Какая часть аксиоматической теории множеств необходима для математики в вузах?

Оноприенко Анастасия Александровна, старший научный сотрудник кафедры математической логики и теории алгоритмов механико-математического факультета МГУ им.Ломоносова, к.ф.-м.н.

VII Всероссийская научно-практическая конференция «Перспективы развития математического образования в эпоху цифровой трансформации»
(г. Тверь, 2 – 4 апреля 2026 года)

Аксиоматическая теория множеств

Все математические теории можно рассматривать как расширения общей теории множеств. Я утверждаю, что на этом фундаменте можно построить всё здание сегодняшней математики.

Николя Бурбаки, 1949 год

Рассмотрим аксиомы ZFC — теории множеств Цермело–Френкеля из Jech T. J. Set theory. — Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003 (всего 9 аксиом).

Что такое множество?

Множество однозначно определяется набором составляющих его объектов.

Для любых x и A утверждение $x \in A$ имеет смысл и является истинным или ложным, и множество полностью определяется своими элементами.

Это определение равенства множеств представляет собой переформулировку первой аксиомы, *аксиомы объёмности*: если множества X и Y состоят из одних и тех же элементов, то $X = Y$.

Как задавать множества?

Перечислительный и описательный способы.

Перечислительный: *любое конечное множество существует*.

Существование любого конечного множества, за исключением пустого, может быть получено из двух аксиом: *аксиомы пары* и *аксиомы объединения*.

Аксиома пары (вторая): для любых a и b существует множество $\{a, b\}$.

Аксиома объединения (четвёртая): для любого множества X существует множество $\bigcup X$ — объединение всех множеств, которые принадлежат X.

Как задавать множества?

Описательный: для любого свойства P имеется множество $\{x \mid P(x)\}$.

Парадокс Рассела: множество $\{x \mid x \in x\}$ не может существовать.

Схема аксиом выделения (третья): если X — множество, P — свойство, то существует множество $\{u \in X \mid P(u)\}$.

Хотя бы одно множество существует: $\exists x(x = x)$.

Пустое множество $\{u \in x \mid u \neq u\}$, оно существует по аксиоме выделения и единственно по аксиоме объёмности.

Теоретико-множественные операции

$A \cup B$ существует по аксиоме пары и аксиоме объединения.

$A \cap B$, $A \setminus B$ существуют по аксиоме выделения.

Булеан (множество всех подмножеств) $\mathcal{P}(A)$ существует по аксиоме степени (пятая).

Упорядоченная пара $(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Декартово произведение $A \times B$ существует, поскольку оно может быть выделено из множества $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ указанием надлежащего свойства.

Натуральные числа

0 — пустое множество, $n + 1 = n \cup \{n\}$.
Чтобы определить каждое *конкретное* натуральное число, достаточно уже упомянутых аксиом.

Но чтобы постулировать существование натурального ряда как *единого целого*, нужны новые аксиомы.

Назовём множество *индуктивным*, если оно, во-первых, содержит пустое множество, и во-вторых, для всякого x, если оно содержит множество x, то оно содержит и множество $x \cup \{x\}$.
Аксиома бесконечности (шестая) утверждает, что существует индуктивное множество.

Аксиома выбора

Аксиома выбора (девятая): для каждого семейства S непустых множеств имеется функция выбора f (если $x \in S$, то $f(x) \in x$).

Её счётный вариант (для счётных S) используется постоянно:

- всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество
- объединение счётного семейства счётных множеств счётно
- определения непрерывной функции по Коши и по Гейне эквивалентны

Полная версия аксиомы выбора необходима в алгебре, топологии и функциональном анализе.

Аксиома замены

Аксиома замены (седьмая). Допустим, что A — множество, F — свойство пар множеств, причём для любого $x \in A$ существует не более одного такого y, что $F(x, y)$. Тогда существует множество $\{y \mid x \in A \wedge F(x, y)\}$.

F похоже на функцию.

Аксиома замены нужна, если *заранее неизвестно*, что F образует множество — иными словами, если область действия F слишком большая.

При наличии аксиомы замены можно вывести аксиому выделения.

Аксиома замены нужна там, где нужно иметь дело с громадными совокупностями (например, с ординалами).

Аксиома регулярности

Аксиома регулярности (восьмая). Пусть множество A непусто. Тогда существует такое $x \in A$, что $x \cap A$ пусто.
В частности, не существует такого множества x, что $x \in x$, не существует «циклов» вида $x \in y \in x$, $x \in y \in z \in x$.

Нам неизвестны *существенные* примеры применения аксиомы регулярности в «обычной» математике. Но аксиома регулярности оказывается полезной в метаматематике теории множеств.

Аксиома регулярности

Пример из «Математической энциклопедии». Упорядоченная пара (a, b) определена как $\{a, \{a, b\}\}$. Без аксиомы регулярности для такого определения не получится доказать основное свойство упорядоченных пар, ведь может оказаться, что $\{a, b\} \in a$.

При определении упорядоченной пары как $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ аксиома регулярности не нужна.

Аксиома регулярности

Пример из «Лекций по математической логике и теории алгоритмов», авторы — Н. К. Верещагин, А. Шень.

Определение ординала: транзитивное множество, каждый элемент которого транзитивен. Тогда аксиома регулярности требуется, чтобы показать фундированность порядка $\in$ на любом ординале. Применение аксиомы регулярности можно обойти, если определить ординал как транзитивное множество, на котором порядок $\in$ фундирован.

Спасибо за внимание!