациента; диагноз - желудочковая экстрасистолия 5 градации по Ryan; состояние – сон

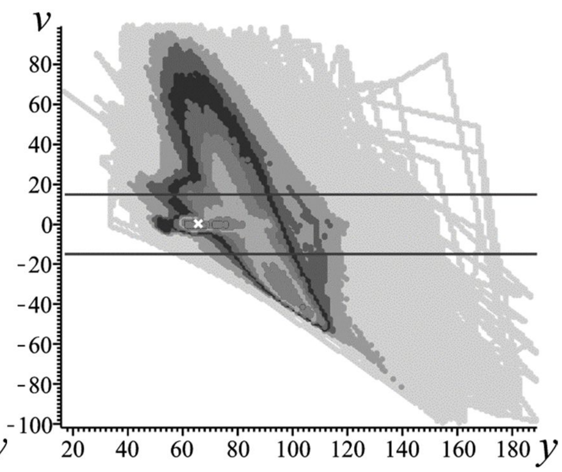


Рис. 5b. КФП МСР четвертого пациента; диагноз - желудочковая экстрасистолия 5 градации по Ryan; состояние – бодрствование

S_q на рис. 2–5 разбиваются на 10 цветных зон достаточно сложной конфигурации. Во всех случаях элементарные ячейки × входят в зоны красного цвета с максимальной вероятностью нахождения в них фазовых точек. Все цветные зоны являются достаточно четко сформированными геометрическими структурами с определенными закономерностями их конфигураций. Геометрическая структура цветовых зон адекватно отражает состояние сердечно-сосудистой системы пациентов ТвОККД.

Заключение. В ходе написания программы для квантования, аппроксимации и вычисления множества значений функции активно использовались функции(процедуры), ссылки, массивы и работа с их индексами. В плане математики сильно помогло понимание таких тем как производные, первообразные и интегралы. В общем все то, что проходят на уроках информатики и математики в последних классах школы. Также в этой работе использовались некоторые темы из высшей математики, которые мы проходили на первом и втором курсах.

Таким образом, для написания подобных программ, конечно же, школьных знаний, полученных на уроках информатики, недостаточно. Приходится кое-что изучать самостоятельно. Например, для данной работы пришлось более детально разбираться с функциями и их возвращаемыми значениями, однако хорошая подготовка по темам: массивы (в частности их индексы), функции; помогла бы быстрее во всем этом разобраться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mikheev S.A., Tsvetkov V.P., Tsvetkov I.V. Visualisation of the quantum phase space of instantaneous heart rhythm. CEUR Workshop Proceedings. 2018. V. 2267. pp. 359-363. URL: http://ceur-ws.org/Vol-2267/359-363-paper-68.pdf.

УДК 378.1

ПОВЫШЕНИЕ ЦИФРОВОЙ ГРАМОТНОСТИ ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ДИСЦИПЛИН

Чемарина Юлия Владимировна
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Chemarina.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *цифровая грамотность, цифровая трансформация, математическое образование.*

Аннотация. В работе представлен опыт математического факультета ТвГУ по разработке дополнительных профессиональных программ для преподавателей и учителей математики на примере профессиональной программы повышения квалификации «Математическое образование в эпоху цифровой трансформации».

На сегодняшний день одной из главных задач среднего и высшего математического образования является подготовка квалифицированных кадров для цифровой экономики, включающая в себя переход на персонализированное образование, повышение качества IT-образования и ориентацию на профессии будущего, на быстроменяющуюся ситуацию на рынке труда. При этом подготовка кадров для цифровой экономики включает в себя не только этап обучения в школе и вузе, но и создание благоприятной среды для профессиональной переподготовки педагогов и работающих специалистов. На форуме «Кадры для цифровой экономики 1.2», который состоялся 05.03.2020 г. в Аналитическом центре при Правительстве РФ, спецпредставитель президента РФ по вопросам цифрового и технологичного развития Д.Н. Песков отметил, что для формирования цифровой экономики нужно готовить новое поколение «цифровым образом» в школах и вузах, переобучить взрослых специалистов, помочь им приобрести цифровые компетенции.

Создание в Тверском государственном университете гибкой системы непрерывного образования задало тенденцию появления новых дополнительных профессиональных программ для преподавателей и учителей, созданных с учётом концепций национальной технологической инициативы, национальных, федеральных и региональных проектов в области цифровой грамотности. Одной из таких программ стала дополнительная профессиональная программа повышения квалификации «Математическое образование в эпоху цифровой трансформации», разработанная для преподавателей образовательных организаций высшего образования. Эта программа реализуется на базе математического факультета Тверского государственного университета, являющегося центром математического образования и одним из основных источников для пополнения IT-кадров Тверского региона [1,2,3]. Математический факультет ведёт подготовку бакалавров, магистров и специалистов по направлениям: 01.03.01 Математика с профилем «Преподавание математики и информатики», 02.03.01 Математика и компьютерные науки с профилем «Математическое и компьютерное моделирование», 02.03.03 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем с профилем «Математические основы информатики», 10.05.01 Компьютерная безопасность с профилем «Математические методы защиты информации», 02.04.01 Математика и компьютерные науки с профилями «Математическое и компьютерное моделирование» и «Преподавание математики и информатики». Значительная часть учителей математики, информатики и ИКТ школ Твери и Тверской области представлена выпускниками математического факультета. Поэтому уровень цифровой грамотности будущих педагогов и их учеников напрямую зависит от цифровой культуры профессорско-преподавательского состава. От того, насколько хорошо сейчас преподаватели вуза владеют современными технологиями, используют ли они цифровой инструментарий в своей профессиональной деятельности, понимают ли они тенденции развития системы образования, зависит способность будущих учителей ориентироваться в постоянно меняющемся мире.

С целью повышение цифровой грамотности преподавателей математических дисциплин в рамках профессиональной программы повышения квалификации «Математическое образование в эпоху цифровой трансформации» были сформулированы профессиональные и универсальные компетенции педагога:

ПК 1. Способность использовать в педагогической деятельности методы работы с информацией с учётом современных технологий цифровой экономики и информационной безопасности;

ПК 2. Способность к разработке и реализации методик, технологий и приёмов обучения математике и информатике на основе цифровых технологий;

ПК 3. Способность проектировать образовательные программы с учётом вызовов цифровой экономики;

ПК 4. Способность создавать и анализировать образовательные проекты, построенные на использовании цифровых данных;

УК 1. Готовность к самообразованию;

УК 2. Способность осуществлять рефлексивную деятельность;

УК 3. Готовность к работе в команде.

В результате освоения программы слушатель должен:

1. Знать: цели и задачи национального проекта «Образование»; ключевые направления федерального проекта «Кадры для цифровой экономики»; концепции постиндустриализации; направления цифровой трансформации образования; классы цифровых технологий; особенности организации образовательного процесса в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов с применением современных цифровых технологий; подходы к развитию электронного обучения; методики и технологии проектирования современной цифровой образовательной среды для реализации задач непрерывного образования; веб-технологии; образовательные веб-сервисы, мобильные и веб-приложения;

основы работы с базами данных; методы защиты информации; модели жизненных циклов проектов в сфере цифровых технологий; виды рефлексивной деятельности.

2. Уметь: применять в педагогической деятельности методы работы с информацией с учётом современных технологий цифровой экономики и информационной безопасности; использовать педагогически обоснованные формы, методы и приемы организации деятельности обучающихся; применять образовательные технологии, реализуемые с применением информационно-телекоммуникационных сетей при опосредованном взаимодействии обучающихся и педагогических работников; проектировать современную цифровую образовательную среду для реализации задач непрерывного образования; сочетать традиционные формы аудиторного обучения с элементами электронного обучения; применять основные практики, инструменты и методы в управлении образовательными проектами.

3. Владеть: навыками практического использования информационных технологий; инструментами и технологиями проектирования современной цифровой образовательной среды для реализации задач непрерывного образования; навыками анализа и статистической обработки данных; технологиями хранения и обеспечения доступа к информации; методами обеспечения информационной безопасности; основными инструментами и методами, применяемыми в управлении процессами проекта в сфере цифровых технологий; приёмами рефлексивной деятельности; методами командообразования.

Сфера применения слушателями полученных профессиональных компетенций, умений, знаний: учебная, воспитательная и методическая работа в образовательных организациях высшего образования.

Программа рассчитана на 24 академических часа. Режим обучения – 6 академических часов в неделю с частичным отрывом от работы. Она состоит из двух модулей, ориентированных на преподавание математики в школе и математических дисциплин в вузе соответственно. Учебно-тематический план программы представлен в таблице 1, а содержание обучения в таблице 2.

Таблица 1. Учебно-тематический план программы

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего, час.	В том числе:	
			Лекции	Самостоятельная работа
1	Модуль 1. Традиционные и цифровые технологии в преподавании математики в школе	12	6	6
	Тема 1.1 Приоритетный национальный проект «Образование»	4	2	2

№ п/п	Наименование модулей, разделов и тем	Всего, час.	В том числе:	
			Лекции	Самостоятельная работа
	Тема 1.2 Электронное обучение и электронные образовательные ресурсы на уроках математики	4	2	2
	Тема 1.3 Управление в информационно-образовательной среде	4	2	2
2	Модуль 2. Трансформация математического образования в высшей школе: стратегия перехода к цифровому университету	12	6	6
	Тема 2.1 Федеральный проект «Кадры для цифровой экономики»	4	2	2
	Тема 2.2 Цифровые технологии и информационная безопасность	4	2	2
	Тема 2.3 Электронная информационно-образовательная среда вуза	4	2	2
	Итого	24	12	12

Таблица 2. Содержание обучения

Наименование тем	Содержание
Тема 1.1 Приоритетный национальный проект «Образование»	Состояние российской системы образования и необходимость ее модернизации. Государственная политика в сфере образования. Цели национального проекта «Образование». Федеральные проекты: «Современная школа», «Успех каждого ребенка», «Цифровая образовательная среда», «Учитель будущего». Результаты федеральных проектов. Проблемы и перспективы реализации национального проекта «Образование».
Тема 1.2 Электронное обучение и электронные образовательные ресурсы на уроках математики	Теория и методика электронного обучения. Технологии создания и экспертизы электронных образовательных ресурсов. Технологии создания образовательных сайтов и порталов. Интерактивное оборудование и инновационные программные продукты. Проектирование основных и дополнительных образовательных программ. Проектирование цифровой образовательной среды. ИКТ-компетентность современного педагога.

Наименование тем	Содержание
Тема 1.3 Управление в информационно-образовательной среде	Управление образовательными проектами. Информационные технологии в управлении образованием. Образовательный менеджмент. Система менеджмента качества образования.
Тема 2.1 Федеральный проект «Кадры для цифровой экономики»	Актуализация федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования в части требований к формированию компетенций цифровой экономики. Прогнозная потребность в ИТ-специалистах. Инструменты мотивации и поддержки талантов в области математики и ИТ. Поиск и развитие талантов в рамках перехода к концепции «массовой уникальности». Кейсы для массового повышения цифровой грамотности населения. Организационные форматы для обеспечения гибкой и проактивной системы непрерывного обучения граждан всех возрастов.
Тема 2.2 Цифровые технологии и информационная безопасность	Направления цифровой трансформации. Цифровая грамотность. Классы цифровых технологий. Основы веб-технологий. Мобильные и веб-приложения. Сервисы в Интернете. Организация данных. Базы данных. Анализ данных. Инструментальные среды анализа данных. Технологии обработки информации. Информационная безопасность. Инструменты и методы управления проектами в сфере цифровых технологий.
Тема 2.3 Электронная информационно-образовательная среда вуза	Электронное обучение. Дистанционные образовательные технологии. Смешанное обучение. Электронные библиотечные системы и электронные образовательные ресурсы. Электронное портфолио. Система управления учебным процессом. Корпоративная электронная почта. Цифровой след обучающегося. Формирование индивидуальной траектории обучения на основе анализа данных.

При реализации программы используются традиционные и проблемные лекции, а также технология кейс-стади. Самостоятельная работа слушателей заключается в подготовке образовательного проекта в сфере цифровых технологий и его презентации на Всероссийской конференции «Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации».

Дополнительная профессиональная программа повышения квалификации «Математическое образование в эпоху цифровой трансформации» является первым этапом на пути цифровой трансформации математического образования в Тверском государственном университете. Дальнейшая работа по разработке новых образовательных программ в области цифровых технологий позволит в течение длительного времени успешно готовить квалифицированные кадры в области информационных технологий и цифровой экономики. Такие программы необходимы для удовлетворения растущей потребности в цифровой грамотности и постепенного преобразования классического университета в цифровой университет.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Чемарина Ю.В., Голубев А.А. Об организации проектной деятельности студентов математического факультета Тверского государственного университета / В сборнике Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области: материалы III Всероссийской научно-практ. конф. (29-30 марта 2019 г., г. Тверь). – Тверь: Твер. гос. ун-т, 2019. – С. 202–205.

2. Чемарина Ю.В., Шаповалова И.А. Об особенностях подготовки специалистов по информационной безопасности на математическом факультете Тверского государственного университета / В сборнике докладов XXIII пленума ФУМО ВО ИБ и Всероссийской научной конференции "Фундаментальные проблемы информационной безопасности в условиях цифровой трансформации" (ИНФОБЕЗОПАСНОСТЬ-2019). – Ставрополь: Изд-во СКФУ, 2019. – С. 205-212.

3. Чемарина Ю.В., Голубев А.А., Кратович П.В., Шаповалова И.А. О реализации концепции развития математического образования в российской федерации на математическом факультете Тверского государственного университета // Перспективы развития математического образования в Твери и Тверской области. Материалы научно-практической конференции. 2017. – С. 162-165.

4. Паспорт федерального проекта "Кадры для цифровой экономики" (утв. президиумом Правительственной комиссии по цифровому развитию, использованию информационных технологий для улучшения качества жизни и условий ведения предпринимательской деятельности, протокол от 28.05.2019 N 9).

5. Паспорт национального проекта "Образование" (утв. президиумом Совета при Президенте Российской Федерации по стратегическому развитию и национальным проектам, протокол от 24 декабря 2018 г. N 16).

УДК 514 (075.3)

ЗАДАЧИ О РАВНЫХ ОТРЕЗКАХ В ТРАПЕЦИИ

Алёна Анатольевна Шаповалова
МОУ СОШ № 25, Тверь
E-mail: fedotova99@rambler.ru

Ключевые слова: *трапеция, подобные треугольники, параллельно.*

Аннотация. В статье рассматриваются любопытные задачи о равных отрезках в трапеции. Их применение полезно после изучения тем «Признаки подобия треугольников» и «Средняя линия трапеции» в курсе геометрии 8 класса. В основном в таких задачах рассматривается два или три отрезка, но в целом их насчитывается от двух до пяти.

Приведем решения некоторых геометрических задач о равных отрезках в трапеции.

Задача 1. В трапеции *ABCD* докажите, что *EK* = *NF*, где *EF* || AD (рис.1).

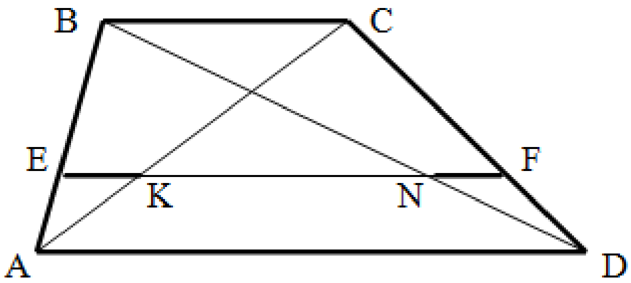


Рис. 1

Доказательство. $\Delta AEK \sim \Delta\, ABC$ по 1 признаку, следовательно, отношение высоты ΔAEK (проедённой к *EK*) к высоте $\Delta\, ABC$ (проведённой к *BC*) равно $\frac{EK}{BC}$. Аналогично с ΔDFN и ΔDCB, они подобны, отношение высоты первого треугольника к высоте второго равно $\frac{NF}{BC}$. Получаем: *EK*=*NF*.

Приведем два примера практических задач:

1. Найти *KL* (рис. 2).

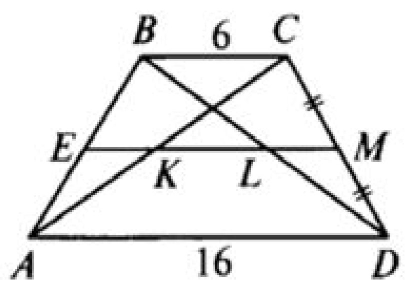


Рис. 2

2. Найти *AD* (рис. 3).

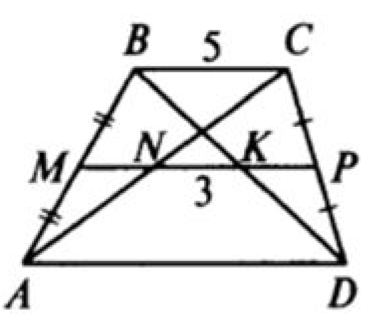


Рис. 3

Задача 2. Докажите, что в трапеции *ABCD*, где *AD* и *BC* – основания, $EF \parallel AD$, $EF = \frac{2AD\cdot BC}{BC+AD}$ (рис.4).

Доказательство

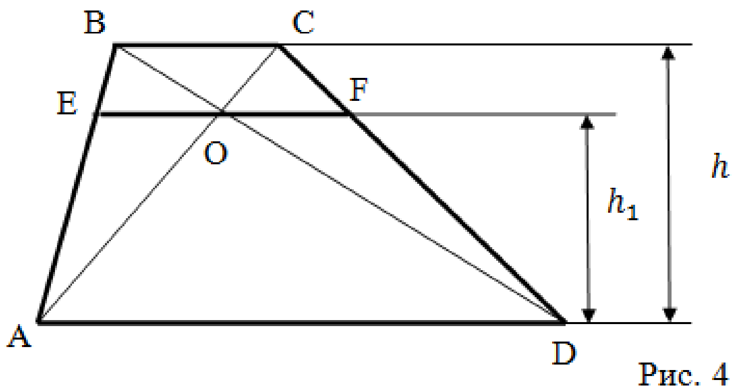


Рис. 4

$\Delta AEO \sim \Delta ABC$ (по 1 признаку) => $\frac{EO}{BC} = \frac{h_1}{h}$ => $h_1 = \frac{EO \cdot h}{BC}$.

$\Delta OBE \sim \Delta\ DBA$ (по 1 признаку) => $\frac{EO}{AD} = \frac{h-h_1}{h}$ => $\frac{EO}{AD} = \frac{h - \frac{EO \cdot h}{BC}}{h}$ =>

=> $\frac{EO}{AD} = 1 - \frac{EO}{BC}$ => $\frac{EO}{AD} + \frac{EO}{BC} = 1$ => $EO = \frac{AD \cdot BC}{BC+AD}$.

Мы знаем, что $EO=OF$ (см. задачу 1), получаем, что $EF = \frac{2AD \cdot BC}{BC+AD}$.

Задача 3. Чему равно отношение оснований трапеции *ABCD*, если *OK*=*OM*, где O – точка пересечения диагоналей, а *K* – точка пересечения прямых, на которых лежат боковые стороны трапеции?

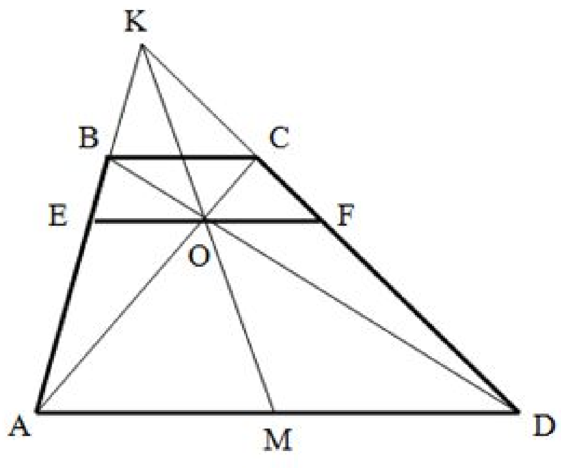


Рис. 5

Решение. Так как OK=OM, то EF, проведенная через точку O параллельно AD, является средней линией Δ AKD, которая равна $\frac{AD}{2}$. С другой стороны, $\mathrm{EF} = \frac{2\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC}}{\mathrm{BC}+\mathrm{AD}}$, что было доказано выше. Получаем: $\frac{AD}{2} = \frac{2\mathrm{AD} \cdot \mathrm{BC}}{\mathrm{BC}+\mathrm{AD}}$ => 4BC=BC+AD => $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{BC}} = \frac{3}{1}$.

Задача 4. Пересеките трапецию *ABCD* прямой, параллельной основаниям так, чтобы её отрезок, лежащий внутри трапеции, делился диагоналями на три равные части.

Решение. Пусть M – середина основания AD, AC и BD – диагонали, а K – точка пересечения BM и AC (рис.6). Проведём через K прямую EF параллельно AD. При этом $EK=KN=NF$. Действительно, $EK=KN$, так как $AM=MD$, а $EK=NF$ (по задаче 1).

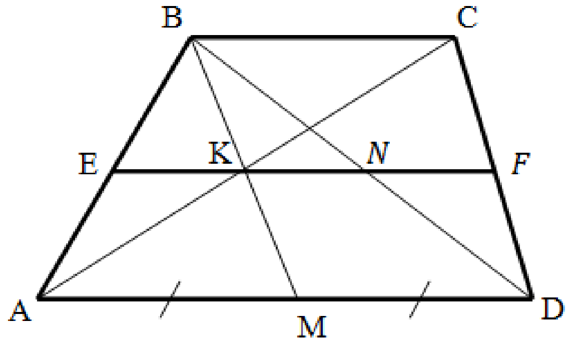


Рис. 6

Замечание. Возможен еще один способ построения с выполнением условий задачи. Кроме отрезка EF, можно построить отрезок LT (рис. 7). Он строится аналогично EF, но берётся Q – середина основания BC.

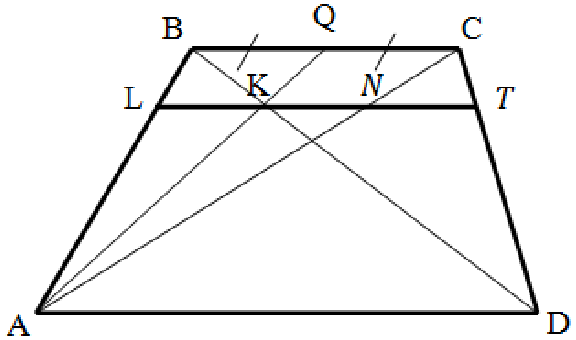


Рис. 7

Задача 5. При каком отношении оснований трапеции $KE=EM=ML=LP=PN$ (рис. 8)?

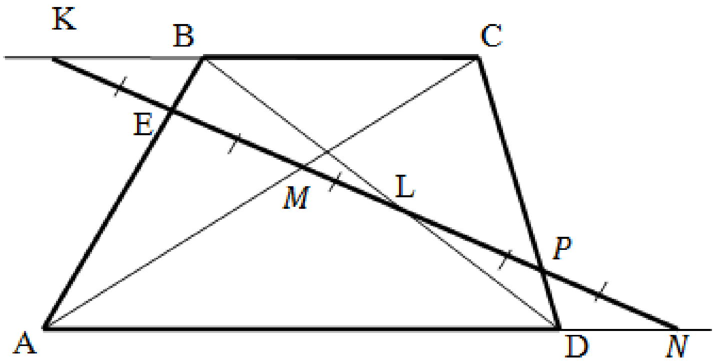


Рис. 8

Решение:

$\Delta KLB \sim \Delta NLD \Rightarrow \frac{KB}{DN} = \frac{3}{2} \Rightarrow DN = \frac{2}{3}KB;$

$\Delta KBE \sim \Delta NAE \Rightarrow \frac{KB}{AD+DN} = \frac{1}{4} \Rightarrow AD = 4KB - DN \Rightarrow AD = \frac{10}{3}KB;$

$\Delta KMC \sim \Delta NMA \Rightarrow \frac{KB+BC}{AD+DN} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3KB + 3BC = 2AD + 2DN \Rightarrow$

$BC = \frac{5}{3}KB.$

Найдем теперь отношение оснований: $\frac{BC}{AD} = \frac{5}{3}KB : \frac{10}{3}KB = \frac{1}{2}.$

Следующие задачи представлены для самостоятельного решения.

Задача 6. Диагонали трапеции делят её среднюю линию на три равные части. Найдите отношение оснований.

Ответ: 2:1.

Задача 7. В трапеции $ABCD$ основания AD и BC, $EF \parallel QT \parallel AD$. $AE=EQ=QB$. Выразите через основания трапеции отрезки EF и QT (рис. 9).

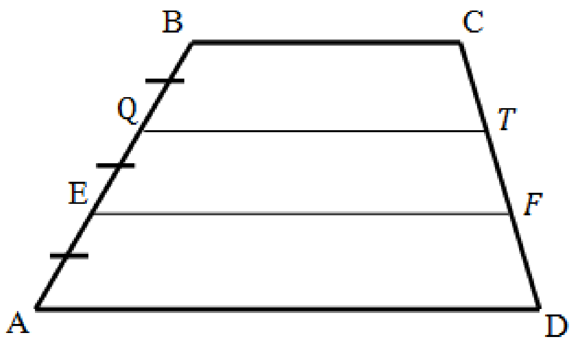


Рис. 9

Ответ: $EF = \frac{2AD+BC}{3}$, $QT = \frac{AD+2BC}{3}$.

Задача 8. Основание AB трапеции $ABCD$ вдвое длиннее основания CD и вдвое длиннее боковой стороны AD. Длина диагонали AC равна x, а длина боковой стороны BC равна y. Выразите площадь трапеции через x и y.

Ответ: $\frac{3xy}{4}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гаврилова Н.Ф. Поурочные разработки по геометрии к УМК Л.С. Атанасяна и др. – М.: Просвещение, 2016.

2. Садовничий Ю. Решаем задачи по геометрии: Решение четырёхугольников / Ю. Садовничий // МАТЕМАТИКА. – 2010. – № 5. – С.42–44.

3. Филлиповский Г. От двух до пяти, или о равных отрезках в трапеции / Г. Филлиповский // МАТЕМАТИКА. – 2010. – № 5. – С. 15-18.

УДК 517.95, 532.5

О ТОЧНЫХ РЕШЕНИЯХ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Юрий Владимирович Шеретов
Тверской государственный университет, Тверь
E-mail: Sheretov.YV@tversu.ru

Ключевые слова: *система Навье–Стокса, квазигидродинамческая система, задача Коши, однородно-винтовые решения, обобщенное условие Громеки–Бельтрами.*

Аннотация. Приведены примеры точных решений задачи Коши, общих для системы Навье−Стокса и квазигидродинамической системы, но не удовлетворяющих уравнениям Эйлера. Дана постановка нерешенной задачи, в которой требуется доказать существование и единственность бесконечно дифференцируемого решения задачи Коши для квазигидродинамической системы.

Квазигидродинамическая (КГД) система для слабосжимаемой вязкой жидкости [1, 2] без учета внешних сил в стандартных обозначениях имеет вид

$$div\vec{u} = div\vec{w}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \big((\vec{u} - \vec{w}) \cdot \nabla\big)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u} + \nu\nabla(div\vec{u}) + div(\vec{u} \otimes \vec{w}). \tag{2}$$

Вектор $\vec{w}$ определяется по формуле

$$\vec{w} = \tau\big((\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p\big).$$

Здесь ν – коэффициент кинематической вязкости. Символом Δ обозначен оператор Лапласа, действующий на векторное поле. Постоянная средняя плотность жидкости ρ положена равной единице. Система (1) – (2) замкнута относительно неизвестных функций – скорости $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ и давления $p = p(\vec{x}, t)$. Характерное время релаксации τ вычисляется по формуле

$$\tau = \frac{\nu}{c_s^2},$$

где c_s – скорость звука в жидкости. Параметры ν и τ являются положительными константами. При $\tau \to +0$ система (1) − (2) переходит в классическую систему Навье−Стокса в динамике вязкой несжимаемой жидкости:

$$div\vec{u} = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = \nu\,\Delta\vec{u}. \tag{4}$$

Присоединим к системам (1.1) – (1.2) и (1.3) – (1.4) начальное условие

$$\vec{u}\,|_{t=0} = \vec{u}_0(\vec{x}), \quad \vec{x} \in R^3_{\vec{x}}. \tag{5}$$

Функция $\vec{u}_0 = \vec{u}_0(\vec{x})$ является бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $R^3_{\vec{x}}$. Для системы Навье–Стокса векторное поле $\vec{u}_0$ соленоидально, т.е.

$$div\,\vec{u}_0 = 0. \qquad (6)$$

Для КГД системы ограничение (6) не накладывается. Чтобы исключить неоднозначность в определении давления, можно положить

$$p(\vec{0},t) = p_0, \quad t \geq 0. \qquad (7)$$

Здесь p_0 – заданное положительное число.

Будем рассматривать гладкие (бесконечно-дифференцируемые) решения задач Коши (1), (2), (5) и (3), (4), (5), ограниченные в пространстве $R^3_{\vec{x}}$ в произвольный фиксированный момент времени, т.е. для любого $t \in [0,+\infty)$ существуют положительные числа $C_1 = C_1(t)$ и $C_2 = C_2(t)$, такие, что каждого $\vec{x} \in R^3_{\vec{x}}$ выполняются неравенства

$$|\vec{u}(\vec{x},t)| \leq C_1, \qquad |p(\vec{x},t)| \leq C_2. \qquad (8)$$

Некоторые точные решения задачи Коши для КГД системы построены в [3, 4].

Определение. *Решение* $(\vec{u},p)$ *назовем однородно-винтовым, если существует такая вещественная постоянная* $\lambda \neq 0$, *что выполнено равенство*

$$\vec{\omega} = \lambda\vec{u},$$

где $\vec{\omega} = rot\,\vec{u}$.

Теорема 1. *Для того, чтобы пара функций* $(\vec{u},p)$, *ограниченных на* $R^3_{\vec{x}}$ *в любой момент времени, являлась гладким однородно-винтовым решением задачи Коши для квазигидродинамической системы, необходимо и достаточно, чтобы* $(\vec{u},p)$ *была таким решением для системы Навье–Стокса.*

Однородно-винтовые решения задачи Коши, общие для систем Навье–Стокса и КГД, можно построить по схеме, предложенной чешским физиком Виктором Тркалом [3, 5].

Пример 1. Одно из таких решений имеет вид

$$u_x = U \sin\left(\frac{z}{H}\right) e^{-\frac{\nu t}{H^2}}, \qquad (9)$$

$$u_y = U \cos\left(\frac{z}{H}\right) e^{-\frac{\nu t}{H^2}}, \qquad (10)$$

$$u_z = 0, \qquad (11)$$

$$p = p_0. \qquad (12)$$

Здесь U и H − положительные константы, имеющие размерности скорости и длины соответственно.

Теорема 2. *Пусть* $(\vec{u}, p)$ *– гладкое решение задачи Коши для системы Навье–Стокса, удовлетворяющее неравенствам (8) и обобщенному условию Громеки–Бельтрами*

$$rot\,[\vec{u} \times \vec{\omega}] = 0. \qquad (13)$$

Кроме того, для каждого $t \in [0, +\infty)$ *существует положительное число* $C_3 = C_3(t)$*, такое, что любого* $\vec{x} \in R^3_{\vec{x}}$ *выполняется неравенство*

$$|\Psi(\vec{x}, t)| \le C_3,$$

где

$$\Psi(\vec{x}, t) = \int\limits_{\vec{0}}^{\vec{x}} \left([\vec{u} \times \vec{\omega}] \cdot \vec{l}\right) ds$$

– криволинейный интеграл второго рода, не зависящий от пути интегрирования, соединяющего точки $\vec{0}$ *и* $\vec{x}$. *Тогда пара* $(\vec{u}, p)$ *является гладким решением задачи Коши для квазигидродинамической системы.*

Подробные доказательства теорем 1 и 2 можно найти в [5]. Приведем пример решения задачи Коши, общего для систем Навье−Стокса и КГД, и удовлетворяющего обобщенному условию Громеки−Бельтрами (13).

Пример 2. Решение имеет вид

$$u_x = -\frac{A}{H}\cos\left(\frac{x}{L}\right)\sin\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \qquad (14)$$

$$u_y = \frac{A}{L}\sin\left(\frac{x}{L}\right)\cos\left(\frac{y}{H}\right)e^{-\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}, \qquad (15)$$

$$u_z = 0, \qquad (16)$$

$$p = p_0 + \frac{A^2}{2}\left[\frac{1}{H^2}\left(1-\cos^2\left(\frac{x}{L}\right)\right) + \frac{1}{L^2}\left(1-\cos^2\left(\frac{y}{H}\right)\right)\right]e^{-2\left(\frac{1}{L^2}+\frac{1}{H^2}\right)\nu t}. \qquad (17)$$

Здесь A – положительная постоянная, имеющая размерность $см^2/c$. Символами L и H обозначены положительные константы, имеющие размерность $см$.

Для системы Навье−Стокса это решение было построено Джеффри Инграмом Тейлором. Подчеркнем еще раз, что наборы функций (9) − (12) и (14) − (17) задают точное решение задачи Коши не только для системы Навье−Стокса, но и для квазигидродинамической системы. Однако они не удовлетворяют классической системе Эйлера

$$div\vec{u} = 0,$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla)\vec{u} + \nabla p = 0.$$

Доказательство теоремы о существовании и единственности гладкого решения задачи Коши для уравнений Навье–Стокса – одна из мировых проблем математики [6]. Аналогичная трудная задача для КГД системы может быть поставлена следующим образом.

Нерешенная задача (Ю.В. Шеретов). *Доказать существование и единственность бесконечно дифференцируемого решения задачи Коши (1), (2), (5), (7) для квазигидродинамической системы.*

Если утверждение окажется неверным для бесконечно дифференцируемой и ограниченной на $R^3_{\vec{x}}$ функции $\vec{u}_0(\vec{x})$, то можно попытаться предъявить более жесткие требования к начальному распределению скорости. Например, считать $\vec{u}_0(\vec{x})$ бесконечно дифференцируемой и финитной функцией на $R^3_{\vec{x}}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шеретов Ю.В. Динамика сплошных сред при пространственно–временном осреднении. – М., Ижевск: НИЦ. Регулярная и хаотическая динамика, 2009. – 400 с.
2. Шеретов Ю.В. Регуляризованные уравнения гидродинамики. – Тверь: Тверской гос. ун–т, 2016. – 222 с.
3. Шеретов Ю.В. Об общих точных решениях системы Навье–Стокса и квазигидродинамической системы для нестационарных течений // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, 2017. № 3. – С. 13 – 25.
4. Шеретов Ю.В. О точных решениях квазигидродинамической системы, удовлетворяющих обобщенному условию Громеки–Бельтрами // Вестник Тверского государственного университета. Серия: Прикладная математика, 2018. № 3. – С. 5 – 18.
5. Шеретов Ю.В. О решениях задачи Коши для квазигидродинамической системы // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2020. № 1. В печати.
6. Ладыженская О.А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость // Успехи мат. Наук, 2003. Т. 58, Вып 2. – С. 45 – 78.

УДК 004:378

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АППАРАТА НЕЙРОННЫХ СЕТЕЙ ДЛЯ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ПОДГОТОВКИ УЧАЩИХСЯ К КОМПЛЕКСНЫМ ТЕСТИРОВАНИЯМ

Андрей Владимирович Шпак
БОУ «Лицей», Калачинск
E-mail: andrey.v.shpak@gmail.com

Алия Муратовна Айтымова
Северо-Казахстанский государственный университет им.М. Козыбаева, Петропавловск (Казахстан)
E-mail: aitimova_a_1985@mail.ru

Ирина Валерьевна Отинова
БОУ «Калачинский аграрно-технический техникум», Калачинск
E-mail: otin_ira@mail.ru

Ключевые слова: нейронные сети, интеллектуальные системы, системы тестирования результатов обучения.

Аннотация. В статье представлен один из подходов использования аппарата нечетких множеств для проектирования интеллектуальной системы подготовки учащихся к комплексным тестированиям.

Аппарат нечетких множеств и нечеткой логики уже с успехом применяется для решения задач, в которых исходные данные являются ненадежными. Нечеткое управление оказывается особенно полезным, когда данные являются слишком сложными для анализа с помощью общепринятых количественных методов, а также когда доступные источники информации интерпретируются качественно, неточно или неопределенно [1].

Нейронные сети способны находить скрытые динамические закономерности в данных, на которых они обучались, и (на этой основе) прогнозировать их динамику. Кроме того, нейросетевой анализ не предлагает никаких ограничений на характер входной информации.

Авторы статьи считают, с помощью аппарата нейронных сетей можно успешно моделировать процесс восстановления теоретического материала, а также адаптацию отдельного индивида к тестированию, представляя процесс обучения в виде нейронной сети.

На вход искусственного нейрона поступает некоторое множество сигналов. На рис. 1 представлена модель [2], реализующая идею вывода результатов тестирования обучаемого. Здесь множество входных сигналов, обозначенных x_1, x_2, …, x_5 – количество предметов по которым тестируется обучаемый. Эти входные сигналы – знания, поступающие на искусственный нейрон – в совокупности, обозначаемые вектором X.

Каждый сигнал умножается на соответствующий вес w_1, w_2, …, w_5 и поступает на суммирующий блок, обозначенный Σ. Каждый вес соответствует «силе демонстрируемых знаний учащимся» (качество знаний не всегда соответствует тому, что человек может продемонстрировать в определенный момент по ряду причин). Множество весов в совокупности обозначается вектором W.

Системе выгодно помнить весовые коэффициенты знаний, которые может продемонстрировать определенный учащийся, это возможность прогноза «худшего результата».

Отклик сети после обучения может быть до некоторой степени нечувствителен к небольшим изменениям входных сигналов, однако он позволит преодолеть требование строгой точности, присущие обычным обучающим программам.

Синапсическис веса могут быть натуральными числами, принимающими как положительные, так и отрицательные значения. В первом случае синапс оказывает возбуждающее, а во втором – тормозящее действие. Таким образом, действие возбуждающего синапса может моделироваться положительным значением синапсического веса, а действие тормозящего синапса – отрицательным значением.

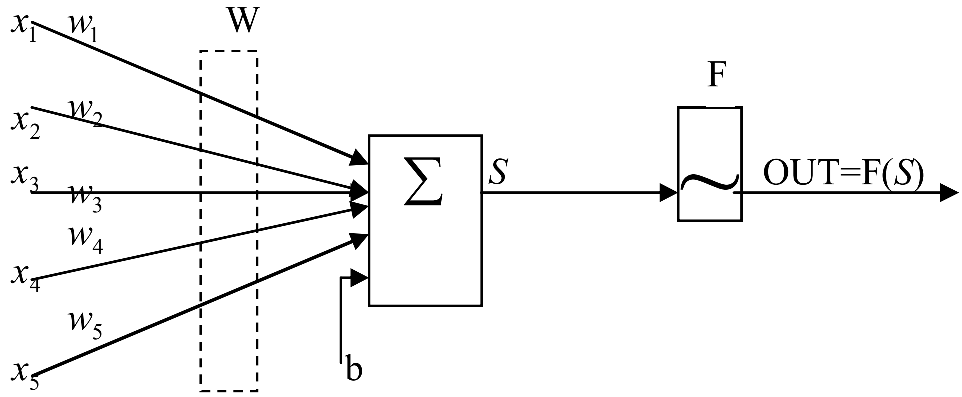


Рис. 1. Представление процесса тестирования в виде нейронной сети.

В области прогнозирования задача сети формулируется как предсказание будущего поведения системы по имеющейся последовательности ее предыдущих состояний. По информации о значениях переменной S в моменты времени, предшествующие прогнозированию, сеть вырабатывает решение о том, чему должно быть равно оцениваемое значение исследуемой последовательности в текущий момент времени.

Если окажется, что обучение сети невозможно, то можно сделать предположение о том, что та выборка, которая есть, не является обучающей. Тогда данную систему можно отнести к режиму абсолютной хаотичности поведения, что свидетельствует либо о нежелании учащегося участвовать в процессе тестирования, либо абсолютном непонимании предметной области предмета.

Общая схема обучения нейронной сети [2] представлена на рис. 2.

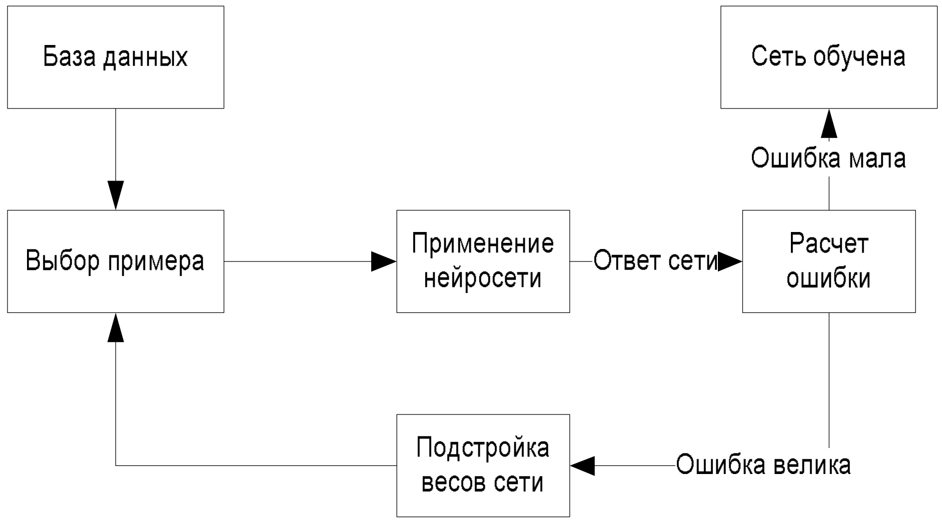


Рис. 2. Схема обучения нейронной сети.

Алгоритм работы «анализатора» интеллектуальной системы подготовки к комплексному тестированию, работающего на основе этой нейронной сети, можно представить следующей схемой:

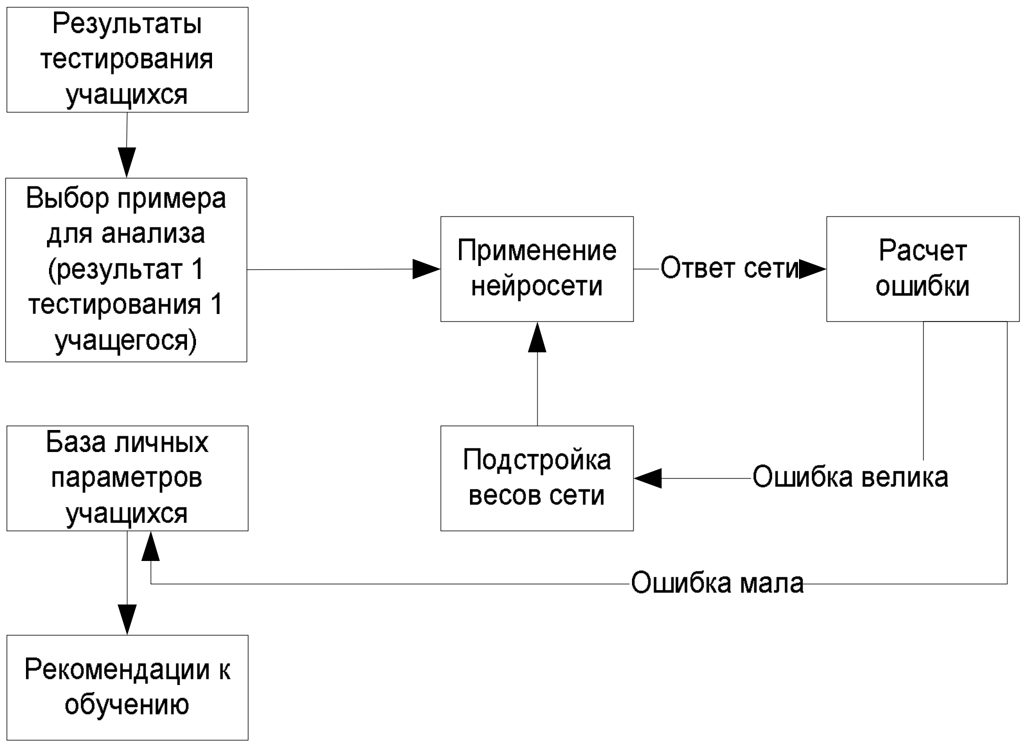


Рис. 3. Схема работы анализатора информационной системы.

Интеллектуальная система, основанная на данной нейронной сети, обладает рядом отличительных преимуществ:

1) при аппроксимации хранимых коэффициентов вектора результатов можно говорить о характере и скорости восстановления материала конкретным учащимся по определенному предмету; как следствие, преподаватель сможет рекомендовать обучаемому, на какие предметы следует обращать большее внимание;

2) исследуя значения матрицы анализа результатов модулей тестирования, преподаватель так же может рекомендовать обратить внимание на «проблемные» модули предмета;

3) исследуя изменения коэффициентов матрицы W, преподаватель может определить степень «адаптации» обучаемого к тестам по определенным предметам;

4) исследуя поведение функции b, можно говорить об ответственности учащегося при подготовке к тестированию.

Учитывая то, что за последние годы в системе образования России и Казахстана довольно широко применяются различные методы тестирования (ЕГЭ, ОГЭ, ЕНТ и другие виды комплексных тестирований), для педагогов стали очень актуальны вопросы, касающиеся методики подготовки учащихся к комплексным тестированиям.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. Калан. Основные концепции нейронных сетей. [Пер. с англ. А.Г. Сивака.] – М.: Вильямс, 2001. – 287 с.: ил., табл.

2. С. Хайкин. Нейронные сети: полный курс, [пер. с англ. Н. Н. Куссуль, А. Ю. Шелестова]. – М.: Вильямс, 2016. – 1104 с.: ил.

Для заметок

Научное издание

ПЕРСПЕКТИВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ В ЭПОХУ ЦИФРОВОЙ ТРАНСФОРМАЦИИ

Материалы
Всероссийской научно-практической конференции

Тверь, 27–28 марта 2020 года

Отпечатано с авторских оригиналов

Подписано в печать 16.03.2020. Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$.
Усл. печ. л. 14,41. Тираж 200 экз. Заказ № 91.
Редакционно-издательское управление
Тверского государственного университета
Адрес: Россия, 170100, г. Тверь, Студенческий пер., д. 12, кор. Б.
Тел. РИУ: (4822) 35-60-63.