Тверской государственный университет
Математический факультет
Задачи олимпиады Математический Олимп-2026

1. (1 балл) Британский математик Огастес де Морган жил в XIX веке. На вопрос о годе своего рождения он ответил: "В году x^2 мне исполнилось x лет". В каком году родился де Морган?

Решение. XIX век продолжался с 1801 по 1900 годы. Единственное натуральное число, квадрат которого попадает в промежуток $[1801, 1900]$ это 43. Действительно, $43^2 = 1849$, $42^2 = 1764$, $44^2 = 1936$. Это означает, что в 1849 году де Моргану было 43 года, следовательно, родился он в 1806 году, так как 1849-43=1806.

2. (2 балла) Найдите все действительные решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 1, \\ x^4 + y^4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Предположим, что $x < 0$. Тогда $x^3 < 0$ и из первого уравнения следует, что $y^3 > 1$. Поэтому $y > 1$, а значит и $y^4 > 1$, откуда следует, что второе уравнение системы выполняться не может. Следовательно $x \geq 0$. Из соображений симметрии получаем, что и $y \geq 0$. Предположим теперь, что $x > 1$. Тогда $x^3 > 1$ и из первого уравнения получаем, что $y^3 < 0$, что, как выяснилось, невозможно. Отсюда получаем, что $0 \leq x, y \leq 1$.

Предположим теперь, что $0 < x < 1$. Тогда получим из заданной системы уравнений.

$$1 = x^4 + y^4 = x^3 \cdot x + y^3 \cdot y < x^3 + y^3 \cdot y \leq x^3 + y^3 = 1, \quad \text{т.е. } 1 < 1,$$

что неверно. Следовательно для x остается два возможных значения: $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$. Для каждого из этих значений найдется подходящее значение y. Тем самым мы получили два решения системы $x_1 = 0, y_1 = 1$ и $x_2 = 1, y_2 = 0$.

3. (2 балла) Можно ли число 101010 представить в виде разности квадратов целых чисел?

Решение. Нет, нельзя. $m^2 - n^2 = (m - n)(m + n)$. Числа $m - n$ и $m + n$ имеют одинаковую четность, поэтому их произведение или нечетно (когда оба множителя нечетны), или делится на 4 (когда оба множителя четны). А число 101010 четно, но на 4 не делится.

4. (3 балла) Какое максимальное количество острых углов может иметь произвольный выпуклый n-угольник.

Решение.

Очевидно, что выпуклый n-угольник может иметь три острых угла. Например, таким свойством обладает любой остроугольный треугольник.

Пусть величины углов некоторого выпуклого n-угольника равны $\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n$ (в радианах). Очевидно, что $0 < \alpha_k < \pi$ для всех k. Как известно, сумма всех углов любого выпуклого n-угольника равна $\pi(n - 2)$. Таким образом,

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n = \pi(n - 2).$$

Отсюда получаем, что

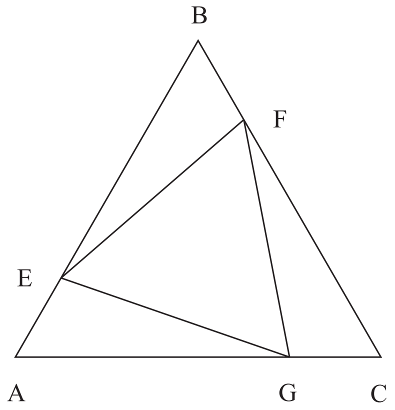
$$(\pi - \alpha_1) + (\pi - \alpha_2) + ... + (\pi - \alpha_n) = 2\pi, \qquad (*)$$

где $0 < \pi - \alpha_k < \pi$ для всех k.

Если бы у выпуклого n-угольника нашлось четыре или больше острых углов (для которых $0 < \alpha_k < \pi/2$), то для соответствующих четырех номеров k выполнялись бы оценки $\pi - \alpha_k > \pi/2$. Тогда в приведенной выше сумме (*) четыре соотвтетсвующих слагаемых составили бы величину, большую 2π, что противоречит правой части равенства (*).

Вывод: максимальное число острых углов у выпуклого n-угольника равно 3.

5. (3 балла) В правильный $\triangle ABC$ вписан правильный $\triangle EFG$, площадь которого равна половине площади $\triangle ABC$. Найдите отношение, в котором точка E делит отрезок AB.



Решение. Обозначим $AE = x, BE = y$ (см. рисунок). В силу симметрии $S_{AEG} = S_{BEF} = S_{CGF} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4} xy$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2}(x+y)^2 \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)^2$.

По условию задачи $S_{ABC} = 2\left(S_{AEG} + S_{BEF} + S_{CGF}\right)$. Поэтому справедливо следующее равенство

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(x+y)^2 = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot x \cdot y \cdot \sin(60^\circ) = \frac{3\sqrt{3}}{2} xy.$$

Преобразуем это выражение:

$$(x+y)^2 = 6xy,$$

$$x^2 + 2xy + y^2 = 6xy,$$

$$x^2 - 4xy + y^2 = 0.$$

Полученное соотношение можно рассматривать как квадратное уравнение относительно x.

$$x = \frac{1}{2}\left(4y \pm \sqrt{(4y)^2 - 4y^2}\right) = 2y \pm \sqrt{3} y.$$

Таким образом,

$$AE : BE = 2 \pm \sqrt{3}.$$